

УДК 621.73.143:669.14.018.8

Д-р техн. наук В. Ю. Ольшанецький, І. Ю. Кисільова  
Національний технічний університет, м. Запоріжжя

## ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА КРУТІННЯ ПРИЗМАТИЧНОГО БРУСУ З УРАХУВАННЯМ ДИСЛОКАЦІЙНОГО ВПЛИВУ

*Розглянуто варіаційну задачу крутіння пружно-пластичного призматичного бруса. Побудовано функціонал додаткової енергії, який враховує розподіл параметрів дислокаційної структури. Для хромистої сталі отримані рівняння, які визначають інтенсивність напружень та інтенсивність деформацій. Побудовано зони пластичного впливу.*

**Ключові слова:** крутіння, варіаційне рівняння, метод Рітца, розподіл густини дислокацій.

### Постановка проблеми

Дислокації є розповсюдженим елементом мікроструктури твердих деформованих тіл. Поряд з іншими дефектами кристалічної ґратки вони визначають пластичність і міцність твердих деформованих металевих матеріалів. У сучасних дослідженнях дислокаційні моделі використовуються для теоретичного опису багатьох явищ та процесів, які відбуваються в твердих тілах на макро- та мікро- рівнях під час пластичного деформування. Сукупність отриманих до теперішнього часу даних показує, що дислокації є істотною складовою структури реальних кристалів. Численні теоретичні та експериментальні дослідження показали суттєвий вплив дислокацій на властивості сталей та сплавів.

Останнім часом увагу науковців привертає проблема наведення «містків» між макровластивостями та па-

раметрами субмікроструктури, які характеризують поведінку твердих тіл під час пластичної деформації. У багатьох роботах (Работнов А. Н. [1], Смирнов Б. І. [2], Степанов Ю. Н. [3], А. Х. Коттрелл [4, 5] та ін.) показано, що тонка (зокрема дислокаційна) структура та її зміна у процесі обробки металу визначають його основні пластичні властивості при деформаційному формозмінненні (дислокаційна теорія Зегера та ін.). Зазвичай для оцінки впливу тонкої структури використовують підхід, при якому важливі параметри структури розглядаються як середні, хоча з практичної точки зору цінніше знати статистичні розподіли та динаміку їх змін. За динамічним підходом передусім розглядають розподіли різних параметрів тонкої структури (наприклад, дислокацій) і пов'язані з ними розподіли механічних властивостей. Можна констатувати, що на даний

час відсутні застосування стохастичного і одночасно динамічного підходу до аналізу процесів пластичного деформування твердих тіл та відсутні роботи з дослідження стохастичного зв'язку між механічними властивостями та параметрами дислокаційної структури. У роботах А. А. Ільюшина [6] зазначається перспективність і достовірність паралельного використання для рішення задач механіки деформівного твердого тіла експерименту та розрахункових робіт. Тому визначення характеру розподілу густини дислокацій проведено на підставі експериментальних досліджень.

Для опису низки явищ при деформуванні твердих тіл із дислокаціями певну роль грають нелінійні ефекти. У цьому зв'язку викликає інтерес з'ясування впливу розподілу густини дислокацій на параметри розподілів напружень та деформацій при крутінні призматичного бруса, які в свою чергу, визначають надійність різного типу конструкцій.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вагомий внесок у розвиток теорії дислокацій зробили Дж. Коттрелл [4,5], Дж. Хирт, Дж. Лоте [7], К. Теодосіу [8], І. Фелтам [9], А. Бухвалов [10], та інші. Розв'язання задач про дислокації у нелінійній постановці найдено Л. М.Зубовим [11 та ін.], виконаних у галузі механіки з урахуванням дислокацій присвячено роботи [12, 13]. Однак, у всіх цих роботах не враховується характер та закони розподілу дислокацій у твердому тілі.

### Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми

На даний час відсутні застосування стохастичного (динамічного) підходу до аналізу процесів пластичного деформування та відсутні роботи з урахування розподілів дислокацій при дослідженні крутіння твердих тіл.

### Формулювання цілей

Метою роботи є дослідження задачі крутіння пружно-пластичного призматичного бруса довільного перерізу з урахуванням розподілів дислокаційної структури.

### Виклад матеріалу дослідження

Розглянемо призматичний скручений брус довільного перерізу, задній торець якого закріплено так, що лінійні переміщення всіх його точок у напрямках осей  $y$  та  $x$  дорівнюють нулю, а передній торець є вільним (рис. 1).

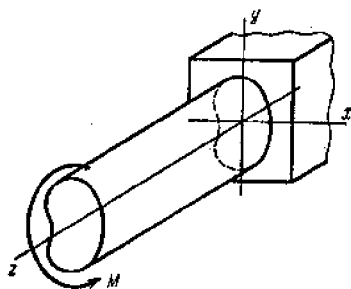


Рис. 1. Скручений брус

Припустимо, що тверде тіло, яке знаходиться в рівновазі, займає об'єм  $V$ , обмежений поверхнею  $S$ . На частині поверхні задано поверхневі сили  $X_i$ , а на іншій – переміщення  $u_i$ .

Для дійсного напруженого стану маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} &= 0, \\ \sigma_{ij} n_j &= X_{vi} \end{aligned} \quad (1)$$

Інші напружені стани, близькі до дійсного, можна охарактеризувати рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) &= 0, \\ (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) n_j &= X_{vi} + \delta X_{vi}. \end{aligned} \quad (2)$$

З рівнянь (1) та (2) витікає, що варіації напружень  $\delta \sigma_i$  та варіації зовнішніх сил  $\delta X_{ni}$  утворюють врівноважену систему. Тому робота цих внутрішніх та зовнішніх сил на можливому для тіла переміщенні дорівнює нулю. Візьмемо як можливі дійсні переміщення  $u_i$ . Тоді будемо мати

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int u_i \delta X_{ni} dS. \quad (3)$$

Перетворимо підінтегральний вираз у правій частині рівняння (3), використовуючи розкладення тензорів напружень на шаровий тензор та девіатор, і отримаємо

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} &= \delta s_{ij} e_{ij} + 3\varepsilon_0 \delta \sigma_0 = \\ \delta s_{ij} \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij} + 3\varepsilon_0 \delta \sigma_0 &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{1}{2} \delta \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right) + \frac{\sigma_0}{K} \delta \sigma_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Додаткова робота для всього тіла дорівнює

$$R = \int_V R dV.$$

Також зауважимо, що  $\int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \delta \hat{R}$ .

Перетворимо тепер праву частину варіаційного рівняння (3).

На вільній базі  $x=l$  маємо  $u_x = \omega y, u_y = \omega x$ . Тоді, якщо ввести функцію напружень  $F$ , з урахуванням  $\tau_{yz} = -F_x, \tau_{xz} = F_y$ , то

$$\int u_i \delta X_i dS = -\omega \int_S \left( y \frac{\partial}{\partial y} \delta F + x \frac{\partial}{\partial x} \delta F \right) dx dy. \quad (5)$$

де  $\omega$  – повний кут закручування.

Значимо, що

$$\int_S \left( y \frac{\partial}{\partial y} \delta F + x \frac{\partial}{\partial x} \delta F \right) dx dy = \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x \delta F) + \frac{\partial}{\partial y} (y \delta F) \right] dx dy + 2 \int_S \delta F dx dy. \quad (6)$$

Далі з (5) та (6) знайдемо варіацію роботи зовнішніх сил

$$\int u_i \delta X_i dS = -\omega \int_S \left( \frac{\partial}{\partial y} (x \delta F) + \frac{\partial}{\partial x} (y \delta F) \right) dx dy + 2\omega \int_S \delta F dx dy. \quad (7)$$

Перший інтеграл в правій частині виразу (7) перетворимо за формулою Гріна [17].

$$\int_S \left( \frac{\partial}{\partial y} (x \delta F) + \frac{\partial}{\partial x} (y \delta F) \right) dx dy = \oint_{\gamma_0} \delta F (x dy - y dx),$$

тоді варіація робіт зовнішніх сил буде дорівнювати

$$\int u_i \delta X_i dS = -\omega \oint_{\gamma_0} \delta F (x dy - y dx) + 2\omega \int_S \delta F dx dy. \quad (8)$$

(тут  $\gamma_0$  – обмежувальний контур).

Остаточно варіаційне рівняння (5) буде мати вигляд

$$\delta \int_S \left[ \int_0^T \varepsilon_i d\sigma_i - 2\omega F \right] dx dy = -\omega \oint_{\gamma_0} \delta F (x dy - y dx). \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) можна отримати з використанням ітеративного методу Рітца.

Нехай поперечний переріз призматичного бруса уявляє собою багатозв'язну область, що обмежена контуром  $\gamma_0$  та містить підобласті, в яких розташовані дислокації (рис. 2).

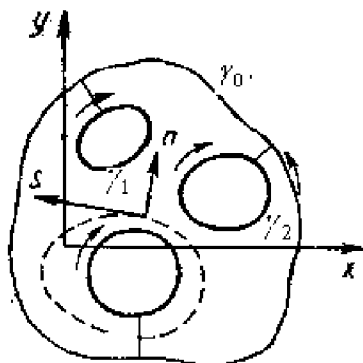


Рис. 2. Багатозв'язна область

Вказані підобласті обмежені контурами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . При цьому функція напружень приймає на контурах різні постійні значення [15]  $F_0, F_1, \dots, F_n$ .

Одна з постійних може бути задана довільно, нехай  $F_0 = 0$ . Класична теорема про циркуляцію [15] для суцільного бруса задовільняє рівнянню Пуассона для функції  $F$ , а також забезпечує однозначність осьових переміщень  $w$ . У варіаційній постановці це означає однозначність правої частини рівняння (3), яка може мати багатозначність. Багатозначність можна усунути, якщо перетворити область в однозв'язну шляхом виконання розрізів  $r_i^+, r_i^-$ . За теоремою Коші маємо для криволінійного інтеграла в (8):

$$\oint_{\gamma_0} \delta F (x dy - y dx) = -\omega \oint_{\gamma_0} \delta F (x dy - y dx) - \sum_{k=1}^n \left[ \int_{+} - \int_{-} \right]. \quad (10)$$

Тут інтеграли  $\int_{+}$  та  $\int_{-}$  на протилежних берегах

розрізу відрізняються на постійну величину  $C_k$ , що дорівнює вектору Бюргерса  $b_k$  дислокації, які розташовані в підобластях. У зв'язку з цим криволінійний інтеграл (10) набуває вигляду

$$\oint_{\gamma_0} \delta F (x dy - y dx) = \sum_{k=1}^n (2S_k + b_k) \delta F. \quad (11)$$

а варіаційне рівняння (11) у випадку ізольованих дислокацій матиме вигляд

$$\delta \int_S \left[ \int_0^T \varepsilon_i d\sigma_i - 2\omega F \right] dx dy = \sum_{k=1}^n (2S_k + b_k) \delta F. \quad (12)$$

де  $S_k$  – площа  $k$ -ї області.

Рівності (11) та (12) можна розглядати як узагальнення теорема про циркуляцію дотичних напружень у варіаційній постановці при наявності ізольованих дислокацій.

Перейдемо тепер від бруса із багатозв'язним перерізом до випадку однозв'язного переріза із дискретним набором дислокацій. З цією метою будемо зменшувати діаметри контурів та стягувати їх у деякій точці  $M_k$ . При цьому довжина вектора Бюргерса  $b_k$  при такому переході стає незмінною. Остаточно постійна  $F_k$  співпадає із функцією напружень  $F(M_k)$  і варіаційне рівняння запишемо так:

$$\delta \int_S \left[ \int_0^T \varepsilon_i d\sigma_i - 2\omega F \right] dx dy = \int_S B \cdot \delta F dx dy,$$

де 
$$B = \sum_{k=1}^n b_k \delta(x - x_k) \delta(y - y_k). \quad (13)$$

Припустимо, що кількість дислокацій є великою. У випадку безперервного розташування дислокацій,

замінемо узагальнену функцію на звичайну. У результаті варіаційне рівняння в задачі крутіння пружно-пластичного бруса, в якому враховується густина дислокацій у матеріалі, буде мати вигляд

$$\delta \int_S \left[ \int_0^T \varepsilon_i d\sigma_i - 2\omega F - \alpha \rho F \right] dx dy = 0, \quad (14)$$

де  $\varepsilon_i$  – інтенсивність деформацій,  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень,  $\rho$  – густина дислокацій, яка в загальному випадку є випадковою величиною,  $\alpha$  – деякий коефіцієнт.

Зазначимо, що варіаційне рівняння (14) формально переходить у відоме рівняння крутіння [16] при  $\rho = 0$ , однак граничний перехід  $\rho \rightarrow 0$  тут є неможливим, внаслідок ідеальності (бездефектності) матеріалу в цьому випадку. Оскільки в задачі мова йде про пружно-пластичні деформації, робоча ділянка кривої «границя текучості-густина дислокацій» обрана праворуч від мінімуму [17]. Якщо припустити, що рівняння в [16] отримано при деякому середньому значенні густини  $m_\rho$ , доцільно обрати  $\rho$  в рівнянні (14) центрованою випадковою величиною

$$\rho^\circ = \frac{\rho - m_\rho}{\sigma_\rho},$$

де  $\sigma_\rho$  – стандарт випадкової величини.

Тепер перепишемо варіаційне рівняння так

$$\delta \int_S \left[ \int_0^T \varepsilon_i d\sigma_i - F(2\omega + \alpha \rho^\circ) \right] dx dy = 0, \quad (15)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт розмірності та порядку.

Далі будемо враховувати, що густина дислокацій (а також і функція  $B(x, y)$ ), є фіксованою в даному перерізі, і також є випадковою в інших перерізах та зразках виробу.

Якщо закон розподілу  $f(\rho)$  випадкової величини  $\rho$  є відомим, то для центрованої величини  $\rho^\circ$  можуть бути знайдені границі вимірювання  $\rho_1^\circ < \rho^\circ < \rho_2^\circ$ , з яких у цьому дослідженні найбільший інтерес має нижня границя  $\rho_1^\circ$ , оскільки при  $\rho^\circ = \rho_1^\circ$  спостерігається найбільше збільшення площі областей пластичності, яке обумовлене впливом дислокацій. Розподіли густини дислокацій феритних сталей отримано в [18–20].

Застосуємо варіаційний метод розв'язання екстремальних задач із неквадратичними функціоналами для випадку крутіння призматичного бруса. Розв'язок цієї задачі дає значення напружень по перерізу призматичного бруса за умов розподілу дислокацій по його поперечні. Варіаційне рівняння крутіння призматичного бруса (поперечний переріз-квадрат, сторона –  $2a$ ) з урахуванням густини дислокацій матеріалу бруса має

вигляд

$$\delta \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 f(\lambda) \lambda d\lambda - 2a\omega F - \beta F \right] d\xi d\eta \right\} = 0, \quad (16)$$

де  $\xi, \eta$  – безвимірні декартові координати ( $x = a\xi, y = a\eta$ ),  $\omega$  – кут крутіння на одиницю довжини,  $\beta$  – функція густини дислокацій,  $F$  – шукана функція напружень, через яку визначаються компоненти дотичного напруження:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial \xi}.$$

Інтенсивність дотичних напружень розраховується за формулою

$$T = +\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2} \quad (17)$$

і пов'язана із інтенсивністю деформацій зсуву  $\Gamma$  залежністю

$$\Gamma = f(T)\Gamma \quad \text{або} \quad T = g(\Gamma)\Gamma.$$

На контурі бруса маємо  $F = 0$ .

Оцінимо залежність інтенсивності дотичних напружень для маловуглецевої сталі 03X18TBч. У загальному випадку залежність інтенсивності напружень від зсуву має вигляд

$$T = \begin{cases} G_0 \Gamma & \text{при } \Gamma \leq K_1 \\ (b_1 + b_2 \Gamma) & \text{при } \Gamma \geq K_1, \end{cases} \quad (18)$$

де  $K_1, b_1, b_2$  – коефіцієнти.

Залежність між інтенсивністю напружень  $T$  та інтенсивністю деформацій зсуву  $\Gamma$  складається з двох лінійних ділянок.

Представимо варіаційне рівняння у вигляді

$$\delta \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{1}{G_k} \cdot \frac{T^2}{2} - 2a\omega F - \beta F \right] d\xi d\eta \right\} = 0$$

і будемо шукати розв'язання у формі

$$F = C_1 F_1 + C_2 F_2,$$

де  $C_1, C_2$  – довільні постійні, а

$$F_1 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1), \\ F_2 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)(\xi^2 + \eta^2).$$

Рішення задачі отримуємо, застосовуючи ітеративний метод Рітца [16].

В нульовому наближенні покладемо  $G_k = \text{const} = G_0$ , та розв'яжемо лінійну задачу.

В  $k$ -му наближенні маємо

$$G_k = G_{k-1} \frac{T_{k-1}^*}{T_{k-1}}$$

де  $T_{k-1}^*$  обчислюється за знайденим значенням  $T_{k-1}$  та  $G_{k-1}$  за формулою

$$T_{k-1}^* = \frac{1}{G_{k-1}} T_{k-1}$$

Обмежимося проведенням розрахунку для випадку  $a\omega = 0,015$ .

Коефіцієнти  $C_1, C_2$  визначимо із рівнянь:

$$\begin{cases} C_1^{(k)} A_{11}^{(k)} + C_2^{(k)} A_{12}^{(k)} = Q_1; \\ C_1^{(k)} A_{12}^{(k)} + C_2^{(k)} A_{22}^{(k)} = Q_2. \end{cases} \quad (20)$$

Інтеграл  $A_{ij}^{(k)}$  знаходимо чисельними методами, наприклад, методом Гауса [21]. Значення  $F$  в точках Гауса фіксовані, змінюються в залежності від  $k$  лише значення  $G_k$ .

Для чотирьох точок Гауса в проміжку 0,1 маємо

$$A_{ij}^{(k)} = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 B_m B_n \frac{F_{ij}(\xi_m, \eta_n)}{G_k(\xi_m, \eta_n)}, \quad (21)$$

де  $\xi_m, \eta_n, B_m, B_n$  – відомі значення абсцис та ваг ординат у формулі Гауса.

Як показано в роботі [21] розрахунок коефіцієнтів  $C_1, C_2$  у такий спосіб забезпечує достатню точність та стійкість розрахунків.

Використовуючи значення постійних  $C_1, C_2$ , можна обчислити компоненти та інтенсивність напружень  $T$ . Визначимо вид та параметри залежності між інтенсивністю напружень  $T$  та інтенсивністю деформацій зсуву  $\Gamma$  для різних режимів обробки хромистої сталі 03X18ТБч.

Зокрема, для режиму обробки цієї сталі № 1 (гарячекатаний підкат + деформація 20% + нагрів 780 °С + холодне прокатування + рекристалізаційна обробка 900 °С), залежність (18) матиме вигляд:

$$T_1 = \begin{cases} G_0 \Gamma & \text{при } \Gamma \leq 0,0067 \\ (2910 + 22 \cdot 10^3 \Gamma) \text{ кг/см}^2 & \text{при } \Gamma_{k-1} \geq 0,0067. \end{cases}$$

Для інших режимів обробки залежності мають аналогічну форму.

Враховуючи випадковий характер густини дислокацій та відповідної границі текучості матеріалу кри-

ва залежності  $T(\Gamma)$  є випадковим процесом. У цьому дослідженні обмежимося розглядом трьохсигмових інтервалів кривої зміцнення.

Для оцінки та визначення пластичних зон при крутінні для брусів із сталі 03X8ТБч використано значення границі текучості, результати оцінки середньої густини дислокацій (з урахуванням анізотропії [22, 23]) та знайдено границі пластичних зон (рис. 3) (1, 2, 3, 4 – відповідно режими обробки хромистої сталі № 1, № 2, № 3, № 4).

Розрахунки показали, що врахування впливу дислокаційної структури збільшує розміри пластичних зон приблизно на 15%.

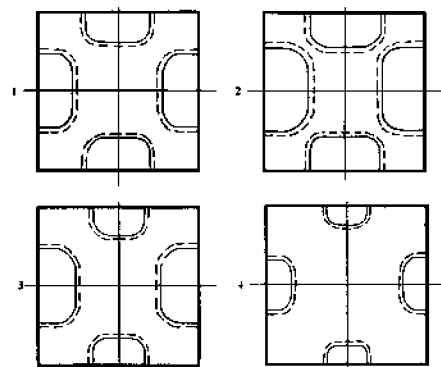


Рис. 3. Границі пластичних зон

### Висновки

У границях теорії пружності досліджено задачу Сен-Венана про рівновагу призматичного бруса, навантаженого крутячим моментом, і який містить дислокації. Найдено чисельні розв'язки задач про рівновагу стержней, які містять дислокації, та про дислокації у перерізі прямокутного стержня (брусу).

Отримано розв'язок задачі про рівновагу стержней, що містять дислокації. Визначено пластичні зони в прямокутному стержні з корозійностійкої хромистої сталі в різному структурному стані.

### Список літератури

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Машиностроение, 1988. – 712 с.
2. Смирнов Б. И. Дислокационная структура и упрочнение металлов / Б. И. Смирнов – Л. : Наука, 1981. – 235 с.
3. Степанов Ю. О распределении плотности краевых дислокаций в металлическом образце при возникновении стоячей волны / Ю. Степанов, В. Алехин // Металлы. – 2000. – № 2. – С. 97–101.
4. Коттрелл А. Х. Теория дислокаций / А. Х. Коттрелл ; пер. с англ. – М. : Мир, 1969. – 96 с.
5. Коттрелл А. Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах / А. Х. Коттрелл ; пер. с англ. – М. : Металлургия, 1958. – 264 с.
6. Ильющин А. А. Пластичность. Основы математичес-

- кой теории / Ильюшин А. А. – М. : Изд-во академии наук СССР, 1963. – 272 с.
7. Хирт Дж. П. Теория дислокаций / Дж. П. Хирт, И. Лоте ; пер. с нем. – М. : Атомиздат, 1972. – 599 с.
  8. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах / Теодосиу К. – М. : Мир, 1985. – 352 с.
  9. Фелтам И. Деформация и прочность материалов / Фелтам И. ; пер.с англ. – М. : Металлургия, 1968. – 250 с.
  10. Бухвалов А. Б. Феноменологическое описание упрочнения железа при деформации / А. Б. Бухвалов, Н. Ф. Вильданова, Э. С. Горькунов // Физика металлов и металлосведение. – 1999. – № 1. – С. 104–111.
  11. Зубов Л. Теория дислокаций и дисклинаций в упругих пластинах вращения / Л. Зубов, А. Столповский // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72. – вып. 6. – С. 996–1013.
  12. Губа А. В. Теория кручения призматических упругих тел, содержащих дислокации : дис. ... кандидата физ.-мат. наук : 01.02.04 / Губа Александр Владимирович. – Ростов- на-Дону, 2008. – 105 с.
  13. Смолин И. Ю. Моделирование деформации и разрушения материалов с явным и неявным учетом их структуры : дис. .... доктора физ.-мат. наук : 01.02.04 / Смолин Игорь Юрьевич. – Томск, 2008. – 235 с.
  14. Фихтенгольц Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г. – М. : Наука, 1966. – Т. II. – 800 с.
  15. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
  16. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластических деформаций металлов / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.
  17. Гуляев А. И. Металловедение / А. И. Гуляев. – М. : Металлургия, 1978. – 646 с.
  18. Ольшанецкий В. Ю. Імовірнісні форми розподілу густини дислокацій в сталі / В. Ю. Ольшанецкий, І. Ю. Нагорна // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2003. – № 5. – С. 96–100.
  19. Ольшанецкий В. Ю. Закон розподілу густини дислокацій у кристалічній структурі корозостійкої сталі / В. Ю. Ольшанецкий, І. Ю. Нагорна // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2002. – № 3. – С. 104–106.
  20. Кисилева І. Ю. О возможности экспериментального подтверждения распределения плотности дислокаций вейбулловского типа в ОЦК-металлах / И. Ю. Кисилева, В. Е. Ольшанецкий // Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2007. – № 2. – С. 53–55.
  21. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
  22. Нагорная И. Ю. Влияние анизотропии кристаллитов на штампуемость текстурированной стали / И. Ю. Нагорная, В. Е. Ольшанецкий // Вісник Запорізького державного університету. – 2001. – № 2. – С. 110–113.
  23. Нагорная И. Ю. Влияние анизотропии на штампуемость текстурированной коррозионностойкой стали / Нагорная И. Ю. // Вісник Черкаського Державного технологічного університету. – 2002. – № 2. – С. 105–109.

Одержано 20.06.2011

**Ольшанецкий В.Е., Кисилева И.Ю. Вариационная задача кручения призматического бруса с учетом дислокационного влияния**

*Рассмотрена вариационная задача кручения упруго-пластического призматического бруса. Построен функционал дополнительной энергии, который учитывает распределение параметров дислокационной структуры. Для хромистой стали получены уравнения, которые определяют интенсивность напряжений и интенсивность деформаций. Построены зоны пластического влияния.*

**Ключевые слова:** *кручение, вариационное уравнение, метод Рунца, распределение плотности дислокаций.*

**Ol'shanetskiy V., Kysilova I. Variational problem of twisted prism considering dislocation influence**

*Variational problem of twisted prism considering dislocation influence has been examined. The complementary energy functional considering dislocation density distribution has been obtained. Equation determined tension and deformation intensity for the chromium steel has been obtained. Zones of plastic influence has been constructed.*

**Key words:** *torsion, variational equation, Ritz method, dislocation density distribution.*