МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. І. ДУБРОВІН

СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ

1998

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. І. ДУБРОВІН

СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ

Навчальний посібник

1998

УДК 519.2

В.І. Дубровін
Д79 Статистичні критерії: навчальний посібник. – Запоріжжя, 1998. – 40 с.

ISBN

Наведена методика використання статистичної перевірки гіпотез при дослідженні процесів та об'єктів. Навчальний посібник може використовуватися інженерами та студентами різних спеціальностей для придбання практичних навиків по способам оцінки узгодженості розподілу, який вивчається, з нормальним і побудови експериментальної функції розподілу.

Іл. 3 Табл. 10 Бібліогр.: 23 назви

Рецензенти: Н. К. Максішко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри "Економічна кібернетика" (Запорізький державний університет),
В. М. Порохня, доктор технічних наук, професор, завідуючий кафедри математичних методів економіки та інформаційних технологій (Запорізька державна інженерна академія),
А. Б. Ройтман, доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики (Запорізький державний університет).

Рекомендовано вченою радою Запорізького державного технічного університету Міністерства освіти України, протокол № 5 від 1 грудня 1997р.

ISBN

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначено для використання при виконанні лабораторних робіт з дисципліни “Обробка та інтерпретація соціально-економічної інформації” і має метою:

– вивчити методику статистичної перевірки гіпотез;

– придбання практичних навичок по способам оцінки узгодженості розподілу, який вивчається, з нормальним і побудови експериментальної функції розподілу (гістограми й полігона).

Питанням обробки та інтерпретації інформації у останній час приділяється все більше уваги. Якщо раніше ці методи розглядалися, головним чином, як інструмент наукових досліджень, то тепер методи обробки інформації повинні стати типовим інструментом планових, аналітичних, маркетингових відділів промислових підприємств та торгових організацій, банків та страхових компаній, медичних та інших установ.

Цим пояснюється особливе місце дисципліни “Обробка та інтерпретація соціально-економічної інформації” у навчальному плані студентів спеціальності “Програмне забезпечення обчислювальної техніки та автоматизованих систем”.

Необхідно сказати, що, хоч статистичні пакети для ПЕОМ різко спростили застосування методів обробки інформації, для повноцінного їх використання користувачі повинні володіти певною підготовкою: розуміти, у яких ситуаціях можна використовувати різні методи, знати їх властивості, вміти інтерпретувати результати. Навчальний посібник надає можливість студентам придбати даний рівень підготовки.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Статистична гіпотеза

Часто необхідно знати закон розподілу генеральної сукупності. Якщо він невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вид (назвемо його *A*), висують гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом *A*. Таким чином, в цій гіпотезі йдеться про вид передбачуваного розподілу.

Можливий випадок, коли закон розподілу відомий, а його параметри невідомі. Якщо є підстави припустити, що невідомий параметр Q дорівнює певному значенню Q_0, висують гіпотезу: $Q= Q_0$. Таким чином, в цій гіпотезі йдеться про передбачувану величину параметру одного відомого розподілу.

Можливі і інші гіпотези: про рівність параметрів двох або декількох розподілів, про незалежність вибірок і багато інших.

Статистичною називають гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів.

Наприклад, статистичними будуть гіпотези: генеральна сукупність розподілена за законом Пуасона, дисперсії двох нормальних сукупностей рівні між собою.

У першій гіпотезі зроблено припущення про вид невідомого розподілу, у другій – про параметри двох відомих розподілів.

Поряд з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, суперечну їй. Якщо висунута гіпотеза буде відкинута, має місце суперечна гіпотеза. По цій причині ці гіпотези необхідно розрізняти.

Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу H_0.

Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу H_1, суперечну нульовій.

Наприклад, якщо нульова гіпотеза полягає в припущенні, що математичне очікування a нормального розподілу дорівнює 10, то конкуруюча гіпотеза H_1 може полягати в припущенні, що $a\neq 10$. Стисло це записують так: H_0: $a=10;$ H_1: $a\neq 10.$

1.2 Помилки першого та другого роду. Рівень значимості

Висунута гіпотеза може бути правильною чи неправильною, тому виникає необхідність перевірити її. Оскільки перевірку виробляють статистичними засобами, її називають статистичною. В підсумку статистичної перевірки гіпотези в двох випадках може бути прийнято неправильне рішення, тобто можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна гіпотеза.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Правильне рішення може бути прийнято також в двох випадках: гіпотеза приймається, причому і в дійсності вона правильна; гіпотеза відкидається, причому і в дійсності вона неправильна.

Вірні рішення й типи помилок при перевірці статистичних гіпотез наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Статистичне рішення	Фактична оцінка нульовий гіпотези	
	Вірно	Невірно
Прийняти нульову гіпотезу	Правильне рішення	Помилка другого роду
Відкинути нульову гіпотезу	Помилка першого роду	Правильне рішення

Імовірність зробити помилку першого роду заведено позначати q. Її називають ***рівнем значимості***. Найбільш часто рівень значимості приймають рівним 0.05 або 0.01. Якщо, наприклад, прийнятий рівень значимості, рівний 0.05, то це означає, що в п’яти випадках зі ста ми ризикуємо припустити помилку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

1.3 Ступінь свободи параметру

Ступінь свободи **f** якого-небудь параметру визначають кількістю дослідів, за якими розраховують даний параметр, за лишком кількості констант, знайдених за цими дослідами незалежно одна від одної.

Поняття ступеню свободи можна пояснити також на прикладі лінійних алгебраїчних рівнянь. Припустимо, ми маємо систему з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, рішення такої системи буде однозначним, тобто ця система не буде мати жодного ступеню свободи. Але якщо для n невідомих змінних є N рівнянь, то така система рівнянь буде мати $f=N-n$ ступенів свободи.

При обчисленні незміщеної оцінки дисперсії

$$S^2\{x\} = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \overline{x})^2$$

кількість ступенів свободи $f=N-n$, так як, щоб розрахувати $S^2\{x\}$, необхідно обчислити спочатку середнє значення $\overline{x}$, тобто одну константу.

1.4 Критична область. Область прийняття гіпотези

Для перевірки нульової гіпотези використають спеціально підібрану випадкову величину, точний або близький розподіл якої відомий. Її позначають t, якщо вона розподілена за законом Стьюдента, χ^2 – за законом "хі квадрат", F – за законом Фішера, G – за законом Кохрена (в різноманітних літературних джерелах можливі інші позначення). Оскільки в даному розділі вид розподілу не враховується, позначимо цю величину K.

Статистичним критерієм (або просто критерієм) будемо називати випадкову величину K, що служить для перевірки нульової гіпотези.

Наприклад, якщо перевіряють гіпотезу про рівність дисперсій двох генеральних сукупностей, то за критерій K приймають відношення незміщених оцінок дисперсій:

$$K = F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Ця величина випадкова, тому що в різних дослідах оцінки дисперсії будуть приймати різні, наперед невідомі значення, і розподілена за законом Фішера.

Для перевірки гіпотези за даними вибірки обчислюють частинні значення величин, які входять до критерію, і таким чином одержують частинне значення критерію (яке спостерігається).

Значенням, яке спостерігається, ($K_{спос}$) називають значення критерію, обчислене за вибірками.

Наприклад, якщо за двома вибірками, здобутими з нормальних сукупностей, знайдені незміщені оцінки дисперсій $S_1^2 = 20$ і $S_2^2 = 5$, то значення критерію, яке спостерігається

$$K_{спос} = F_{спос} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{20}{5} = 4.$$

Після вибору певного критерію множину всіх його можливих значень розбивають на дві підмножини, які не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких нульова гіпотеза відкидається, а інша – при яких вона приймається.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значень критерію, при яких гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез можна сформулювати так: якщо значення критерію, яке спотерігається, належить критичній області, – гіпотезу відкидають, якщо значення критерію, яке спостерігається, належить області прийняття гіпотези, – гіпотезу приймають.

Оскільки критерій K – одновимірна випадкова величина, всі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому критична область і область прийняття гіпотези також є інтервалами, і, отже, існують точки, які їх поділяють.

Критичними точками $\boldsymbol{K_{кр}}$ називають точки, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Розрізняють односторонню (правосторонню та лівосторонню) та двосторонню критичні області.

Правосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівністю $K > K_{кр}$, де $K_{кр}$ – додатне число (рис. 1.1, а).

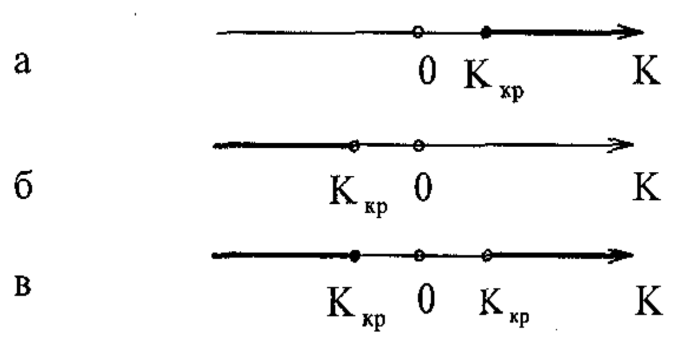

Рисунок 1.1 – Критичні області

Лівосторонньою називають критичну область, що визначається нерівністю $K < K_{кр}$, де $K_{кр}$ – від’ємне число (рис. 1.1, б).

Односторонньою називають правосторонню або лівосторонню критичну область.

Двосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівностями $K < K_1$, $K > K_2$, де $K_2 > K_1$. Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, двостороння критична область визначається нерівностями (в припущенні, що $K_{кр} > 0$) $K < -K_{кр}$, $K > K_{кр}$ або рівносильною нерівністю $|K| > K_{кр}$ (рис. 1.1, в).

Знаходження критичної області почнемо з правосторонньої критичної області, яка визначається нерівністю $K > K_{кр}$, де $K_{кр} > 0$. Для відшукання правосторонньою критичної області достатньо знайти критичну точку. З цією метою задаються достатньо малою імовірністю – рівнем значимості q. Потім шукають критичну точку $K_{кр}$, виходячи з вимоги, щоб за умови справедливості нульової гіпотези імовірність того, що критерій K прийме значення, більше $K_{кр}$ (тобто буде зроблена помилка першого роду), дорівнювала прийнятому рівню значимості

$$P(К > К_{кр}) = q. \quad (1)$$

Для кожного критерію є відповідні таблиці, за якими знаходять критичну точку, яка задовольняє цій вимозі.

Після цього обчислюють значення критерію, яке спостерігається, і, якщо виявиться, що $K_{спос} > K_{кр}$, то нульову гіпотезу відкидають; якщо $K_{спос} < K_{кр}$, то немає підстав для того, щоб відкинути нульову гіпотезу.

Значення критерію, яке спостерігається, може виявитися більшим $K_{кр}$ не тільки тому, що нульова гіпотеза хибна, але і з інших причин (малий обсяг вибірки, недоліки методики експерименту). У цьому випадку, відкинувши правильну нульову гіпотезу, роблять помилку першого роду. Імовірність цієї помилки дорівнює рівню значимості q, тобто, виконуючи вимогу (1), ми з імовірністю q ризикуємо зробити помилку першого роду.

Нехай нульова гіпотеза прийнята; помилково думати, що тим самим вона доведена. Справді, відомо, що один приклад, який підтверджує справедливість деякого загального твердження, ще не доказує його. Тому більш правильно стверджувати, що дані спостережень узгоджується з нульовою гіпотезою і, отже, не дають підстав її відкинути. На практиці для більшої впевненості прийняття гіпотези її перевіряють іншими способами або повторюють експеримент, збільшивши обсяг вибірки.

Відкидають гіпотезу більш категорично, ніж приймають, тому що достатньо навести один приклад, що суперечить деякому загальному твердженню, щоб це твердження спростувати. Якщо виявилося, що значення критерію, яке спостерігається, належить до критичної області, то цей факт служить прикладом, який суперечить нульовій гіпотезі, що дозволяє її відхилити.

Відшукування лівосторонньої і двосторонньої критичних областей зводиться (так же, як і для правосторонньої) до находження відповідних критичних точок. Лівостороння критична область визначається нерівністю $K < K_{кр}$ $(K_{кр} < 0)$. Критичну точку знаходять на підставі вимоги, щоб при справедливості нульовий гіпотези імовірність того, що критерій прийме значення, менше $K_{кр}$, дорівнювала прийнятому рівню значимості $P(K < K_{кр}) = q$.

Двостороння критична область визначається нерівністю $K < K_1$, $K>K_2$. Критичні точки знаходять, виходячи з вимог, щоб при справедливості нульовий гіпотези сума імовірностей того, що критерій прийме значення, менше K_1 або більше K_2, дорівнювала прийнятому рівню значимості

$$P(K < K_1) + P(K > K_2) = q. \qquad (2)$$

В цьому випадку критичні точки можуть бути вибрані незлiченною множиною способів. Якщо розподіл критерію симетричний відносно нуля і є підстави вибрати симетричні відносно нуля критичні точки $-K_{кр}$ і $K_{кр}$ $(K_{кр} > 0)$, то $P(K < K_{кр}) = P(K > K_{кр})$.

Враховуючи (2), отримаємо $P(K > K_{кр}) = \dfrac{q}{2}$.

Останнє співвідношення служить для пошуку критичних точок двосторонньої критичної області. Критичні точки знаходять за відповідними таблицями.

В наступних розділах розглянуті критерії, які найчастіше застосовуються. Ці критерії дозволяють робити статистичні висновки про властивості параметрів генеральної сукупності з прийнятим рівнем значимості на підставі використання інформації, що міститься в обмежених вибірках.

1.5 Критерій Стьюдента

t-критерій Стьюдента застосовується, коли необхідно зробити статистичний висновок, чи дорівнює математичне очікування $M\{x\}$ генеральної сукупності деякому передбачуваному значенню C або коли вимагається побудувати довірчий інтервал для $M\{x\}$. Виявляється, що ***випадкова величина t*** (при незалежних спостереженнях) ***розподілена за законом Стьюдента, якщо x розподілена нормально:***

$$t = \sqrt{N}\,\frac{\overline{x} - M\{x\}}{S\{x\}} = \frac{\overline{x} - M\{x\}}{S\{\overline{x}\}} \qquad (3)$$

де N - загальне число спостережень (обсяг вибірки); $\overline{x}$ - середнє арифметичне випадкової змінної x; $S\{x\}$, $S\{\overline{x}\}$ - середньоквадратичне відхилення, відповідно, одиничних значень x та середнього арифметичного $\overline{x}$.

На рис. 1.2 показані криві диференціального закону розподілу $\varphi(t)$ для різних ступенів свободи $f=N-1$, за якими обчислюють незміщену оцінку дисперсії $S^2\{x\}$. При порівняно невеликих N крива $\varphi(t)$ більш положиста, ніж нормальний закон розподілу $\varphi(x)$. При $N\to\infty$ крива $\varphi(t)$ наближається до кривої нормованого нормального розподілу. З рис. 1.2 видно, що *t*-розподіл симетричний відносно $t=0$, тому в таблицях, де дані критичні значення $t_{кр.}= t_{q,f}$ для прийнятого рівня значимості q і наявної кількості ступенів свободи f, задаються тільки додатні $t_{кр}$.

Якщо при розрахунку t за формулою (3) при підстановці до неї замість $M\{x\}$ передбачуваного значення C виявиться, що $t < t_{кр}$, то можна зробити висновок про те, що гіпотеза $M\{x\}=C$ не суперечить результатам спостереження при прийнятому рівні значимості q.

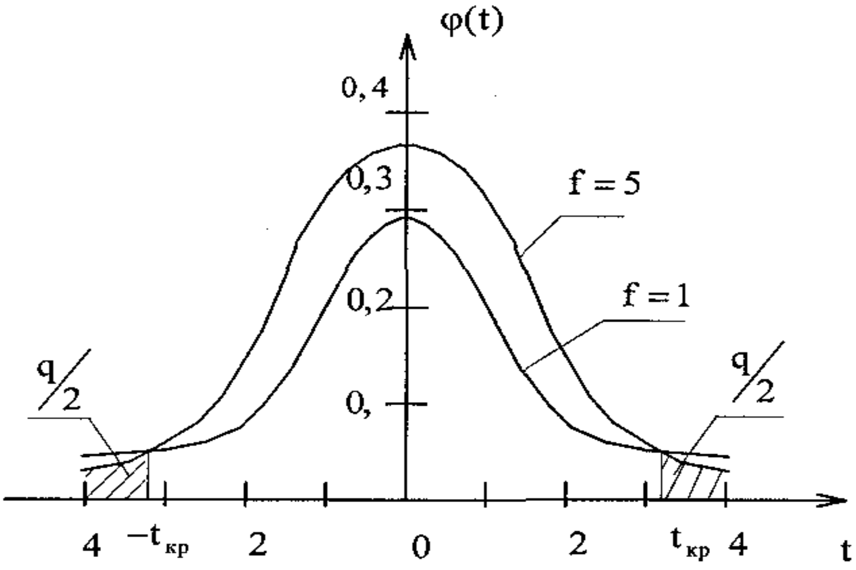

Рисунок 1.2 – Криві *t*-розподілу Стьюдента

У противному випадку (при $t < t_{кр}$) ця гіпотеза відкидається з тим же рівнем значимості q. При цьому залишається можливість зробити помилку першого роду, тобто відкинути вірну гіпотезу з імовірністю q.

Розглянемо використання t-критерію Стьюдента для побудови довірчого інтервалу для математичного очікування $M\{x\}$. При $t = t_{кр}$ різниця $[\bar{x} - M\{x\}]$ в (3) дорівнює половині ширини довірчого інтервалу δ, тобто

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{N}} t_{кр} S\{x\} = t_{кр} S\{\bar{x}\} \tag{4}$$

Довірчий інтервал, в якому з довірчою імовірністю $P=1-q$ знаходиться математичне очікування $M\{x\}$, визначається виразами:

$$[\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{N}} t_{кр} S\{x\} \le M\{x\} \le \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{N}} t_{кр} S\{x\}; \tag{5}$$

$$[\bar{x} - t_{кр} S\{\bar{x}\} \le M\{x\} \le \bar{x} + t_{кр} S\{\bar{x}\}. \tag{6}$$

Тут доцільно зробити наступне зауваження. Оскільки математичне очікування $M\{x\}$ є істинним, об'єктивно існуюче невипадкове значення, а границі інтервалу – випадкові величини (за рахунок наявності в них випадкових величин $\bar{x}$ *і* $S\{x\}$), то правильно буде говорити про те, що довірчий інтервал (5), (6) з імовірністю $P=1-q$ накриває $M\{x\}$.

1.6 Критерій Фішера

Критерій Фішера (Fisher) застосовується при перевірці гіпотези про рівність дисперсій генеральних сукупностей, ***розподілених за нормальним законом.***

F-критерій Фішера називають дисперсійним відношенням, так як він формується як відношення двох незміщених оцінок дисперсій, які порівнюються:

$$F = \frac{S_1^2\{x\}}{S_2^2\{x\}}, \tag{7}$$

Причому в чисельнику ставиться більша з двох дисперсій.

Розрахункове F порівнюють *з* $F_{кр} = F_{q,f1,f2}$, яке знаходять з таблиць для ступенів свободи $f_1 = N_1 - 1$ і $f_2 = N_2 - 1$, де N_1 – кількість елементів вибірки, за якими обчислена $S_1^2\{x\}$; N_2 – кількість елементів вибірки, за якими отримана оцінка дисперсії $S_2^2\{x\}$.

Якщо $F < F_{кр}$, то приймається нульова гіпотеза про рівність генеральних дисперсій $\sigma_1^2\{x\}=\sigma_2^2\{x\}$ при прийнятому рівні значимості q.

На рис. 1.3 показані криві розподілу $\varphi\ (F)$. Зачорнена область критичних значень F.

На практиці завдання порівняння дисперсій виникає, якщо вимагається порівняти точність приладів, інструментів або засобів вимірів. Кращий той прилад, інструмент або засіб, що забезпечує найменше розсіювання результатів вимірів, тобто найменшу дисперсію.

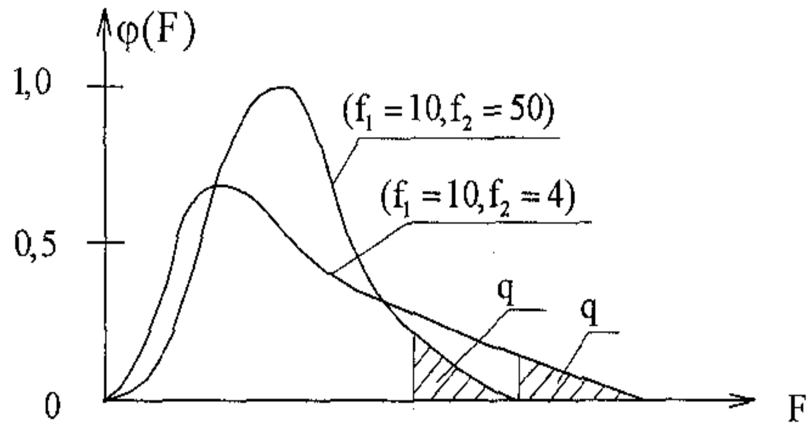

Рисунок 1.3 – Криві F - розподілу Фішера

Якщо виявиться, що нульова гіпотеза справедлива, тобто генеральні дисперсії однакові, то різниця незміщених оцінок дисперсій незначуща і пояснюється випадковими причинами, зокрема випадковим відбором об’єктів вибірки. Наприклад, якщо різниця незміщених оцінок дисперсій результатів вимірів, зроблених двома приладами, виявилася незначущою, то прилади мають однакову точність. Якщо нульова гіпотеза буде відкинута, тобто генеральні дисперсії неоднакові, то різниця незміщених оцінок дисперсій значуща і не може бути пояснена випадковими причинами, а є слідством того, що самі генеральні дисперсії різноманітні. Наприклад, якщо різниця $S_1^2\{x\}$ і $S_2^2\{x\}$ результатів вимірів, зроблених двома приладами, виявилася значущою, то точність приладів різноманітна.

1.7 Критерій Кохрена

G-критерій Кохрена (Cohran) застосовується для оцінки однорідності незміщених оцінок дисперсій, обчислених за однаковою кількістю N спостережень. При цьому генеральні сукупності повинні розподілятися нормально. Критерій формується як відношення максимальної з оцінок дисперсій, що порівнюються, до суми всіх *K* дисперсій:

$$G = \frac{S_j^2\{x\}_{max}}{\sum_{j=1}^{K} S_j^2\{x\}} \qquad (8)$$

Якщо $G < G_{кр} = G_{q,f1,f2}$, то оцінки дисперсій визнаються однорідними або, іншими словами, розрізняються незначуще. У цьому випадку з рівнем значимості q приймається нульова гіпотеза, яка полягає у тому, що генеральні дисперсії сукупностей, які розглядаються, дорівнюють одна одній: H_0: $\sigma_1^2\{x\} = \sigma_2^2\{x\} = ... = \sigma_k^2\{x\}$. Числа ступенів свободи чисельника f_1 та знаменника f_2, за якими вибирають з таблиць $G_{кр}$, визначаються умовами

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = f_{чисел} = N-1 \\ f_2 = f_{знам} = K \end{array}\right\}$$

Якщо потрібно оцінити генеральну дисперсію, то за умовою однорідності оцінок дисперсій доцільно прийняти за її оцінку середнє арифметичне незміщених оцінок дисперсій.

$$\sigma^2\{x\} = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} S_j^2\{x\}.$$

1.8 Критерій Пірсона

1.8.1 Роль нормального розподілу при статистичних дослідженнях

Нормальний (гауссовський) розподіл займає центральне місце в теорії і практиці імовірнісно-статистичних досліджень. Як неперервну апроксимацію до біноміальному розподілу його вперше розглядав А.Муавр в 1733 р. Через деякий час нормальний розподіл знову відкрили і вивчили К.Гаусс (1809 р.) та П.Лаплас (1812 р.), які прийшли до нормальної функції у зв’язку з роботою з теорії помилок спостережень.

Ідея їх пояснення механізму формування нормально розподілених випадкових величин наведена нижче. Постулюється, що значення неперервної випадкової величини формується під впливом дуже великої кількості незалежних випадкових факторів, причому сила впливу кожного випадкового фактора мала і не може превалювати серед інших, а характер впливу – адитивний (тобто при впливі випадкового фактора F на величину a утворюється величина a+ (ΔF), де випадковий "додаток" Δ (F) малий та рівноімовірна за знаком). Строга теоретична формалізація цих умов міститься в центральній граничній теоремі.

У багатьох випадкових величинах, які вивчаються в техніці та інших областях, природно бачити сумарний адитивний ефект великої кількості незалежних причин. Але центральне місце нормального закону не слід пояснювати його універсальним застосуванням, як це було прийнято довгий час (можливо, під впливом робот К. Гаусса та П. Лапласа).

У цьому значенні нормальний закон – один з багатьох типів розподілу, існуючих у природі, однак з щодо більшою питомою вагою практичного застосування. З цього приводу є іронічне висловлювання: "Кожен впевнений у справедливості нормального закону: експериментатори – тому, що вони вважають, що це математична теорема; математики – тому, що вони вважають, що це експериментальний факт".

Однак повнота теоретичних досліджень, які відносяться до нормального закону, а також порівняно прості математичні властивості роблять його найбільш привабливим і зручним в застосуванні. Навіть у випадку відхилення досліджуваних експериментальних даних від нормального закону, існує, принаймні, два шляхи його доцільної експлуатації: по-перше, використати нормальний закон як перше наближення (при цьому нерідко виявляється, що подібне допущення дасть достатньо точне з точки зору конкретної мети дослідження результати); по-друге, підібрати таке перетворення досліджуваної випадкової величини, яке видозмінює вихідний "не нормальний" закон розподілу, перетворюючи його в нормальний.

Зручна для статистичних застосувань і властивість "самовідтворювання" нормального закону, яка полягає у тому, що сума будь-якої кількості нормально розподілених випадкових величин також підкоряється нормальному закону розподілу. Крім того, за допомогою нормального закону розподілу виведений цілий ряд інших важливих розподілів, побудовані різноманітні статистичні критерії (χ^2 -, t - та F-розподілу і критерії, які спираються на них).

Нормальний закон розподілу характеризується густістю імовірності виду

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x - M\{x\})^2}{2\sigma^2}},$$

де $M\{x\}$, σ^2 - відповідно математичне очікування і дисперсія випадкової величини x.

1.8.2 Застосування критерію Пірсона для оцінки узгодженності розподілу, який вивчається, з нормальним

Для перевірки гіпотези про відповідність експериментального закону розподілу випадкової величини до нормального застосовують критерій Пірсона чи, як його інакше називають, критерій χ^2 (хі-квадрат), так як прийняття і відхилення гіпотези засновані на χ^2-розподілі.

Використання критерію Пірсона засновано на порівнянні емпіричних (які спостерігаються) m_i' і теоретичних (обчислених у припущенні нормального розподілу) частот m_i. Звичайно m_i' і m_i різні (табл. 2).

Таблиця 2

m_i'	6	13	38	74	106	85	30	10	4
m_i	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Чи випадкова розбіжність частот?

Можливо, що розбіжність випадкова (незначуща) і пояснюється малою кількістю спостережень, засобом їх угрупування або іншими причинами. Можливо, що розбіжність частот не випадкова (значуща) і пояснюється тим, що теоретичні частоти обчислені, виходячи з невірної гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Критерій Пірсона відповідає на поставлене питання. Однак, як і будь-який статистичний критерій, він не доводить справедливість гіпотези, а лише встановлює при прийнятому рівні значимости q її згоду або незгоду з даними спостережень.

Нехай за вибіркою обсягом N отримано емпіричний розподіл. У табл. 3 наведені варіанти x_i і відповідні емпіричні частоти m_i' цього розподілу.

Таблиця 3

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i'	m_1'	m_2'	...	m'_k

Допустимо, у припущенні нормального розподілу генеральної сукупності, обчислені теоретичні частоти m_i (див. п.1.8.4). При рівні значимості *q* необхідно перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена нормально.

За критерій перевірки нульовий гіпотези приймається випадкова величина

$$\chi^2 = \frac{(m_1' - m_1)^2}{m_1} + \frac{(m_2' - m_2)^2}{m_2} + \ldots + \frac{(m_k' - m_k)^2}{m_k}$$

або

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(m_i' - m_i)^2}{m_i}, \qquad (9)$$

де *K* – число інтервалів (варіант).

Ця величина випадкова, тому що у різноманітних дослідах вона приймає різноманітні, заздалегідь невідомі значення. Чим менш розрізняються емпіричні і теоретичні частоти, тим менш значення критерію (9), і, отже, він у певній мірі характеризує близькість емпіричного і теоретичного розподілів. Піднесенням у квадрат різниць частот усувається можливість взаємного погашення додатних і від'ємних різниць.

При необмеженому зростанні обсягу вибірки $(N)\to\infty$ закон розподілу випадкової величини (9) незалежно від того, якому закону розподілу підпорядкована генеральна сукупність, наближається до закону розподілу χ^2 з f ступенями свободи. Тому випадкова величина (9) позначена χ^2, а самий критерій називають критерієм згоди “хі квадрат”.

Кількість ступенів свободи знаходять за рівністю $f=k-1-l$, де l - кількість параметрів передбачуваного розподілу, які оцінені за даними вибірки, а 1 викликана тим додатковим обмеження:

$$\sum_{i=1}^{K} m_i = \sum_{i=1}^{K} m_i' = N \qquad (10)$$

тобто теоретична кількість елементів сукупності повинна дорівнювати фактичній кількості елементів.

Оскільки в даному випадку передбачуваний розподіл є нормальним, то оцінюються два параметри (математичне очікування і середньоквадратичне відхилення), тому l=2, і кількість ступенів свободи

$$f = k - 3. \qquad (11)$$

Якщо розрахункове значення критерію (яке спостерігається) (9) виявилося менш критичного $\chi^2_{кр}$, яке знаходять за таблицями для відповідного рівня значимості q і кількості ступенів свободи f тобто якщо

$$\chi^2 < \chi^2_{кр} = \chi^2_{q,f}, \tag{12}$$

то нема підстав відкинути нульову гіпотезу про нормальність розподілу. У протилежному випадку (при $\chi^2 > \chi^2_{кр}$) нульова гіпотеза відкидається.

При перевірці гіпотези про нормальність розподілу існує правило, згідно до якого загальна кількість елементів вибірки повинна бути

$$N \geq 50, \tag{13}$$

а кількість елементів, які потрапили до будь-якого i-ого інтервалу (тобто значення емпіричних частот m_i'), повинна бути

$$m_i' \geq 5, \ (i = \overline{1,K}). \tag{14}$$

Якщо в крайні інтервали потрапляє менша кількість елементів, то вони об’єднуються з сусідніми інтервалами. Внутрішні інтервали об’єднувати забороняється. Загальна кількість інтервалів K_1, які залишилися після об’єднання, повинна задовольняти умові

$$K_1 \geq 4. \tag{15}$$

Інакше кількість ступенів свободи f (11) виявиться рівною нулю, і гіпотезу неможливо буде перевірити.

З метою контролю обчислень формулу (9) доцільно перетворити до виду

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(m_i')^2}{m_i} - N. \tag{16}$$

У табл. 4 наведений приклад розрахунку значення критерію χ^2, яке спостерігається, за відомими емпіричними і теоретичними частотами (див. табл. 2). У табл. 4, на відміну від табл. 2, у відповідності з умовою (14) об’єднані два останніх інтервали.

Контроль обчислень: $\chi^2 = 7{,}19$;

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{(m_i')^2}{m_i} - N = 373{,}19 - 366 = 7{,}1.$$

Обчислення зроблені правильно.

Знайдемо кількість ступенів свободи (11), враховуючи, що кількість різноманітних варіант (кількість інтервалів) $k=8;\ f=8-3=5$.

Задаючи величину рівня значимості q =0,05, при кількості ступенів свободи f = 5 за таблицею критичних точок розподілу χ^2, знаходимо $\chi^2_{кр}(0.05;\ 5) = 11{,}1$.

Таблиця 4

1	2	3	4	5	6	7	8
i	m_i'	m_i	$(m_i' - m_i)$	$(m_i' - m_i)^2$	$\frac{(m_i' - m_i)^2}{m_i}$	$(m_i')^2$	$\frac{(m_i')^2}{m_i}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0.07	169	12.07
3	38	42	-4	16	0.38	1444	34.38
4	74	82	-8	64	0.78	5476	66.78
5	106	99	7	49	0.49	11236	113.49
6	85	76	9	81	1.07	7225	95.07
7	30	37	-7	49	1.32	900	24.32
8	14	13	1	1	0.08	196	15.08
$\sum$	366	366	$\chi^2 = 7{,}19$				373.19

Так як $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нема підстав відкинути нульову гіпотезу. Іншими словами, розбіжність емпіричних і теоретичних частот незначуща. Отже, дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

1.8.3 Методика обчислення емпіричних частот. Побудова функції розподілу (гістограми і полігона) за дослідними даним

Наведемо деякі визначення.

Ряд розподілу (або варіаційний, або статистичний ряд) – це таблиця, в якій перераховані і вказані границі *i*-тих інтервалів можливих значень випадкової змінної *x* і відповідні їм імовірності P_i появи *x* в *i*-тих інтервалах. Якщо невідомі імовірності P_i, то указують абсолютні емпіричні частоти m_i', тобто кількість елементів статистичної сукупності для *x*, які потрапили до *i*-тих інтервалів, або відносні частоти v_i.

Відносні частоти визначаються за формулою

$$\nu_i = \frac{m_i'}{N}, \tag{17}$$

де m_i' – кількість елементів, які потрапили до *i*-того інтервалу; *N* – загальна кількість елементів даної сукупності.

Слід дати також визначення імовірності. Існує кілька визначень, однак найбільш прийнятне “частотне” визначення.

Імовірність P_i, появи елементів випадкової змінної x в i-тому інтервалі – це межа, до якої прагне відносна частота ν_i при надто великій кількості вимірів N, тобто

$$P_i = \lim_{N\to\infty} \nu_i = \lim_{N\to\infty} \frac{m_i'}{N}. \tag{18}$$

Ширину інтервалів δ_x звичайно приймають постійною (або необхідно кожний раз враховувати питому вагу ширини інтервалу) для всіх інтервалів і вибирають за формулою

$$\delta_x = \frac{x_{max} - x_{min}}{K}, \tag{19}$$

де x_{max} – найбільше значення x в даної сукупності; x_{min} – найменше з усіх x; K – кількість інтервалів,

$$K \approx 1+3{,}2lgN \tag{20}$$

Число K, розраховане за (20), заокругляють до найближчого цілого.

Звичайно $K=6...12$. При занадто маломій кількості K інтервалів можна пропустити характерні особливості кривої розподілу, а при занадто великому K і порівняно малому N навіть в середні інтервали потрапляє мало елементів статистичної сукупності, і результати розрахунків будуть мати велику погрішність.

Границі інтервалів рекомендується вибирати таким чином. Для статистичної сукупності з N елементів необхідно обчислити середнє значення $\overline{x}$, після цього ширину інтервалів за формулою (19). Після цього побудувати числову ось (рис. 4) і відзначити на ній середнє значення $\overline{x}$. В обидві сторони від $\overline{x}$ відкласти спочатку по половині інтервалу $\frac{\delta_x}{2}$, а після цього – по цілому інтервалу δ_x, доки крайні інтервали не перекриють x_{max} і x_{min}, як показано на рис. 1.4. Подібний засіб розбивання полегшує наступні обчислення.

Рисунок 1.4 – Розбивання числової осі на інтервали

Розглянемо приклад побудови рядів розподілу. У табл. 5 наведені результати вимірів змінної x.

Таблиця 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	1050	875	1075	850	975	750	800	800	950	1000	1300	1200	1100
i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
x_i	1025	1050	1025	1000	900	1100	825	1000	900	750	900	875	900
i	27	28	29	ЗО	31	32	33	34	35	36	37	38	
x_i	750	775	775	750	900	900	850	850	850	850	875	875	

Оцінимо кількість інтервалів за формулою (20):

К ≈ 1+3,2lg38 = 1+3,2*1,58 ≈ 6

Підрахуємо ширину інтервалів за формулою (19), відзначаючи, що x_{max} = 1300; x_{min} = 750.

$$\delta_x = \frac{1300 - 750}{6} = 92 \approx 100\,.$$

Ширину інтервалу заокруглюємо у бік збільшення, при цьому до кожного інтервалу потрапляє більше точок. Вибираємо границі інтервалів відповідно до рис. 4. Середнє значення $\overline{x}$ = 921. Тоді границями інтервалів будуть наведені у табл. 6

Таблиця 6

i	$(x_i \ldots x_{i+1}]$	m_i'	v_i
1	(671…771]	4	0,105
2	(771…871]	10	0,263
3	(871…971]	11	0,290
4	(971…1071]	8	0,211
5	(1071…1171]	3	0,079
6	(1171…1271]	1	0,026
7	(1271…1371)	1	0,026
	$\sum$	38	1

Границі зліва позначені круглою дужкою, а справа – квадратною.

Квадратною дужкою будемо позначати закриту (тобто включаючи то число, яким позначена границя), а круглою – відкриту границю інтервалу (тобто виключаючи позначене число). Це означає, що якщо один з елементів сукупності потрапив на границю, то його слід відносити до лівого інтервалу, якщо праві границі інтервалів закриті.

За табл. 5 підраховуємо кількість елементів m_i', які потрапили до кожного i-того інтервалу. Результати підрахунку наведені у табл. 6, де також надані відносні частоти v_i. Правильність підрахунку слід перевіряти по умові

$$\sum_{i=1}^{K} m_i' = N \tag{21}$$

або

$$\sum_{i=1}^{K} \nu_i = 1 \tag{22}$$

де K – кількість інтервалів, наведених у табл. 6; i – номер інтервалів.

За даними табл. 6 будуємо експериментальну функцію розподілу (рис. 1.5), яка може бути показана у вигляді гістограми (рис. 1.5, а) або у вигляді полігона (рис. 1.5, б).

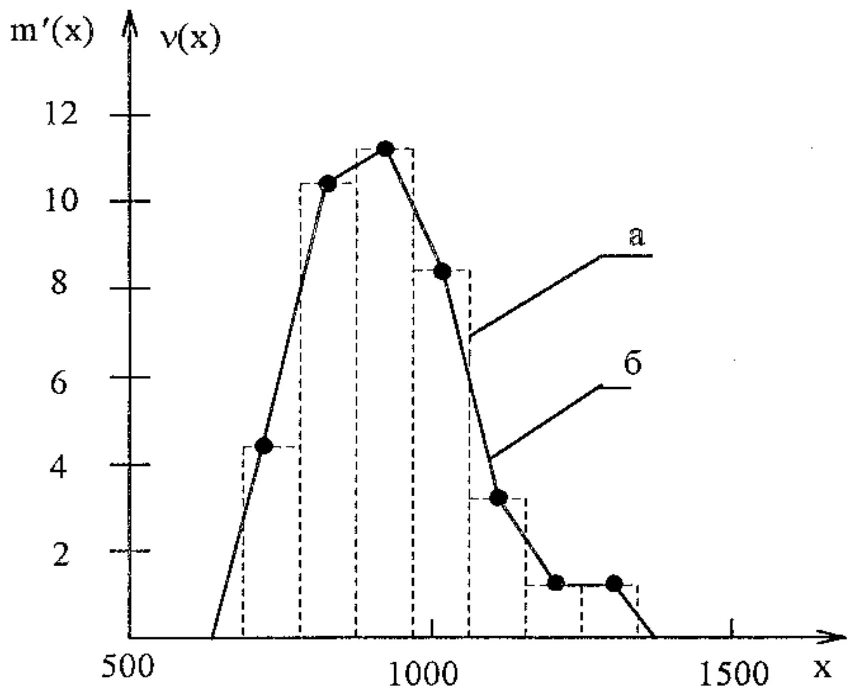

Рисунок 1.5 – Експериментальна функція розподілу

При невеликій кількості N дослідів інколи багатокутник розподілу виявляється сильно викривленим. У таких випадках рекомендується збільшити ширину інтервалу δ_x. Доцільно також побудувати ще 2–3 варіанти полігона розподілу при зсунутих границях інтервалів; наприклад, спочатку ліворуч, а після цього – в іншу сторону і подивитися, як при цьому змінюється форма полігона розподілу.

На практиці зустрічаються випадки, коли основна маса точок виміру виявляється поблизу центру розподілу, в той час як крила кривої розподілу розкинуті широко. У таких випадках може з’явитися необхідність уточнити форму кривої розподілу тільки всередині центральних інтервалів. У цьому випадку пропонується така методика. Ті інтервали, в яких вирішено уточнити криву, розбивають на 4–5 рівних підінтервалів, всередині кожного з них підраховують кількість елементів і це число умножають на кількість підінтервалів (4–5), щоб уточнена частина не виявилася зміщеною донизу і стикувалася зі своїми крилами.

1.8.4 Методика обчислення теоретичних частот нормального розподілу

Використання критерію Пірсона для оцінки узгодженості розподілу, який вивчається, з нормальним засновано на порівнянні емпіричних частот m_i' і теоретичних (обчислених у припущенні нормального розподілу) m_i (див. п. 1.8.2). У даному розділі розглядається методика знаходження теоретичних частот, якщо припускається, що сукупність розподілена нормально.

Спочатку знаходимо середини часткових інтервалів

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \qquad (23)$$

За частоту m_i' варіанти x_i^* приймаємо кількість варіант, які потрапили до *i*-того інтервалу (див. табл. 6). У підсумку одержуємо послідовність рівновіддалених варіант і відповідних їм частот у вигляді. табл. 7.

Таблиця 7

x_1^*	x_2^*	…	x_K^*
m_1'	m_2'	…	m'_k

При цьому повинна виконуватися умова (21). Далі обчислюємо методом добутків (дод. А) середнє значення $\bar{x}$ і оцінку середньоквадратичного відхилення *S{x}*.

Потім нормуємо границі інтервалів за формулами

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S\{x\}}, \qquad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S\{x\}}. \qquad (24)$$

При нормуванні границь інтервалів найменше значення z_i, тобто z_1, вважаємо рівним - ∞, а найбільше, тобто z_K – +∞.

Теоретичні імовірності *Pi* попадання *x* до інтервалу (x_i,x_{i+1}) обчислюємо за допомогою функції Лапласа *Φ(z)* за рівністю

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i). \qquad (25)$$

Шукані теоретичні частоти нормального розподілу

$$m_i = NP_i. \qquad (26)$$

В табл. 8 наведений приклад знаходження теоретичних частот за заданим інтервальним розподілом вибірки обсягом N=200.

Таблиця 8

Номер інтер-валу	Кордони інтервалів		Емпі-рична частота	Сере-дина інтер-валів	$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	Нормовані границі інтервалів		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	Імовір-ність	Теоре-тична частота
	x_i	x_{i+1}	m_i'	x_i^*			z_i	z_{i+1}			P_i	m_i
1	4	6	15	5	-	-6.63	$-\infty$	-1.41	-0.5	-0.4207	0.0793	15.86
2	6	8	26	7	-6.63	-4.63	-1.41	-0.99	-0.4207	-0.3389	0.0818	16.36
3	8	10	25	9	-4.63	-2.63	-0.99	-0.156	-0.3389	-0.2123	0.1266	25.32
4	10	12	30	11	-2.63	-0.63	-0.156	-0.13	-0.2123	-0.0517	0.1606	32.16
5	12	14	26	13	-0.63	1.37	-0.13	0.29	-0.0517	0.1141	0.1658	33.16
6	14	16	21	15	1.37	3.37	0.29	0.72	0.1141	0.2642	0.1501	30.02
7	16	18	24	17	3.37	5.37	0.72	1.14	0.2642	0.3729	0.1087	21.74
8	18	20	20	19	5.37	7.37	1.14	1.57	0.3729	0.4418	0.0689	13.78
9	20	22	13	21	7.37	-	1.57	∞	0.4418	0.5	0.0582	11.64
$\sum$		200									1	200

Знайдені засобом добутків середнє значення і оцінка середньоквадратичного відхилення для наведеного прикладу, відповідно, такі: $\overline{x}$ = 12,63; $S\{x\}$= 4,695. Шукані теоретичні частоти наведені в останній графі табл. 8.

2 ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Вивчити статистичні критерії, використовуючи дані методичні вказівки, рекомендовану літературу, дод. А, Б. Ознайомитися зі змістом та порядком виконання роботи.

3 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

3.1 Отримати у викладача масив початкових даних.

3.2 Написати і відлагодити програму на Паскалі, процедуру, яка реалізує перевірку гіпотези про узгодженість розподілу, який вивчається, з нормальним. Схема алгоритму перевірки гіпотези наведена нижче.

3.3 Знайти кількість інтервалів, на які необхідно розбити масив вхідних даних.

3.4 Визначити ширину інтервалів.

3.5 Визначити границі інтервалів.

3.6 Підрахувати емпіричні частоти m_i' для кожного інтервалу.

3.7 Обчислити відносні частоти v_i для кожного інтервалу.

3.8 Результати обчислень вивести на печать у вигляді таблиці, аналогічної табл. 6.

3.9 Побудувати експериментальну функцію розподілу в вигляді гістограми та полігона аналогічно рис. 1.5.

3.10 Використовуючи експериментальну функцію розподілу, висунути гіпотезу про погодженість розподілу, який вивчається, з нормальним.

3.11 Для обчислення теоретичних частот нормального розподілу знайти середини часткових інтервалів x_i^*.

3.12 Використовуючи метод добутків, обчислити середнє значення та оцінку середньоквадратичного відхилення.

3.13 Пронормувати границі інтервалів.

3.14 Використовуючи функцію Лапласа, знайти теоретичні імовірності попадання до інтервалів.

3.15 Визначити теоретичні частоти нормального розподілу.

3.16 Результати обчислень вивести на печать у вигляді таблиці, аналогічної табл. 8. Порівняти емпіричні і теоретичні частоти.

3.17 Побудувати теоретичну криву розподілу.

3.18 За виразом (9) визначити значення χ^2-статистики, яке спостерігається. Результати обчислень звести до таблиці, аналогічної табл. 4. За виразом (16) перевірити правильність обчислень.

3.19 За вираженням (11) визначити число ступенів свободи.

3.20 Для отриманої кількості ступенів свободи і для заданого викладачем рівня значимості знайти за таблицями критичне значення χ^2-статистики.

3.21 Порівнюючи критичне значення χ^2-статистики (12) і значення, яке спостерігається, прийняти або відкинути гіпотезу про нормальність розподілу.

4 ЗМІСТ ЗВІТУ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1 Сформулювана мета роботи.

2 Алгоритм та програма перевірки гіпотези про узгодженість розподілу, який вивчається, з нормальним.

3 Розпечатки результатів роботи програми, таблиці, рисунки (див. п.п. 3.3-3.21).

4 Аналіз отриманих результатів і висновки.

5 ФОРМУЛИ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ

1 $K \approx 1 + 3{,}2 lgN$

2 $\delta_x = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{K}$

3 $\sum\limits_{i=1}^{K} m'_i = N$

4 $v_i = \dfrac{m'_i}{N}$

5 $\sum\limits_{i=1}^{K} v_i = 1$

6 $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

7 $\overline{x} = M_1^* h + C$

8 $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} m_i' x_i^*$

9 $S\{x\} = \sqrt{[M_2^* - (M_1^*)^2]h^2}$

10 $S\{x\} = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} m_i'(x_i^* - \overline{x})^2}$

11 $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S\{x\}}; \quad z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}}{S\{x\}}$

12 $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$

13 $m_i = NP_i$

14 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \dfrac{(m_i' - m_i)^2}{m_i} = \sum_{i=1}^{K} \dfrac{(m_i')^2}{m_i} - N$

15 $f = K\text{-}3$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Причини, якими зумовлено застосування статистичних критеріїв.

2 Наведіть приклади використання статистичної перевірки гіпотез.

3 Визначення статистичної гіпотези.

4 Визначення нульової і конкуруючої гіпотези.

5 У чому складаються помилки першого і другого роду?

6 У яких випадках при перевірці статистичних гіпотез приймається правильне рішення?

7 Що називається рівнем значимості?

8 Визначення ступеню свободи параметру.

9 Що називається статистичним критерієм?

10 Що називається значенням критерію, яке спостерігається?

11 Визначення критичної області.

12 Визначення області прийняття гіпотези (області допустимих значень).

13 У чому полягає основний принцип перевірки статистичних гіпотез?

14 Що називається критичними точками?

15 Визначення лівосторонньою, правосторонньою та двосторонньої критичних областей.

16 Напишіть вираз для розподілу Стьюдента.

17 Як за допомогою критерію Стьюдента можна перевірити гіпотезу про рівність математичного очікування генеральної сукупності деякому передбачуваному значенню?

18 Як можна визначити довірчий інтервал для математичного очікування?

19 З якої мети і яким чином застосовується критерій Фішера?

20 З якої мети і яким чином застосовується критерій Кохрена?

21 Чим пояснюється центральне місце нормального закону при статистичних дослідженнях?

22 Напишіть вираз густості імовірності для нормального закону розподілу.

23 З якої мети і яким чином застосовується критерій Пірсона?

24 Назвіть існуючі при перевірці гіпотези про нормальність розподілу обмеження на кількість елементів вибірки і на кількість елементів, які потрапили до інтервалів.

25 Визначення ряду розподілу.

26 Як визначаються відносні частоти?

27 Частотне визначення імовірності.

28 Як визначається ширина, кількість та границі інтервалів при побудові ряду розподілу?

29 Яким чином будується експериментальна функція розподілу (гістограма і полігон)?

30 Як з допомогою методу творів визначаються середнє значення і оцінка середньоквадратичного відхилення?

31 Як визначаються теоретичні частоти нормального розподілу?

ЛІТЕРАТУРА

1 Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основи моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд.-М.:Финансы и статистика, 1983.-471 с.

2 Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ.-М.:Мир, 1982.-488 с.

3 Глудкин О.П., Обичкин Ю.Г., Блохин В.Г. Статистические методы в технологии производства радиоэлектронной аппаратуры.-М.:Энергия, 1977.-296с.

4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высш. шк., 1979.-400с.

5 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.:Высш. шк., 1972.-368с.

6 Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке : Методы планирования эксперимента. - М.: Мир, 1981.-520с.

7 Дубровин В.И. Идентификация и оптимизация сложных технических процессов и объектов. - Запорожье: ЗГТУ, 1997. - 92 с.

8 Дубровин В.И. Методические указания по дисциплине “Обработка экспериментальных данных на ЭВМ” для студентов заочной формы обучения специальности 7.080403 “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”.-Запорожье: ЗГТУ, 1996.- 29 с.

9 Дубровин В.И. Методические указания по курсу “Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА”.-Киев: Межвузовское полиграфическое предприятие, 1986.-24с.

10 Дубровин В.И. Статистические критерии. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине “Обработка и интерпретация социально-экономической информации” для студентов специальности: – бакалавр – 6.0804 “Компьютерные науки”; – специалист – 7.080403 “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”. Запорожье: ЗГТУ, 1997.-40с.

11 Дубровин В.И., Корецкий Н.Х. Обучение методам управления качеством студентов экономических специальностей // Методологические проблемы качества обучения и обучения качеству: Материалы научно-методической конференции. – Харьков: ХАИ, 1997. –С. 22–24.

12 Дубровин В.И., Корниенко С.К., Скачко Л.П. Обработка данных. Англо-русско-украинский словарь терминов. -Запорожье: ЗГТУ, 1996.- 82с.

13 Дубровин В.И., Милинчук С.Г. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине “Обработка экспериментальных данных на ЭВМ” для студентов специальности 7.080403 “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”: В 2-х частях.- Запорожье; ЗГТУ, 1996. Часть 1 -85 с., Часть 2 - 23 с.

14 Дубровин В.И., Милинчук С.Г., Сулименко О.Б. Методические указания к лабораторным работам по курсу “Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА” для студентов заочной и вечерней форм обучения специальности “Конструирование и технология радиоэлектронных средств”. - К.: ГП ППО Укрвузполиграф, 1988. - 84 с.

15 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1970. -720 с.

16 Кофанов Ю.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств. - М.: Радио и связь, 1991. -360с.

17 Леман Э. Проверка статистических гипотез. - М.: Наука,1964. - 498 с.

18 Львович Я. Е., Фролов В. Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА. - М.: Радио и связь, 1986.-192с.

19 Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. - М.: Высш. шк., 1982. - 224 с.

20 Мелник М. Основы прикладной статистики. - М.: Энергоатомиздат, 1983.-416с.

21 Петрович М.Л., Давидович М.И. Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ.- М.: Финансы и статистика, 1989.-191 с.

22 Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина - М.: Финансы и статистика , 1989,1990.

23 Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА. - М.: Радио и связь, 1983. - 312 с.

Додаток А

МЕТОДИКА ОБЧИСЛЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ І ОЦІНКИ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОГО ВІДХИЛЕННЯ МЕТОДОМ ДОБУТКІВ

Середнє значення $\bar{x}$ і оцінку середньоквадратичного відхилення $S\{x\}$ визначають за виразами

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i ; \qquad (\text{Д. А.1})$$

$$S\{x\} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} . \qquad (\text{Д. А.2})$$

Якщо серед результатів вимірів є рівні (див. табл. 7), то їх об’єднують в (Д. А.1) та (Д. А.2) таким чином. Нехай результат x_1^* зустрічається m_1' разів, а x_2^* і x_K^* - відповідно m_2' і m'_k разів. Природно, що $m_1' + m_2' + \ldots + m'_k = N$. Тоді (Д. А.1) і (Д. А.2) набувають такого вигляду:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} m_i' x_i^* , \qquad (\text{Д. А.3})$$

$$S\{x\} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} m_i'(x_i^* - \bar{x})^2} \qquad (\text{Д. А.4})$$

Зручний спосіб обчислення $\bar{x}$ і $S\{x\}$ дасть метод добутків. При цьому доцільно використати розрахункову табл. Д. А.1.

До першого стовпчика табл. Д. А.1 записуємо варіанти x_i^*, розташовуючи їх у зростаючому порядку; до другого – емпіричні частоти m'_i варіант, а їх суму (обсяг вибірки N) розташовуємо у нижній клітинці стовпчика; до третього – умовні варіанти $U_i = (x_i^* - C) / h$, причому за хибний нуль C вибираємо варіанту з найбільшою частотою і вважаємо h рівним різниці між будь-якими двома сусідніми варіантами. Практично третій стовпчик заповнюємо так: в клітинці рядку, який містить найбільшу частоту, записуємо нуль; в клітинках над нулем записуємо послідовно -1, -2, -3 і т. д., а під нулем 1, 2, 3 і т. д. (за хибний нуль може бути взята будь-яка варіанта, тобто необов’язково брати варіанту, що має найбільшу частоту, як вказано раніше. Наприклад, якщо варіанта, що має найбільшу частоту, розміщена в перших або останніх рядках першого стовпчика, за хибний нуль доцільно прийняти варіанту, розміщену приблизно у середині стовпчика).

Таблиця Д. А.1

Початкові дані		Результати обчислень			
x_i^*	m'_i	U_i	$m'_i\,U_i$	$m'_i\,U_i^2$	$m'_i(U_i+1)^2$
1	2	3	4	5	6
10.2	2	-4	-8	32	18
10.4	3	-3	-9	27	12
10.6	8	-2	-16	32	8
10.8	13	-1	-13	13	0
11.0	25	0	[A_1 = -46]	0	25
11.2	20	1	20	20	80
11.4	12	2	24	48	108
11.6	10	3	30	90	160
11.8	6	4	24	96	150
12.0	1	5	5	25	36
			[A_2 = 103]		
N = 100			$\sum m'_i\,U_i = 57$	$\sum m'_i\,U_i^2 =$ = 383	$\sum m'_i(U_i+1)^2$ = 597

Множимо частоти m'_i на умовні варіанти U_i і записуємо їх добуток $m'_i\ U_i$ у четвертий стовпчик. Суму добутків $\sum m'_i\ U_i$, розміщуємо до нижньої клітинки стовпчика. При цьому доцільно окремо додавати від'ємні числа четвертого стовпчика (їх суму A_1 записуємо в клітинку рядка, що містить найбільшу частоту) і окремо позитивні (їх сумуA_2 записуємо в передостанню клітку стовпчика). Тоді $\sum m'_iU_i = A_1 + A_2$. Умножаємо частоти m'_i на квадрати умовних варіант і записуємо їх добуток $m'_iU_i^2$ у п'ятий стовпчик. (При обчисленні добутків п'ятого стовпчика числа m'_iU_i четвертого стовпчика доцільно умножити на U_i). Суму $\sum m'_iU_i^2$ розміщуємо у нижній клітинці стовпчика. Умножаємо частоти m'_i на квадрати умовних варіант, збільшених кожна на одиницю, і записуємо добутки $m'_i(U_i+1)^2$ в шостий контрольний стовпчик. Суму $\sum m'_i(U_i+1)^2$ розміщуємо у нижній клітинці стовпчика.

Шостий стовпчик служить для контролю обчислень: якщо виконується рівність

$$\sum m'_i(U_i+1)^2 = \sum m'_iU_i^2 + 2\sum m'_iU_i + N, \qquad \text{(Д. А.5)}$$

то обчислення виконані правильно.

Перевіримо обчислення в табл. Д. А.1 за рівністю (Д. А.5):

$$\sum m_i' U_i^2 + 2\sum m_i' U_i + N = 383+2*57+100=597$$

$$\sum m_i' (U_i + 1)^2 = 597$$

Обчислення виконані правильно.

Після заповнення розрахункової таблиці і перевірки правильності обчислень визначаємо умовні моменти першого та другого порядків

$$M_1^* = \frac{\sum m_i' U_i}{N} = \frac{57}{100} = 0{,}157\,; \qquad \text{(Д. А.6)}$$

$$M_2^* = \frac{\sum m_i' U_i^2}{N} = \frac{383}{100} = 3{,}83\,. \qquad \text{(Д. А.7)}$$

Знаючи величину кроку h=10,4-10,2=0,2 і значення хибного нуля C=11,0, обчислюємо середнє значення і оцінку середньоквадратичного відхилення

$$\overline{x} = M_1^* h + C = 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 11{,}0 = 11{,}1 \qquad \text{(Д. А.8)}$$

$$S\{x\} = \sqrt{[M_2^* - (M_1^*)^2]h^2} = \sqrt{[3{,}83 - (0{,}57)^2] \cdot 0{,}2^2} = 0{,}374. \qquad \text{(Д. А.9)}$$

Додаток Б

ПОКАЖЧИК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ, В ЯКИХ НАВЕДЕНІ ТАБЛИЦІ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ПРИ СТАТИСТИЧНІЙ ПЕРЕВІРЦІ ГІПОТЕЗ

Фундаментальним виданням, в якому наведені таблиці математичної статистики, є книга – Большев Л. И., Смирнов И.В. Таблицы математической статистики. – М: Наука, 1965.–464 с.

Таблиці математичної статистики наведені також в ряд інших літературних джерел (табл. Д. Б.1).

Таблиця Д. Б.1

Номер літературного джерела	Номери сторінок, на яких наведені					
	Критичні точки розподілів				Інтеграл імовірностей Лапласа Ф(z)	Випадкові числа
	Стьюдента	Фішера	Пірсона	Кохрена		
[2]	С.456	С. 457-466	С. 453-454			
[4]	С. 393	С. 394	С. 392	С. 395-396	С. 389-390	С. 397-398
[5]	С. 359-360	С. 361	С. 358		С. 356-357	
[6]	С. 450	С. 451-454	С. 448-449		С. 446-447	
[15]	С. 552	С. 553-555	С. 551		С. 516	
[18]	С. 139	С. 138-139	С. 138	С. 140	С. 138	С. 139
[19]	С. 185-186	С. 196-203	С. 191-192			С. 182-183
[20]	С. 391	С. 398-399	С. 394-397			С. 373-375
[23]	С. 300	С. 301	С. 304	С. 299-300, 303	С. 290	

При використанні цих таблиць слід пам’ятати, що в деяких літературних джерелах в таблицях для критичних точок розподілів t, F, χ^2 та G наведені не значення рівня значимості q, а величина імовірності $P=1-q$. Різноманітними можуть бути також позначення кількості ступенів свободи.

При знаходженні інтегралу імовірностей Лапласа необхідно враховувати, що в різноманітних джерелах можуть приводитися два різноманітних значення $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (Д.\ Б.1)$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (Д.\ Б.2)$$

При використанні табличних значень *Ф(z)* виду (Д. Б.2) для визначення імовірностей попадання до інтервалів за рівністю (25) табличні значення *Ф(z)* слід поділити на два.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Дубровін Валерій Іванович

Статистичні критерії

Навчальний посібник