

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ШТАМПЕ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В данной работе строится решение двумерной задачи теории упругости (плоская деформация) о действии штампа на упругую полуплоскость при помощи символического метода Власова В. З. [1] и точного решения гармонического уравнения для полуплоскости. Замена символических функций соответствующими гармоническими функциями позволяет получить точное решение рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: символический метод, штамп, полуплоскость, гармоническое уравнение, символическая функция, гармоническая функция, точное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Символическое решение Власова В. З., полученное методом начальных функций, находит широкое применение при решении задач теории упругости. Суть метода начальных функций состоит в поиске начальных функций. В случае плоской задачи – это поиск функций напряжений и перемещений на плоскости $y=0$ [1]: $U_0(x) = Gu(x,0)$, $V_0(x) = Gv(x,0)$, $Y_0(x) = \sigma_y(x,0)$, $X_0(x) = \tau_{xy}(x,0)$. Решение представляется в виде суммы произведений дифференциальных операторов и соответствующих начальных функций [1]:

$$U(x, y) = Gu(x, y) = L_{UU}U_0(x) + L_{UV}V_0(x) + L_{UY}Y_0(x) + L_{UX}X_0(x),$$

$$V(x, y) = Gv(x, y) = L_{VU}U_0(x) + L_{VV}V_0(x) + L_{VY}Y_0(x) + L_{VX}X_0(x),$$

$$Y(x, y) = \sigma_y(x, y) = L_{YU}U_0(x) + L_{YV}V_0(x) + L_{YY}Y_0(x) + L_{YX}X_0(x),$$

$$X(x, y) = \tau_{xy}(x, y) = L_{XU}U_0(x) + L_{XV}V_0(x) + L_{XY}Y_0(x) + L_{XX}X_0(x),$$

$$\sigma_x(x, y) = A_U U_0(x) + A_V V_0(x) + A_Y Y_0(x) + A_X X_0(x).$$

Дифференциальные операторы могут быть представлены либо в виде бесконечных операционных рядов, либо в виде символических формул (для плоско-деформируемого состояния) [1]:

$$\frac{1-\nu}{\pi G} \int_{-a}^a p(\xi) (\ln|x_1 - \xi| + C) d\xi = f(x_1) + h - z_0,$$

$$L_{UV} = -\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \sin(\alpha y) - \frac{\alpha y}{2(1-\nu)} \cos(\alpha y),$$

$$L_{UY} = -\frac{y}{4(1-\nu)} \sin(\alpha y),$$

$$L_{UX} = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha y) - \frac{\sin(\alpha y)}{4\alpha(1-\nu)} - \frac{\alpha y \cos(\alpha y)}{4\alpha(1-\nu)},$$

$$L_{VU} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sin(\alpha y) - \frac{\alpha y}{2(1-\nu)} \cos(\alpha y),$$

$$L_{VV} = \frac{\alpha y}{2(1-\nu)} \sin(\alpha y) + \cos(\alpha y),$$

$$L_{VY} = \frac{(3-4\nu) \sin(\alpha y)}{4(1-\nu)\alpha} - \frac{y}{4(1-\nu)} \cos(\alpha y),$$

$$L_{VX} = L_{UY},$$

$$L_{YU} = \frac{\alpha^2 y}{1-v} \sin(\alpha y),$$

$$L_{YV} = \frac{\alpha}{1-v} (\sin(\alpha y) - \alpha y \cos(\alpha y)),$$

$$L_{YY} = L_{VV}, L_{YX} = L_{UV},$$

$$L_{XU} = -\frac{\alpha}{1-v} (\sin(\alpha y) + \alpha y \cos(\alpha y)),$$

$$L_{XV} = L_{YU}, L_{XY} = L_{YU}, L_{XX} = L_{UU},$$

$$A_U = \frac{2\alpha}{1-v} \cos(\alpha y) - \frac{y\alpha^2}{1-v} \sin(\alpha y),$$

$$A_V = -\frac{\alpha}{1-v} (\sin(\alpha y) + \alpha y \cos(\alpha y)),$$

$$A_Y = \frac{v}{1-v} \cos(\alpha y) - \frac{y\alpha}{2(1-v)} \sin(\alpha y),$$

$$A_X = \frac{y\alpha}{2(1-v)} \cos(\alpha y) + \frac{3-2v}{2(1-v)} \sin(\alpha y),$$

где $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$; $f_0(x) \cos(\alpha y)$ и $f_0(x) \sin(\alpha y)$ – гармонические функции.

В данной работе производится замена дифференциальных операторов гармоническими решениями. Это позволяет получить точное решение задачи о штампе.

ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГАРМОНИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

Рассмотрим гармоническую функцию следующего вида:

$$f(x, y) = f_0(x) \cos(y\alpha). \quad (1)$$

Известно, что если гармоническая функция задана на области: $-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty$; а также задано граничное условие: $f(x, y) = f_0(x)$ при $y = 0$ (первая краевая задача); то решением будет следующее выражение [2]:

$$Y(x_1, 0) = Y_0(x_1) = \frac{1}{1-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(\xi)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi. \quad (2)$$

Сопряженной к (1) является следующая функция [3]:

$$f(x, y) = f_0(x) \sin(y\alpha). \quad (3)$$

Ее решением является следующее выражение [4, 5]:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) f_0(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (4)$$

Учитывая решения (2) и (4) дифференциальные операторы примут следующий вид [6]:

$$L_{UU} f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{R^2} f_0(\xi) d\xi - \frac{y}{2(1-v)} \times \\ \times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{R^4} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{UV} f_0(x) = \frac{2v-1}{2(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \xi}{R^2} f_0(\xi) d\xi + \\ + \frac{y}{2(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y(x - \xi)}{R^4} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{UY} f_0(x) = -\frac{y}{4(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \xi}{R^2} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{UX} f_0(x) = \frac{3-4v}{4(1-v)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(R^2) f_0(\xi) d\xi + \\ + \frac{y}{4(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{R^2} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{YU} f_0(x) = \frac{1-2v}{2(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \xi}{R^2} f_0(\xi) d\xi + \\ + \frac{y}{2(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y(x - \xi)}{R^4} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{YV} f_0(x) = \frac{y}{2(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{R^4} f_0(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{R^2} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{VY} f_0(x) = \frac{3-4v}{4(1-v)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(R^2) f_0(\xi) d\xi - \\ - \frac{y}{4(1-v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{R^2} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{VX} = L_{UY},$$

$$L_{YU} f_0(x) = \frac{y}{1-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x - \xi)^3 - 6y^2(x - \xi)}{R^6} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{YV} f_0(x) = -\frac{1}{1-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{R^4} f_0(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{y}{1-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6y(x - \xi)^2 - 2y^3}{R^6} f_0(\xi) d\xi,$$

$$L_{YY} = L_{VV}, L_{YX} = L_{UV},$$

$$L_{XU} f_0(x) = -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - (x-\xi)^2}{R^4} f_0(\xi) d\xi -$$

$$-\frac{y}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6y(x-\xi)^2 - 2y^3}{R^6} f_0(\xi) d\xi$$

$$L_{XV} = L_{YU}, L_{XY} = L_{VU}, L_{XX} = L_{UU},$$

$$A_U f_0(x) = -\frac{2}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y(x-\xi)}{R^4} f_0(\xi) d\xi -$$

$$-\frac{y}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x-\xi)^3 - 6y^2(x-\xi)}{R^6} f_0(\xi) d\xi,$$

$$A_V f_0(x) = -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - (x-\xi)^2}{R^4} f_0(\xi) d\xi -$$

$$-\frac{y}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6y(x-\xi)^2 - 2y^3}{R^6} f_0(\xi) d\xi,$$

$$A_Y f_0(x) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{R^2} f_0(\xi) d\xi -$$

$$-\frac{y}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - (x-\xi)^2}{R^4} f_0(\xi) d\xi,$$

$$A_X f_0(x) = -\frac{y}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y(x-\xi)}{R^4} f_0(\xi) d\xi +$$

$$+\frac{3-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\xi}{R^2} f_0(\xi) d\xi,$$

где $R^2 = (x-\xi)^2 + y^2$.

Полученные соотношения удовлетворяют уравнениям теории упругости.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ШТАМПЕ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Пусть в однородную изотропную линейно упругую полуплоскость $x_3 \geq 0$ вертикально без трения вдавлируется плоский симметричный недеформируемый штамп (рис. 1) [7].

Ось $0x_3$ совместим с осью симметрии штампа, а начало системы координат $0x_1x_3$ расположим на границе полуплоскости. Нижний торец штампа ограничен «подшвой» – гладкой невогнутой поверхностью, уравнение которой в связанной со штампом системе координат 0_1x_1z (0_1z совпадает с $0x_3$, z_0 – расстояние между 0_1 и лобовой точкой M – вершиной подошвы) имеет вид [7]:

$$z = f(x_1). \tag{5}$$

Здесь $f(x_1)$ – четная функция, $f(0) = z_0$ и $f''(x_1) \leq 0$. Обозначая глубину погружения штампа (перемещение вдоль оси $0x_3$ его лобовой точки) через h , учитывая формулу (5) и связь координат $z = x_3 + z_0 - h$ (рис. 1), получаем уравнение подошвы в системе $0x_1x_3$ [7]:

$$x_3 = f(x_1) + h - z_0. \tag{6}$$

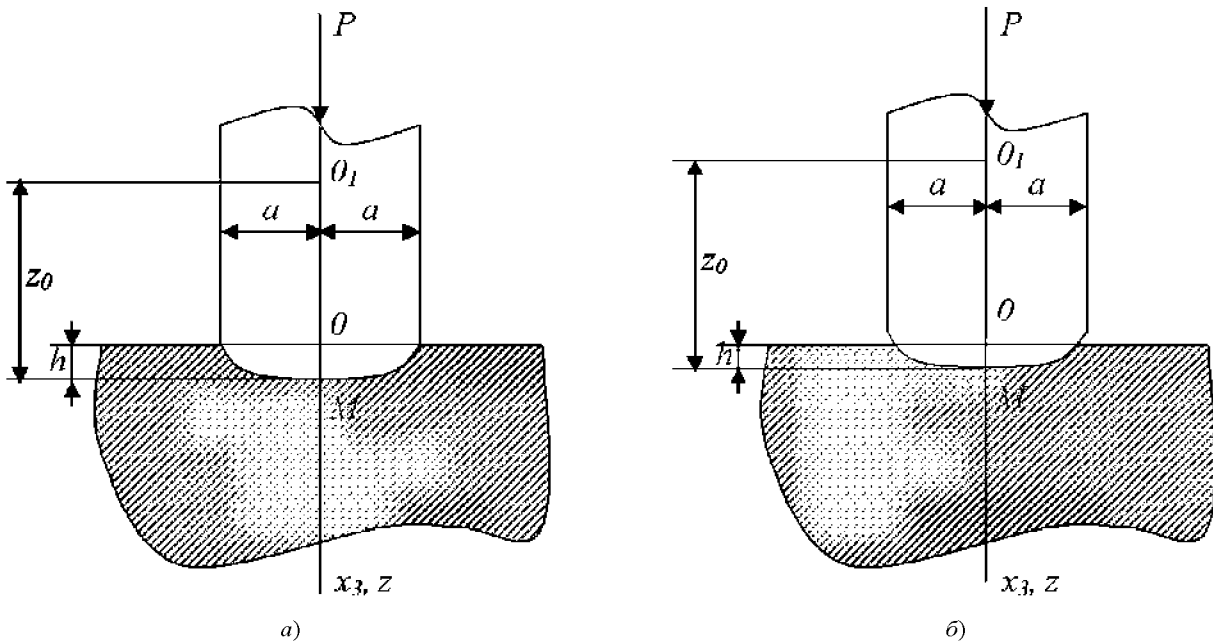


Рис. 1. Штамп на упругой полуплоскости

Правая часть равенства (6) задает нормальные перемещения границы полуплоскости в области контакта.

Будем полагать, что на штамп действует направленная вдоль оси Ox_3 сила P . На поверхности контакта касательные напряжения равны нулю (контакт происходит в условиях полного проскальзывания), а вне этой поверхности граница полуплоскости является свободной. Соответствующая краевая задача включает в себя взятые в той или иной форме уравнения, описывающие плоское деформированное состояние, условие ограниченности решения на бесконечности, а также условия на границе полуплоскости [7]:

$$u_3|_{x_3=0} = f(x_1) + h - z_0 (|x_1| \leq a), \quad (7)$$

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = 0 (|x_1| > a), \quad (8)$$

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0 (-\infty < x_1 < \infty). \quad (9)$$

Здесь h – неизвестная глубина погружения штампа.

В силу линейности задачи условия (7)–(9) снесены на недеформированную границу полуплоскости. Поверхность контакта заменена *областью контакта* – отрезком $|x_1| \leq a$. Кроме того, в (7)–(9) сделано еще одно соответствующее линейной теории приближение – не учтены касательные составляющие перемещений материальных точек. Это означает, что точки границы штампа и полупространства, находящиеся в начальный момент взаимодействия на одной вертикальной прямой, остаются на этой же прямой и в процессе контакта. Следовательно, нормальные перемещения в области контакта совпадают с правой частью уравнения (6). В зависимости от геометрии задачи радиус области контакта a либо задан (рис. 1, а), либо неизвестен (рис. 1, б) [7].

Закрывает задачу условие равновесия штампа [7]:

$$\int_{-a}^a p(\xi) d\xi = P, \quad (10)$$

$$p(x_1) = -\sigma_{33}(x_1, 0), \quad (11)$$

где p – контактное давление.

Перепишем все условия задачи в более удобной форме:

$$V(x_1, 0) = V_0(x_1) = -G(f(x_1) + h - z_0), |x_1| \leq a; \quad (12)$$

$$Y(x_1, 0) = X_0(x_1) = 0; \quad (13)$$

$$Y(x_1, 0) = Y_0(x_1) = -p(x_1), |x_1| \leq a; \quad (14)$$

$$Y(x_1, 0) = Y_0(x_1) = 0, |x_1| > a;$$

$$\int_{-a}^a p(x_1) dx_1 = - \int_{-a}^a Y_0(x_1) dx_1 = P. \quad (15)$$

Начальные функции с учетом интегральных операторов примут следующий вид:

$$U(x_1, 0) = U_0(x_1) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi,$$

$$V(x_1, 0) = V_0(x_1) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x_1 - \xi| Y_0(\xi) d\xi, \quad (16)$$

$$Y(x_1, 0) = Y_0(x_1) = \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(\xi)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi,$$

$$X(x_1, 0) = X_0(x_1) = \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_0(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi. \quad (17)$$

Подставим выражение (17) в условие (13):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi = \frac{2\nu-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_0(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi. \quad (18)$$

Проинтегрируем обе части равенства (18) по x_1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi = \frac{1-2\nu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Y_0(\xi) (\ln|x_1 - \xi| + C) d\xi. \quad (19)$$

Подставим выражение (16) в условие (12):

$$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \times$$

$$\times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x_1 - \xi| Y_0(\xi) d\xi = -G(f(x_1) + h - z_0), |x_1| \leq a. \quad (20)$$

Подставим равенство (19) в выражение (20):

$$-\frac{1-\nu}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} Y_0(\xi) (\ln|x_1 - \xi| + C) d\xi = f(x_1) + h - z_0,$$

$$-\frac{1-\nu}{\pi G} \int_{-a}^a Y_0(\xi) (\ln|x_1 - \xi| + C) d\xi = f(x_1) + h - z_0. \quad (21)$$

Подставим равенство (14) в выражение (21):

$$\frac{1-\nu}{\pi G} \int_{-a}^a p(\xi) (\ln|x_1 - \xi| + C) d\xi = f(x_1) + h - z_0. \quad (22)$$

Выражение (22) в классическом решении получено путем сведения задачи к интегральному уравнению относительно контактного давления и решении задачи о сосредоточенной нагрузке на границе полуплоскости. Дальнейший алгоритм решения является классическим [7].

Дифференцируя уравнение (22) по x_1 , приходим к уравнению Прандтля. Решение этого уравнения [7]:

$$p(x_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} \left(P + \frac{\mu}{1-\nu} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{x_1 - \xi} f'(\xi) d\xi \right). \quad (23)$$

Если радиус области контакта a известен (рис. 1, а), то давление (23) и есть решение задачи. Если радиус области контакта a неизвестен (рис. 1, б), то для его определения используют условие ограниченности контактного давления (нормального напряжения на границе полуплоскости) [7].

Поскольку $f(0) = z_0$, то из интегрального уравнения (22) с учетом четности контактного давления, а также равенства (15) получаем следующую формулу для глубины погружения штампа [7]:

$$h = \frac{1-\nu}{\pi \mu} \left(CP + 2 \int_0^a p(\xi) \ln(\xi) d\xi \right). \quad (24)$$

Равенства (23) и (24) являются решением данной задачи при различных формах подошвы штампа (5).

ВЫВОДЫ

Замена дифференциальных операторов гармоническими решениями позволяет получать точное решение задачи теории упругости. Эффективность метода показана на примере решения задачи о штампе на упругой полуплоскости. Заменяя дифференциальные операторы точными решениями гармонического уравнения для полуплоскости, мы получили тот же промежуточный результат, что и в классическом решении. Но, в отличие от классического решения, не пришлось использовать функцию влияния и решение задачи о сосредоточенной нагрузке на границе полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматгиз, 1960. – 491 с.
2. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
3. Зельдович, Я. Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1967. – 648 с.
4. Толлок, В. А. Операторно-символьные ряды Власова В. З. в решении задач теории упругости в системе Maple / В. А. Толлок, В. В. Шапар // Гідроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 66–74.
5. Овский, А. Г. Использование системы Maple при реализации метода начальных функций Власова / Е. Е. Галан, А. Г. Овский, В. А. Толлок // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 1. – С. 16–26.
6. Овский, А. Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple / А. Г. Овский, В. О. Толлок // Гідроакустичний журнал. – 2008. – № 3. – С. 88–97.
7. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.

Стаття надійшла до редакції 24.12.2010.

Після доробки 09.03.2011.

Сабо І. І., Толлок В. О.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ШТАМП У ДВО-ВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

У даній роботі будується розв'язок двовимірної задачі теорії пружності (плоска деформація) про дію штампа на пружну півплощину за допомогою символічного методу Власова В. З. [1] і точного розв'язку гармонічного рівняння для півплощини. Заміна символічних функцій відповідними гармонічними функціями дозволяє отримати точний розв'язок розглянутої задачі.

Ключові слова: символічний метод, штамп, півплощина, гармонічне рівняння, символічна функція, гармонічна функція, точний розв'язок.

Sabo I. I., Tolok V. O.

MODELLING THE STAMP PROBLEM IN TWO-DIMENSIONAL FORMULATION

In this paper we construct a solution of the two-dimensional elasticity problem (plane deformation) about stamp action on an elastic half-plane by using the symbolic method of Vlasov V. Z. [1] and the exact solution of the harmonic equation for the half-plane. The substitution of symbolic functions to appropriate harmonic functions allows us to get the exact solution of this problem.

Key words: symbolic method, stamp, half-plane, harmonic equation, symbolic function, harmonic function, exact solution.