

УДК 539.3

Антоненко Н.М.¹

¹ канд. фіз.-мат. наук, доц. ЗНТУ

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ЗАДАЧІ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ В ДВОШАРОВІЙ ОСНОВІ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ ШАРІВ

Розглядається задача про визначення температури в шарах двошарової основи при неідеальному тепловому контакті шарів. Кожен шар характеризується товщиною h_k , двома пружними характеристиками λ_k , μ_k , коефіцієнтами теплопровідності k_{Tk} та приведеним коефіцієнтом теплового розширення $\alpha_{Tk} = \tilde{\alpha}_{Tk} (3\lambda_k + 2\mu_k) / (\lambda_k + 2\mu_k)$, де $\tilde{\alpha}_{Tk}$ – коефіцієнт теплового розширення матеріалу. Шари нумеруємо зверху вниз починаючи з одиниці, півпростору присвоїмо номер 3. У кожному шарі вводиться декартова система координат $O_k x z_k$ так, як показано на рис. 1.

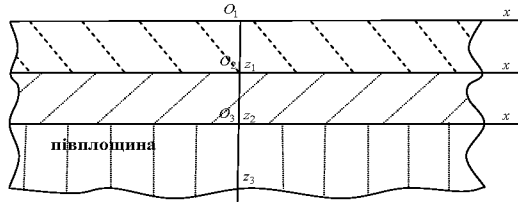


Рисунок 1 – Двошарова основа.

Крайові умови задачі: $T_1(x,0) = f(x)$, $T_3(x,0) = 0$.

Умови на спільній межі шарів [1]:

$$k_{T1} \frac{\partial T_1}{\partial z}(x, h_1) = \frac{1}{R} [T_2(x,0) - T_1(x, h_1)], \quad k_{T2} \frac{\partial T_2}{\partial z}(x,0) = k_{T1} \frac{\partial T_1}{\partial z}(x, h_1), \quad (1)$$

де R – коефіцієнт теплового опору.

Задача розв'язується за допомогою одномірного інтегрального перетворення Фур'є. У просторі трансформант температури в точках кожного шару можна представити у вигляді лінійної комбінації двох допоміжних

функцій $\eta = \bar{T}(\xi,0)$, $\varepsilon = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}}{dz}(\xi,0)$ [2]: $\bar{T}(\xi, z) = \text{ch}pz \eta + \text{sh}pz \varepsilon$, де ξ –

параметр інтегрального перетворення, $p = |\xi|$. Використовуючи умови (1) та вирази для допоміжних функцій отримано формули для обчислення допоміжних функцій кожного з шарів. Доведено, що допоміжні функції є залежними. Цю залежність представлено у вигляді $\varepsilon_k = -r_k \eta_k$, $k=1,2$, де $r_k = r_k(p)$ – функції податливості термопружної основи. Побудовано формули, які пов'язують функції податливості сусідніх шарів основи.

Оскільки $\lim_{p \rightarrow \infty} r_k = 1$, то для чисельної реалізації зручно ввести модифіковані функції податливості $\tilde{r}_k$: $\tilde{r}_k = 1 - r_k$. Для двошарової основи модифіковані функції мають вигляд:

$$\tilde{r}_2 = -\frac{e^{-p_2}}{\text{sh}p_2}, \quad r_2 = \frac{\Delta_1 - 1 + Lp + \tilde{r}_2 + \tilde{r}_2(1 - Lp)e^{-p_1}}{\Delta_1 C_1 + S_1 + Lp C_1 - \tilde{r}_2(S_1 + Lp C_1)},$$

де $L = Rk_{T1}$.

Вираз для трансформанти температури набуває вигляду $\bar{T}_k(\xi, z) = (e^{-pz} + \tilde{r}_k \text{sh}pz) \eta_k$. Представлення $\bar{T}(\xi, z)$ у вище вказаному вигляді дає змогу спростити процес знаходження оригіналу температури:

$$T_k(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pz} \eta_k e^{-i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_k \operatorname{sh} pz \eta_k e^{-i\xi x} d\xi. \text{ Для заданого розподілу}$$

температури, перший доданок останньої формули можна обчислити точно, використовуючи спеціальні таблиці, а другий легко інтегрується за допомогою математичних пакетів. У подальшому планується узагальнити отримані результати на випадок багатошарової основи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : МИР, 1964. – 517 с.
2. Величко І.Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісник дніпропетровського університету. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 1. – С. 154–161.