

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**National University “Zaporizhzhia Politechnic”
Національний університет “Запорізька політехніка”**

С.П. Луцин

COURSE OF PHYSICS

Volume 2

КУРС ФІЗИКИ

Том 2

2020

УДК 53(075.8)

Л96

*Рекомендовано вченою радою Національного університету
«Запорізька політехніка» як навчальний посібник (протокол №
6/20 від 06.07.2020 р.)*

Рецензенти:

В. Г. Міщенко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної фізики і наноматеріалів Запорізького національного університету;

О. І. Шевченко, доктор філологічних наук, професор кафедри теорії та практики перекладу з англійської мови Запорізького національного університету;

О. С. Воронкін, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри природничо-наукових дисциплін та методики їх викладання Луганського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, член Американського фізичного товариства.

Л96

Луцин С.П.

Course of Physics. Volume 2. Курс фізики. Том 2. / С.П. Луцин. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 419 с.

ISBN 978-617-529-284-6

Навчальний посібник написаний у відповідності з програмою по фізиці для студентів технічних навчальних закладів вищої освіти. Том 2 навчального посібника складається з розділів, в яких викладені основи коливальних і хвильових, оптичних, елементів атомної фізики і квантової механіки, фізики твердого тіла, ядерної фізики. Цей навчальний посібник може бути використаний студентами, викладачами фізики та тими, хто цікавиться природничими науками.

The textbook is written in accordance with the program of physics and assigned for students of higher technical educational institutions. Volume 2 of the textbook consists of sections, which set out the basics of oscillations and waves, optics, elements of atomic physics and quantum mechanics, solid state physics, nuclear physics. This textbook may be used by students, teachers of physics and those who are interested in natural sciences.

УДК 53(075.8)

ISBN 978-617-529-284-6

© Луцин С.П., 2020

© Національний університет
«Запорізька політехніка», 2020

ВІД АВТОРА

Фізика є фундаментальною дисципліною, яка сприяє створенню наукової бази для формування сучасного світогляду людини на основі досягнень науки і техніки. Оволодіння знаннями сучасної фізики формує сприйняття і розуміння явищ і процесів у природі. Фізика є базовою дисципліною для підготовки висококваліфікованих фахівців технічного профілю.

Розробка і упровадження двомовної практики у навчальному процесі при викладанні курсу загальної фізики у технічному університеті із застосуванням білінгвістичного методу дозволяє вважати його прогресивним сучасним методом навчання, що дає можливість більш повно інтегруватись майбутнім фахівцям в єдиний освітній і науковий європейський простір.

Це є головною причиною, що спонукала написати двомовний навчальний посібник із синхронним перекладом тексту англійською та українською мовами. Навчальний посібник узагальнює багаторічний досвід автора викладання курсу фізики у Запорізькому національному технічному університеті студентам, що навчаються за спеціальністю «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» з поглибленим навчанням англійської мови, а також студентам спеціальності «Переклад».

Другий том навчального посібника містить базові розділи фізики, що вивчаються у технічному університеті на протязі одного семестру: коливання і хвилі, оптика, елементи атомної фізики і квантової механіки, фізики твердого тіла, ядерної фізики. Викладені розділи курсу фізики відповідають програмі по фізиці для студентів навчальних закладів вищої освіти технічного профілю. Навчальний посібник містить також ілюстративний матеріал, контрольні запитання, предметний покажчик, перелік літератури.

При написанні навчального посібника автор опирався на досвід подання матеріалу відомими фахівцями з фізики [1-13].

Автор висловлює щире вдячність рецензентам і колегам кафедри фізики Національного університету «Запорізька політехніка», що приймали участь в обговоренні змісту навчального посібника.

CONTENTS

4 OSCILLATIONS AND WAVES	14
4.1 Mechanical Oscillations.....	16
4.1.1 Harmonic Oscillations and their Characteristics.....	16
4.1.2 Velocity, Acceleration and Energy of Harmonic Oscillations.....	20
4.1.3 Spring Pendulum.....	22
4.1.4 Physical Pendulum.....	26
4.1.5 Mathematical Pendulum.....	32
4.1.6 Addition of Harmonic Oscillations with the Same Frequency and the Same Direction.....	36
4.1.7 Damped Mechanical Oscillations.....	38
4.1.8 Characteristics of Damping of Mechanical Oscillations...	42
4.1.9 Forced Mechanical Oscillations.....	44
4.2 Electromagnetic Oscillations.....	54
4.2.1 Free Electromagnetic Oscillations in a L, C -circuit.....	54
4.2.2 Free Damped Electromagnetic Oscillations in a R, L, C - circuit.....	60
4.2.3 Characteristics of Damping of Electromagnetic Oscillations.....	64
4.2.4 Forced Electromagnetic Oscillations in the R, L, C -circuit. Alternating Current.....	66
4.2.5 Addition of Resistances in the Alternating Current Circuit	72
4.2.6 Addition of Voltages in the Alternating Current Circuit...	74
4.2.7 Resonance of Voltages.....	78
4.3 Elastic Waves.....	82
4.3.1 Wave Process.....	82
4.3.2 Equation of Travelling Wave.....	86
4.3.3 Wave Equation.....	90
4.3.4 Standing Waves.....	90
4.3.5 Sound Waves.....	94
4.3.6 Musical Sounds and their Characteristics.....	100

ЗМІСТ

4 КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ	15
4.1 Механічні коливання.....	17
4.1.1 Гармонічні коливання та їх характеристики.....	17
4.1.2 Швидкість, прискорення і енергія гармонічних коливань.....	21
4.1.3 Пружинний маятник.....	23
4.1.4 Фізичний маятник.....	27
4.1.5 Математичний маятник.....	33
4.1.6 Додавання гармонічних коливань однакової частоти і однакового напрямку.....	37
4.1.7 Затухаючі механічні коливання.....	39
4.1.8 Характеристики затухання механічних коливань.....	43
4.1.9 Вимушені механічні коливання.....	45
4.2 Електромагнітні коливання.....	55
4.2.1 Вільні електромагнітні коливання в L, C -контурі.....	55
4.2.2 Вільні затухаючі електромагнітні коливання в R, L, C -контурі.....	61
4.2.3 Характеристики затухання електромагнітних коливань.....	65
4.2.4 Вимушені електромагнітні коливання в R, L, C -контурі. Змінний струм.....	67
4.2.5 Додавання опорів у колі змінного струму.....	73
4.2.6 Додавання напруг в колі змінного струму.....	75
4.2.7 Резонанс напруг.....	79
4.3 Пружні хвилі.....	83
4.3.1 Хвильовий процес.....	83
4.3.2 Рівняння біжучої хвилі.....	87
4.3.3 Хвильове рівняння.....	91
4.3.4 Стоячі хвилі.....	91
4.3.5 Звукові хвилі.....	95
4.3.6 Музичні звуки та їх характеристики.....	101

4.3.7 Sound Location.....	104
4.3.8 Doppler Effect in Acoustics.....	106
4.4 Electromagnetic Waves.....	108
4.4.1 Properties of Electromagnetic Waves.....	108
4.4.2 Maxwell's Equations.....	108
4.4.3 Differential Equation of Electromagnetic Wave.....	114
4.4.4 Energy of Electromagnetic Wave. Umov – Poynting's Vector.....	118
4.4.5 Spectrum of Electromagnetic Waves.....	118
Control Questions.....	122
5 OPTICS	124
5.1 Wave Optics.....	124
5.1.1 Interference of Light.....	124
5.1.2 Diffraction of Light.....	134
5.1.3 Diffraction of Fresnel at an Aperture.....	140
5.1.4 Diffraction of Fraunhofer at a Single Slit.....	144
5.1.5 Diffraction Grating.....	148
5.1.6 X-Ray Diffraction.....	152
5.1.7 Wulff-Bragg's Formula.....	154
5.1.8 Polarization of Light.....	156
5.2 Quantum Nature of Radiation.....	164
5.2.1 Thermal Radiation.....	164
5.2.2 Ideal Black-Body.....	168
5.2.3 Kirchhoff's Law.....	170
5.2.4 Laws of Black-Body Radiation.....	170
5.2.5 Planck's Radiation Formula.....	172
5.2.6 Application of Thermal Radiation Laws. Optical Pyrometry.....	174
5.2.7 Photoelectric Effect.....	178
5.2.8 Einstein's Theory of Photoeffect.....	184
5.2.9 Photon.....	188
5.2.10 Pressure of Light.....	190

4.3.7 Звукова локація.....	105
4.3.8 Ефект Доплера в акустиці.....	107
4.4 Електромагнітні хвилі.....	109
4.4.1 Властивості електромагнітних хвиль.....	109
4.4.2 Рівняння Максвелла.....	109
4.4.3 Диференціальне рівняння електромагнітної хвилі.....	115
4.4.4 Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Умова- Пойнтінга.....	119
4.4.5 Спектр електромагнітних хвиль.....	119
Контрольні запитання.....	123
5 ОПТИКА	125
5.1 Хвильова оптика.....	125
5.1.1 Інтерференція світла.....	125
5.1.2 Дифракція світла.....	135
5.1.3 Дифракція Френеля на круглому отворі.....	141
5.1.4 Дифракція Фраунгофера на одній щілині.....	145
5.1.5 Дифракційна ґратка.....	149
5.1.6 Дифракція рентгенівського випромінювання.....	153
5.1.7 Формула Вульфа-Брегга.....	155
5.1.8 Поляризація світла.....	157
5.2 Квантова природа випромінювання.....	165
5.2.1 Теплове випромінювання.....	165
5.2.2 Абсолютно чорне тіло.....	169
5.2.3 Закон Кірхгофа.....	171
5.2.4 Закони випромінювання абсолютно чорного тіла.....	171
5.2.5 Формула випромінювання Планка.....	173
5.2.6 Застосування законів теплового випромінювання. Оптична пірометрія.....	175
5.2.7 Фотоелектричний ефект.....	179
5.2.8 Теорія фотоэффекту Ейнштейна.....	185
5.2.9 Фотон.....	189
5.2.10 Тиск світла.....	191

5.2.11 Compton's Effect.....	192
5.2.12 Corpuscular-Wave Dualism of Light.....	198
Control Questions.....	202
6 ELEMENTS OF ATOMIC PHYSICS AND QUANTUM MECHANICS.....	204
6.1 Atomic Physics.....	204
6.1.1 Thomson and Rutherford Models of Atom.....	204
6.1.2 Atomic Spectra.....	208
6.1.3 Bohr's Theory.....	212
6.1.4 Franck and Hertz's Experiments.....	214
6.1.5 Bohr's Theory of Hydrogen Atom and its Spectrum.....	220
6.2 Elements of Quantum Mechanics.....	226
6.2.1 Wave Properties of Particles.....	226
6.2.2 Uncertainty Principle.....	230
6.2.3 Wave Function.....	234
6.2.4 Schrödinger's Equation.....	238
6.2.5 Motion of a Free Particle and its Energetic Spectrum.....	240
6.2.6 Particle in One-Dimensional Infinitely Deep Potential Well.....	244
6.2.7 Tunneling the Particle Through a Potential Barrier. Tunnel Effect.....	250
6.2.8 Hydrogen Atom in Quantum Mechanics.....	256
6.2.9 Quantum Numbers.....	258
6.2.10 Types of Wave Functions.....	268
6.2.11 Pauli's Principle. Distribution of Electrons in Atom at States.....	270
6.2.12 Structure of Electron Shells in Mendeleev's Periodic System of Elements.....	274
Control Questions.....	282
7 ELEMENTS OF SOLID STATE PHYSICS.....	284
7.1 Elements of Quantum Statistics.....	284

5.2.11 Ефект Комптона.....	193
5.2.12 Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла.....	199
Контрольні запитання.....	203
6 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ І КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ.....	205
6.1 Атомна фізика.....	205
6.1.1 Моделі атома Томсона і Резерфорда.....	205
6.1.2 Атомні спектри.....	209
6.1.3 Теорія Бора.....	213
6.1.4 Досліди Франка і Герца.....	215
6.1.5 Теорія атома водню по Бору і його спектр.....	221
6.2 Елементи квантової механіки.....	227
6.2.1 Хвильові властивості частинок.....	227
6.2.2 Співвідношення невизначеностей.....	231
6.2.3 Хвильова функція.....	235
6.2.4 Рівняння Шредінгера.....	239
6.2.5 Рух вільної частинки і її енергетичний спектр.....	241
6.2.6 Частинка в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі.....	245
6.2.7 Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Тунельний ефект.....	251
6.2.8 Атом водню в квантовій механіці.....	257
6.2.9 Квантові числа.....	259
6.2.10 Види хвильових функцій.....	269
6.2.11 Принцип Паулі. Розподіл електронів в атомі по станах.....	271
6.2.12 Структура електронних оболонок у періодичній системі елементів Менделєєва.....	275
Контрольні запитання.....	283
7 ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	285
7.1 Елементи квантової статистики.....	285

7.1.1 Phase Space. Function of Distribution.....	286
7.1.2 Quantum Statistics of Fermi-Dirac and Bose-Einstein.....	286
7.1.3 Energy Distribution of Electrons in Metals. Fermi Energy	290
7.1.4 Internal Energy and Heat Capacity of Electron Gas.....	294
7.1.5 Heat Capacity of Solids. Phonons.....	296
7.1.6 Quantum Theory of Metal Electronic Conductivity.....	308
7.1.7 Superconductivity.....	314
7.2 Band Theory of Solids.....	320
7.2.1 Band Structure of Solids.....	320
7.2.2 Metals, Dielectrics and Semiconductors.....	326
7.2.3 Semiconductors.....	332
7.2.3.1 Intrinsic Semiconductors.....	332
7.2.3.2 Extrinsic Semiconductors.....	338
7.2.4 <i>P-n</i> Junction.....	344
7.2.5 Semiconductors Photoconductivity.....	352
7.2.6 Luminescence of Solids.....	358
7.2.7 Absorption, Spontaneous and Induced Radiation.....	364
7.2.8 Laser.....	368
Control Questions.....	370
8 ELEMENTS OF NUCLEAR PHYSICS.....	372
8.1 The Structure of Atomic Nucleus.....	372
8.2 Binding Energy and Mass Defect of Nucleus.....	376
8.3 Nuclear Forces.....	378
8.4 Radioactivity.....	382
8.5 Radioactive Decay Law.....	384
8.6 Nuclear Reactions.....	388
8.7 Nuclear Fission Reactions.....	392
8.8 Chain Fission Reactions.....	394
8.9 Nuclear Reactor.....	396
8.10 Nuclear Fusion.....	400
8.11 Elementary Particles.....	402

7.1.1 Фазовий простір. Функція розподілу.....	287
7.1.2 Квантова статистика Фермі-Дірака і Бозе-Ейнштейна.	287
7.1.3 Розподіл електронів в металах за енергіями. Енергія Фермі.....	291
7.1.4 Внутрішня енергія і теплоємність електронного газу..	295
7.1.5 Теплоємність твердих тіл. Фонони.....	297
7.1.6 Квантова теорія електронної провідності металів.....	309
7.1.7 Надпровідність.....	315
7.2 Зонна теорія твердих тіл.....	321
7.2.1 Зонна структура твердих тіл.....	321
7.2.2 Метали, діелектрики і напівпровідники.....	327
7.2.3 Напівпровідники.....	333
7.2.3.1 Власні напівпровідники.....	333
7.2.3.2 Домішкові напівпровідники.....	339
7.2.4 <i>P-n</i> перехід.....	345
7.2.5 Фотопровідність напівпровідників.....	353
7.2.6 Люмінесценція твердих тіл.....	359
7.2.7 Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання..	365
7.2.8 Лазер.....	369
Контрольні запитання.....	371
8 ЕЛЕМЕНТИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ	373
8.1 Склад атомного ядра.....	373
8.2 Енергія зв'язку та дефект маси ядра.....	377
8.3 Ядерні сили.....	379
8.4 Радіоактивність.....	383
8.5 Закон радіоактивного розпаду.....	385
8.6 Ядерні реакції.....	389
8.7 Ядерні реакції поділу.....	393
8.8 Ланцюгова реакція поділу.....	395
8.9 Ядерний реактор.....	397
8.10 Ядерний синтез.....	401
8.11 Елементарні частинки.....	403

Control Questions.....	408
Subject Index.....	410
References.....	418

Контрольні запитання.....	409
Предметний покажчик.....	410
Література.....	418

4 OSCILLATIONS AND WAVES

Oscillations are processes of changing in the state of the physical system, which are characterized by a certain recurrence over time. There are different types of oscillations: periodic, quasi-periodic, aperiodic, antiperiodic. We will consider periodic oscillations. Oscillations are called periodic if the values of physical quantities that characterize the physical system and change during oscillations take the same values at equal time intervals.

Oscillations surround us everywhere: oscillations of water on the sea surface, oscillations of the earth's crust, oscillations of strings, oscillations of electric and magnetic fields, oscillations of atoms in solids, etc. Modern branches of technology - radio engineering, television, mobile communications based on laws oscillating systems. A number of properties of solids, such as electrical conductivity, heat capacity, change in aggregative states, cannot be explained without considering the oscillatory motion of atoms around their equilibrium state.

Proceeding from the nature there are mechanical, electromechanical, electromagnetic oscillations, etc. Mechanical oscillations are oscillations of pendulums, strings, parts of vehicles and mechanisms, etc. Electromechanical oscillations are oscillations of a telephone membrane, diffuser of electrodynamical loudspeaker, piezoelectric, etc. Electromagnetic oscillations are alternating current, change of electromagnetic field, etc.

Proceeding from external forces, that acting at the system, there are free (or own), forced, parametric oscillations and self-oscillations.

Free oscillations occur at the expense of initially given energy if there is no further action of force on the system. Forced oscillations occur under the action of an external periodic variable force. Self-oscillations occur under the action of external forces, the moments of action of which are set by the oscillating system itself, i.e. the system by itself controls the external action.

4. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

Коливаннями називаються процеси зміни стану фізичної системи, для яких характерна певна повторюваність у часі. Існують різні види коливань: періодичні, квазіперіодичні, аперіодичні, антиперіодичні. Нами будуть розглядатись періодичні коливання. Коливання називаються періодичними, якщо значення фізичних величин, які характеризують фізичну систему і змінюються в процесі коливань, приймають однакові значення через рівні проміжки часу.

Коливання оточують нас усюди: коливання води на поверхні моря, коливання земної кори, коливання струни, коливання електричного і магнітного полів, коливання атомів в твердих тілах і т. д. Сучасні галузі техніки - радіотехніка, телебачення, мобільний зв'язок засновані на законах коливальних систем. Ряд властивостей твердих тіл, таких, як електропровідність, теплоємність, зміна агрегатних станів не можна пояснити без розгляду коливального руху атомів навколо їх стану рівноваги.

Залежно від фізичної природи розрізняють механічні, електромеханічні, електромагнітні коливання і т. д. Механічні коливання – це коливання маятників, струн, частин машин і механізмів і т. д. Електромеханічні коливання – це коливання мембрани телефону, дифузора електродинамічного гучномовця, п'єзоелемента і т. д. Електромагнітні коливання – це змінний струм, зміна електромагнітного поля і т. д.

Залежно від характеру дії сил на систему розрізняють вільні (або власні), вимушені, параметричні коливання та автоколивання.

Вільні коливання відбуваються за рахунок початково наданої енергії за відсутності дальшої дії на систему зовнішніх сил. Вимушені коливання відбуваються під дією зовнішньої періодичної змінної сили. Автоколивання відбуваються під дією зовнішніх сил, моменти дії яких задаються самою коливальною системою, тобто система сама управляє зовнішньою дією.

Parametric oscillations occur when any parameter of the system changes under the action of an external force.

There are undamped and damped oscillations proceeding from the energy changing. Undamped are oscillations with stable amplitude without energy loss in oscillating system. Damped oscillations are oscillations which amplitude decreases with the time due to energy losses in oscillating system.

There are harmonic and inharmonic oscillations proceeding from the functional dependence. Harmonic are oscillations during which value of physical quantity changes with time by the sine or cosine law. Inharmonic oscillations are oscillations that do not satisfy the function of sine or cosine.

4.1 Mechanical Oscillations

4.1.1 Harmonic Oscillations and their Characteristics

The simplest type of oscillations is harmonic oscillations. Harmonic oscillation is the periodic variation in a physical quantity within the time which can be expressed as a sine or cosine function:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.1)$$

where x is the displacement of oscillation point,

A is the amplitude of oscillatory motion,

ω_0 is called the cyclic frequency,

φ_0 is the starting phase.

Characteristics of harmonic oscillations:

-the amplitude A is the maximum value of oscillating values;

-the period T is the time of one complete oscillation;

-the frequency ν is the number of oscillations per unit of time:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

Параметричні коливання відбуваються при зміні будь-якого параметра системи під дією зовнішньої сили.

Залежно від зміни енергії коливальної системи розрізняють незатухаючі та затухаючі коливання. Незатухаючими коливаннями називаються коливання які відбуваються з постійною амплітудою без втрат енергії коливальної системи. Затухаючими коливаннями називають коливання, амплітуда яких зменшується з часом в наслідок втрат енергії коливальної системи.

Залежно від функціональної залежності розрізняють гармонічні і негармонічні коливання. Гармонічними коливаннями називають коливання, при яких значення фізичних величин змінюється з часом за законом синуса або косинуса. Негармонічними коливаннями називають коливання які не задовольняють функції синуса або косинуса.

4.1 Механічні коливання

4.1.1 Гармонічні коливання та їх характеристики

Найпростішим типом коливань є гармонічні коливання. При гармонічних коливаннях відбувається періодична зміна фізичних величин з часом за законом синуса або косинуса:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.1)$$

де x – зміщення коливної точки,

A – амплітуда коливального руху,

ω_0 – циклічна частота,

φ_0 – початкова фаза.

Характеристики гармонічних коливань:

-амплітуда коливань A – максимальне значення величин, що коливається;

-період коливань T є часом одного повного коливання;

-частота коливань ν є кількістю коливань за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

$$[\nu] = \text{Hz};$$

-the cyclic frequency ω_0 is equal to the number of oscillations per 2π seconds

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu,$$

$$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

-the phase at the moment of time t :

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0;$$

-the initial phase of oscillations φ_0 at the moment of time $t = 0$.

Any harmonic oscillation can be illustrated graphically by the graph or by the vector diagram. Fig. 4.1 represents graph of function

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.2)$$

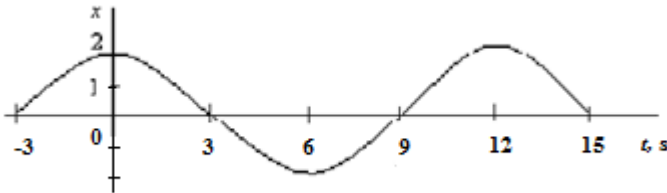


Figure 4.1

The method of vector diagrams is that harmonic oscillations can be represented as a vector rotating on a plane. To do this, consider the rotation with angular velocity and the initial phase of oscillations φ_0 of the vector \vec{A} , the modulus of which is equal to the amplitude of oscillations. The projection of this vector on the axis performs harmonic oscillations. If the oscillating quantity is represented by a complex number, then the equation of harmonic oscillations (1.1) in the complex form is written:

$$[\nu] = \text{Гц};$$

-циклічна частота ω_0 дорівнює кількості коливань за 2π

секунд

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu,$$

$$[\omega_0] = \frac{\text{рад.}}{\text{с}};$$

-фаза коливань в момент часу t :

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0;$$

-початкова фаза коливань φ_0 в момент часу $t = 0$.

Будь-яке гармонічне коливання може бути зображено графічно за допомогою графіка або векторної діаграми. На рис. 4.1. зображено графік функції

$$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.2)$$

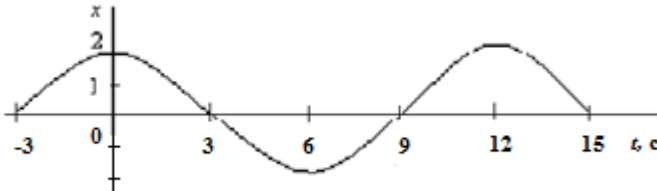


Рисунок 4.1.

Метод векторних діаграм полягає в тому, що гармонічні коливання можна зобразити у вигляді вектора, що обертається на площині. Для цього розглядають обертання з кутовою швидкістю ω_0 і початковою фазою коливань φ_0 вектора \vec{A} , модуль якого дорівнює амплітуді коливань. Проекція цього вектора на ось здійснює гармонічні коливання. Якщо величину, що коливається представити комплексним числом, то рівняння гармонічних коливань (1.1) у комплексному вигляді запишеться:

$$x = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)},$$

where $i = \sqrt{-1}$ is called imaginary unit.

Now let's plot a vector diagram of harmonic oscillations that occur according to the equation (1.2):

$$x = 2e^{i(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4})}.$$

The vector \vec{A} is 2 m long and it is under the initial angle $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ rad.

The vector rotates clockwise with angular velocity of $\omega_0 = \frac{\pi}{6}$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(Fig.4.2.).

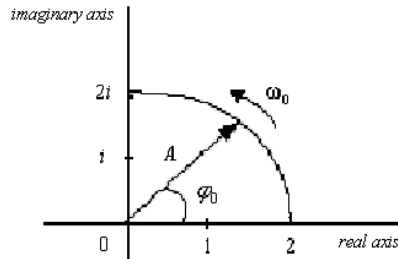


Figure 4.2

4.1.2 Velocity, Acceleration and Energy of Harmonic Oscillations

Respective formulas for velocity, acceleration and energy of harmonic oscillations can easily be derived from the equation of oscillations of material point

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

The velocity of harmonic oscillation of material point is

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

The acceleration of harmonic oscillation of material point is

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$$x = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)},$$

де $i = \sqrt{-1}$ називається уявною одиницею.

Побудуємо векторну діаграму гармонічних коливань, що відбуваються згідно рівняння (1.2):

$$x = 2e^{i(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4})}.$$

Вектор \vec{A} має довжину 2 м і розташований під початковим кутом $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ рад. Вектор обертається проти часової стрілки з кутовою швидкістю $\omega_0 = \frac{\pi}{6} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ (рис.4.2).

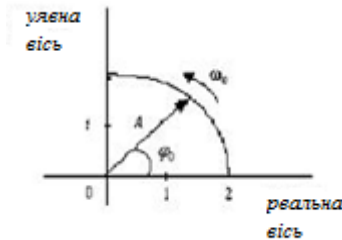


Рисунок 4.2.

4.1.2 Швидкість, прискорення і енергія гармонічних коливань

Відповідні формули для швидкості, прискорення і енергії гармонічних коливань можна отримати з рівняння коливань матеріальної точки:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Швидкість гармонічних коливань матеріальної точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Прискорення гармонічних коливань матеріальної точки:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

The kinetic and potential energy of harmonic oscillations of the material point:

$$E_{kin} = \frac{m v^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

$$E_{pot} = \frac{k x^2}{2} = \frac{k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)],$$

where

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, k = m \omega_0^2.$$

Consequently, the total energy of oscillations of material point is

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2}.$$

In the process of harmonic oscillations the potential energy transforms into the kinetic energy and vice versa.

4.1.3 Spring Pendulum

Let's consider the oscillations of the spring pendulum. It consists of a load with mass m , which is fastened on absolutely elastic spring and oscillates under elastic force $F = -kx$, where k is a coefficient of elasticity (Fig. 4.3).

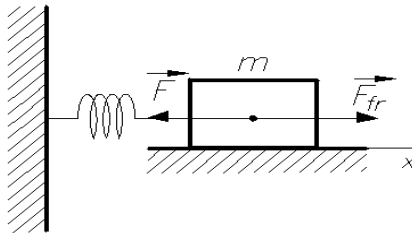


Figure 4.3

Кінетична і потенціальна енергія гармонічних коливань матеріальної точки:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)],$$

де

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, k = m\omega_0^2.$$

Отже, повна механічна енергія коливань матеріальної точки дорівнює:

$$E = E_k + E_n = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

В процесі гармонічних коливань потенціальна енергія перетворюється в кінетичну енергію і навпаки.

4.1.3 Пружинний маятник

Розглянемо коливання пружинного маятника. Він складається з вантажу масою m , який закріплений на абсолютно пружкій пружині і здійснює коливання під дією пружної сили $F = -kx$, де k – коефіцієнт пружності (рис. 4.3).

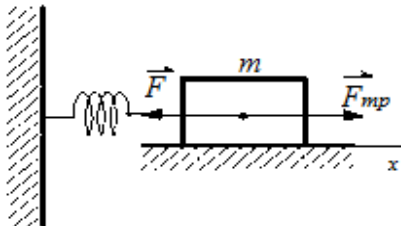


Рисунок 4.3.

The friction force is considered to be negligible $F_{fr} = 0$, m and k are known. We need to find the equation $x = f(t)$.

The respective equation can be deduced from the Newton's second law:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}.$$

The only force along x -axis is the force of elasticity. Thus

$$\sum F_i = -kx.$$

Consequently,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$$

if

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

then

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0. \quad (4.3)$$

This is the differential equation of spring pendulum oscillations as it contains the second derivative of displacement with respect to time.

The solution of this equation may be written as:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

where A , ω_0 and φ_0 are constants.

It can be easily proved:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituting (4.4) into (4.3) we obtain:

Припустимо, що сила тертя незначна $F_{тер} = 0$, m і k відомі.

Нам необхідно знайти рівняння $x = f(t)$.

Відповідне рівняння може бути виведене з другого закону Ньютона:

$$\bar{a} = \frac{\sum \bar{F}_i}{m}.$$

Єдиною силою уздовж осі x є пружна сила. Тому

$$\sum_i F_i = -kx.$$

Тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$$

якщо

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.3)$$

Це є диференціальне рівняння коливань пружинного маятника, тому що воно містить другу похідну зміщення по часу.

Розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де A , ω , φ_0 – сталі величини.

Це можна легко довести:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.4)$$

Підставивши (4.4) в (4.3), ми отримаємо:

$$-\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0.$$

This proves that the solution of the differential equation is correct.

It should be emphasized that this solution isn't the only one. The following solutions are true also

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

in the complex form

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}.$$

Value of ω_0 is called a cyclic frequency of the spring pendulum oscillations and it is defined by the formula:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

The period of spring pendulum oscillations is defined by the formula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4.1.4 Physical pendulum

The solid body oscillating under the action of gravity force around the fixed horizontal axis that doesn't pass through the gravity center of a body is called physical pendulum (Fig.4.4).

In equilibrium position, the center of mass C of the physical pendulum is on a vertical line with the suspension point O and is located below it. If you deviate the physical pendulum from the equilibrium position by some angle α , then there is a torque of gravity. In this position, the force of gravity is resolved into two components: the restoring force F_τ , which returns the pendulum to equilibrium, and the force F_n , balanced by the reaction of the support. The restoring force F_τ is equal to

$$F_\tau = -P \sin \alpha = -mg \sin \alpha.$$

The restoring force arm is l . Then the restoring moment

$$-\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \omega_0^2 + A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0.$$

Це доводить, що розв'язок диференціального рівняння правильний.

Потрібно відмітити, що цей розв'язок не єдиний. Наступний розв'язок теж вірний:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

у комплексній формі:

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}.$$

Величина ω_0 називається циклічною частотою коливань пружинного маятника і визначається за формулою:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Період коливань пружинного маятника визначається за формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4.1.4 Фізичний маятник

Тверде тіло, яке коливається під дією сили тяжіння навколо нерухомої горизонтальної осі, що не проходить через центр мас тіла, називається фізичним маятником (рис.4.4).

У стані рівноваги центр мас C фізичного маятника знаходиться на вертикальній лінії з точкою підвісу O і розташований нижче від неї. Якщо відхилити фізичний маятник від положення рівноваги на деякий кут α , то виникає обертальний момент сили тяжіння. У такому положенні сила тяжіння розкладається на дві складові: зворотну силу F_τ , що повертає маятник у стан рівноваги, і силу F_n , що зрівноважується реакцією опори. Зворотна сила F_τ дорівнює:

$$F_\tau = -P \sin \alpha = -mg \sin \alpha.$$

Плече зворотної сили F_τ дорівнює l . Тоді обертальний момент

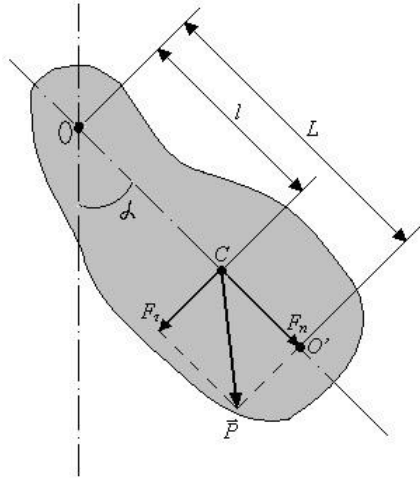


Figure 4.4

of the force of gravity is

$$M = F_{\tau} l = -mgl \sin \alpha ,$$

where m is the mass of a the pendulum, l is the arm of restoring force, it is equal to the distance between the point of suspension O and the center of the body masses C , α is the deviation angle.

According to the main law of dynamics of rotational motion:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\alpha}{dt^2} .$$

So,

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha ,$$

where I is the moment of inertia of a body around the axis of rotation which crosses the point O .

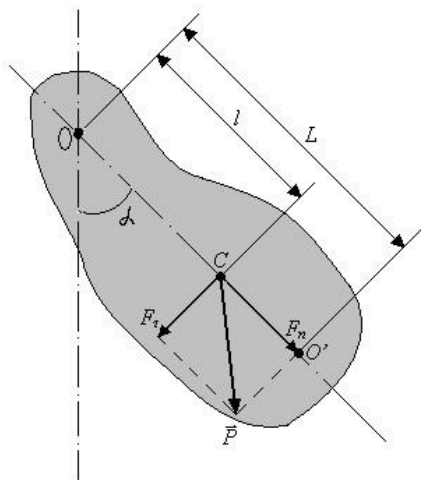


Рисунок 4.4.

сили тяжіння дорівнює:

$$M = F_{\tau} l = -mgl \sin \alpha ,$$

де m - маса маятника, l - плече зворотної сили, що дорівнює відстані між точкою підвісу O і центром мас тіла C , α - кут відхилення.

Згідно основного закону динаміки обертального руху твердого тіла:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\alpha}{dt^2} .$$

Отже,

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha ,$$

де I - момент інерції тіла відносно осі обертання, що проходять через точку O .

If the deviation angle α is so small that $\sin\alpha \approx \alpha$, we'll obtain the differential equation:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0.$$

Let's denote

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I},$$

then we obtain the differential equation of harmonic oscillations of the physical pendulum:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

where $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$ is the cyclic frequency.

The solution of this differential equation is

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Therefore, at small deviation angles the physical pendulum performs harmonic oscillations with frequency ω_0 . The period of the physical pendulum oscillations is equal to

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

where the value of $L = \frac{I}{ml}$ is called the reduced length of a physical pendulum.

If we compare the formulas of the period of oscillation of the physical and the mathematical pendulum, we can conclude that the mathematical pendulum will have the same period of oscillation as the physical pendulum, if its length is equal to the reduced length of the physical pendulum.

The point O' is called the oscillatory center of the physical pendulum. Points O and O' has the property of interchangeability. If points O and O' change with each other the period of oscillations will be the same.

Якщо кут відхилення α настільки малий, що $\sin \alpha \approx \alpha$, то ми отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0.$$

Позначивши

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I},$$

отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань фізичного маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

де $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$ - циклічна частота.

Розв'язком цього диференціального рівняння є:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Отже, при малих кутах відхилення фізичний маятник здійснює гармонічні коливання з частотою ω_0 . Період коливань фізичного маятника дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

де величина $L = \frac{I}{ml}$ називається зведеною довжиною фізичного маятника.

Якщо порівняти формули періоду коливань фізичного і математичного маятника, то можна зробити висновок, що математичний маятник матиме такий самі період коливань, як і фізичний маятник, якщо його довжина буде дорівнювати зведеній довжині фізичного маятника.

Точка O' називається центром качання фізичного маятника. Точки O і O' мають властивості взаємозамінності. Якщо точки O і O' замінити одна одною, то період коливань фізичного маятника буде однаковим.

4.1.5 Mathematical Pendulum

The point mass suspended by means of a weightless inextensible thread that oscillates under the force of gravity is called the mathematical pendulum (Fig. 4.5).

The restoring force is the projection of the force of gravity $P = mg$ in the direction of motion of the point mass. In this case

$$F = P \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha ,$$

where α is the deviation angle of pendulum from equilibrium position.

From Fig.4.5 we can see that

$$\sin \alpha = \frac{x}{l} .$$

If the angle α is so small that $\sin \alpha \approx \alpha$, then

$$F = mg\alpha$$

and oscillations are harmonic.

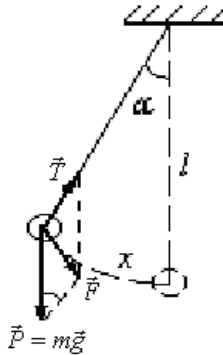


Figure 4.5

Since \vec{F} force is always directed to the equilibrium position that is why it has the opposite sign with respect to the displacement of x :

$$F = -mg\alpha .$$

The Newton's second law is

$$ma = -mg\alpha ,$$

4.1.5 Математичний маятник

Точкова маса, яка підвішена на невагомій і не розтяжній нитці, що коливається під дією сили тяжіння називається математичним маятником (рис. 4.5).

Зворотна сила є проекцією сили тяжіння $P = mg$ у напрямку руху точкової маси. В даному випадку:

$$F = P \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha,$$

де α - це кут відхилення маятника від положення рівноваги.

Із рис. 4.5 видно, що

$$\sin \alpha = \frac{x}{l}.$$

Якщо кут α малий настільки, що $\sin \alpha \approx \alpha$, тоді:

$$F = mg\alpha$$

і коливання є гармонічними.

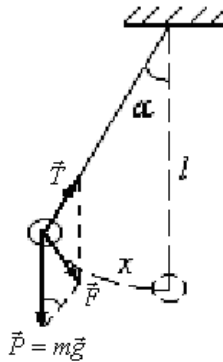


Рисунок 4.5.

Так як сила \vec{F} завжди напрямлена до положення рівноваги, то вона має протилежний знак по відношенню до зміщення x :

$$F = -mg\alpha.$$

Другий закон Ньютона запишеться у вигляді:

$$ma = -mg\alpha,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg\alpha,$$

where $x = l\alpha$.

Then

$$l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -g\alpha,$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0.$$

If denoted

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2,$$

then we obtain the differential equation of the harmonic oscillations of the mathematical pendulum:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

The solution for this equation is

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

The cyclic frequency of oscillations ω_0 is equal to

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

The period of the mathematical pendulum oscillations is equal to

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

A physical system that is described by the differential equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

is called the harmonic oscillator. Spring, physical and mathematical pendulums are the harmonic oscillators.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg\alpha,$$

де $x = l\alpha$.

Тоді

$$l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -g\alpha,$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0.$$

Якщо позначити

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2,$$

то ми отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань математичного маятника:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Розв'язком цього диференціального рівняння є:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Циклічна частота коливань ω_0 дорівнює:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Період коливань математичного маятника дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Фізична система, яка описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

називається гармонічним осцилятором. Пружинний, фізичний, математичний маятники є гармонічними осциляторами.

4.1.6 Addition of Harmonic Oscillations with the Same Frequency and the Same Direction

Let the body take part in two harmonic oscillations. Let's assume that oscillations occur with the same frequencies in the same direction. But amplitudes and initial phases of oscillations are different. Equations of these oscillations are

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}.$$

In complex form:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \\ x_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}.$$

The resultant displacement is equal to the sum of independent displacements. For addition of harmonic oscillations would be advisable to use the method of vector diagrams (Fig. 4.6).

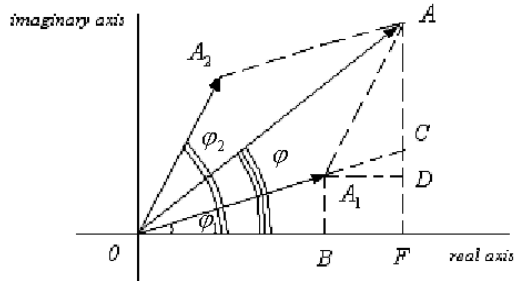


Figure 4.6

Since vectors of amplitudes rotate with the same cyclic frequency ω_0 , the phase difference between them remains constant and the resultant oscillation vector also rotates with frequency ω_0 . Then the equation of resultant oscillation will also be harmonic:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

where A is the amplitude of a resulting oscillation; φ is its phase.

To determine the values of A and φ , let's consider $\triangle OAA_1$ (Fig. 4.6). According to the theorem of cosines:

4.1.6 Додавання гармонічних коливань однакової частоти і однакового напрямку

Нехай тіло бере участь у двох гармонічних коливаннях. Припустимо, що коливання відбуваються з однаковими частотами в однаковому напрямку. Але амплітуди і початкові фази коливань різні. Рівняння цих коливань:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}.$$

У комплексній формі:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} \\ x_2 = A_2 e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)} \end{cases}.$$

Результуюче зміщення тіла дорівнює сумі незалежних зміщень. Для додавання гармонічних коливань доцільно застосувати метод векторних діаграм (рис.4.6).

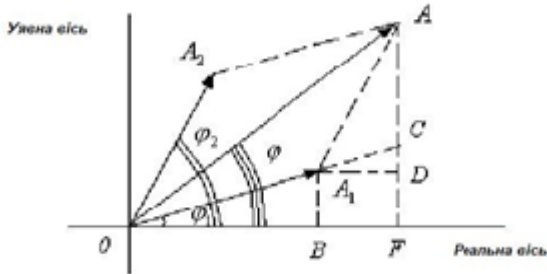


Рисунок 4.6

Так як вектори амплітуд обертаються з однаковою циклічною частотою ω_0 , то різниця фаз між ними залишається сталою, і вектор результуючого коливання також обертається з частотою ω_0 . Тоді рівняння результуючого коливання буде також гармонічним:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

де A - амплітуда результуючого коливання; φ - початкова фаза.

Для визначення значень A та φ розглянемо $\triangle OAA_1$ (рис. 4.6). За теоремою косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AF}{OF} = \frac{AD + DF}{OB + BF},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Addition of two harmonic oscillations of the same frequency and the same direction gives the resultant harmonic oscillation with the same frequency and direction. The amplitude of the resultant oscillation depends on amplitudes and the difference of initial phases of the added oscillations.

4.1.7 Damped Mechanical Oscillations

Oscillatory motion as a rule occurs in the presence of friction forces. These forces result in transformation of mechanical energy into heat. As a result the amplitude of the oscillations gradually decreases tending to zero.

Oscillations, the amplitude of which decreases with the time is caused by energy losses of oscillating system, are called damped oscillations.

Let's consider the spring pendulum (Fig.4.3). There are two forces acting on the body: the elastic force $F = -kx$ and the friction viscous force $F_{fr} = -r\dot{x}$. Consequently, according to the Newton's second law:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\dot{x},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Let's denote

$$\frac{r}{m} = 2\delta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2.$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AF}{OF} = \frac{AD + DF}{OB + BF},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Додавання двох гармонічних коливань однакової частоти і однакового напрямку дає результуюче гармонійне коливання такої самої частоти і напрямку. Амплітуда результуючого коливання залежить від амплітуд і різниці початкових фаз коливань, що додаються.

4.1.7 Затухаючі механічні коливання

Коливальний рух, як правило, відбувається за наявності сил тертя. Ці сили приводять до перетворення механічної енергії в тепло. В результаті амплітуда коливань поступово зменшується, наближаючись до нуля.

Коливання, амплітуда яких з часом зменшується із-за втрат енергії коливальної системи, називаються затухаючими коливаннями.

Розглянемо пружинний маятник (рис.4.3). На тіло діють дві сили: сила пружності $F = -kx$ і сила опору $F_{on} = -r\dot{x}$. Тому згідно з другим законом Ньютона:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\dot{x},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Позначимо:

$$\frac{r}{m} = 2\delta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2.$$

The value of δ is called the coefficient of damping, ω_0 - its own cyclic frequency of free oscillations of the system.

Then we obtain:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0.$$

Thus, we derived the differential equation of damped free mechanical oscillations.

The solution of this differential equation may be expressed as:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

where ω is the cyclic frequency of damped oscillations. We should not confuse ω_0 and ω . Value of ω_0 is the cyclic frequency of free oscillations in the absence of friction. Value of ω is the cyclic frequency of the damped oscillations:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Therefore, the cyclic frequency of damping oscillations is always less than the cyclic frequency of free oscillations of the system $\omega < \omega_0$.

The graph of damped oscillation is shown in Fig. 4.7.

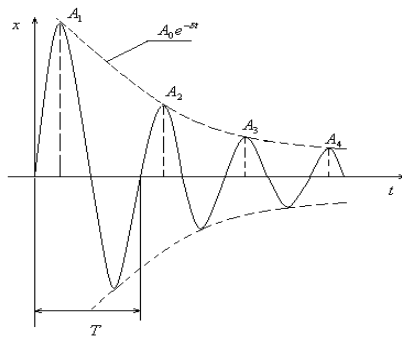


Figure 4.7

Величина δ називається коефіцієнтом затухання, ω_0 – власна циклічна частота вільних коливань системи.

Тоді ми отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Отже, ми вивели диференціальне рівняння затухаючих вільних механічних коливань.

Розв'язок цього диференціального рівняння можна записати у вигляді:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де ω - циклічна частота затухаючих коливання. Не треба плутати ω_0 і ω . Значення ω_0 є циклічною частотою вільних коливань при відсутності тертя. Значення ω є циклічною частотою затухаючих коливань.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Тому, циклічна частота затухаючих коливань завжди менша від циклічної частоти власних коливань системи $\omega < \omega_0$.

Графік затухаючих коливань зображено на рис. 4.6.

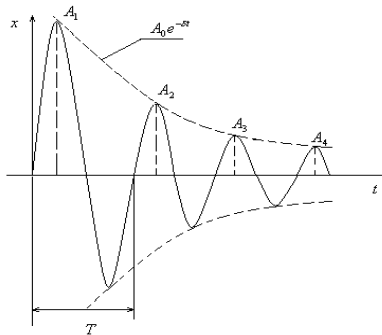


Рисунок 4.7

The period of damped oscillations is

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

4.1.8 Characteristics of Damping of Mechanical Oscillations

An oscillating mechanical system has definite characteristics of damping.

1. The damping coefficient δ defines the velocity of damping of oscillations:

$$\delta = \frac{r}{2m}.$$

The more is δ the faster system oscillations are damping.

The unit of damping coefficient δ :

$$[\delta] = \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{kg}} = \text{s}^{-1}.$$

2. The relaxation time τ is the time interval during which the amplitude of oscillations decreases in e times. Then, when $t = \tau$

$$A_0 e^{-\delta t} = \frac{A_0}{e},$$

$$\delta \tau = 1,$$

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

The relaxation time τ is a physical quantity inverted to the damping coefficient δ .

3. The decrement of damping D is defined by the ration of the amplitudes of two consecutive oscillations which occur with the period T :

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

Період затухаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

4.1.8 Характеристики затухання механічних коливань

Коливальна механічна система має певні характеристики затухання.

1. Коефіцієнт затухання δ визначає швидкість затухання коливань:

$$\delta = \frac{r}{2m}.$$

Чим більшим є δ , тим швидше відбувається затухання коливань системи.

Одиниця вимірювання коефіцієнта затухання δ :

$$[\delta] = \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{кг}} = \text{с}^{-1}.$$

2. Час релаксації τ - це проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів. Тоді при $t = \tau$

$$\begin{aligned} A_0 e^{-\delta t} &= \frac{A_0}{e}, \\ \delta \tau &= 1, \\ \tau &= \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Час релаксації τ є фізична величина, обернена до коефіцієнта затухання δ .

3. Декремент затухання D визначається відношенням амплітуд двох послідовних коливань, які відбуваються через період T :

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

4. The logarithm decrement of damping λ is the natural logarithm of damping decrement

$$\lambda = \ln D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{t} = \frac{1}{N_e},$$

where $N_e = \frac{\tau}{T}$ is the number of oscillations for relaxation time τ during which the amplitude of oscillations decreases in e times.

So, the logarithmic decrement of damping is a physical value opposite to the number of oscillations N_e in which the amplitude of oscillations decreases in e times.

5. The quality Q of the oscillating system is equal to the product of 2π by ratio of the energy of oscillations at the arbitrary moment of time t by the decrease of this energy for the period T :

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

where $\Delta E = E(t) - E(t+T)$ is the drop in system energy over the period.

The quality Q can also be determined as

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e.$$

So, the quality Q is proportional to the number of oscillations N_e during which the amplitude decreases in e times. The quality is non-dimensional quantity:

$$[Q]=1.$$

4.1.9 Forced Mechanical Oscillations

The oscillations of a physical system under the action of a periodic alternating external force are called forced oscillations. The action of the external force can periodically replenish the loss of mechanical energy of the system to work against the forces of resistance. Let's consider the forced oscillations of a spring pendulum (Fig. 4.8).

4. Логарифмічний декремент затухання λ – це натуральний логарифм декремента затухання:

$$\lambda = \ln D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{t} = \frac{1}{N_e},$$

де $N_e = \frac{\tau}{T}$ - число коливань за час релаксації τ , за який амплітуда коливань зменшується в e разів.

Отже, логарифмічний декремент затухання є фізична величина, обернена до кількості коливань N_e , за які амплітуда коливань зменшується в e разів.

5. Добротність Q коливальної системи дорівнює добутку 2π на відношення енергії коливань системи в довільний момент часу t до зменшення цієї енергії за період T :

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

де $\Delta E = E(t) - E(t+T)$ є зменшенням енергії системи за період.

Добротність Q може бути визначена також як:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e.$$

Тобто, добротність Q прямо пропорційна числу коливань N_e , за які амплітуда зменшується в e разів. Добротність є безрозмірною величиною:

$$[Q]=1.$$

4.1.9 Вимушені механічні коливання

Коливання фізичної системи під дією зовнішньої періодичної змінної сили називаються вимушеними коливаннями. Дія зовнішньої сили дозволяє періодично поповнювати втрати механічної енергії системи на роботу проти сил опору. Розглянемо вимушені коливання пружинного маятника (рис. 4.8).

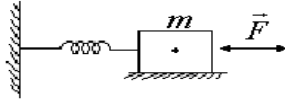


Figure 4.8

The external force applied to the body varies according to harmonic law and it is called forced:

$$F = F_0 \cos \omega t ,$$

where F_0 is the amplitude of force and ω is its cyclic frequency.

Let's assume that the values that characterize the oscillations of the spring pendulum are given: $k, m, r, \delta = \frac{r}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, F_0, \omega$.

Our aim is to estimate A as the amplitude of forced oscillations and φ as the phase difference between the force and the displacement of the pendulum under consideration.

Applying Newton's second law we obtain:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t ,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t .$$

Let's denote

$$\frac{r}{m} = 2\delta;$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2;$$

$$\frac{F_0}{m} = f_0 .$$

Then

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t .$$

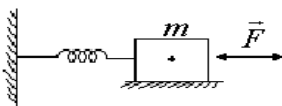


Рисунок 4.8

Зовнішня сила, що прикладена до тіла, змінюється за гармонічним законом і називається змушуючою:

$$F = F_0 \cos \omega t ,$$

де F_0 - амплітуда зовнішньої сили, ω - її циклічна частота.

Припустимо, що величини, які характеризують коливання пружинного маятника, задані: $k, m, r, \delta = \frac{r}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, F_0, \omega$.

Наша мета - знайти амплітуду вимушених коливань A і зсув фази φ між змушуючою силою і зміщенням маятника.

Застосовуючи другий закон Ньютона, отримаємо:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t ,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t .$$

Позначимо:

$$\frac{r}{m} = 2\delta ;$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 ;$$

$$\frac{F_0}{m} = f_0 .$$

Тоді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t .$$

This is the differential equation of forced mechanical oscillations. A solution of this differential equation is the formula which corresponds to stabilized forced oscillations:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Amplitude and phase difference may be expressed as

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

From this formulas we can see that the amplitude A and the shift of phase depend on cyclic frequency ω of forcing force.

The general solution of the differential equation of forced mechanical oscillations consists of the sum of the solutions of the corresponding homogeneous equation and the partial solution of the inhomogeneous equation:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) + A_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0).$$

The Fig. 4.9 represents the graph of this equation.

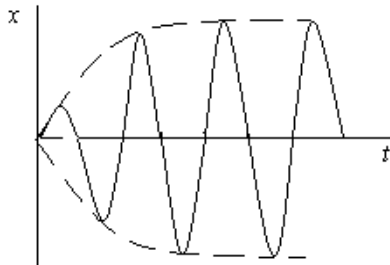


Figure 4.9

Let's analyze the obtained results. The oscillating system performs oscillations with the same frequency of ω as the external force. However, the amplitude of forced oscillations depends upon the relationship between ω and ω_0 .

Це є диференціальне рівнянням вимушених механічних коливань. Його розв'язком, що відповідає усталеним вимушеним коливанням, є:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Амплітуда і зсув фаз визначаються як:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

З цих формул випливає, що амплітуда A і зсув фаз φ залежать від циклічної частоти змушуючої сили ω .

Загальний розв'язок диференціального рівняння вимушених механічних коливань складається із суми розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) + A_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0).$$

На рис. 4.9 зображено графік цього рівняння.

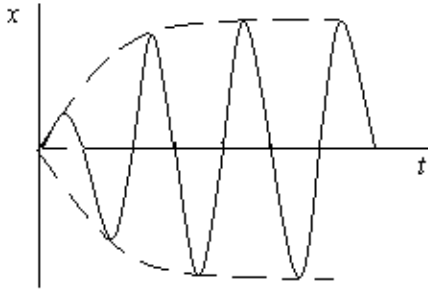


Рисунок 4.9

Проаналізуємо отримані результати. Коливальна система виконує вимушені коливання з тією ж частотою ω , що і зовнішня сила. Проте, амплітуда вимушених коливань залежить від співвідношення ω та ω_0 .

We should consider three intervals of frequency.

1. The force frequency tends to zero $\omega \rightarrow 0$.

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \approx \omega_0^2,$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k}.$$

$$A = A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

In this case, the oscillations are absent. Value of A_0 is called the static displacement of pendulum from equilibrium position under the action of constant force $F = F_0$.

2. The force frequency tends to natural frequency $\omega \rightarrow \omega_0$. In this case the denominator decreases and the fraction increases. So the amplitude A reaches a maximum.

The sharp growth in the amplitude of forced oscillations when the frequency of external force approaches the natural frequency of the system is called the resonance. The respective frequency is called the resonance frequency. Its value may be determined as

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]'_{\omega} &= 0, \\ -2(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 2\omega_r + 8\delta^2\omega_r &= 0, \\ -\omega_0^2 + \omega_r^2 + 2\delta^2 &= 0, \\ \omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \end{aligned}$$

Thus $\omega_r < \omega_0$. However, if $\delta = 0$, then $\omega_r = \omega_0$.

Substituting ω_r in formula for A we obtain

$$A_r = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Розглянемо три інтервали частоти.

1. Циклічна частота сили наближається до нуля $\omega \rightarrow 0$.

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \approx \omega_0^2,$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k}.$$

$$A = A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

В цьому разі коливання не здійснюються. Величина A_0 називається статичним зміщенням маятника з положення рівноваги під дією сталої сили $F = F_0$.

2. Циклічна частота сили наближається до власної частоти $\omega \rightarrow \omega_0$. В даному випадку знаменник зменшується, а дріб збільшується. Отже, амплітуда A досягає максимуму.

Різке зростання амплітуди вимушених коливань, коли частота зовнішньої сили наближається до власної частоти системи, називається резонансом. Відповідна частота називається резонансною частотою. Її величина може бути визначена, як:

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]'_{\omega} &= 0, \\ -2(\omega_0^2 - \omega_p^2)2\omega_p + 8\delta^2\omega_p &= 0, \\ -\omega_0^2 + \omega_p^2 + 2\delta^2 &= 0, \\ \omega_p &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \end{aligned}$$

Тому $\omega_p < \omega_0$. Проте, якщо $\delta = 0$, то $\omega_p = \omega_0$.

Якщо підставити ω_p в формулу для A , то ми отримаємо

$$A_p = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

3. The force frequency tends to infinity $\omega \rightarrow \infty$. In this case

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \approx \sqrt{\omega^4 + 4\delta^2\omega^2} \rightarrow \infty$$

and A tends to zero. The pendulum has no time for making oscillations.

Resonance curves for various values of the damping coefficient δ are shown in Fig. 4.10.

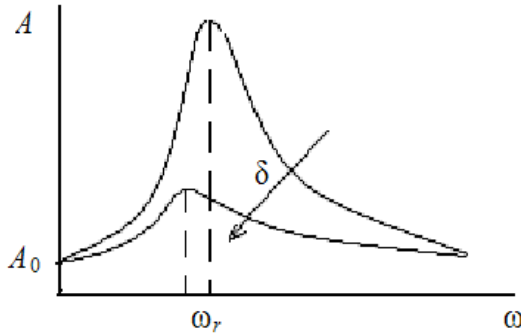


Figure 4.10

The more is δ the less is the amplitude of oscillations A and the less is ω_r .

Suppose that the system performs the resonance oscillations.

We can see from formula $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ that if $\omega = 0$ then $\varphi = 0$.

When $\omega \rightarrow \omega_0$, then $\operatorname{tg}\varphi \rightarrow \infty$. This means that x displacement lags behind F force and the difference of phases between them is equal to:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

When $\omega \gg \omega_0$, then $\varphi \rightarrow \pi$, i.e. oscillation phase is almost opposite to force phase. Fig. 4.11 represents the relationship of $\varphi = f(\omega)$.

3. Циклічна частота сили прямує у нескінченність $\omega \rightarrow \infty$. У цьому випадку

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \approx \sqrt{\omega^4 + 4\delta^2\omega^2} \rightarrow \infty$$

і A прямує до нуля. Коливання не встигають відбуватися.

Резонансні криві при різних значеннях коефіцієнта затухання δ зображені на рис.4.10.

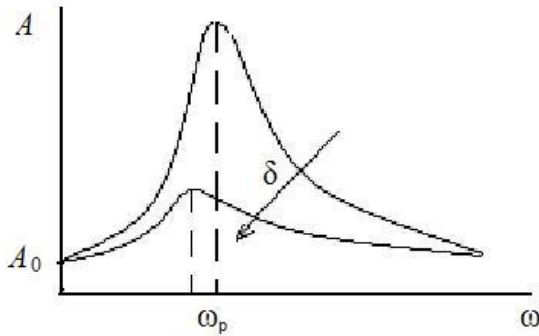


Рисунок 4.10

Чим більший δ , тим меншою є амплітуда коливань A і тим меншою є резонансна частота ω_p .

Припустимо, що в системі існують резонансні коливання. З формули $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ витікає, якщо $\omega = 0$, то $\varphi = 0$. Коли

$\omega \rightarrow \omega_0$, тоді $\operatorname{tg}\varphi \rightarrow \infty$. Це означає, що зміщення x відстає від сили F і зсув фаз між ними дорівнює:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Коли $\omega \gg \omega_0$, тоді $\varphi \rightarrow \pi$, тобто фаза коливань є майже протилежною силі. На рис. 4.11 зображено залежність $\varphi = f(\omega)$.

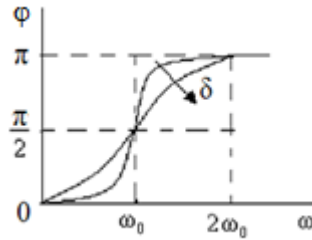


Figure 4.11

4.2 Electromagnetic Oscillations

Periodic variations of the charge, current or voltage in an electric circuit are called electromagnetic oscillations. The physical nature of these oscillations is a conversion of electrical field energy into magnetic field energy and vice versa.

In general an electric oscillating circuit contains a coil of L inductance, a condenser of C capacitance and a resistor of R resistance connected in series (Fig. 4.12).

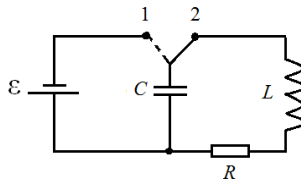


Figure 4.12

4.2.1 Free Electromagnetic Oscillations in a L, C -circuit

Let's assume that a resistance of electric oscillating circuit is negligibly small, i.e. $R \approx 0$ (Fig.4.12).

At the initial moment of time the capacitor is charged and current is equal to zero (switch position 1). Only an electric field exists between capacitor plates. Then the capacitor is discharged and current begins to flow in the circuit (switch position 2). A magnetic field arises in a coil.

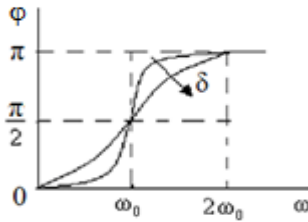


Рисунок 4.11

4.2 Електромагнітні коливання

Періодичні зміни заряду, струму або напруги в електричному коливальному контурі називаються електромагнітними коливаннями. Фізична природа цих коливань - це перетворенням енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки.

В загальному випадку електричний коливальний контур складається з котушки індуктивністю L , конденсатора ємністю C і резистора опором R , що з'єднані послідовно (рис. 4.12).

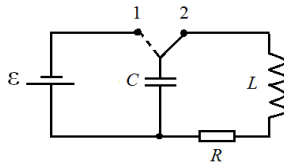


Рисунок 4.12

4.2.1 Вільні електромагнітні коливання в L, C -контурі

Припустимо, що в коливальному електричному контурі опором можна знехтувати, тобто $R \approx 0$ (рис.4.12). В початковий момент часу конденсатор заряджений і струм дорівнює нулю (положення перемикача 1). Між обкладинками конденсатора існує тільки електричне поле. Потім конденсатор розряджається і в контурі починає текти струм (положення перемикача 2). В котушці виникає магнітне поле.

Later the process is repeated, but in the opposite direction. The changing of charge q and current I over time is shown in graphs (Fig. 4.13).

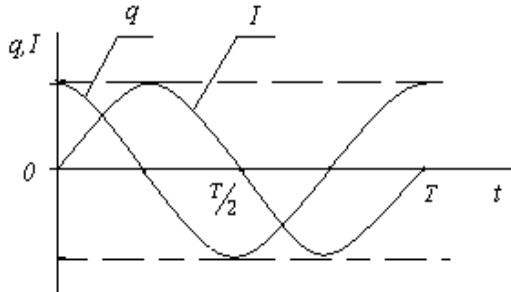


Figure 4.13

According to Ohm's law, for a circuit containing a resistor, a capacitor and an inductance:

$$IR + U_c = \varepsilon_{si}, \quad (4.5)$$

where IR is resistance voltage, U_c is capacitor voltage, ε_{si} is e.m.f. of self-induction arising in an inductance.

For L, C -circuit:

$$R = 0; U_c = -\frac{q}{C}; \varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (4.6)$$

Substituting these values from (4.6) into (4.5) we obtain:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Let's denote

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

and we obtain the equation:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2q = 0. \quad (4.7)$$

This is the differential equation of free oscillations of charge in L, C -circuit. Compare it with the equation for a spring pendulum:

Далі процес повторюється, але в зворотному напрямку. Зміна заряду q та струму I в часі зображена на графіках (рис.4.12).

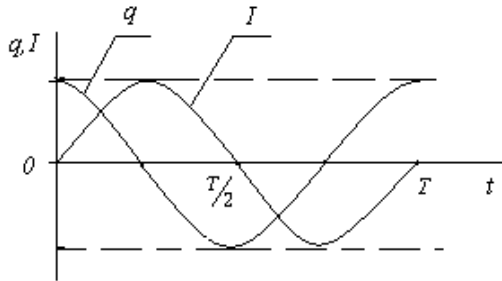


Рисунок 4.13

Згідно закону Ома, для контуру, який містить резистор, конденсатор і котушку індуктивності:

$$IR + U_c = \varepsilon_{si}, \quad (4.5)$$

де IR – напруга на опорі, U_c – напруга а конденсаторі, ε_{si} – е.р.с. самоіндукції, що виникає в котушці індуктивності.

Для L, C – контуру:

$$R = 0; U_c = \frac{q}{C}; \varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (4.6)$$

Підставивши значення (4.2) в (4.1), ми отримаємо:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Позначимо

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

і отримаємо рівняння:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2q = 0. \quad (4.7)$$

Це є диференціальне рівняння вільних коливань заряду в L, C -контурі. Порівняємо його з рівнянням для пружинного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

They are quite analogous, are not they?

The value

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

is called the natural cyclic frequency of electromagnetic oscillations of electric circuit.

The solution of these differential equations is the same. The differential equation (4.7) has the solution:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.8)$$

The changes of current and voltage can be expressed as

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Thus, current oscillations forestall the voltage oscillations in phase to $\frac{\pi}{2}$.

The period of free oscillations in the circuit is given by

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

This relationship is called Thomson's formula.

Consequently, in the absence of an ohmic resistance and any energy losses, the electromagnetic oscillations in the circuit are harmonic with a period, depending only upon the parameters L and C . In the L,C -circuit there is a periodic change in the energy of the electric field of the capacitor, in the energy of the magnetic field of the coil and vice versa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Вони абсолютно аналогічні, чи не так?

Величина

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

називається власною циклічною частотою електромагнітних коливань в електричному коливальному контурі.

Розв'язок цих диференціальних рівнянь теж аналогічний. Диференціальне рівняння (4.3) має розв'язок

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.8)$$

Зміни струму і напруги можуть бути виражені наступним рівняннями:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Тому коливання струму випереджають по фазі коливання напруги на $\frac{\pi}{2}$.

Період власних коливань в контурі:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Це співвідношення називається формулою Томсона.

Тому у відсутності омичного опору і будь-яких втрат енергії, електромагнітні коливання в контурі є гармонічними з періодом, який залежить тільки від параметрів L і C . В L, C -контурі має місце періодична зміна енергії електричного поля конденсатора, в енергію магнітного поля котушки і навпаки:

$$W = \frac{q_0}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = \text{const.}$$

The energy of the circuit in any moment of time will be equal to the sum of the energy of the electric field of the condenser and the magnetic field of the coil and doesn't change with time:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const.}$$

4.2.2 Free Damped Electromagnetic Oscillations in a R, L, C -circuit

Any real electric circuit always has a resistance. Due to this resistance part of electric energy is transformed into heat and therefore is lost. Thus, equations for R, L, C -circuit contains resistor, inductance and capacitance in series, should be changed because the losses of energy take place:

$$IR + U_c = \varepsilon_{si}. \quad (4.9)$$

Let's substitute the values

$$U_c = -\frac{q}{C},$$

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

into (4.9) and we obtain:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0.$$

Dividing this equation by L we obtain:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

But here

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{and} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$W = \frac{q^2_0}{2C} = \frac{LI^2_0}{2} = \text{const.}$$

Енергія контура в будь-який момент часу буде дорівнювати сумі енергій електричного поля конденсатора і магнітного поля котушки, і не змінюватись з часом:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const.}$$

4.2.2 Вільні затухаючі електромагнітні коливання в R, L, C -контурі

Будь-яке реальне електричне коло завжди містить опір. Завдяки цьому опору частина електричної енергії перетворюється в тепло і таким чином втрачається. Тому рівняння для R, L, C -контур, який складається з послідовно з'єднаних резистора, індуктивності і ємності, запишуться в наступній формі:

$$IR + U_c = \varepsilon_{si}. \quad (4.9)$$

Підставимо величини:

$$U_c = \frac{q}{C};$$

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

в (4.9) отримаємо:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0.$$

Поділивши це рівняння на L , ми отримаємо:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Позначимо

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{і} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

As a result we obtain the differential equation of free damped electromagnetic oscillations in R, L, C -circuit:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Usually δ is called the damping constant and ω_0 is called the natural cyclic frequency.

The solution of this differential equation is analogous:

$$q = q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

The frequency of oscillations ω may be expressed as

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

The cyclic frequency ω is always less than the natural one, $\omega < \omega_0$.

The period of oscillations is

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

As $\delta = \frac{R}{2L}$ we can see that the more is the resistance the more is the damping and vice versa the more is the inductance the less is the damping.

Oscillations are possible with the condition:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0 \Rightarrow \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC};$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

If R is assumed to be zero all equations are turned into equations of free undamped oscillations.

В результаті отримаємо диференціальне рівняння вільних затухаючих електромагнітних коливань в R, L, C -контурі:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Зазвичай δ називається коефіцієнтом затухання і ω_0 називається власною циклічною частотою контура.

Розв'язок цього диференціального рівняння:

$$q = q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Циклічна частота затухаючих коливань ω може бути виражена, як:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Циклічна частота ω є завжди меншою за власну циклічну частоту $\omega < \omega_0$.

Період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}};$$

Так як $\delta = \frac{R}{2L}$, то чим більше опір, тим більше затухання і навпаки – чим більше індуктивність, тим менше затухання.

Коливання можливі при умові:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0 \Rightarrow \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC};$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Якщо вважати, що R дорівнює нулю, тоді всі ці рівняння перетворюються на рівняння вільних незатухаючих коливань

4.2.3 Characteristics of Damping of Electromagnetic Oscillations

1. The damping constant δ :

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

The unit of δ is

$$[\delta] = \frac{\Omega}{\text{H}} = \frac{\Omega}{\text{V} \cdot \text{s}} = \frac{\Omega \cdot \text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{V} \cdot \text{s}} = \frac{1}{\text{s}}.$$

2. The time of relaxation τ :

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

Let $t = \tau$, then

$$q = q_0 e^{-\delta\tau} = \frac{q_0}{e}.$$

Thus, the time of relaxation τ is the time during which the amplitude decreases by e -times.

3. The decrement of damping D :

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\delta t}}{q_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

4. The logarithm decrement of damping λ :

$$\lambda = \ln \frac{q(t)}{q(T+t)} = \delta t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

Value of N_e is the quantity of oscillations during which the amplitude decreases by e -times. So, the logarithm decrement of damping is inversely proportional to the number of oscillations within the time the amplitude of oscillations decreases by e -times.

5. The quality Q :

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e.$$

4.2.3 Характеристики затухання електромагнітних коливань

1. Коефіцієнт затухання δ :

$$\delta = \frac{R}{2L};$$

Одиниця вимірювання δ :

$$[\delta] = \frac{\text{Ом}}{\text{Гн}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

2. Час релаксації τ :

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

Нехай $t = \tau$, тоді

$$q = q_0 e^{-\delta \tau} = \frac{q_0}{e}.$$

Тому, час релаксації τ є часом, протягом якого амплітуда зменшується в e -разів.

3. Декремент затухання D :

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\delta t}}{q_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

4. Логарифмічний декремент затухання λ :

$$\lambda = \ln \frac{q(t)}{q(T+t)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

N_e - це кількість коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e -разів. Отже, логарифмічний декремент затухання обернено пропорційний кількості коливань, за час яких амплітуда коливань зменшується в e -разів.

5. Добротність Q :

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e.$$

Let's compare mechanical and electromagnetic free damped oscillations in table 4.1.

Table 4.1

System	Differential equation	Solution	δ, s^{-1}	$\omega_0, \frac{\text{rad}}{s}$
Spring pendulum	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$	$x = x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$	$\delta = \frac{r}{2m}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Electric circuit	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$	$q = q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$	$\delta = \frac{R}{2L}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

4.2.4 Forced Electromagnetic Oscillations in the R, L, C -circuit.

Alternating Current

Forced electromagnetic oscillations are generated in a circuit when it is connected to a source of periodic voltage U :

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

where U_0 is the amplitude and ω is the cyclic frequency of the generator voltage.

Let's examine the oscillations generated in the circuit, shown in Fig. 4.14.

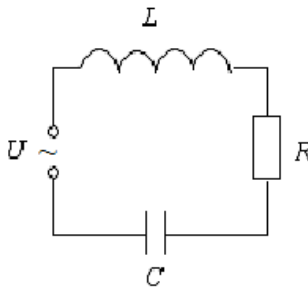


Figure 4.14

Порівняємо механічні та електромагнітні вільні затухаючі коливання в таблиці 4.1:

Таблиця 4.1

Система	Диференціальне рівняння	Розв'язок	$\delta, \text{с}^{-1}$	$\omega_0, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$
Пружинний маятник	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$	$x = x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$	$\delta = \frac{r}{2m}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Електричний коливальний контур	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$	$q = q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$	$\delta = \frac{R}{2L}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

4.2.4 Вимушені електромагнітні коливання в R, L, C -контурі. Змінний струм

Вимушені електромагнітні коливання виникають у контурі, якщо він з'єднується з джерелом періодичної напруги U :

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

де U_0 є амплітудою і ω є циклічною частотою напруги генератора.

Розглянемо коливання, які виникають R, L, C контурі, який зображено на рис. 4.14.

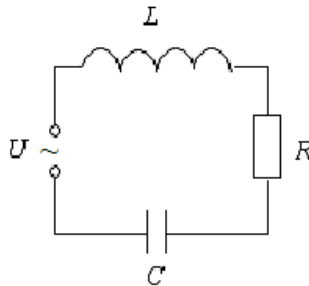


Рисунок 4.14

Ohm's law for this circuit is

$$IR + U_c = \varepsilon_{si} + U. \quad (4.10)$$

After substitution of values:

$$U_c = \frac{q}{C},$$

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

into (4.10) we obtain:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos \omega t .$$

Then

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_0 \cos \omega t ,$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t .$$

Let's denote:

$$\frac{R}{L} = 2\delta ,$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 .$$

As a result we obtain the differential equation of forced electromagnetic oscillations:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t . \quad (4.11)$$

The special solution of this equation is a harmonic function that corresponds to the steady forced oscillations:

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi_0) , \quad (4.12)$$

where

$$q_0 = \frac{U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} , \quad (4.13)$$

Закон Ома для цього кола:

$$IR + U_c = \varepsilon_{si} + U. \quad (4.10)$$

Після підстановки величин:

$$U_c = \frac{q}{C},$$

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

в (4.6) ми отримаємо:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos \omega t.$$

Тоді

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_0 \cos \omega t.$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t.$$

Позначимо:

$$\frac{R}{L} = 2\delta,$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

В результаті отримаємо диференціальне рівняння вимушених електромагнітних коливань:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t. \quad (4.11)$$

Частинний розв'язок цього рівняння є гармонічною функцією, що відповідає усталеним вимушеним коливанням:

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi_0), \quad (4.12)$$

де

$$q_0 = \frac{U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad (4.13)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Substituting values:

$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

into (4.13) we obtain:

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

The current intensity is found if we differentiate (4.8) with respect to time:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t - \varphi_0) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

where the current amplitude

$$I_0 = \omega q_0.$$

Then

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

where $\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ is the phase shift between the current intensity and voltage applied.

Then

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

From the last formulas it follows that the current is lagging in phase from the voltage if $\omega L > 1/\omega C$, and is ahead of the voltage if $\omega L < 1/\omega C$.

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Підставивши значення:

$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

в (4.13) ми отримуємо:

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Силу струму знайдемо, якщо продиференціювати (4.8) за часом:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t - \varphi_0) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

де амплітуда струму

$$I_0 = \omega q_0.$$

Тоді

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

де $\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ є зсув фаз між силою струму і прикладеною напругою.

Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

З останніх формул витікає, що струм відстає по фазі від напруги, якщо $\omega L > 1/\omega C$, и випереджає напругу, якщо $\omega L < 1/\omega C$.

Let's find the amplitude of the current intensity:

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Thus, we obtained the Ohm's law for the alternating current. The value

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

is called the complex resistance of circuit or impedance.

Therefore, if the circuit is connected to the external variable e.m.f. with a voltage U , then alternating current flows in it.

An alternating current is the current whose amplitude or direction changes with time. Alternating current that changes harmonically is widely used.

Instantaneous values of the alternating current and voltage are given as:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

The effective value of an alternating current is the value of direct current which develops the same power as the given alternating current when flowing through the same active ohmic resistance.

In most cases ammeters and voltmeters show the effective value of the current or the voltage. For sinusoidal currents:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}},$$

where I_0 , U_0 are the maximum values of current and voltage amplitude.

4.2.5 Addition of Resistances in the Alternating Current Circuit

Ohm's law for the alternating current will be written in the form of the following equation:

Знайдемо амплітуду струму:

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Таким чином, ми отримали закон Ома для змінного струму. Значення

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

називається повним опором кола або імпедансом.

Отже, якщо коло з'єднується із зовнішньою змінною ЕРС з напругою U , то в ньому тече змінний струм.

Змінним струмом називається струм, амплітуда або напрям якого змінюються з часом. Широко використовується змінний струм, який змінюється гармонічно.

Миттєві значення змінного струму і напруги визначаються, як:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Ефективне значення змінного струму є значенням постійного струму, який розвиває таку ж потужність, як і даний змінний струм, протікаючи через такий же активний омичний опір.

В більшості випадків амперметри і вольтметри показують ефективне значення струму або напруги. Для синусоїдальних струмів:

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}},$$

де I_0, U_0 є максимальні значення амплітуди струму і напруги.

4.2.5 Додавання опорів у колі змінного струму

Закон Ома для змінного струму запишеться у вигляді наступного рівняння:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

The phase shift between current intensity and voltage applied is denoted as

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

The values of I_0 and φ should be substituted into:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

The value of ω is known to be the frequency of an outside generator. Consider the fact that there is a phase difference φ between I and U . The complex resistance

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

consists of three values:

- the ohmic resistance R ;
- the resistance of a coil, i.e. inductive reactance X_L ;
- the resistance of a capacitor, i.e. capacitive reactance X_c .

The resistance of a resistor does not depend upon ω . However resistance of a coil and a condenser depends upon ω :

$$X_L = \omega L,$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C}.$$

Thus, the following formula is the rule of addition of resistances in the alternating current circuit:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}.$$

4.2.6 Addition of Voltages in the Alternating Current Circuit

The total resistance of resistors connected in series is the sum of the separate resistances:

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Зсув фаз між силою струму і прикладеною напругою визначається як

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Значення I_0 і φ підставимо в:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Значення ω відоме, воно є частотою зовнішнього генератора. Зверніть увагу, що існує зсув фаз φ між I та U .

Повний опір

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

складається з трьох значень: омичний опір R ; опір котушки, тобто реактивний індуктивний опір X_L ; опір конденсатора, тобто реактивний ємнісний опір X_C .

Опір резистора не залежить від ω . Проте, опір котушки і конденсатора залежить від ω :

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Тому наступна формула є правилом додавання опорів у колі змінного струму

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

4.2.6 Додавання напруг в колі змінного струму

Повний опір резисторів, з'єднаних послідовно, є сумою окремих опорів:

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

As the current I is the same in any of three resistors multiplying this equation by current I we obtain:

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

$$U = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3}.$$

There is special rule for addition of voltages in an alternating current circuit containing a resistor, a coil and a capacitor. Voltage is determined as

$$U_R = RI_0,$$

$$U_L = \omega LI_0,$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_0.$$

Let's substitute these equations into Ohm's law and obtain:

$$U_0 = I_0 \sqrt{\frac{U_R^2}{I_0^2} + \left(\frac{U_L}{I_0} - \frac{U_C}{I_0} \right)^2}.$$

After the transformations finally we obtain:

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

The vector diagram for voltages in Fig. 4.15 illustrates the rule of addition of voltages.

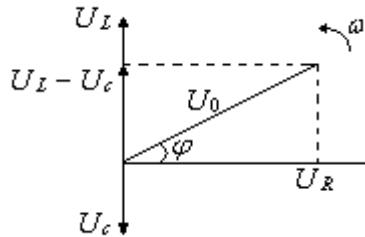


Figure 4.15

The phase shift φ between the current and voltage is determined as

Так як струм I однаковий в будь якого з трьох резисторів, помноживши це рівняння на струм I , отримуємо:

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

$$U = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3}.$$

Є спеціальне правило для додавання напруг в колі змінного струму, що складається з резистора, котушки і конденсатора. Напряга на них визначається як:

$$U_R = RI_0,$$

$$U_L = \omega LI_0,$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_0.$$

Підставимо ці рівняння в закон Ома і отримуємо:

$$U_0 = I_0 \sqrt{\frac{U_R^2}{I_0^2} + \left(\frac{U_L}{I_0} - \frac{U_C}{I_0} \right)^2}.$$

Після перетворень остаточно отримуємо:

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Векторна діаграма на рис. 4.15 ілюструє правило додавання напруг.

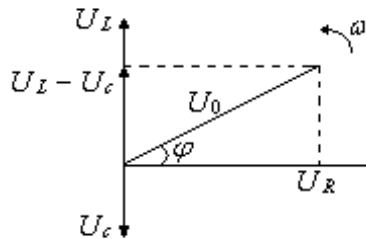


Рисунок 4.15

Зсув фаз φ між струмом і напругою визначається, як:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

4.2.7 Resonance of Voltages

The current amplitude in R, L, C -circuit is

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

The maximum amplitude of the current occurs if denominator

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

has minimum value (Fig. 4.16).

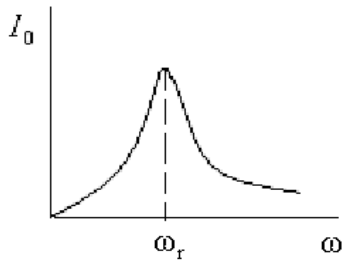


Figure 4.16

In this case:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

and

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

is called the resonance frequency. The circuit is said to be in resonance and

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

4.2.7 Резонанс напруг

Амплітуда сили струму в R, L, C – контурі визначається як:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Амплітуда струму максимальна, якщо знаменник

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

має мінімальне значення (рис. 4.16).

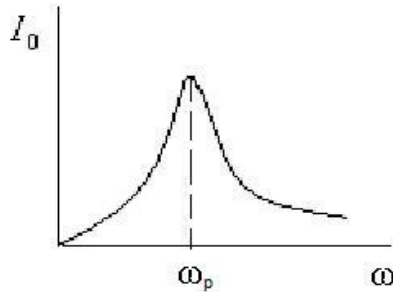


Рисунок 4.16

В даному випадку

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

і

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

називається резонансною частотою. Вважають, що коло є в резонансі і

$$I_0 = \frac{U_0}{R},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

$$\varphi = 0.$$

In this case current varies in the same phase with the external voltage. Voltage on the ohmic resistance U_R is equal to the external voltage U :

$$U_R = U$$

and the voltages on the inductance and capacitor are equal in magnitude, but opposite in phase:

$$U_L = U_C.$$

The vector diagram for resonance of voltages is represented in Fig. 4.17.

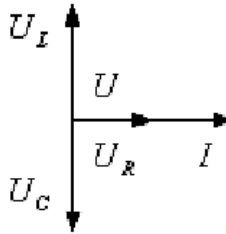


Figure 4.17

The ratio of the voltages across a capacitor U_C or across a coil U_L to the voltage U applied to the circuit equals:

$$\frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U},$$

$$\frac{I \frac{1}{\omega_r C}}{IR} = \frac{I \omega_r L}{IR},$$

$$\frac{1}{\omega_r CR} = \frac{\omega_r L}{R} = Q.$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

$$\varphi = 0.$$

В даному випадку струм змінюється в однаковій фазі із зовнішньою напругою. Напруга на омичному опорі U_R дорівнює зовнішній напрузі U :

$$U_R = U$$

і напруги на індуктивності і ємності дорівнюють одна одній за величиною, але протилежні за фазою:

$$U_L = U_C.$$

Векторна діаграма для резонансу напруг представлена на рис. 4.17.

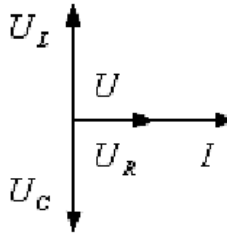


Рисунок 4.17

Відношення напруг на конденсаторі U_C або на котушці U_L до напруги U , прикладеної до кола, дорівнює:

$$\frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U},$$

$$\frac{I \frac{1}{\omega_r C}}{IR} = \frac{I \omega_r L}{IR},$$

$$\frac{1}{\omega_r CR} = \frac{\omega_r L}{R} = Q.$$

The value of Q is called the quality of the circuit. If $Q \gg 1$ voltages across the capacitance and inductance may be considerably higher than the applied voltage U , i.e.

$$U_L = U_C = QU.$$

That is why this phenomenon is called the resonance of voltages.

4.3 Elastic Waves

4.3.1 Wave Process

The process of distributing the oscillatory motion in a medium is called a wave process or wave. Elastic or mechanical waves are called mechanical excitations, that propagate in an elastic medium between the particles of which the interaction forces exists.

During the wave process particles of the environment do not move along with the wave, but they oscillate near the equilibrium position. The main feature of the wave is the transfer of their energy without the transfer of matter.

There are the following types of waves in nature: elastic, surface and electromagnetic. Elastic waves depending on the nature of the elastic deformation of the environment are longitudinal and transverse (Fig.4.18).

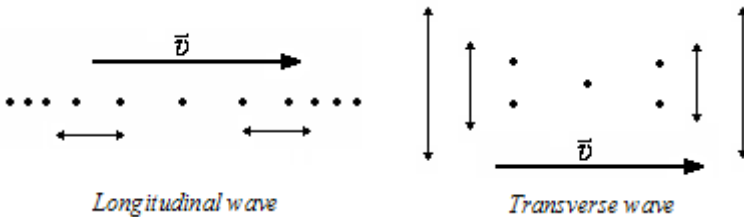


Figure 4.18

In longitudinal waves the medium particles oscillate along the direction of wave propagation. Longitudinal waves propagate in solid and gas-like environments in which elastic forces arise as a result of compressive and tensile strain.

Величина Q називається добротністю кола. Якщо $Q \gg 1$, то напруга на ємності і індуктивності може бути значно вищою, ніж прикладена напруга U , тобто

$$U_L = U_C = QU.$$

Саме тому це явище називається резонансом напруг.

4.3 Пружні хвилі

4.3.1 Хвильовий процес

Процес поширення коливального руху в середовищі називається хвильовим процесом або хвилею. Пружними або механічними хвилями називаються механічні збудження, які поширюються у пружному середовищі, між частинками якого існують сили взаємодії.

Під час хвильового процесу частинки середовища не рухаються разом з хвилею, проте вони коливаються біля положення рівноваги. Основною властивістю хвилі є перенос нею енергії без переносу речовини.

В природі існують такі види хвиль: пружні, поверхневі і електромагнітні. Пружні хвилі, в залежності від природи пружної деформації середовища, бувають поздовжні і поперечні (рис.4.18).

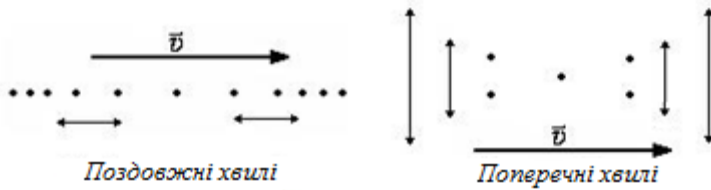


Рисунок 4.18

У поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвилі. Поздовжні хвилі поширюються в твердих і газоподібних середовищах, в яких пружні сили виникають в наслідок деформації стиску і розтягу.

In transverse waves the medium particles oscillate perpendicular to the direction of wave propagation. Transverse waves propagate in mediums in which the elastic forces arise as a result of shear deformation, i.e. only in solids.

An elastic wave is called harmonic if oscillations of the particle medium is harmonious. If the transverse harmonic wave propagates along the Ox axis, the dependence of the displacement ξ environment particle and their distance x from the source of vibrations O for a fixed time t , has the form of the harmonic function (Fig.4.19).

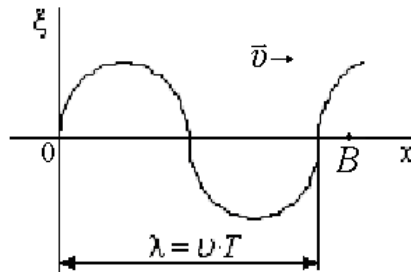


Figure 4.19

The wavelength λ is called the distance between the two closest points, oscillating in the same phase. The wavelength is the distance covered by a certain phase of the oscillation for the period

$$\lambda = vT,$$

where v is the velocity of the wave (phase velocity);

T is period of oscillation.

The direction of wave propagation is called a beam. The locus of the points to which the oscillations reach at the time moment t is called the wave front. The locus of points at which the particles oscillate in the same phase is called the wave surface.

Depending on the form of the wave surface we distinguish plane, spherical and cylindrical waves.

У поперечних хвилях частинки середовища коливаються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі. Поперечні хвилі поширюються в середовищах, в яких пружні сили виникають в наслідок деформації зсуву, тобто лише в твердих тілах.

Пружна хвиля називається гармонічною, якщо коливання частинок середовища є гармонічним. Якщо поперечна гармонічна хвиля поширюється вздовж осі Ox , то залежність між зміщенням ξ частинок середовища і їх відстанню x від джерела коливань O для фіксованого моменту часу t , має вигляд гармонічної функції (рис.4.19).

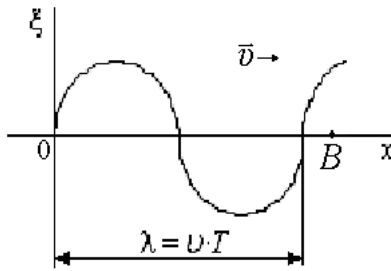


Рисунок 4.19

Довжиною хвилі λ називається відстань між двома найближчими точками, що коливаються в однаковій фазі. Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку поширюється певна фаза коливань за період

$$\lambda = \nu T,$$

де ν - швидкість розповсюдження хвилі (фазова швидкість), T – період коливань.

Напрямок розповсюдження хвилі називається променем. Геометричне місце точок, до яких доходять коливання в момент часу t називається хвильовим фронтом. Геометричне місце точок, в яких частинки коливаються в однаковій фазі називається хвильовою поверхнею. В залежності від форми хвильової поверхні розрізняють плоскі, сферичні і циліндричні хвилі.

The plane wave arises from a plane or remote source and its wave surfaces look like a set of parallel planes. The spherical wave arises from a point source in space and its wave surfaces look like a set of concentric spheres. The cylindrical wave is a wave that radially diverges from some axis in space or converges to it. The cylindrical wave front is a cylindrical surface that continuously increases or decreases its radius.

4.3.2 Equation of Travelling Wave

A travelling wave is a wave that carries energy in space.

The wave equation is called the displacement of dependence of the particle upon coordinates and time:

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

To obtain the equation for the travelling wave let us look at the plane harmonic wave which spreads over the Ox axis from the vibration source at point O (Fig.4.20).

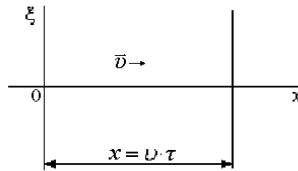


Figure 4.20

In this case the particle displacement is $\xi = \xi(x, t)$. If the oscillations of particles in the plane $x = 0$ occurs according to the equation

$$\xi = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

then oscillations of particles in the plane, which corresponds to an arbitrary value of x will occur with the same law, but with a delay of

time τ . This time is equal to $\tau = \frac{x}{\nu}$, where ν - is the speed of wave

propagation. The time τ required for a wave to cover the distance from the plane $x = 0$ to the plane, which corresponds to an arbitrary value of x .

Плоска хвиля виникає від плоского або віддаленого джерела і її хвильові поверхні мають вигляд сукупності паралельних площин. Сферична хвиля виникає від точкового джерела в просторі і її хвильові поверхні мають вигляд сукупності концентричних сфер. Циліндрична хвиля - хвиля, що радіально розходить від деякої осі в просторі або сходиться до неї. Фронт циліндричної хвилі - циліндрична поверхня, що безперервно збільшує або зменшує свій радіус.

4.3.2 Рівняння біжучої хвилі

Біжучою хвилею називається хвиля, яка переносить енергію в просторі.

Рівнянням хвилі називається залежність зміщення частинки від координат і часу:

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

Для виводу рівняння біжучої хвилі розглянемо плоску гармонічну хвилю, яка поширюється вздовж осі Ox від джерела коливань в точці O (рис.4.20).

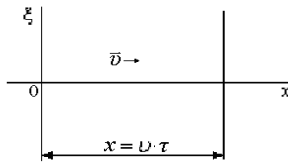


Рисунок 4.20

У цьому випадку зміщення частинки $\xi = \xi(x, t)$. Якщо коливання частинок в площині $x = 0$ відбувається згідно рівняння

$$\xi = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

то коливання частинок в площині, що відповідає довільному значенню x , будуть відбуватися за таким самим законом, але із

запізненням на час τ . Цей час дорівнює $\tau = \frac{x}{\nu}$, де ν - швидкість

поширення хвилі. Час τ потрібен для проходження хвилею відстані від площини $x = 0$ до площини, яка відповідає довільному значенню x .

Then oscillations of particles in the plane with the arbitrary coordinate x will occur according to the equation:

$$\begin{aligned}\xi &= A \sin \omega [\omega(t - \tau) + \varphi_0] = \\ &= A \sin \left[\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0 \right] = \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{T v} + \varphi_0 \right) = \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right)\end{aligned}$$

The value of $k = 2\pi / \lambda$ is called the wave number

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Then the equation of the travelling plane wave propagating along the positive direction of the Ox axis has the form:

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

where A is the amplitude of the wave;

ω is the cyclic frequency of the wave;

φ_0 is the initial phase of the oscillations in the plane $x = 0$.

The value $(\omega t - kx + \varphi_0)$ is equal to the phase of oscillations in an arbitrary plane with the coordinate x and is called the phase of the plane wave.

If the phase of oscillations is constant

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const},$$

so after differentiation of this expression, we obtain

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

from which

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Therefore, the velocity of the wave is a movement of the wave's velocity phase and therefore it is called the phase velocity.

Тоді коливання частинок в площині з довільною координатою x будуть відбуватися згідно рівняння:

$$\begin{aligned}\xi &= A \sin \omega [\omega(t - \tau) + \varphi_0] = \\ &= A \sin \left[\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0 \right] = \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tv} + \varphi_0 \right) = \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right).\end{aligned}$$

Величина $k = 2\pi/\lambda$ називається хвильовим числом

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Тоді рівняння біжучої плоскої хвилі, що поширюється вздовж позитивного напрямку осі OX , має вигляд:

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де A – амплітуда хвилі;

ω – циклічна частота хвилі;

φ_0 – початкова фаза коливань в площині $x = 0$;

Величина $(\omega t - kx + \varphi_0)$ дорівнює фазі коливань в довільній площині з координатою x і називається фазою плоскої хвилі.

Якщо фаза коливань постійна

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const},$$

то продиференціював цей вираз, отримаємо

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

звідки

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Отже, швидкість поширення хвилі є швидкістю переміщення фази хвилі і тому її називають фазовою швидкістю.

4.3.3 Wave Equation

Wave propagation in a homogeneous isotropic medium described by the differential equation in partial derivatives, which is called the wave equation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

or

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

where Δ is Laplace operator,

v is the phase velocity.

The solution of the wave equation is the equation of any wave.

We can prove that the equation of a plane traveling wave $\xi = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$ is a solution of the differential equation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

4.3.4 Standing Waves

Standing waves are formed by the superposition of two traveling waves that spread to meet each other with the same frequency and amplitude.

Let's consider two waves propagating towards each other along the x axis and having the same frequency and amplitude:

$$\xi_1 = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\xi_2 = A \sin(\omega t + kx).$$

The result of their interference is the standing wave, equation of which is:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \sin \omega t \cdot \cos kx = 2A \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

From this equation it follows that the oscillations at each point of the wave occurs with the same frequency ω . Standing wave amplitude

4.3.3 Хвильове рівняння

Поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується диференціальним рівнянням в частинних похідних, яке називається хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

або

$$\Delta \xi = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де Δ - оператор Лапласа,

ν - фазова швидкість.

Розв'язком хвильового рівняння є рівняння будь-якої хвилі. Можна довести, що рівняння плоскої біжучої хвилі $\xi = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$ є рішенням диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

4.3.4 Стоячі хвилі

Стоячі хвилі утворюються при накладенні двох біжучих хвиль, які поширюються на зустріч одна одній з однаковими частотами і амплітудами.

Розглянемо дві хвилі, які поширюються назустріч одна одній вздовж осі x і мають однакові частоти і амплітуди:

$$\xi_1 = A \sin(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A \sin(\omega t + kx).$$

В результаті інтерференції цих хвиль виникає стояча хвиля, рівняння якої:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \sin \omega t \cdot \cos kx = 2A \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

З цього рівняння витікає, що коливання в кожній точці цієї хвилі відбувається з тією самою частотою ω . Амплітуда стоячої хвилі

is $A_{st} = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ it also depends on the coordinate x .

The graph of this function is shown in Fig.4.21.

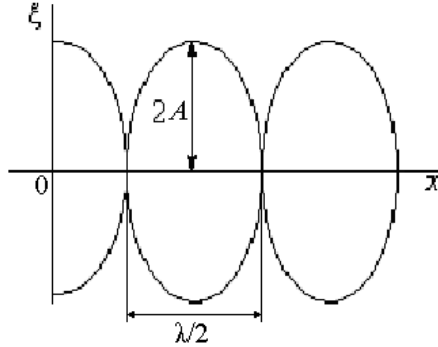


Figure 4.21

At points of medium, where $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$, $x_n = \pm n \frac{\lambda}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) amplitude becomes maximum. It is equal to $2A$. These points are called antinodes of the standing wave.

At medium points, where $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$, $x_n = \pm(n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) amplitude becomes zero and these points are called nodes of the standing wave.

Thus, all the points of standing wave between two nodes oscillate with different amplitudes but identical phases.

The distances between neighboring nodes (or neighboring antinodes) is equal to $\frac{\lambda}{2}$ and is called the length of the standing wave. The distance between neighboring node and antinode is $\frac{\lambda}{4}$.

There is no energy transferring in the standing wave. This is because the incident and reflected waves, which form a standing wave, carry the same energy in opposite directions.

дорівнює $A_{cm} = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ і залежить від координати x .

Графік цієї функції показано на рис.4.21.

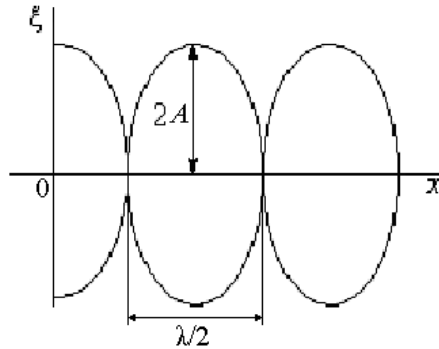


Рисунок 4.21

У точках середовища, де $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$, $x_n = \pm n \frac{\lambda}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) амплітуда коливань набуває максимального значення, що дорівнює $2A$. Ці точки називаються пучностями стоячої хвилі.

У точках середовища, де $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$, $x_n = \pm(n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) амплітуда коливань дорівнює нулю і коливання повністю відсутні. Ці точки називаються вузлами стоячої хвилі.

Таким чином, всі точки стоячої хвилі між двома вузлами коливаються з різними амплітудами але з однаковими фазами.

Відстань між сусідніми вузлами (або сусідніми пучностями) дорівнює $\frac{\lambda}{2}$ і називається довжиною стоячої хвилі.

Відстань між сусіднім вузлом і пучністю дорівнює $\frac{\lambda}{4}$.

У стоячій хвилі переноса енергії не відбувається. Це пояснюється тим, що падаюча і відбита хвилі, які утворюють стоячу хвилю, переносять однакову енергію в протилежних напрямках.

4.3.5 Sound Waves

Elastic waves propagating in a medium with the oscillation frequency in the range of 16 – 20000 Hz are called sound waves. Sound waves are limited by frequency range that act on the human ear and brain and cause their audibility. This interval is called the interval of earshot. The branch of physics that studies sound waves is called acoustics.

Sound waves in gases and liquids are longitudinal, and in solids they can be both longitudinal and transverse due to the existence of compressive strain (tension) and shear.

Waves with frequencies below the range of hearing are called infrasound waves and waves of higher frequency - ultrasound. Infrasound waves are usually generated by large sources, for example, the earthquake waves. High frequencies that are associated with ultrasonic waves can be generated by elastic vibrations of quartz crystals, introduced in resonance with the applied alternating electric field (piezoelectric effect). You can generate ultrasonic frequencies above $6 \cdot 10^8$ Hz. The corresponding wavelength in air is more than $5 \cdot 10^{-7}$ m. Sound waves arise in vibrating strings (such as violin, guitar), vibrating air columns (organ, clarinet) and vibrating plates and membranes (drum, speaker).

The speed of sound waves depends on the properties of the environment. The speed of sound waves in gases depends on temperature and molar mass and it is defined by the next formula:

$$v_{gas} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

where $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ is Poisson's coefficient;

$R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$ is the molar gas constant;

μ is the molar mass, [$\frac{\text{kg}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$];

T is the temperature, [K].

4.3.5 Звукові хвилі

Пружні хвилі, що поширюються в середовищі, з частотою коливань в інтервалі 16 – 20000 Гц називають звуковими хвилями. Звукові хвилі обмежені інтервалом частот, які діють на людське вухо та мозок і спричиняють їх чутність. Цей інтервал називається інтервалом чутності. Розділ фізики, який вивчає звукові хвилі називається акустикой.

Звукові хвилі в газах та рідинах є поздовжніми, а в твердих тілах вони можуть бути як поздовжніми так і поперечними, що пов'язано з існуванням деформації стиску(розтягу) та зсуву.

Хвилі з частотою нижчою за інтервал чутності називаються інфразвуковими хвилями, а хвилі з вищою частотою – ультразвуковими. Інфразвукові хвилі зазвичай генеруються великими джерелами. Наприклад, хвилі землетрусу. Високі частоти, що асоціюють з ультразвуковими хвилями можуть генеруватися пружними коливаннями кристалу кварцу, введеного в резонанс прикладеним змінним електричним полем (п'єзоелектричний ефект). Можна генерувати ультразвукові частоти понад $6 \cdot 10^8$ Гц. Відповідна довжина хвилі в повітрі складає понад $5 \cdot 10^{-7}$ м. Звукові хвилі виникають у вібруючих струнах (наприклад, скрипка, гітара), вібруючих повітряних колонах (орган, кларнет) та вібруючих пластинах і мембранах (барабан, гучномовець).

Швидкість звукових хвиль залежить від властивостей середовища. Швидкість звуку в газах залежить від температури і молярної маси і визначається наступною формулою:

$$v_{gas} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ - коефіцієнт Пуассона;

$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - молярна газова стала;

μ - молярна маса, $[\frac{\text{кг}}{\text{моль}}]$; T – температура, [К].

That means that the higher the temperature, the greater the speed of sound. The speed of sound in air is determined by the following formula:

$$v_{air} = v_0 \sqrt{1 + \frac{T - T_0}{T_0}} = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} = 20.06\sqrt{T},$$

where $v_0 = 331.6$ m/s is the speed of sound at $T = 0$ °C; T is temperature of air in Kelvin; $T_0 = 273.15$ K.

The speeds of sound in some materials are listed in Table 4.2:

Table 4.2

Medium	Speed, m/s
Air	343 (20 °C)
Water	1500
Steel	5000
Glass	4500

The perception of sound is determined by the following subjective characteristics: pitch, timbre and volume. Definite physical characteristics of the sound wave correspond to each of these properties:

- the pitch of sound is determined by the frequency of oscillations. In fact, the pitch of sound is determined by the main frequency, which accumulates the greatest amount of energy. The higher is the frequency, the higher is the pitch;

- the timbre of sound is determined by the relative intensity of the so-called overtones, oscillations with higher frequencies, i.e. forms of sound waves.

- the volume depends on the amplitude, energy oscillations, the frequency composition of the sound signal, from the conditions of its perception and the duration of exposure.

The objective characteristic of a sound wave is the intensity of sound. The intensity of sound is equal to the energy W , which passes through unit area S , perpendicular to the direction of propagation per time unit t :

Тобто, чим вища температура, тим більша швидкість звуку. Швидкість звуку в повітрі визначається наступною формулою :

$$v_{air} = v_0 \sqrt{1 + \frac{T - T_0}{T_0}} = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} = 20,06\sqrt{T},$$

де $v_0 = 331,6$ м/с – це швидкість звуку при $T = 0$ °С; T – температура повітря у Кельвінах; $T_0 = 273,15$ К.

Швидкості звуку у деяких матеріалах наведені в таблиці 4.2:

Таблиця 4.2

Середовище	Швидкість, м/с
Повітря	343 (20 °С)
Вода	1500
Сталь	5000
Скло	4500

Сприйняття звуку визначається наступними суб'єктивними характеристиками: висота, тембр і гучність звуку. Певні фізичні характеристики звукової хвилі відповідають кожній з цих властивостей:

- висота звуку визначається частотою коливань. Насправді висота звуку визначається основною частотою, на яку припадає найбільша кількість енергії. Чим більша частота, тим більша висота звуку;

- тембр звуку визначається відносною інтенсивністю так званих обертонів, коливань з вищими частотами, тобто формою звукової хвилі.

- гучність залежить від амплітуди, енергії коливань, частотного складу звукового сигналу, від умов його сприйняття і тривалості впливу.

Об'єктивною характеристикою звукової хвилі є інтенсивність звуку. Інтенсивність звуку дорівнює енергії W , яка проходить крізь одиницю площі S , перпендикулярно до напрямку поширення за одиницю часу t :

$$I = \frac{W}{St}.$$

The unit of I in SI is

$$[I] = \text{W/m}^2.$$

The sensitivity of human ear is different for various frequencies. For a sound wave there is the minimum level of intensity that is called the threshold of audibility and its maximum level of intensity is called the threshold of discomfort (pain). The intensity of sound waves below the minimum level is not perceived by the human ear. However, it causes a sensation of pain if the sound wave intensity is above the maximum level. The Fig.4.22 shows the region of audibility by the human ear [9].

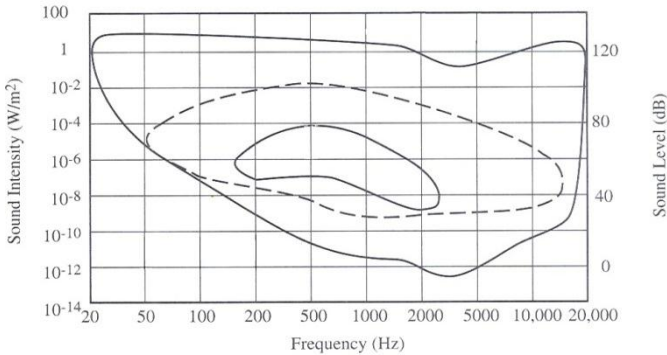


Figure 4.22

The amplitude of the sound intensity $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ at $\nu = 1000$ Hz is taken as the lowest level of sound that can be heard.

The personal perception of sound loudness according to Weber – Fechner’s law is proportional to the logarithm of intensity ratio of a given sound to I_0 . The level of sound intensity is the objective characteristics of the sound loudness:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}.$$

$$I = \frac{W}{St},$$

Одиниця вимірювання I в SI:

$$[I] = \text{Вт/м}^2.$$

Чутливість людського вуха різна для різних частот. Для звукової хвилі існує мінімальний рівень інтенсивності, який називається порогом чутності, і максимальний рівень інтенсивності, який називають больовим порогом. Інтенсивність звукових хвиль нижче мінімального рівня людське вухо не сприймає. Якщо інтенсивність вище максимального рівня звук спричиняє відчуття болю. Рис 4.22 показує область чутливості людського вуха [9].

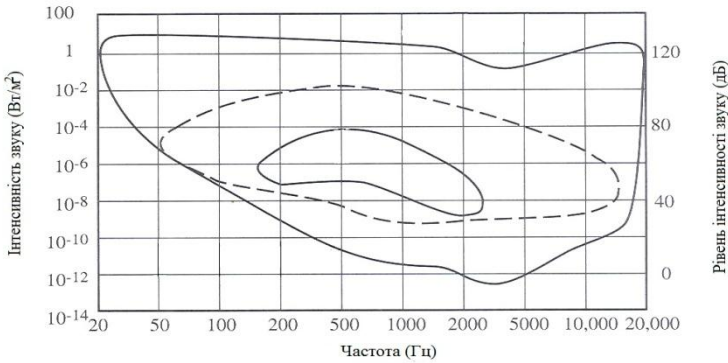


Рисунок 4.22

Амплітуда інтенсивності звуку $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, при $\nu = 1000$ Гц прийнята найменшим рівнем звуку, який можна почути.

Особисте сприйняття гучності згідно з законом Вебера-Фехнера пропорційне до логарифму відношення інтенсивності певного звуку до I_0 . Об'єктивною характеристикою гучності є рівень інтенсивності звуку:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}.$$

The unit of measurement of this quantity is bel: $[L] = \text{B}$. Usually one can use a unit that is ten times smaller - decibels (dB). The table 4.3 shows the sound intensity I , the ratio I/I_0 and the sound intensity level L in decibels for some sounds:

Table 4.3

The source of sound	$I, \text{W/m}^2$	I/I_0	$L=10\lg I/I_0,$ dB
The watch	10^{-10}	10^2	20
Steps	10^{-8}	10^4	40
The loud conversation	10^{-5}	10^7	70
The orchestra	10^{-2}	10^{10}	100
An engine of airplane	10	10^{13}	130

Reverberation is the process of gradual diminishing sound intensity in premises after turning off its source as a result of repeated reflections from walls, ceilings, etc. Reverberation time is the time when the sound intensity in the premises, approximately decreases 10^6 times, and the intensity level becomes smaller by 60 dB relative to its initial value. The acoustics in the premises is good enough if the reverberation time is 0.5 – 1.5 s.

4.3.6 Musical Sounds and their Characteristics

It is necessary to distinguish between musical sounds and noises. The graph of musical sound repeats periodically (Fig.4.23):

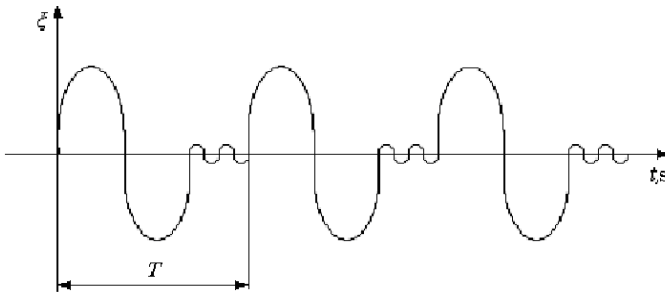


Figure 4.23

Одиницею вимірювання цієї величини є бел: $[L] = \text{В}$. Зазвичай використовують одиницю, що в десять разів менша – децибел (дБ). В таблиці 4.3 наведені інтенсивність звуку I , відношення I/I_0 і рівень інтенсивності звуку L у децибелах для деяких звуків:

Таблиця 4.3

Джерело звуку	$I, \text{Вт/м}^2$	I/I_0	$L=10\lg I/I_0,$ дБ
Годинник	10^{-10}	10^2	20
Кроки	10^{-8}	10^4	40
Гучна розмова	10^{-5}	10^7	70
Оркестр	10^{-2}	10^{10}	100
Двигун аероплана	10	10^{13}	130

Реверберація – це процес поступового зниження інтенсивності звуку в приміщеннях після вимикання його джерела в результаті багаторазового відбиття від стін, стель тощо. Час реверберації - це час, за який інтенсивність звуку в приміщенні зменшується приблизно в 10^6 разів, а рівень інтенсивності на 60 dB відносно свого початкового значення. Акустика у приміщеннях вважається доброю, якщо час реверберації складає 0,5 – 1,5 с.

4.3.6 Музичні звуки та їх характеристики

Необхідно розрізнити музичні звуки та шуми. Графік музичних звуків має періодичність (рис.4.23):

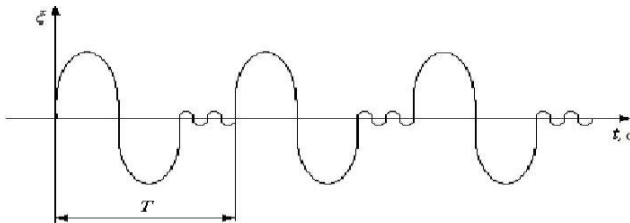


Рисунок 4.23

On the contrary, the graph of a noise is unregulated.

Let's consider the vibrations of the string of the length l where formation of standing waves takes place (Fig.4.24):

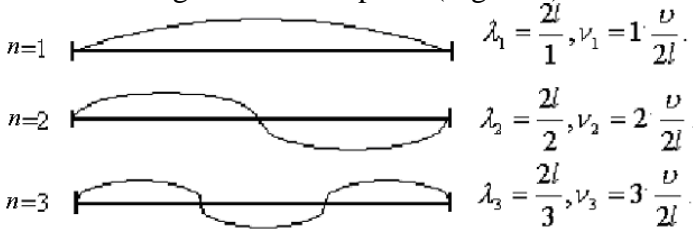


Figure 4.24

Such string oscillations originate when the half of the wavelength holds with the string length l and makes the integer number of times:

$$l = n \frac{\lambda}{2}, (n = 1, 2, 3 \dots),$$

$$\lambda_n = 2 \frac{l}{n}.$$

Every λ_n corresponds to frequencies of ν_n and ω_n :

$$\nu_n = \frac{\nu}{\lambda_n} = \frac{\nu}{2l} n,$$

$$\omega_n = 2\pi \frac{\nu}{\lambda_n} = 2\pi \frac{\nu}{2l} n,$$

where ν is the phase speed of wave,

ν_n is the own frequencies of the string.

The lowest frequency corresponding to the largest wavelength $\nu_1 = \frac{\nu}{2l}$ is called the fundamental frequency. Other frequencies are called overtones. Thus the oscillating string possesses the different overtones at the same time. One can see that:

$$\nu_n = n\nu_1.$$

The total combination of overtones is called the acoustic spectrum.

На протилежність графік шуму не має періодичності.

Розглянемо коливання струни довжиною l в якій відбувається формування стоячих хвиль (рис.4.24):

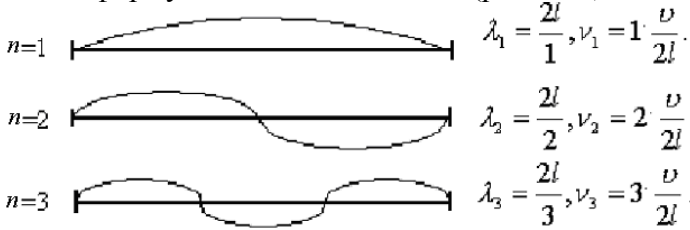


Рисунок 4.24

В струні виникають такі коливання, половина довжини хвилі яких укладається на довжині струни ціле число разів:

$$l = n \frac{\lambda}{2}, (n = 1, 2, 3 \dots),$$

$$\lambda_n = 2 \frac{l}{n}.$$

Кожна λ_n відповідає частотам ν_n і ω_n :

$$\nu_n = \frac{\nu}{\lambda_n} = \frac{\nu}{2l} n$$

$$\omega_n = 2\pi \frac{\nu}{\lambda_n} = 2\pi \frac{\nu}{2l} n,$$

де ν - фазова швидкість хвилі, ν_n - власні частоти струни.

Найнижча частота, яка відповідає найбільшій довжині хвилі $\nu_1 = \frac{\nu}{2l}$ називається основною частотою. Інші частоти називаються обертонами. Таким чином, струна, що коливається, вміщує різні обертони в один і той же час. Тобто :

$$\nu_n = n\nu_1.$$

Сукупність обертонів називається акустичним спектром.

The musical sounds have the linear spectrum, which consists of separate frequencies. The noises have the continuous spectrum, which consists of the uninterrupted set of frequencies. Oscillating systems possess a definite distribution of energy between overtones. The timbre of musical instrument is determined by this distribution. Hence any musical instrument creates a definite totality of overtones with definite energy distribution. Usually the acoustic spectrum of musical instrument is defined by the first ten overtones. An example of acoustic spectrum of oboe is shown in Fig.4.25. This is the reason that the sounds of musical instruments differ from each other.

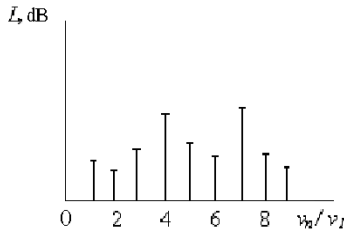


Figure 4.25

Consequently, the sound wave is superposition of some oscillations with certain number of frequencies or overtones. All diversity of musical sounds as well as all human voices exists due to a combination of higher overtones.

4.3.7 Sound Location

The detection of the objects and determination of their size and distances to objects by means of the sound wave reflection is called the sound location. The size of an object must be of order of the sound wavelength. For example a bat generates ultrasound frequencies of $\nu = 10^5$ Hz. Since the speed of sound $\nu = 343$ m/s at $T = 20^\circ\text{C}$, the wavelength is equal to

$$\lambda = \frac{\nu}{\nu} = \frac{343}{10^5} = 3.4310^{-3} \text{ m.}$$

Музичні звуки мають лінійчастий спектр, який складається з відокремлених частот. Шуми мають суцільний спектр, який складається з неперервного набору частот. Коливальна система забезпечує певний розподіл енергії між обертонами. Цим розподілом визначається тембр музичного інструменту. Будь-який музичний інструмент утворює певну кількість обертонів з певним розподілом енергії. Зазвичай акустичний спектр музичного інструмента визначається першими десятима обертонами. Наприклад, акустичний спектр для гобою наведено на рис 4.25. Це і є причиною того, що звучання музичних інструментів відрізняються один від одного.

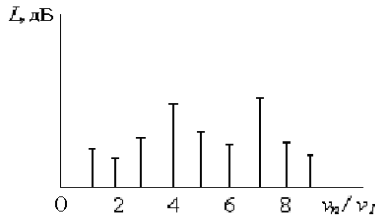


Рисунок 4.25

Отже, звукова хвиля уявляє собою суперпозицію кількох коливань з певним набором частот, або обертонів. Вся різноманітність музичних звуків так, як і людських голосів, існує відповідно до комбінації вищих обертонів.

4.3.7 Звукова локація

Виявлення об'єктів, визначення їх розмірів і відстаней до них за допомогою відбиття звукової хвилі називається звуковою локацією. Розміри об'єкта повинні бути приблизно такими як довжина звукової хвилі. Наприклад, кажан випромінює ультразвук з частотою $\nu = 10^5$ Гц. Так як швидкість звуку $\nu = 343$ м/с при $T = 20$ °С, то довжина хвилі дорівнює

$$\lambda = \frac{\nu}{\nu} = \frac{343}{10^5} = 3,43 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

This is an insect size which is the food for a bat. A dolphin generates sound frequencies of $\nu = 10^5$ Hz also. However the velocity of sound in water equals to 1,500 m/s then the wavelength:

$$\lambda = \frac{1500}{10^5} = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

It is a size of a small fish that is food for the dolphin.

The distance to an object can be calculated as

$$s = \frac{\nu t}{2},$$

where ν is sound velocity, t is time of signal passing to object and a backward direction (time of registration of reflected signal). The radars work on this principle. They are used for location of fish shoals, submarines, estimation the depth of water basin etc. The ultrasonic waves are used for these purposes.

4.3.8 Doppler Effect in Acoustics

When the sound source and the sound receiver are moving relatively to each other the frequency of registered sound is changed. The relation of the sound frequency, which is perceived by the receiver, to source and receiver velocity in relation to the environment is called Doppler effect. Let's denote the following values: ν is the sound velocity in medium, ν_s is the velocity of a sound source, ν_r is the velocity of a receiver (Fig.4.26).

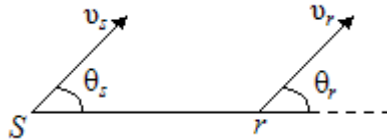


Figure 4.26

In general, the frequency of the sound registered by the receiver is defined as follows

$$\nu_r = \nu_s \frac{\nu + \nu_r \cos \theta_r}{\nu + \nu_s \cos \theta_s}.$$

Це розміри комах, які є здобиччю кажана. Дельфін генерує звуки частотою $\nu = 10^5$ Гц також. Однак, швидкість звуку у воді дорівнює 1500 м/с, тоді довжина хвилі:

$$\lambda = \frac{1500}{10^5} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Це розміри малої риби, яка є їжею для дельфіна.

Відстань до об'єкта можна розрахувати таким чином:

$$s = \frac{\nu t}{2},$$

де ν - це швидкість звуку, t - час проходження сигналу від генератора до об'єкта і назад (час реєстрації відбитого сигналу). За цим принципом працюють локатори. Їх використовують для знаходження рибних косяків, субмарин, оцінки глибини водойму, тощо. В цих цілях використовуються ультразвукові хвилі.

4.3.8 Ефект Доплера в акустиці

Якщо джерело звуку і звуковий приймач рухаються відносно один одного, то частота звуку, що сприймає приймач, змінюється. Залежність частоти звуку, що сприймається приймачем, від швидкості руху джерела і приймача відносно до середовища, в якому поширюються звукові хвилі, називається ефектом Доплера. Позначимо наступні величини: ν – швидкість звуку у середовищі, ν_s – швидкість джерела звуку, ν_r – швидкість звукового приймача (рис.4.26).

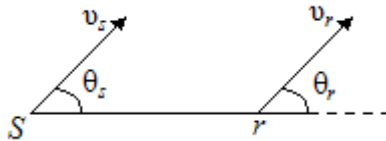


Рисунок 4.26

У загальному випадку частота звуку, що реєструється приймачем визначається наступним чином:

$$\nu_r = \nu_s \frac{\nu + \nu_r \cos \theta_r}{\nu + \nu_s \cos \theta_s}.$$

4.4 Electromagnetic Waves

4.4.1 Properties of Electromagnetic Waves

Electromagnetic wave is an excitation of an electromagnetic field propagating in space. These waves propagate in vacuum with a velocity of $c = 3 \cdot 10^8$ m/s and in any substance:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

where n is called the index of refraction of medium.

In vacuum $\epsilon = \mu = 1$ and $v = c$.

Electromagnetic waves are transverse (Fig.4.27).

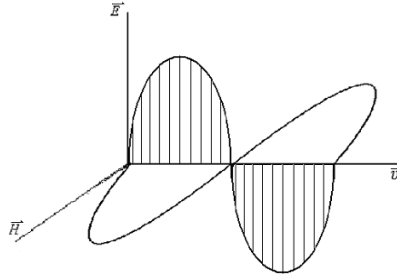


Figure 4.27

Vectors \vec{E} and \vec{H} are perpendicular to each other and vector \vec{v} of the propagation velocity is perpendicular to the plane of the vectors \vec{E} and \vec{H} . Vectors \vec{E} , \vec{H} , \vec{v} form the right-hand triple of vectors.

Vectors \vec{E} and \vec{H} oscillate having the same phase at any moment of time. They change according to the harmonic law. The direction of wave propagation coincides with \vec{v} vector.

4.4.2 Maxwell's Equations

Maxwell's equations describe the basic laws of electromagnetic phenomenon in any medium. They are the basic equations of electromagnetism.

There are four equations of Maxwell.

4.4 Електромагнітні хвилі

4.4.1 Властивості електромагнітних хвиль

Електромагнітна хвиля – це збудження електромагнітного поля, що поширюється у просторі. Такі хвилі розповсюджуються у вакуумі зі швидкістю $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а в будь-якій речовині:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

де n – це коефіцієнт заломлення.

У вакуумі $\epsilon = \mu = 1$ і $v = c$.

Електромагнітні хвилі є поперечними (рис.4.27).

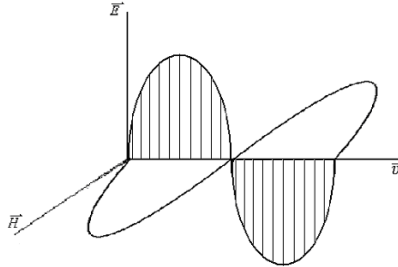


Рисунок 4.27

Вектори \vec{E} та \vec{H} взаємно перпендикулярні, вектор швидкості \vec{v} перпендикулярний до площини векторів \vec{E} і \vec{H} . Вектори \vec{E} , \vec{H} , \vec{v} утворюють правогвинтову трійку векторів.

Вектори \vec{E} і \vec{H} коливаються, маючи однакову фазу у будь-який момент часу. Вони змінюються з часом відповідно до гармонічного закону. Напрямок поширення хвилі співпадає з вектором \vec{v} .

4.4.2 Рівняння Максвелла

Рівняння Максвелла описують основні закони електромагнітних явищ для будь-якого середовища. Вони є основними рівняннями електромагнетизму.

Існує чотири рівняння Максвелла.

1. Maxwell's first equation: any variations of the magnetic field generate the electric field.

In integral form:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

in differential form:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

This equation indicates that not only electrical charges can be the sources of the electric field but also magnetic fields that are changed with time.

2. Maxwell's second equation: the magnetic field is created by moving charges (electric current) as well as by an alternating electric fields.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S},$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

The Maxwell's second equation may be expressed as

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \vec{j}_{displ},$$

where \vec{j}_{displ} is called density of displacement current

$$\vec{j}_{displ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

The displacement current can't originate the heat of Joule. It can only create a magnetic field.

1. Перше рівняння Максвелла: будь-які зміни магнітного поля призводять до утворення електричного поля.

В інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

В диференціальній формі:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Це рівняння вказує на те, що джерелами електричного поля крім електричних зарядів можуть бути також і змінні з часом магнітні поля.

2. Друге рівняння Максвелла: магнітне поле утворюється як рухомими зарядами (електричним струмом), так і змінними електричними полями:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S},$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Друге рівняння Максвелла можна виразити так:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \vec{j}_{displ},$$

де \vec{j}_{displ} - густина струму зміщення.

$$\vec{j}_{displ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Струм зміщення не може виділяти джоулеве тепло. Він може лише утворювати магнітне поле.

3. Maxwell's third equation: electric charges are the source of electric field. The force lines of the electric field originate and finish in electric charges or at infinity:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV ,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho ,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

This equation is the Ostrogradsky-Gauss theorem for the electric field.

4. Maxwell's fourth equation: there are no magnetic charges in nature. The magnetic field is always solenoidal. Force lines of magnetic field are closed. They are not started and finished anywhere:

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 ,$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 .$$

This equation is the Ostrogradsky-Gauss theorem for the magnetic field.

The Maxwell's equations are completed with material equations:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} , \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} .$$

The most important result of Maxwell's equations is the following: alternative electric and magnetic fields uninterruptly linked to each other and create the united electromagnetic field in their locality.

$$\text{Indeed even if } \vec{j} = 0, \text{ and } \rho = 0: \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} .$$

3. Третє рівняння Максвелла: джерелом електричного поля є електричні заряди. Силові лінії електричного поля беруть початок і закінчуються на електричних зарядах або в нескінченності:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV ,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho ,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

Це рівняння є теоремою Остроградського-Гаусса для електричного поля.

4. Четверте рівняння Максвелла: в природі не існує магнітних зарядів. Магнітне поле завжди соленоїдальне. Магнітні силові лінії замкнуті. Вони не мають ні початку ні кінця:

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 ,$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 .$$

Це рівняння є теоремою Остроградського-Гаусса для магнітного поля.

Рівняння Максвелла доповнюють матеріальними рівняннями:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} , \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} .$$

Найважливіший результат рівнянь Максвелла полягає в наступному: змінне електричне і магнітні поля нерозривно зв'язані один з одним і утворюють єдине електромагнітне поле.

$$\text{Насправді, навіть якщо } \vec{j} = 0, \text{ і } \rho = 0: \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} .$$

4.4.3 Differential Equation of Electromagnetic Wave

The existence of electromagnetic waves is the consequence of Maxwell's equations. Electromagnetic waves are transverse. The vectors of the electromagnetic wave \vec{E} and \vec{H} are mutually perpendicular and lie in a plane perpendicular to the direction of propagation of the wave, i.e. to the velocity vector \vec{v} .

Let's write Maxwell's the first and the second equations as

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}, \quad (4.14)$$

Let's consider the projections of vectors \vec{E} and \vec{H} of the electromagnetic wave in accordance with Fig.4.28. Suppose that at first there is an alternating electric field \vec{E}_y , which creates a correspondingly alternating magnetic field \vec{H}_z .

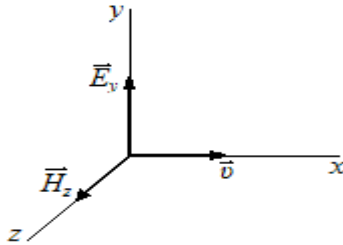


Figure 4.28

For projections of vectors \vec{E}_y, \vec{H}_z equations (4.14) are turned into

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}. \quad (4.15)$$

If we differentiate the first equation of system (4.15) by x and the second equation by t , we get:

4.4.3 Диференціальне рівняння електромагнітної хвилі

Наслідком рівнянь Максвелла є існування електромагнітних хвиль. Електромагнітні хвилі є поперечними. Вектори \vec{E} та \vec{H} електромагнітної хвилі взаємно перпендикулярні і лежать у площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, тобто до вектора \vec{v} швидкості хвилі.

Запишемо перше і друге рівняння Максвелла у вигляді:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}, \quad (4.14)$$

Розглянемо проєкції векторів \vec{E} та \vec{H} електромагнітної хвилі відповідно до рис.4.28. Припустимо, що спочатку існує змінне електричне поле \vec{E}_y , яке створює відповідно змінне магнітне поле \vec{H}_z .

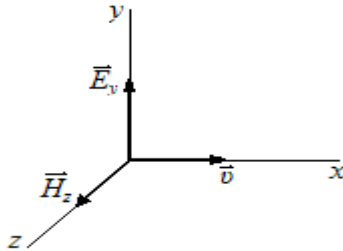


Рисунок 4.28

Для проєкцій векторів \vec{E}_y та \vec{H}_z рівняння (4.14) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}. \quad (4.15)$$

Якщо продиференціювати перше рівняння системи (4.15) по x , а друге рівняння по t , то ми отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} \\ -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{cases},$$

Consequently,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

where c is the velocity of light in vacuum. Then we obtain the wave equation for E_y :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

The wave equation for H_z i.e. the intensity of magnetic field can be equally deduced:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

As $E_x = E_z = 0$, so $E_y = E$ and as $H_x = H_y = 0$ so $H_z = H$.

Then

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

These equations are called the differential equations of an electromagnetic wave or wave equations. Accordingly these equations have the following solutions:

$$E = E_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = E_0 \sin(\omega t - kx),$$

$$H = H_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = H_0 \sin(\omega t - kx).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x}, \\ -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \end{cases},$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

де c – швидкість світла у вакуумі. Тоді отримаємо хвильове рівняння для \vec{E}_y :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Хвильове рівняння для напруженості магнітного поля H_z можна вивести аналогічно:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Так як $E_x = E_z = 0$, то $E_y = E$ і так як $H_x = H_y = 0$, то $H_z = H$. Тоді

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Ці рівняння називаються диференціальними рівняннями електромагнітної хвилі або хвильовими рівняннями. Відповідно ці рівняння мають наступні рішення:

$$E = E_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = E_0 \sin(\omega t - kx),$$

$$H = H_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = H_0 \sin(\omega t - kx).$$

4.4.4 Energy of Electromagnetic Wave. Umov – Poynting's Vector

One of the important characteristics of the electromagnetic wave is that it can transport energy. Energy concentrated in unit of volume is called the volume density of energy. It is equal to the sum of densities of energy of electric and magnetic fields:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

$$[\omega] = \text{J/m}^3.$$

Given that the instantaneous values of E and H are related by the relation $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H$, we obtain that the volume energy density of the electric and magnetic fields at each instant of time is the same, i.e. $\omega_E = \omega_H$. Then the volume density of the energy of the electromagnetic wave will be equal to:

$$\omega = 2\omega_E = \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}EH.$$

Given that the velocity of the electromagnetic wave is:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \text{ we obtain:}$$

$$\omega = \frac{1}{v}EH.$$

Let's multiply the last equation by the velocity v of the wave propagation in the medium and obtain the module of energy flux density:

$$S = \omega v = EH.$$

Since the vectors \vec{E} and \vec{H} are mutually perpendicular and form a rectangular system with the vector \vec{v} , the vector of energy flux density of an electromagnetic wave equals:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}],$$

and is called the Umov-Poynting's vector.

The unit of S is:

$$[S] = \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

4.4.4 Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Умова-Пойнтінга

Однією з важливих характеристик електромагнітної хвилі є те, що вона може переносити енергію. Енергія, сконцентрована в одиниці об'єму, називається об'ємною густиною енергії. Вона дорівнює сумі об'ємних густин енергії електричного і магнітного полів:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

$$[\omega] = \text{Дж/м}^3.$$

Враховуючи, що миттєві значення E і H зв'язані співвідношенням $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H$, отримаємо, що об'ємна густина енергії електричного і магнітного полів в кожен момент часу однакова, тобто $\omega_E = \omega_H$. Тоді об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі буде дорівнювати:

$$\omega = 2\omega_E = \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}EH.$$

З урахуванням того, що швидкість електромагнітної хвилі дорівнює: $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, отримаємо:

$$\omega = \frac{1}{v}EH.$$

Домножимо останнє рівняння на швидкість v поширення хвилі в середовищі і отримаємо модуль густини потоку енергії:

$$S = \omega v = EH.$$

Так як вектори \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні і утворюють з вектором \vec{v} правої вгвинтової систему, то вектор густини потоку енергії електромагнітної хвилі дорівнює:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}],$$

і називається вектором Умова-Пойнтінга.

Одиниця вимірювання S :

$$[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

The direction of vector \vec{S} coincides with the direction of energy transfer by the electromagnetic wave, and modulus is equal to energy which is transferred by an electromagnetic wave per unit of time through the unit of surface area which is placed perpendicular to the direction of wave propagation.

4.4.5 Spectrum of Electromagnetic Waves

The totality of electromagnetic waves is called the electromagnetic spectrum (Fig.4.29). This spectrum is continuous and it isn't limited. All waves in the electromagnetic spectrum are of the same physical nature and propagate in free space at the same speed. Depending on the frequency or wavelength, as well as the method of radiation and registration, there are several types of electromagnetic waves: radio waves, optical radiation, X-rays and gamma radiation.

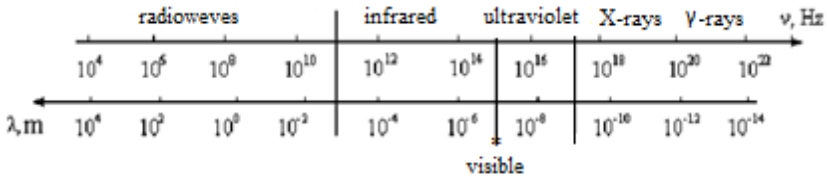


Figure 4.29

The sources that produce them and the instruments that are used to measure them are rather different. The radiowaves are originated from alternative current in R,L,C -circuit. Visible electromagnetic waves are originated in molecules and atoms under the effect of heat or electric discharge. X-rays are generated when accelerated electrons strike with metal atoms. They are emitted as a result of changes in the states of inner electron shells in atoms. γ -rays are originated by the atom nuclear and as a result of interaction of elementary particles.

Напрямок вектора \vec{S} збігається з напрямком переносу енергії електромагнітною хвилею, а модуль дорівнює енергії, яку переносить електромагнітна хвиля за одиницю часу через одиницю площі поверхні, що розміщена перпендикулярно до напрямку поширення хвилі.

4.4.5 Спектр електромагнітних хвиль

Сукупність електромагнітних хвиль називають електромагнітним спектром (рис.4.29). Цей спектр є безперервним і необмеженим. Усі хвилі електромагнітного спектру мають однакову фізичну природу і розповсюджуються у просторі з однаковою швидкістю. В залежності від частоти або довжини хвилі, а також способу випромінювання і реєстрації існує декілька видів електромагнітних хвиль: радіохвилі, оптичне випромінювання, рентгенівське випромінювання і гама випромінювання.

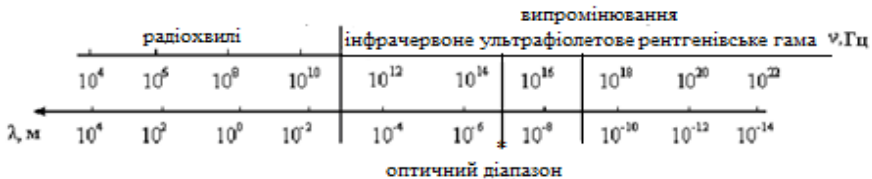


Рисунок 4.29

Джерела, які їх генерують, і прилади, які використовують для їх вимірювання, є досить різними. Радіохвилі виникають при збудженні змінного струму у R, L, C -контурі. Видимі електромагнітні хвилі випромінюють молекули і атоми під дією нагрівання або електричного розряду. Рентгенівські промені генеруються, коли прискорені електрони зіштовхуються з атомами металу. Вони випромінюються в результаті зміни стану внутрішніх електронних оболонок в атомах. Гама промені випромінюються ядром атома і в результаті взаємодії елементарних частинок.

Control Questions
Oscillations and Waves

1. What oscillations are called harmonic?
2. Derive the formula for the velocity, acceleration, and energy of harmonic oscillations.
3. What is called the spring, mathematical and physical pendulum?
4. What is a harmonic oscillator?
5. How are the periods of oscillation of spring, physical and mathematical pendulums determined?
6. What oscillations are called damped?
7. What oscillations are called forced?
8. What are electromagnetic oscillations?
9. Write down the differential equation of free, damped, and forced electromagnetic oscillations.
10. What are elastic waves? Give the definition of transverse and longitudinal waves.
11. Write down the travelling wave equation.
12. Write down the wave equation.
13. Define a standing wave.
14. What are sound waves?
15. What is the Doppler effect?
16. What is an electromagnetic wave?
17. Write down the Maxwell's equations for electromagnetic waves.
18. How is electromagnetic wave energy determined?
19. What is the Umov-Poynting's vector?

Контрольні запитання Коливання та хвилі

1. Які коливання називають гармонічними?
2. Виведіть формулу для швидкості, прискорення і енергії гармонічних коливань.
3. Що називають пружинним, математичним і фізичним маятником?
4. Що таке гармонічний осцилятор?
5. Як визначаються періоди коливань пружинного, фізичного і математичного маятників?
6. Які коливання називають затухаючими?
7. Які коливання називають вимушеними?
8. Що таке електромагнітні коливання?
9. Запишіть диференціальне рівняння вільних, затухаючих і вимушених електромагнітних коливань.
10. Що таке пружні хвилі? Дайте визначення поперечної і поздовжньої хвиль.
11. Запишіть рівняння біжучої хвилі.
12. Запишіть хвильове рівняння.
13. Дайте визначення стоячої хвилі.
14. Що таке звукові хвилі?
15. В чому полягає ефект Доплера?
16. Що таке електромагнітна хвиля?
17. Запишіть рівняння Максвелла для електромагнітних хвиль.
18. Як визначається енергія електромагнітних хвиль?
19. Що таке вектор Умова-Пойнтінга?

5 OPTICS

5.1 Wave Optics

Optics is a part of physics that studies the electromagnetic waves of optical range. Physics uses two conceptions of the nature of light in order to explain the light phenomenon: wave and corpuscular. According to the wave theory the light emission represents electromagnetic waves. Their range is

$$\lambda = (0.4 \div 0.76) \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\nu = (0.75 \div 0.39) \cdot 10^{15} \text{ Hz}.$$

According to the corpuscular theory light emission is a flux of special particles. These particles are called photons. Each photon possesses a definite energy

$$E = h\nu,$$

where h is Plank's constant ($h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s). In modern physics both theories are correct. Light phenomena such as reflection, refraction, interference, diffraction are explained by the wave theory. The corpuscular theory helps to explain the laws of interaction between light and substance.

5.1.1 Interference of Light

A superposition of two or more light waves with the same frequency and constant phase difference which cause redistribution of light intensity in space is called interference. As a result there appears alternation of maximum and minimum light intensity. Waves which have the same frequency and constant phase difference are called coherent.

Let's consider superposition of two coherent monochromatic light waves which cause harmonic oscillations at a certain point:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

The amplitude of the resultant wave is

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

5 ОПТИКА

5.1 Хвильова оптика

Оптика – це розділ фізики, що вивчає електромагнітні хвилі оптичного діапазону. Щоб пояснити світлові явища фізика використовує два механізми щодо природи світла: хвильовий та корпускулярний. Згідно з хвильовою теорією, світлове випромінювання уявляє собою електромагнітні хвилі. Їх діапазон:

$$\lambda = (0.4 \div 0.76) \cdot 10^{-6} \text{ м,}$$

$$\nu = (0.75 \div 0.39) \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Згідно з корпускулярною теорією, світлове випромінювання – це потік особливих частинок. Ці частинки називаються фотонами. Кожен фотон має певну енергію:

$$E = h\nu,$$

де h – стала Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с). У сучасній фізиці справедливі обидві теорії. Світлові явища - відбивання, заломлення, інтерференція, дифракція світла пояснюються за допомогою хвильової теорії. Корпускулярна теорія пояснює закони взаємодії світла з речовиною.

5.1.1 Інтерференція світла

Накладання двох або більше світлових хвиль з однаковою частотою і сталою різницею фаз, яке спричиняє перерозподіл інтенсивності світла в просторі, називається інтерференцією. В результаті виникає чергування максимумів і мінімумів інтенсивності світла. Хвилі, що мають однакову частоту і сталу різницю фаз, називаються когерентними.

Розглянемо накладання двох когерентних монохроматичних світлових хвиль, які в певній точці викликають гармонічні коливання:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Амплітуда результуючої хвилі:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

The wave intensity of light is $I \sim A^2$ and it can be found accordingly:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

At the points, where $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, the resulting intensity is maximum: $I > I_1 + I_2$.

At the points, where $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$, the resulting intensity is minimum: $I < I_1 + I_2$.

If $I_1 = I_2 = I$, then

$$I_{max} = 4I, \quad I_{min} = 0.$$

The coherent waves may be received with separating the wave in two parts. These waves pass different paths from the point of separation to the point of interference. If division of the light wave in two parts takes place then the first wave passes the way l_1 in the medium with the index of refraction n_1 and the second wave passes the way l_2 in the medium with the index of refraction n_2 . In superposition point the first wave stimulates the oscillations

$$x_1 = A_1 \cos \omega \left(t - \frac{l_1}{v_1} \right),$$

the second wave -

$$x_2 = A_2 \cos \omega \left(t - \frac{l_2}{v_2} \right),$$

where $v_1 = \frac{c}{n_1}$, $v_2 = \frac{c}{n_2}$ are phase velocities of the first and second waves; c is the speed of light in vacuum.

The difference of phases in superposition point equals:

$$\delta = \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (l_2 n_2 - l_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

where $L = l \cdot n$ is called the optical path.

$\Delta = L_2 - L_1$ is called the optical path difference.

Інтенсивність хвилі світла $I \sim A^2$ і може бути визначена так:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

У точках, де $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, результуюча інтенсивність є максимальна: $I > I_1 + I_2$.

У точках, де $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$, результуюча інтенсивність є мінімальна: $I < I_1 + I_2$.

Якщо $I_1 = I_2 = I$, то

$$I_{max} = 4I, \quad I_{min} = 0.$$

Когерентні хвилі можна отримати, розділивши хвилю на дві частини, які проходять різний шлях від точки розділення до точки накладання. При розділенні світлової хвилі на дві частини, перша хвиля проходить шлях l_1 у середовищі з показником заломлення n_1 , а друга хвиля – шлях l_2 у середовищі з показником заломлення n_2 . У точці накладання перша хвиля викликає коливання

$$x_1 = A_1 \cos \omega \left(t - \frac{l_1}{v_1} \right),$$

друга –

$$x_2 = A_2 \cos \omega \left(t - \frac{l_2}{v_2} \right).$$

де $v_1 = \frac{c}{n_1}$, $v_2 = \frac{c}{n_2}$ – фазові швидкості першої та другої хвилі; c

– швидкість світла у вакуумі.

Різниця фаз у точці накладання дорівнює:

$$\delta = \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (l_2 n_2 - l_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

де $L = l n$ – називається оптичною довжиною шляху;

$\Delta = L_2 - L_1$ – називається оптичною різницею ходу;

λ_0 is the wavelength in vacuum.

Therefore, if

$$\Delta = \pm m\lambda_0$$

$$\delta = \pm 2\pi m,$$

where $m = 0, 1, 2, \dots$, the oscillations in the superposition point are in the same phase and the amplitude of the resulting oscillation is maximum.

If

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

$$\delta = \pm(2m+1)\pi,$$

the oscillations in the superposition point are in the opposite phase and the amplitude of the resulting oscillation is minimum.

Let's examine an example of interference of light received by the method of Thomas Young. The scheme of this experiment is shown in Fig.5.1.

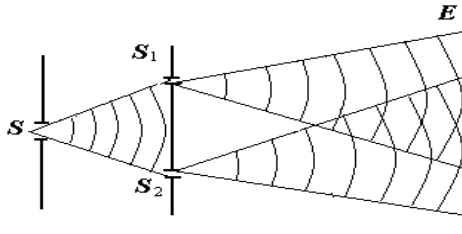


Figure 5.1

A beam of light falls on the screen with a small hole or a narrow slit S . Then the beam of light splits into two parts while passing through the holes or slits S_1 and S_2 in an opaque screen. As a result there appear two coherent beams which overlap on each other and create an interferential image on the screen E . So holes S_1 and S_2 play the role of coherent sources of light.

Let's consider the spreading of two coherent light waves from sources S_1 and S_2 that are narrow parallel slits (Fig.5.2). The distance between the sources of light S_1 and S_2 is equal to d .

λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Отже, якщо

$$\Delta = \pm m\lambda_0$$

$$\delta = \pm 2\pi m,$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$, то коливання у точці накладання однакові по фазі і амплітуда результуючого коливання є максимальною.

Якщо

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

$$\delta = \pm(2m+1)\pi,$$

то коливання в точці накладання протилежні по фазі і амплітуда результуючого коливання є мінімальною.

Розглянемо приклад інтерференції світла, отриманої методом Т. Юнга. Схема його експеримента показана на рис.5.1.

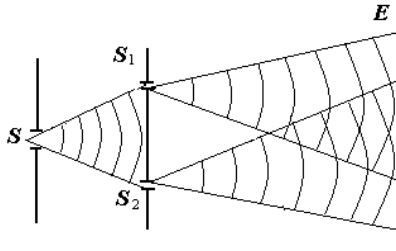


Рисунок 5.1

Пучок світла падає на екран з малим отвором або вузькою щілиною S . Далі пучок світла поділяється на дві частини при проходженні через отвори або щілини S_1 і S_2 в непрозорому екрані. В результаті виникає два когерентні пучки світла, які накладаються друг на друга і утворюють інтерференційну картину на екрані E . Таким чином, отвори S_1 і S_2 відіграють роль когерентних джерел світла.

Розглянемо поширення двох когерентних світлових хвиль від джерел S_1 та S_2 , які уявляють собою вузькі паралельні щілини (рис. 5.2). Відстань між джерелами світла S_1 та S_2 дорівнює d .

On the screen E that is placed in the interferential field on the distance l from the sources of light ($l \gg d$) the interferential image will be observed that is a system of maximums and minimums in a form of light and dark lines.

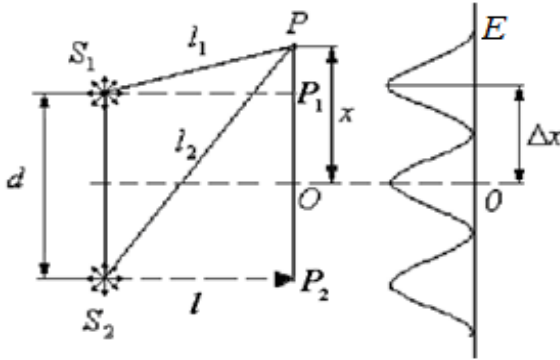


Figure 5.2

Let's consider an arbitrary point P on the screen that is located on the distance x from the point O . The beams from S_1 and S_1 pass distances l_1 and l_2 to the point P and are added. The intensity of the point P is determined by the path difference of beams $\Delta = (l_1 - l_2)n$. There are two cases:

- if the optical path difference of beams is equal to an even number of half-waves then two beams at the point P have the same phase and in this point we observe a maximum intensity.

$$\Delta = \pm 2m \cdot \frac{\lambda_0}{2}, (m = 0, 1, 2\dots). \quad (5.1)$$

$$\delta = \pm 2\pi m.$$

- if optical path difference of beams is equal to an odd number of half-waves then two beams at the point P are in antiphase and in this point we observe a minimum:

$$\Delta = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}, (m = 0, 1, 2\dots). \quad (5.2)$$

$$\delta = \pm (2m + 1)\pi.$$

На екрані E , розміщеному в полі інтерференції, на відстані l від джерел світла ($l \gg d$) спостерігатиметься інтерференційна картина, яка уявляє собою систему максимумів і мінімумів у вигляді світлих і темних смуг.

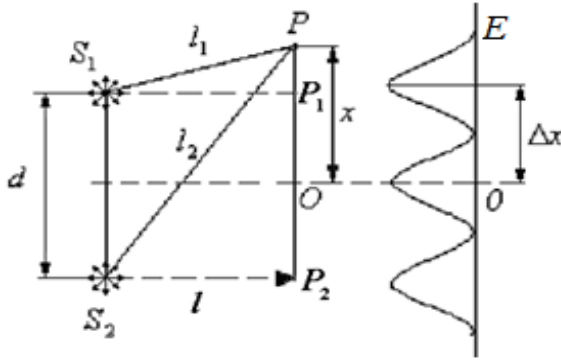


Рисунок 5.2

Розглянемо довільну точку P на екрані, яка знаходиться на відстані x від точки O . Промені від S_1 та S_2 проходять до точки P відстані l_1 та l_2 і додаються. Інтенсивність в точці P визначається оптичною різницею ходу $\Delta = (l_2 - l_1)n$. Можливі два випадки:

- якщо оптична різниця ходу променів дорівнює парному числу півхвиль, то два променя в точці P мають однакову фазу і в ній спостерігається максимум інтенсивності:

$$\Delta = \pm 2m \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (5.1)$$

$$\delta = \pm 2\pi m.$$

- якщо оптична різниця ходу променів дорівнює непарному числу півхвиль, то два променя в точці P знаходяться в протифазі і в ній спостерігається мінімум:

$$\Delta = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (5.2)$$

$$\delta = \pm (2m + 1)\pi.$$

A fundamental requirement for the existence of sufficiently stable interference on the screen is the light waves that travel from S_1 and S_2 to any P point must have a phase difference of $\varphi_2 - \varphi_1$ that remains constant with time: $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$.

Let's find the path difference of beams $l_2 - l_1$. From right-hand triangles SS_1P_1 and SS_2P_2 we obtain:

$$l_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$l_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd, \quad (5.3)$$

$$l_2 + l_1 \approx 2L.$$

Thus, dividing (5.3) by $2l$ at condition $n = 1$ we obtain:

$$\Delta = \frac{x \cdot d}{L},$$

where x is the distance between O and an arbitrary P point. Thus, conditions (5.1) and (5.2) may be rewritten as:

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda,$$

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda.$$

The distance between two nearest maximums or minimums can be determined as

$$\Delta x = x_{2(m+1)} - x_{2m} = \left[2(m+1) \frac{\lambda}{2} - 2m \frac{\lambda}{2}\right] \cdot \frac{L}{d} = \frac{\lambda \cdot L}{d}.$$

The phenomenon of interference is applied for: lightness of optics; measuring length with very high accuracy (up to 0.05μ); examination and control of polishing quality of mirror surface; determination of basic constants of substance:

Основною вимогою до існування добре-усталеної картини інтерференції на екрані є те, що світлові хвилі, які прямують від S_1 та S_2 до точки P повинні мати різницю фаз, яка є незмінною у часі: $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$.

Знайдемо різницю ходу променів $l_2 - l_1$. З прямокутних трикутників S_1PP_1 і S_2PP_2 отримаємо:

$$l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2;$$

$$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd \quad (5.3)$$

$$l_2 + l_1 \approx 2l.$$

Тоді, розділивши (5.3) на $2l$, при умові $n = 1$, ми отримуємо

$$\Delta = \frac{x \cdot d}{l},$$

де x – відстань від точки O до деякої точки P . Тоді умови (5.1) та (5.2) можна записати таким чином:

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0;$$

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda_0.$$

Відстань між двома найближчими максимумами або мінімумами можна визначити так:

$$\Delta x = x_{2(m+1)} - x_{2m} = \left[2(m+1) \frac{\lambda_0}{2} - 2m \frac{\lambda_0}{2}\right] \cdot \frac{l}{d} = \frac{\lambda_0 \cdot l}{d}.$$

Явище інтерференції застосовують для: просвітлення оптики; вимірювання довжини з дуже великою точністю (до 0,05 мкм); перевірки та контролю якості шліфовки дзеркальних поверхонь; визначення основних констант речовини.

the absorption coefficient, the index of refraction etc.; study of spectrums of different substances.

5.1.2 Diffraction of Light

The set of phenomena observed in the propagation of light in an environment with different optical inhomogeneities (for example, when passing through small openings, at the boundaries of opaque bodies, etc.) is called light diffraction. The bending of light around different obstacles, i.e. deviation from the laws of geometric optics is associated with diffraction. The diffraction of light is due to its wave nature.

The phenomenon of diffraction can be explained by a Huygens-Fresnel's principle:

- all points of a wave front can be considered as coherent point sources for the production of spherical secondary waves, an envelope of these waves causes the position of a wave front in the next moment of time;

- the intensity of the light wave is the result of the interference of secondary waves from coherent wave front point sources of a wave front.

The diffraction of spherical waves, in which the diffraction image is observed on the final distance from the obstacle, is called the Fresnel diffraction. The diffraction of plane wave, or diffraction in parallel rays, is observed in the case when the light source and the observation point are infinitely distant from the obstacle and is called the Fraunhofer diffraction.

With the help of Huygens-Fresnel's principle we can explain the phenomenon of diffraction, and also straight-line spreading of light in homogeneous medium.

Fresnel solved this problem using the method, which is called Fresnel zone method.

Fresnel zone method is the dividing the wave front into ringer zones (Fig.5.3) so that the distances from zones' borders to the point P differ by $\lambda/2$:

коефіцієнта поглинання, показника заломлення та ін.; вивчення спектрів різних речовин.

5.1.2 Дифракція світла

Сукупність явищ, що спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різними оптичними неоднорідностями (наприклад при проходженні через малі отвори, біля границь непрозорих тіл тощо) називається дифракцією світла. Огинання світлом різних перешкод, тобто відхилення від законів геометричної оптики пов'язано з дифракцією. Дифракція світла зумовлена його хвильовою природою.

Явище дифракції можна пояснити за допомогою принципу Гюйгенса-Френеля:

- кожному точці хвильового фронту можна розглядати як джерело вторинних сферичних хвиль, а обвідна цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу;

- інтенсивність світової хвилі є результатом інтерференції вторинних хвиль від когерентних точкових джерел хвильового фронту.

Дифракція сферичних хвиль, при якій дифракційна картина спостерігається на скінченній відстані від перешкоди, називається дифракцією Френеля. Дифракція плоских хвиль, або дифракція в паралельних променях спостерігається в тому випадку, коли джерело світла і точка спостереження нескінченно віддалені від перешкоди і називається дифракцією Фраунгофера.

За допомогою принципу Гюйгенса-Френеля можна пояснити явище дифракції, а також прямолінійне поширення світла в однорідному середовищі.

Френель розв'язав цю задачу, застосувавши прийом, який називається методом зон Френеля.

Метод зон Френеля полягає в тому, що хвильовий фронт розбивають на кільцеві зони (рис.5.3) так, що відстані від границь зон до точки P відрізняються на $\lambda/2$:

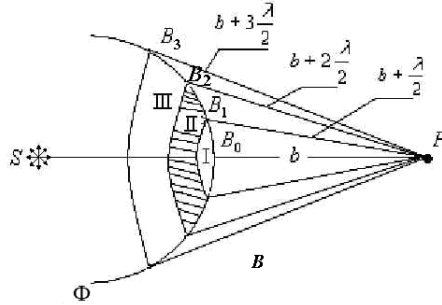


Figure 5.3

I, II, III are Fresnel zones. As oscillating amplitudes of neighboring zones are in opposite phases the resulting amplitude in P point equals

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_m,$$

where A_m is amplitude of oscillation stimulated by m -zone.

For estimation of these amplitudes let's define the area and radius of Fresnel zones.

Let's consider Fig. 5.4

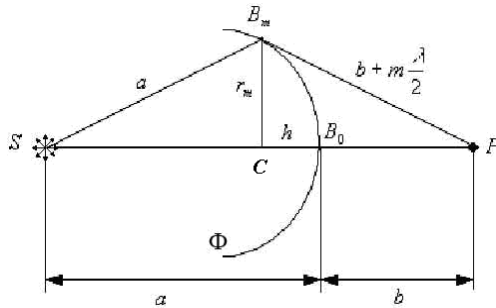


Figure 5.4

In this Figure S is the point source of light, a is the distance from S to the wave front, P is the point at the screen, b is the distance from the wave front to P , m is the number of Fresnel zones ($m = 1, 2, 3, \dots$), r_m is the radius of Fresnel zone.

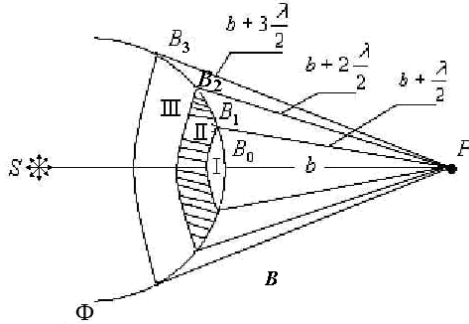


Рисунок 5.3

I, II, III – зони Френеля. Якщо амплітуди коливань у сусідніх зонах мають різні фази, то результуюча амплітуда в точці P дорівнюватиме:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_m,$$

де A_m – амплітуда коливань, які викликані m -зоною.

Для оцінки цих амплітуд визначимо площу та радіус зон Френеля.

Розглянемо рис.5.4.

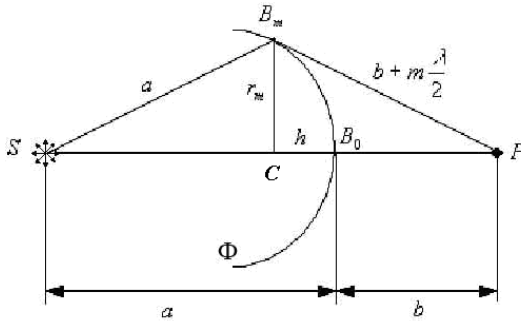


Рисунок 5.4

На цьому рисунку S – точкове джерело світла, a – відстань від S до фронту хвилі, P – точка на екрані, b – відстань від фронту хвилі до точки P , m – номер зони Френеля ($m = 1, 2, 3, \dots$), r_m – радіус зони Френеля.

According to structure of Fresnel

$$B_m P = b + m \frac{\lambda}{2}.$$

From triangles $SB_m C$ and $PB_m C$ we have

$$a^2 - (a-h)^2 = (b + m \frac{\lambda}{2})^2 - (b+h)^2 \Rightarrow$$

Given that $\lambda \ll a$ and $\lambda \ll b$, we obtain

$$h = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}.$$

Find the radius of the outer Fresnel zone

$$r_m^2 = a^2 - (a-h)^2 \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}}.$$

The area of spherical segment is

$$S_m = 2\pi ah = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)} m,$$

and the area of m -th Fresnel zone:

$$\Delta S = S_{m+1} - S_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

From this equation we can see that the area of Fresnel zone doesn't depend upon m (i.e. its number). Thus, areas of Fresnel zones are approximately equal.

According to Fresnel's assumption the effect of zones in P point decreases gradually if the number of zone m increases: $A_1 > A_2 > \dots > A_m$. The radius of Fresnel zones is small and the amplitude of Fresnel m -zone can be determined as an average value of neighboring zones:

$$A_m = \frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{2}.$$

Then the amplitude of resultant oscillation at the P point equals

Згідно з методом зон Френеля

$$B_m P = b + m \frac{\lambda}{2}.$$

З трикутників $SB_m C$ і $PB_m C$ маємо:

$$a^2 - (a - h)^2 = (b + m \frac{\lambda}{2})^2 - (b + h)^2 \Rightarrow$$

Враховуючи, що $\lambda \ll a$ і $\lambda \ll b$, отримаємо

$$h = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}.$$

Знайдемо радіус зовнішньої зони Френеля

$$r_m^2 = a^2 - (a - h)^2 \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}}.$$

Площа сферичного сегменту

$$S_m = 2\pi ah = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)} m,$$

а площа m -ї зони Френеля

$$\Delta S = S_{m+1} - S_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

З цього рівняння видно, що площа зони Френеля не залежить від її номера m . Таким чином, площі зон Френеля приблизно однакові.

Згідно з припущенням Френеля дія зон в точці P поступово зменшується, якщо номер зони m збільшується: $A_1 > A_2 \dots > A_m$. Радіус зон Френеля малий і амплітуда m -ної зони Френеля може бути визначена як середнє значення амплітуд сусідніх зон:

$$A_m = \frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{2}.$$

Тоді амплітуда результуючого коливання в точці P дорівнює

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) \dots$$

So, members in brackets are equal to zero and finally we obtain:

$$A = \frac{A_1}{2}.$$

Thus, the effect of the wave front Φ may be substituted by the effect of the central Fresnel zone. As the radius of Fresnel zones is so small the light spreads inside a narrow channel along SP line, that is, straight. Thus, the Huygens-Fresnel's principle explains the linear propagation of light in a homogeneous medium.

5.1.3 Diffraction of Fresnel at an Aperture

Let's consider diffraction of light while it passes through an aperture.

If a screen with an aperture is present in the path of the light wave then the shadow zone is formed behind of this screen (Fig 5.5).

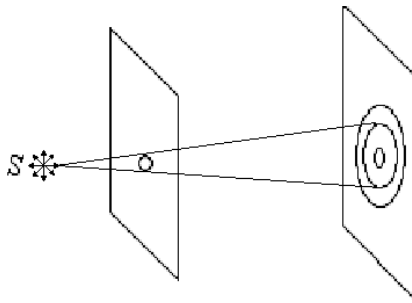


Figure 5.5

Light penetrates through the zone of the geometrical shadow and forms alternative maximum and minimum of lightness. Let's use the method of Fresnel zones, having divided the wave front into ringer zones, as it is shown in Fig.5.6

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) \dots$$

Вирази в дужках дорівнюють нулю і в результаті отримуємо:

$$A = \frac{A_1}{2}.$$

Отже, дія фронту хвилі Φ може бути замінена дією центральної зони Френеля. Так як радіус зони Френеля порівняно малий, то світло розповсюджується у вузькому каналі вздовж лінії SP , тобто прямолінійно. Таким чином, принцип Гюйгенса-Френеля пояснює прямолінійне поширення світла в однорідному середовищі.

5.1.3 Дифракція Френеля на круглomu отворі

Розглянемо дифракцію світла при проходженні його крізь круглий отвір.

Якщо екран з круглим отвором лежить на шляху світлової хвилі, то позаду цього екрану виникає тіньова зона (рис.5.5).

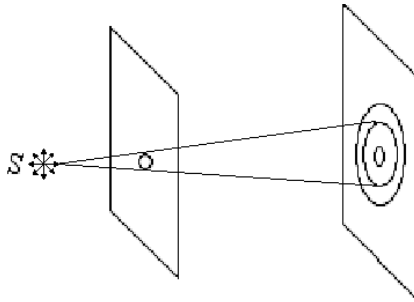


Рисунок 5.5

Світло проникає в зону геометричної тіні і формує альтернативні мінімуми та максимуми освітленості. Застосуємо метод зон Френеля, розділивши хвильовий фронт на кільцеві зони, як зображено на рис.5.6.

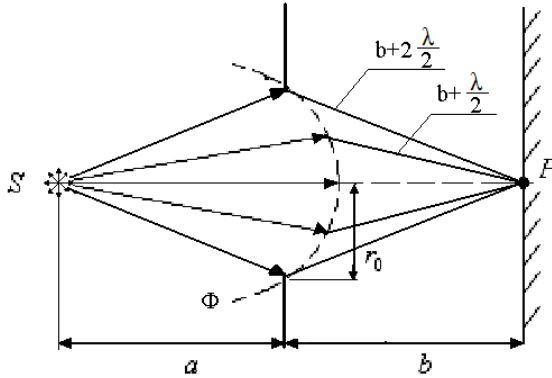


Figure 5.6

If a and b satisfy the requirement

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda,$$

then the quantity of Fresnel zones on the aperture is

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

If an aperture is kept within odd numbers of Fresnel zones, then the amplitude at P point is

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2}.$$

If quantities of Fresnel zones are even numbers then the amplitude equals

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-3}}{2} - A_{m-2} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m.$$

As amplitudes of two neighboring zones are practically equal so

$$\frac{A_{m-1}}{2} - A_m = -\frac{A_m}{2},$$

$$A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_m}{2}.$$

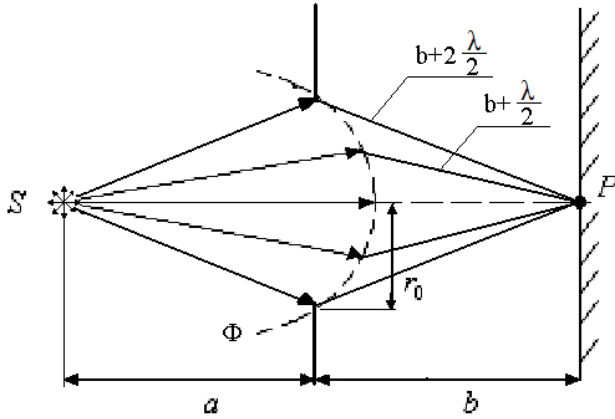


Рисунок 5.6

Якщо a та b задовольняють умові

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda,$$

тоді число зон Френеля в отворі:

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Якщо отвір відкриває непарне число зон Френеля, амплітуда в точці P

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2}.$$

Якщо число цих зон парне, тоді амплітуда дорівнює:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-3}}{2} - A_{m-2} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m.$$

Так як амплітуди сусідніх зон практично однакові, то

$$\frac{A_{m-1}}{2} - A_m = -\frac{A_m}{2},$$

$$A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_m}{2}.$$

Consequently,

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}.$$

The common rule is the following: there is a bright spot at the center of a screen if the odd numbers of Fresnel zones are open, there is a dark spot at the center of a screen if the even numbers of Fresnel zones are open.

The diffraction picture at the round aperture has a look of concentric dark and light rings the intensity of which decreases with the distance from their center (Fig. 5.7).

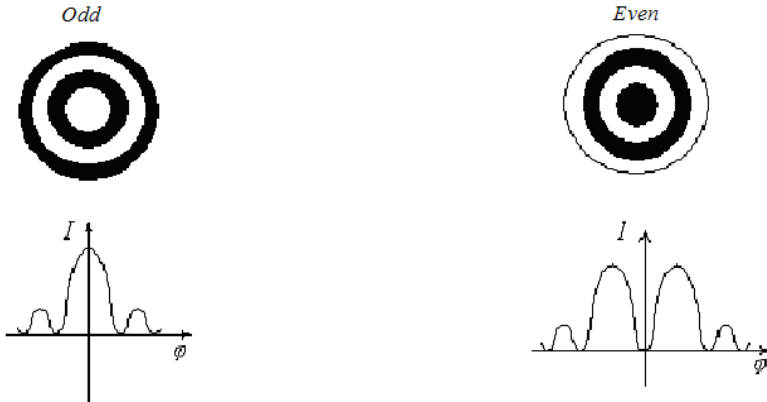


Figure 5.7

If the diameter of the round aperture is relatively large, the diffraction picture is not observed on the screen. In this case the light propagates in a straight line.

5.1.4 Diffraction of Fraunhofer at a Single Slit

Let's consider diffraction of plane light waves or diffraction of Fraunhofer in parallel beams. Let's assume that the diffraction of light occurs at a long narrow slit with width b (Fig. 5.8).

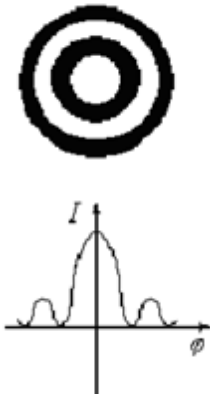
Отже,

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}.$$

Загальне правило таке: якщо відкрито непарне число Френеля, то в центрі екрану виникає світла пляма, якщо відкрито парне число зон Френеля, то в центрі екрану виникає темна пляма.

Дифракційна картина на круглому отворі має вигляд концентричних темних і світлих кілець, інтенсивність яких зменшується з відстанню від їх центра (рис.5.7).

Непарне число зон Френеля



Парне число зон Френеля

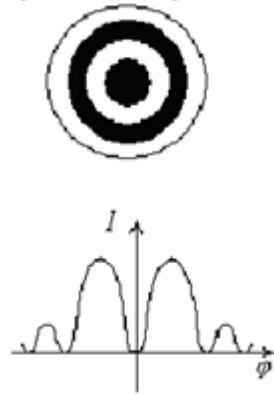


Рисунок 5.7

Якщо діаметр отвору порівняно великий, то дифракційна картина на екрані не спостерігається. У цьому випадку світло поширюється прямолінійно.

5.1.4 Дифракція Фраунгофера на одній щілині

Розглянемо дифракцію плоских світлових хвиль, або дифракцію Фраунгофера в паралельних променях. Припустимо, що дифракція світла відбувається на вузькій довгій щілині шириною b (рис.5.8).

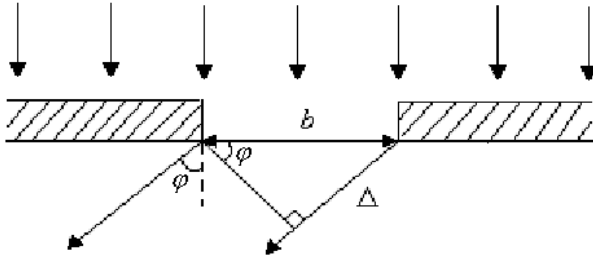


Figure 5.8

Parallel rays fall on the slit. According to the Huygens-Fresnel's principle all points of the slit are secondary sources of waves, which oscillate in one phase. We consider an arbitrary direction of spreading of defragged beams at an angle φ , which is called the angle of diffraction. It is a variable value. The optical path difference between the first and the last beams equals

$$\Delta = b \sin \varphi.$$

Let's divide the slit into Fresnel zones as strips parallel to the edge of the slit. During the interference of light from each pair of neighbor zones the amplitude of the resultant oscillations is equal to zero, as they oscillate with opposite phases. So, the result of the interference of light is determined by the number of opened Fresnel zones.

If the number of opened Fresnel zones is odd, then

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

In this case the intensity of light is increased and there appears the maximum of the diffraction.

If there opened an even number of Fresnel zones the beams extinguish each other and there appears the minimum of the diffraction.

The condition of minimum is

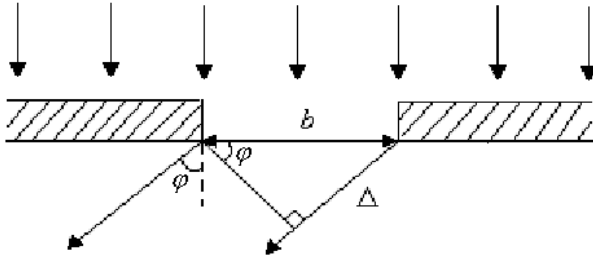


Рисунок 5.8

Паралельні промені падають на щілину. Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля, всі точки щілини є вторинними джерелами хвиль, що коливаються в одній фазі. Розглянемо випадковий напрямок розповсюдження дифрагованих променів під кутом φ , який називається кутом дифракції. Це змінна величина. Оптична різниця ходу між першим і останнім променями дорівнює:

$$\Delta = b \sin \varphi.$$

Розіб'ємо щілину на зони Френеля у вигляді смуг, паралельних до ребра щілини. При інтерференції світла від кожної пари сусідніх зон амплітуда результуючих коливань дорівнює нулю, так як вони коливаються з протилежними фазами. Тому результат інтерференції світла визначається кількістю відкритих зон Френеля.

Якщо кількість відкритих зон Френеля непарна, то

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

У такому випадку інтенсивність світла зростає і виникає дифракційний максимум.

Якщо відкрито парне число зон Френеля, промені гасять один одного і виникає дифракційний мінімум.

Умова мінімуму:

$$b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2},$$

where $m = 0, 1, 2, \dots$

Fig. 5.9 shows the light intensity distribution in diffraction on one slit in case of monochromatic light.

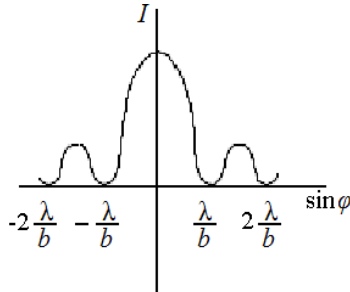


Figure 5.9

5.1.5 Diffraction Grating

A system of parallel equidistant slits placed in one plane on the same distances from each other, is called a diffraction grating. Opaque and transparent areas alternate with each other as it is shown in Fig. 5.10:

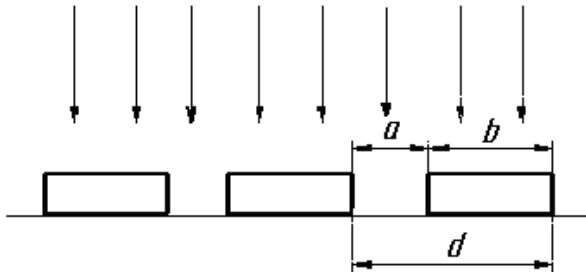


Figure 5.10

The value of d is called the grating constant (period). It is equal to

$$d = a + b.$$

$$b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2},$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$

Розподіл інтенсивності світла при дифракції на одній щілині у випадку монохроматичного світла, показано на рис.5.9.

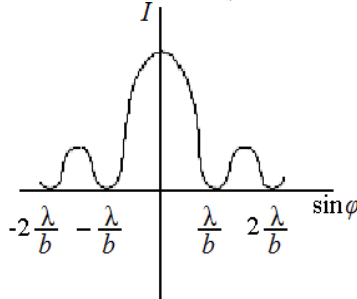


Рисунок 5.9

5.1.5 Дифракційна ґратка

Система паралельних однакових щілин, розміщених в одній площині на однакових відстанях одна від одної, називається дифракційною ґраткою. Непрозорі та прозорі ділянки чергуються, як показано на рис.5.10:

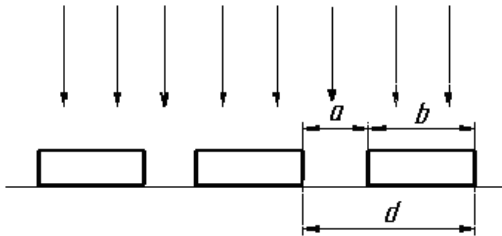


Рисунок 5.10

Величина d називається сталою (періодом) дифракційної ґратки. Вона дорівнює:

$$d = a + b.$$

A typical diffraction grating contains 12,000 slits per inch (2.54 cm).

$$d = \frac{1}{N} = 2.12 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

Two events occur if the parallel beams of light fall on the grating. The first is the diffraction of light at each of N slits and the second is an interference of these rays. The diffraction pattern is an alternation of principal maximum and minimum. Subsidiary maxima appear between the principal maxima (Fig. 5.11).

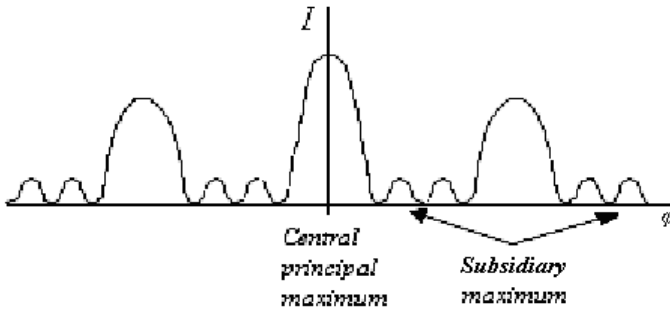


Figure 5.11

The condition of principal maximums is

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

The condition of principal minimums is

$$a \sin \varphi = \pm m\lambda.$$

Devices supplied with diffraction gratings are used for determination of the light wavelength. In order to distinguish two close spectral lines the grating should have a high resolution power R :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

where λ is the mean wavelength of two spectrum lines to be observed as separate, $\Delta\lambda$ is the wavelength difference between them. The greater is R the smaller is $\Delta\lambda$ and the closer are the lines that can be resolved.

Звичайні ґратки мають 12000 щілин на дюйм (2,54 см).

$$d = \frac{1}{N} = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

Коли паралельні промені світла падають на ґратку, виникає два явища. Перше – це дифракція світла на кожній з N щілин і друге – це інтерференція цих променів. Дифракційна картина представляє собою чергування головних максимумів і мінімумів. Між головними максимумами виникають додаткові максимуми (рис. 5.11).

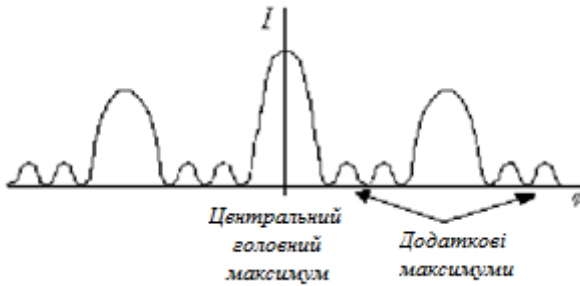


Рисунок 5.11

Умова головних максимумів:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Умова головних мінімумів:

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda.$$

Прилади з дифракційними ґратками використовуються для вимірювання довжини хвилі світла. Щоб розрізнити дві близькі спектральні лінії, ґратка повинна мати високу роздільну здатність R :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda},$$

де λ – середня довжина хвилі двох спектральних ліній, які розглядаються роздільно, $\Delta \lambda$ – різниця довжини хвиль між ними. Чим більша R , тим менша $\Delta \lambda$ і ближчими є лінії, які можна розглядати роздільно.

5.1.6 X-Ray Diffraction

X-rays were discovered by the German physicist W. Roentgen in 1895. For twenty years after this discovery the nature of X-rays was unknown. After investigation of X-ray diffraction it was established that X-rays represent electromagnetic radiation. The wavelength of X-rays is much less than the wavelength of the visible light.

$$\begin{aligned} \text{Light: } \lambda &= (0.40-0.76) \cdot 10^{-6} \text{ m;} \\ \text{X-rays: } \lambda &\approx (0.01-800) \cdot 10^{-10} \text{ m.} \end{aligned}$$

The ratio of its wavelengths equals

$$\frac{\lambda_{X\text{-rays}}}{\lambda_{\text{light}}} \approx 10^{-4}$$

and the ration of its frequencies:

$$\frac{\nu_{X\text{-rays}}}{\nu_{\text{light}}} \approx 10^4.$$

That is why the energy of X-rays is relatively higher than light waves. These rays have big penetrating ability and pass through nontransparent bodies (paper, layers of metal, human body, etc.).

To obtain X-ray radiance electrovacuum X-rays tubes are used. Electrons, which fly out of heated cathode accelerate with potential difference to high energies and strike the anode, as a result X-ray radiance is obtained.

To obtain a diffraction pattern, it is necessary that the diffraction lattice constant should be of the same order as the wavelength of the radiation. In 1912, the German physicist Max von Laue discovered that crystalline solids are natural three-dimensional diffraction gratings and on them diffraction of X-ray radiance can be obtained.

5.1.6 Дифракція рентгенівського випромінювання

Рентгенівське випромінювання було відкрито німецьким вченим В. Рентгеном у 1895 р. На протязі двадцяти років після його відкриття природа рентгенівських променів була невідома. Після дослідження дифракції рентгенівських променів було встановлено, що вони уявляють собою електромагнітне випромінювання. Довжина хвилі рентгенівського випромінювання набагато менша за довжину видимого світла.

$$\text{Світло: } \lambda = (0,40-0,76) \cdot 10^{-6} \text{ м;}$$

$$\text{Рентгенівські промені: } \lambda \approx (0,01 \div 800) \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Відношення їх довжин хвиль дорівнює

$$\frac{\lambda_{\text{рентг}}}{\lambda_{\text{світ}}} \approx 10^{-4},$$

та відношення їх частот:

$$\frac{\nu_{\text{рентг}}}{\nu_{\text{світ}}} \approx 10^4.$$

Саме тому енергія рентгенівських променів є відносно більшою за світлові промені. Ці промені мають велику проникну здатність і проходять крізь непрозорі тіла (папір, шари металу, людське тіло, та ін.).

Для одержання рентгенівського випромінювання використовують електровакуумні рентгенівські трубки. Електрони, які вилітають з нагрітого катода прискорюються різницею потенціалів до великих енергій і зіштовхуються з анодом, в результаті чого виникає рентгенівське випромінювання.

Для отримання дифракційної картини необхідно, щоби стала дифракційної ґратки була того ж порядку, що і довжина хвилі випромінювання. У 1912 р. німецький фізик Макс фон Лауе відкрив, що кристалічні тіла уявляють собою природні тривимірні дифракційні ґратки і на них можна отримати дифракцію рентгенівського випромінювання.

5.1.7 Wulff-Bragg's Formula

The interatomic distance $d \approx 10^{-10}$ m of the crystal is the order of X-rays wavelength:

$$d \approx \lambda_{X\text{-rays}}.$$

That is why a crystal is a natural grating for X-rays. We may say that atomic planes reflect X-rays (Fig. 5.12).

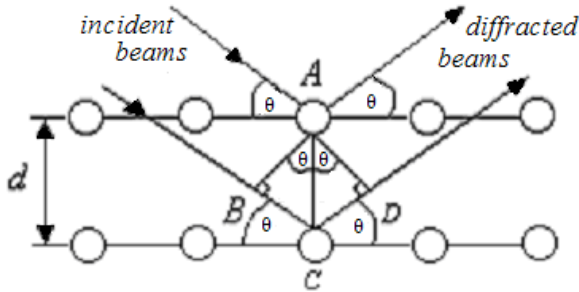


Figure 5.12

Segments of $AB \perp BC$ and $AD \perp CD$. The path length difference is equal to:

$$\Delta = BC + CD,$$

$$BC = CD = d \sin \theta.$$

The value of θ is called the angle of slip, d is the distance between atomic planes.

The diffraction maximum will be observed under the condition, if on optical path difference the integer number of wavelengths is placed:

$$2d \cdot \sin \theta = m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

This relationship is the Wulff-Bragg's formula.

The X-ray diffraction is a powerful tool to study the arrangements of atoms in crystals and determination of their structure. If the value λ is known, then by experimental determination of θ , we can determine the value d . This method is the basis of X-ray structure analysis.

5.1.7 Формула Вульфа-Брегга

В кристалі міжатомна відстань $d \approx 10^{-10}$ м має величину порядку довжини хвилі рентгенівського випромінювання:

$$d \approx \lambda_{\text{рентг}}.$$

Саме тому кристал є природною дифракційною ґраткою для рентгенівського випромінювання. Можна уявити, що атомні площини відбивають рентгенівські промені (рис. 5.12).

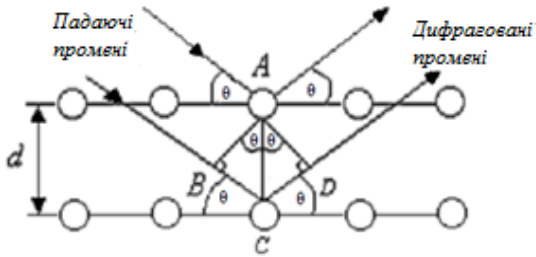


Рисунок 5.12

Отрізки $AB \perp BC$ та $AD \perp CD$. Оптична різниця ходу дорівнює:

$$\Delta = BC + CD,$$

$$BC = CD = d \sin \theta.$$

Величина θ називається кутом ковзання; d – відстань між атомними площинами.

Дифракційні максимуми спостерігаються за умови, якщо на оптичній різниці ходу вміщується ціле число довжин хвиль:

$$2d \cdot \sin \theta = m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Це співвідношення є формулою Вульфа-Брегга.

Дифракція рентгенівського випромінювання є ефективним засобом вивчення розташування атомів в кристалах і визначення їх структури. Якщо відома величина λ , то вимірюючи експериментально θ , можна визначити величину d . Ця методика є основою рентгеноструктурного аналізу.

We can determine chemical constitution of the substance studying *X-ray spectra* during *X-ray radiance* on crystals. This method is called *X-ray spectral analysis*.

X-ray structure and *X-ray spectral analyses* are widely used in modern science.

5.1.8 Polarization of Light

Light is a transverse electromagnetic wave. The directions of the oscillations of electric and magnetic vectors are at right angles to the direction of light wave propagation (Fig. 5.13):

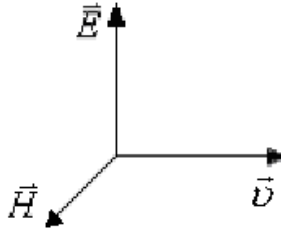


Figure 5.13

However, light is emitted by an enormous number of atoms. Each atom emits light waves independently of each other. That is why the plane of oscillations of \vec{E} vector is not kept the same in space. The orientations of this vector as well as \vec{H} are arbitrary (Fig. 5.14).

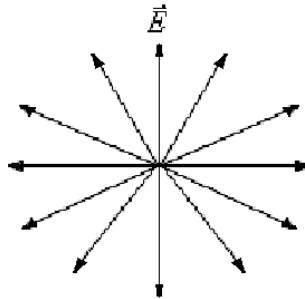


Figure 5.14

Вивчаючи рентгенівські спектри при дифракції рентгенівського випромінювання на кристалах, можна визначити хімічний склад речовини. Цей метод називається рентгеноспектральним аналізом.

Рентгеноструктурний і рентгеноспектральний аналізи широко застосовуються в сучасній науці і техніці.

5.1.8 Поляризація світла

Світло – це поперечна електромагнітна хвиля. Напрями коливань електричного та магнітного векторів знаходяться під прямим кутом до напрямку розповсюдження хвилі (рис.5.13):

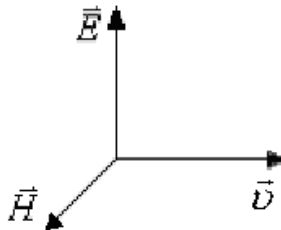


Рисунок 5.13

Світло випромінюється величезною кількістю атомів. Кожен атом випромінює світлові хвилі незалежно один від одного. Саме тому площина коливань вектору \vec{E} не є сталою в просторі. Орієнтація вектору \vec{E} так само, як і вектору \vec{H} , випадкова (рис. 5.14).

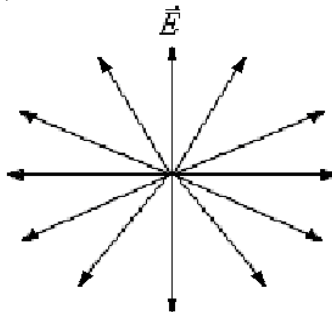


Рисунок 5.14

The light wave in this Figure is moving toward the observer. This is so-called natural light. If there is an interaction of light with substance the effect of polarization occurs. A plane-polarized wave is shown in Fig. 5.15.

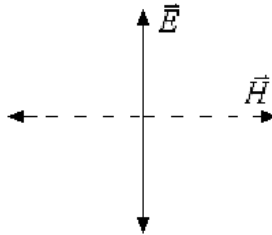


Figure 5.15

In this case the plane of vector \vec{E} oscillations is regulated. If the plane of oscillations of vector \vec{E} is constant the light is called polarized. The polarization of light occurs while the light passes through anisotropic substance, and also during the reflection and refraction of light.

Substances are called optical anisotropic if their optical properties vary in different directions. Substances for the transformation of natural light into polarized usually tourmaline, Iceland spar and quartz are used. The scheme of the device for obtaining and investigating of polarized light is shown in Fig. 5.16:

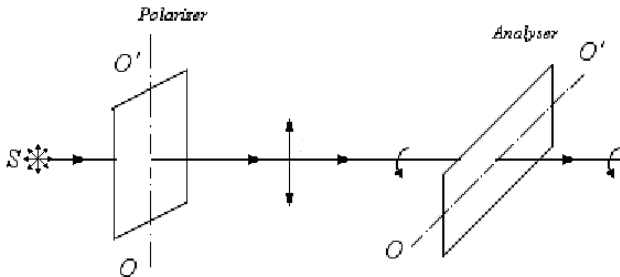


Figure 5.16

Світлова хвиля на цьому рисунку рухається до спостерігача. Це так зване природне світло. Якщо світло взаємодіє з речовиною, то може відбуватись поляризація. Плоскополяризована хвиля зображена на рис. 5.15.

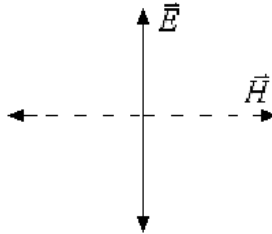


Рисунок 5.15

У цьому випадку площина коливань вектора \vec{E} є впорядкованою. Якщо площина коливань вектора \vec{E} є впорядкованою, світло називається поляризованим. Поляризація світла відбувається при проходженні світла крізь анізотропну речовину, а також при відбиванні і заломленні світла.

Речовини називаються оптично анізотропними, якщо їх оптичні властивості змінюються у різних напрямках. У якості таких речовин для перетворення природного світла в поляризоване зазвичай використовують турмалін, ісландський шпат і кварц. Схему пристрою для отримання і дослідження поляризованого світла зображено на рис.5.16:

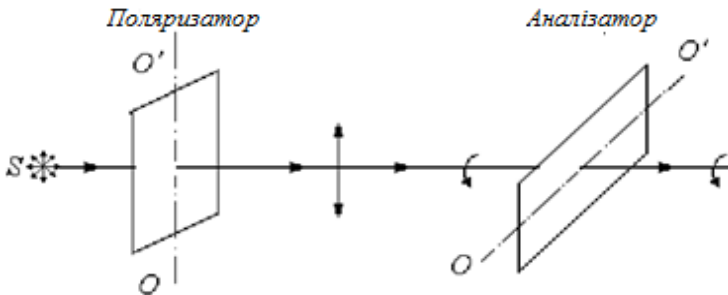


Рисунок 5.16

The first crystal (polarizer) is used for polarization of natural light. The second crystal (analyzer) is used for investigation of polarized light. The analyzer and polarizer are the same crystals. If the analyzer rotates around the direction of the light beam the transmitted intensity changes.

Malus's law: the polarized light wave intensity of light transmitting through the analyzer is proportional to the second power of the cosine of the angle between optical axis of the polarizer and analyzer:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \theta,$$

where I is a light intensity, transmitted through the analyzer;

I_0 is the intensity of light, falling on the analyzer;

θ is the angle between optical axis of the polarizer and analyzer.

If natural light falls on a reflecting surface (i.e. glass, water) then the reflected and the refracted waves are partially polarized. The directions of vector \vec{E} in reflected and refracted waves are placed under the right angle to each other, as it is shown in Fig.5.17. The oscillation of vector \vec{E} of the reflected wave is perpendicular to the plane of incidence.

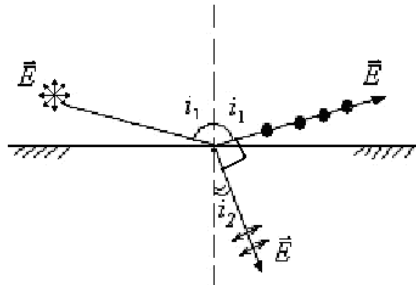


Figure 5.17

Scottish physicist D. Brewster stated the law: if the angle of incidence i_B satisfies the condition

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

Перший кристал (поляризатор) використовують для поляризації природного світла. Другий кристал (аналізатор) використовують для дослідження поляризованого світла. Аналізатор та поляризатор є однаковими кристалами. Якщо аналізатор обертається навколо напрямку світлового променя, то інтенсивність світла змінюється.

Закон Малюса: інтенсивність поляризованого світла, що пройшло крізь аналізатор пропорційна квадрату косинуса кута між оптичними осями поляризатора і аналізатора:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \theta,$$

де I - інтенсивність світла, що пройшло крізь аналізатор;

I_0 - інтенсивність світла, що падає на аналізатор;

θ - кут між оптичними осями поляризатора і аналізатора.

Якщо природне світло падає на відбиваючу поверхню (скло, воду), то відбиті та заломлені хвилі є частково поляризованими. Напрямки коливань вектора \vec{E} у відбитій і заломленій хвилях знаходяться під прямим кутом один до одного, як показано на рис.5.17. Коливання вектора \vec{E} у відбитій хвилі перпендикулярні до площини падіння.

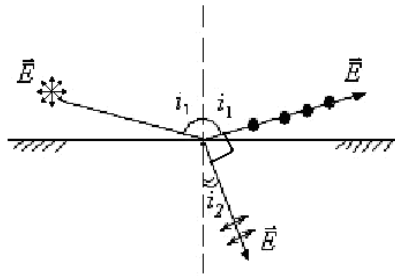


Рисунок 5.17

Шотландський фізик Д. Брюстер встановив закон: якщо кут падіння i_B задовольняє умові

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

then reflected and refracted beams are completely plane polarized.

The value of $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ is the index of refraction of the second medium with respect to the first one.

Polarization of the refracted beam at an angle of incidence i_B is maximum, but is not complete.

With incidence of light at an angle of Brewster reflected and refracted beams are perpendicular to each other:

$$\tan i = \frac{\sin i_B}{\sin i_2} = n_{21},$$

$$\frac{\sin i_B}{\sin i_2} = n_{21}.$$

Then

$$\cos i_B = \sin i_2,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) = \sin i_2,$$

$$\frac{\pi}{2} - i_B = i_2.$$

Thus,

$$i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Thus, the sum of the reflected and refracted angles is equal to the right angle, so the angle between them should also be right (Fig.5.17).

Polarization of light is used for determination of physical properties of minerals, studying of mechanical stresses of crystals, determination of concentration of solutions of optically active substances.

Nowadays thin sheets of material that can polarize the light are used. They are called polaroids.

то відбитий промінь є повністю плоскополяризованим.

Величина $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ - показник заломлення другого середовища відносно першого.

Поляризація заломленого променя при куті падіння i_B є максимальною, але не повною.

При падінні світла під кутом Брюстера відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = n_{21}$$

$$\frac{\sin i_B}{\sin i_2} = n_{21},$$

тоді

$$\cos i_B = \sin i_2,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) = \sin i_2,$$

$$\frac{\pi}{2} - i_B = i_2.$$

Отже,

$$i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Сума відбитого та заломленого кутів дорівнює прямому куту, тобто кут між ними теж повинен бути прямим (рис. 5.17).

Поляризацію світла застосовують для визначення фізичних властивостей мінералів, вивчення механічних напружень кристалів, визначення концентрації розчинів оптично активних речовин.

На сьогодні використовують тонкі плівки з матеріалу, який здатний поляризувати світло. Вони називаються поляроїдами.

5.2 Quantum Nature of Radiation

5.2.1 Thermal Radiation

Electromagnetic radiation excited by the thermal motion of atoms and molecules is called the thermal radiation.

If the temperature of the body is constant, then a statistical equilibrium is set between body and medium. In this case, the body receives as much energy per unit of time as it gives. The following characteristics of thermal radiation are used.

The radiation flux Φ of a body is the energy emitted by the heated body per unit of time is

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

The unit of Φ is

$$[\Phi] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}.$$

The integral radiancy R_e is the energy emitted by the heated body per unit of time from the unit area of a body is:

$$R_e = \frac{dW}{dt \cdot dS}.$$

The unit of R_e is

$$[R_e] = \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

The spectral radiancy (emittance) of a body $r_{\lambda,T}$ is the ratio of the energy emitted per unit of time from the unit area of body in the wavelengths interval from λ to $\lambda + d\lambda$ to the width of this interval at a given temperature:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_{\lambda}}{d\lambda}.$$

The unit of $r_{\lambda,T}$ is

$$[r_{\lambda,T}] = \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}.$$

5.2 Квантова природа випромінювання

5.2.1 Теплове випромінювання

Електромагнітне випромінювання, викликане тепловим рухом атомів та молекул, називається тепловим випромінюванням.

Якщо температура тіла стала, то тіло знаходиться в статичній рівновазі з навколишнім середовищем. У цьому випадку тіло за одиницю часу отримує стільки ж енергії, скільки і віддає. Використовують наступні характеристики теплового випромінювання.

Потік випромінювання тіла Φ – це енергія, яку випромінює нагріте тіло за одиницю часу:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

Одиниця вимірювання Φ :

$$[\Phi] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Інтегральна випромінювальна здатність тіла R_e – це енергія, яку випромінює одиниця площі нагрітого тіла за одиницю часу:

$$R_e = \frac{dW}{dt \cdot dS}.$$

Одиниця вимірювання R_e :

$$[R_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Спектральна випромінювальна здатність тіла $r_{\lambda,T}$ - це відношення енергії, яка випромінюється за одиницю часу одиницею площі тіла в інтервалі довжин хвиль від λ до $\lambda+d\lambda$, до ширини цього інтервалу за даної температури:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_{\lambda}}{d\lambda}.$$

Одиниця вимірювання $r_{\lambda,T}$: $[r_{\lambda,T}] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$

The spectral radiancy $r_{\lambda,T}$ characterizes the possibility of a body to radiate the thermal energy. Its value depends on body temperature and wavelength of radiation:

$$r_{\lambda,T} = f(\lambda, T).$$

The spectral radiancy of a body can be determined for the frequency range of ν :

$$r_{\nu,T} = \frac{dR_{\nu}}{d\nu}.$$

Values of $r_{\lambda,T}$ and $r_{\nu,T}$ are connected with each other by the relationship:

$$r_{\nu,T} = r_{\lambda,T} \frac{c}{\nu^2}.$$

The heated body radiates a continuous spectrum (Fig. 5.18).

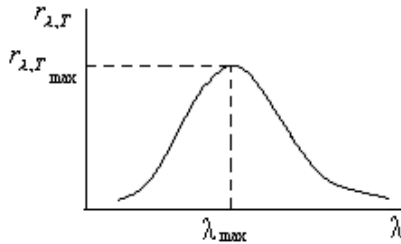


Figure 5.18

The total energy of emitted radiation is the integral radiancy R_e :

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu.$$

The value of R_e is determined as the square under the curve $r_{\lambda,T} = f(\lambda)$ in Fig.5.18. In this case all possible wavelengths or frequencies are taken into account.

As follows from Fig.5.18 λ_{\max} is the wavelength which corresponds to the largest energy radiated by a heated body.

Спектральна випромінювальна здатність тіла $r_{\lambda,T}$ характеризує здатність тіла випромінювати теплову енергію. Її значення залежить від температури тіла та довжини хвилі випромінювання:

$$r_{\lambda,T} = f(\lambda, T).$$

Спектральну випромінювальну здатність тіла можна визначити для інтервалу частот dv :

$$r_{\nu,T} = \frac{dR_{\nu}}{d\nu}.$$

Величини $r_{\lambda,T}$ та $r_{\nu,T}$ поєднані співвідношенням:

$$r_{\nu,T} = r_{\lambda,T} \frac{c}{\nu^2}.$$

Нагріте тіло випромінює суцільний спектр (рис.5.18).

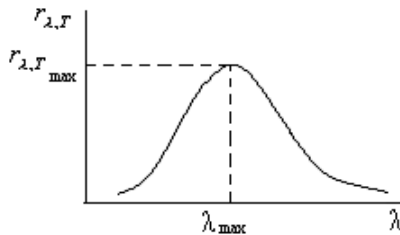


Рисунок 5.18

Повна енергія випромінювання тіла є інтегральною випромінювальною здатністю R_e :

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu.$$

Величина R_e визначається площиною під кривою $r_{\lambda,T} = f(\lambda)$ на рис.5.18. У цьому випадку враховуються всі довжини хвиль або всі частоти.

Як слідує з рис.5.18 λ_{\max} є довжиною хвилі, яка відповідає максимальній енергії, що випромінюється нагрітим тілом.

However, any body has the absorptive ability. The spectral absorptive ability (absorptance) $a_{\lambda,T}$ of a body is the ratio of absorbed flux to the incident flux of energy in the unit wavelengths interval at a given temperature:

$$a_{\lambda,T} = \frac{d\Phi_{abs.}}{d\Phi_{inc}}$$

5.2.2 Ideal Black-Body

The body that absorbs completely all incident radiation of any wavelength is called an ideal black-body. For this body the spectral absorptive ability is equal to unity: $a_{\lambda,T} = 1$.

There are no ideal black bodies in nature but it is possible to create a body whose properties will not practically differ from an ideal black-body (Fig. 5.19).

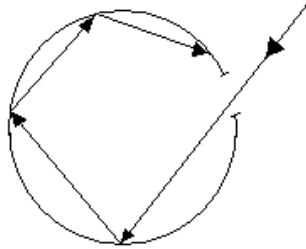


Figure 5.19

The model of ideal black-body can be a closed cavity in the form of the sphere the inner surface of which is black. A ray that enters this sphere through a small aperture is reflected repeatedly from internal walls. By every reflection the light wave energy is partly absorbed by walls. There are no ideal black-bodies in nature. If absorbance of the body is less than unit and is the same for all wavelengths, then such a body is called grey. For the grey body:

$$0 < a_{\lambda,T} < 1.$$

Будь-яке тіло має поглинальну здатність. Спектральна поглинальна здатність тіла $a_{\lambda,T}$ – це відношення потоку енергії, що поглинається тілом до потоку енергії, що падає на тіло в одиничному інтервалі довжин хвиль за даної температури:

$$a_{\lambda,T} = \frac{d\Phi_{\text{пог}}}{d\Phi_{\text{пад}}}.$$

5.2.2 Абсолютно чорне тіло

Тіло, що повністю поглинає все падаюче випромінювання з будь-якою довжиною хвилі, при будь-якій температурі, називається абсолютно чорним тілом. Для такого тіла спектральна поглинальна здатність дорівнює одиниці: $a_{\lambda,T} = 1$.

У природі не існує абсолютно чорних тіл, але можливо створити тіло, властивості якого не будуть суттєво відрізнятися від властивостей чорного тіла (рис. 5.19).

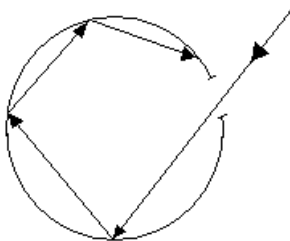


Рисунок 5.19

Моделлю абсолютно чорного тіла може бути замкнута порожнина у вигляді сфери, внутрішня поверхня якої зачорнена. Промінь входить у цю сферу крізь малий отвір і багаторазово відбивається від внутрішніх стінок. При кожному відбиванні енергія світлового променя частково поглинається стінками. У природі абсолютних чорних тіл не існує. Якщо поглинальна здатність тіла менша за одиницю і однакова для всіх довжин хвиль, то таке тіло називається сірим. Для сірого тіла:

$$0 < a_{\lambda,T} < 1.$$

5.2.3 Kirchhoff's Law

The ratio of the spectral radiancy of any body to its spectral absorptive ability is the same for all bodies and is the function of wavelength and temperature:

$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = \text{const},$$

$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = f(\lambda, T).$$

$f(\lambda, T)$ is called the Kirchhoff's universal function.

In other words a body that radiates more absorbs more also. As for a black body $a_{\lambda,T}^* = 1$ then $r_{\lambda,T}^* = r_{\lambda,T}$.

Therefore the Kirchhoff's universal function $f(\lambda, T)$ of any body is the spectral radiance $r_{\lambda,T}^*$ of an ideal black body for the same wavelength and the temperature.

5.2.4 Laws of Black-Body Radiation

The experimental spectral radiance $r_{\lambda,T}$ versus λ at different temperatures of an ideal black-body is shown in Fig. 5.20.

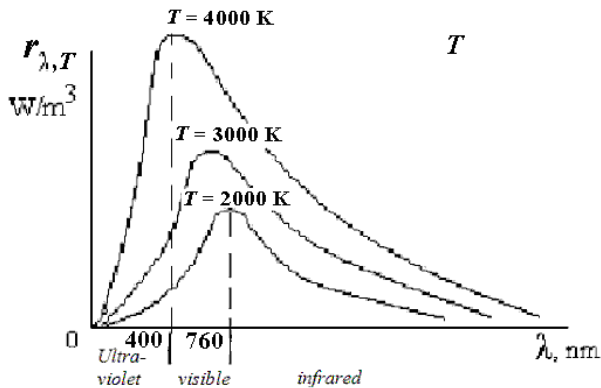


Figure 5.20

5.2.3 Закон Кірхгофа

Відношення спектральної випромінювальної здатності будь-якого тіла до спектральної поглинальної здатності є однаковим для всіх тіл і є функцією довжини хвилі та температури:

$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = const,$$

$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = f(\lambda, T).$$

$f(\lambda, T)$ називається універсальною функцією Кірхгофа.

Іншими словами, тіло, що більше випромінює, також і поглинає більше. Так як для чорного тіла $a_{\lambda,T}^* = 1$, то $r_{\lambda,T}^* = r_{\lambda,T}$.

Отже, для будь-якого тіла універсальна функція Кірхгофа $f(\lambda, T)$ є спектральною випромінювальною здатністю чорного тіла $r_{\lambda,T}^*$ для однакової довжини хвилі та температури.

5.2.4 Закони випромінювання абсолютно чорного тіла

Експериментальні залежності спектральної випромінювальної здатності $r_{\lambda,T}$ від λ при різних температурах абсолютно чорного тіла показані на рис.5.20.

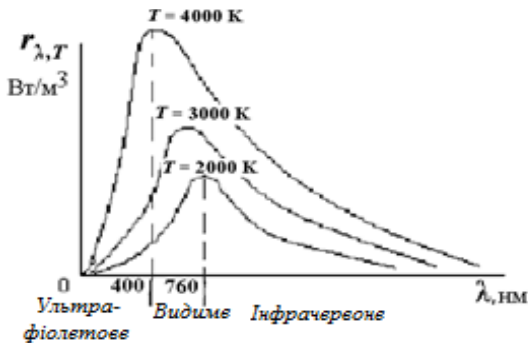


Рисунок 5.20

Analysis of function $r_{\lambda}^* = f(\lambda)$ resulted in the following laws of black-body radiation.

1. Stephan – Boltzmann Law.

Integral emitting ability of an ideal black-body or the total energy emitted from its unit area per second is proportional to the fourth power of its absolute temperature:

$$R_e^* = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T}^* d\lambda = \sigma T^4,$$

where σ is the Stephan-Boltzmann constant; $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$.

For real bodies that are gray, the Stefan-Boltzmann law is not fulfilled and has a more complex dependence.

2. Wien's Displacement Law.

The wavelength λ_{\max} corresponding to the maximum of the spectral radiance of an ideal black-body is inversely proportional to its temperature:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

where b is the Wien's constant; $b = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$.

Indeed, the higher is the temperature the higher is the energy and the higher is the frequency of radiation the shorter is the wavelength. Thus a rise of temperature is accompanied by the displacement of λ_{\max} to smaller values.

5.2.5 Planck's Radiation Formula

Classical physics was unable to explain the laws of ideal black-body radiation. Only quantum physics could do it. In 1900, Planck proposed the hypothesis that emission and absorption of energy is possible only in separate portion of energy - quantum. Energy of quantum is

$$E = h\nu,$$

Аналіз залежності $r_{\lambda}^* = f(\lambda)$ приводить до наступних законів випромінювання абсолютно чорного тіла:

1. Закон Стефана – Больцмана.

Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла, або повна енергія, що випромінюється одиницею площі чорного тіла за секунду пропорційна четвертому ступеню його абсолютної температури:

$$R_e^* = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T}^* d\lambda = \sigma T^4,$$

де σ - стала Стефана – Больцмана; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$.

Для реальних тіл, які є сірими, закон Стефана-Больцмана не виконується і має більш складну залежність.

2. Закон зміщення Віна.

Довжина хвилі λ_{\max} , яка відповідає максимальній спектральній випромінювальній здатності абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна його температурі:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

де b – стала Віна; $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Насправді, чим більша температура абсолютно чорного тіла, тим більша енергія та частота випромінювання, і тим менша довжина хвилі. Отже, зростання температури супроводжується зміщенням λ_{\max} до менших значень.

5.2.5 Формула випромінювання Планка

Класична фізика була неспроможна пояснити закони випромінювання абсолютно чорного тіла. Це змогла зробити лише квантова фізика. В 1900 р. Планк запропонував гіпотезу, згідно якої, випромінювання та поглинання енергії можливе тільки окремими порціями енергії - квантами. Енергія кванту:

$$E = h\nu,$$

where h is the Planck's constant. $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Based on this assumption Planck derived the formula for the spectral radiancy $r_{\lambda,T}$ of an ideal black-body:

$$r_{\nu,T} = f(\nu,T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

where c is the speed of light in vacuum, k is the Boltzmann's constant, T is absolute temperature.

Planck's formula agrees well with the experiment. During integration with all wavelengths from Planck's formula one can get Stephan – Boltzmann Law. The determination a maximum of function $r_{\lambda,T} = f(\lambda,T)$ allows obtaining Wein's Displacement Law. Other laws of an ideal black-body radiation can be explained by using Planck's formula.

5.2.6 Application of Thermal Radiation Laws. Optical Pyrometry

Laws of black body radiation allow to determine the temperature of a heated body. These methods are called optical pyrometry. Devices whose operation is based on these methods are called pyrometers. There are distinguish between radiation, color and bright temperatures.

1. The radiation temperature T_r can be determined by the Stephan-Boltzmann law. Having measured the total energy of body radiation R_e we can calculate the temperature of a body as

$$T_r = \sqrt[4]{\frac{R_e}{\sigma}}.$$

The radiation temperature of the body may be determined by using the radiation pyrometer. The scheme of the radiation pyrometer is shown in Fig. 5.21.

де h – стала Планка. $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

На основі цього припущення Планк вивів формулу для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $r_{\lambda,T}$:

$$r_{\nu,T} = f(\nu,T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

де c – швидкість світла у вакуумі; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура.

Формула Планка добре узгоджується з експериментом. При інтегруванні за всіма довжинами хвиль з формули Планка можна вивести закон Стефана-Больцмана. Знаходження максимуму функції $r_{\lambda,T} = f(\lambda,T)$ дозволяє вивести закон Віна. Застосовуючи формулу Планка можна пояснити усі інші закономірності випромінювання абсолютно чорного тіла.

5.2.6 Застосування законів теплового випромінювання.

Оптична пірометрія

Закони випромінювання абсолютно чорного тіла дозволяють визначити температуру нагрітого тіла. Ці методи називаються оптичною пірометрією. Прилади, робота яких заснована на цих методах, називаються пірометрами. Розрізняють радіаційну, колірну і яскравісну температури.

1. Радіаційна температура випромінювання T_p визначається за допомогою закону Стефана – Больцмана. Якщо виміряти повну енергію R_e , що випромінюється тілом, можна визначити температуру тіла як

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{R_e}{\sigma}}.$$

Радіаційна температура тіла може бути визначена за допомогою радіаційного пірометра. Його схема зображена на рис. 5.21.

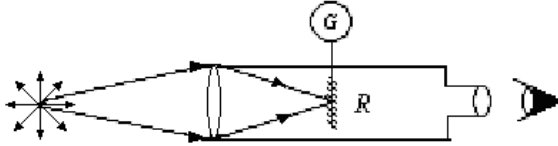


Figure 5.21

The sharp image of an object should be focused on the receiver R and completely cover its surface. In this case the receiver of a definite area absorbs the same energy emitted by the same area of the body under study.

The temperature of an object can be determined by the recordings of G galvanometer that calibrated with an ideal black-body.

2. The color temperature T_c can be determined on the basis of Wien's displacement law. By definition, the concept of color temperature is applied to gray bodies. For gray bodies the color temperature is the same as the true temperature. If we measure the wavelength of maximum spectral radiancy λ_{\max} , then according to the law of displacement of Wien it is possible to determine the color temperature of the body as

$$T_c = \frac{b}{\lambda_{\max}}.$$

With this method, the temperature of the stars is determined. For example the temperature of the Sun surface was determined in this way ($T_c \approx 6,000$ K).

3. The brightness temperature T_b is the temperature of an absolutely black body at which its spectral radiance $r_{\lambda,T}$ is equal to the spectral radiance of the body under study. Brightness temperature can be determined by the visual comparison of the brightness of the pyrometer incandescent filament with the brightness of the body being heated. The Fig. 5.22 shows the scheme of the brightness pyrometer with disappearing filament.

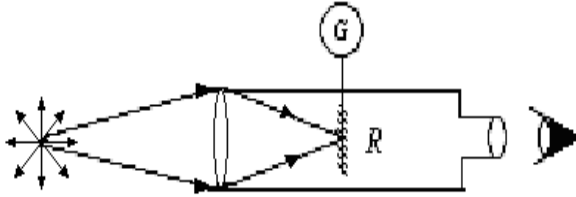


Рисунок 5.21

Чітке зображення об'єкта має бути сфокусовано на приймачі R і повністю покривати його поверхню. У цьому випадку приймач певної площі поглинає таку ж саму енергію, яку випромінює така ж сама площа досліджуваного тіла.

Температура об'єкту може бути визначена за показниками гальванометра G , який градуують по абсолютно чорному тілу.

2. Колірна температура T_k визначається на основі закону зміщення Віна. За означенням поняття колірної температури застосовується до сірих тіл. Для сірих тіл колірна температура співпадає із справжньою температурою. Якщо виміряти довжину хвилі λ_{\max} , яка відповідає максимальній спектральній випромінювальній здатності, то згідно закону зміщення Віна можна визначити колірну температуру тіла:

$$T_k = \frac{b}{\lambda_{\max}}$$

За допомогою такого методу визначають температуру зірок. Наприклад, таким чином була визначена температура поверхні Сонця ($T_c \approx 6000 \text{ K}$).

3. Яскравісна температура T_y це температура абсолютно чорного тіла, при якій його спектральна випромінювальна здатність $r_{\lambda,T}$ дорівнює спектральній випромінювальній здатності досліджуваного тіла. Яскравісна температура може бути визначена за допомогою візуального порівняння яскравості розігрітої нитки пірометра з яскравістю нагрітого тіла. На рис. 5.22 зображено схему яскравісного пірометра із зникаючою ниткою.

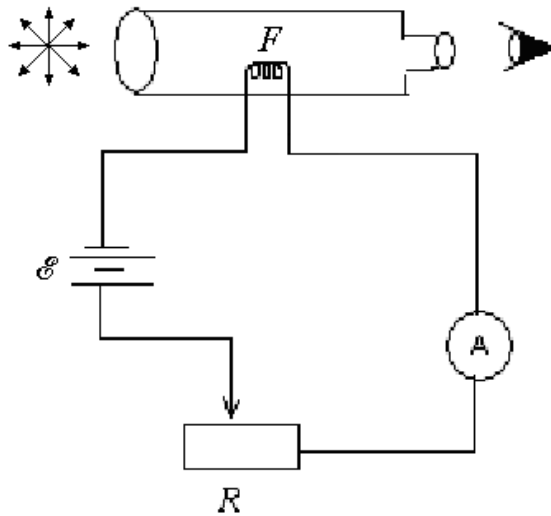


Figure 5.22

The principle of its work is the following: an observer watches the body through the telescope and changes the value of R resistor until the incandescent filament F disappears against the background of the body. The temperature of the body is determined with the help of the ammeter data, which is calibrated with the help of the radiation of an ideal black-body.

5.2.7 Photoelectric Effect

Electrical phenomena, that originate at the illumination of substances with light are called the photoelectric effect. There are three types of photoelectric phenomena.

1. The external photoeffect, under the illumination of substance the electron emission arises from its surface. It is used in work of vacuum photoelements.

2. The internal photoeffect, when the number of free electrons increases inside the matter but they don't escape outside. It is used in work of semiconductor photoelements or photoresistors.

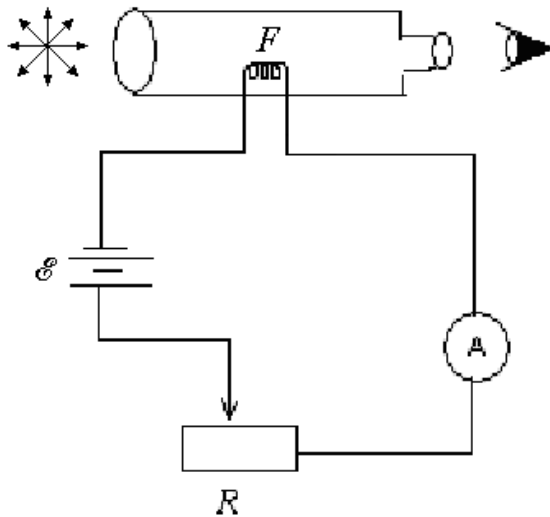


Рисунок 5.22

Принцип його роботи полягає в тому, що спостерігач дивиться на тіло скрізь телескоп і змінює величину опору R до тих пір, доки розігріта спіраль F не зникає на фоні тіла. Температура тіла визначається на основі показників амперметра, який градуують за допомогою випромінювання абсолютно чорного тіла.

5.2.7 Фотоелектричний ефект

Електричні явища, які виникають при освітленні речовини, називаються фотоелектричним ефектом. Існує три типу фотоелектричного ефекту.

1. Зовнішній фотоелектричний ефект, за якого під дією освітлення речовини виникає електронна емісія з його поверхні. Застосовується в роботі вакуумних фотоелементів.

2. Внутрішній фотоелектричний ефект, за якого кількість вільних електронів зростає, але вони не покидають поверхні тіла. Застосовується в роботі напівпровідникових фотоелементів або фоторезисторів.

3. The photovoltaic effect, when under the action of radiation e.m.f. originates at the border of two semiconductors with different types of conductivity. It is used in work of barrier-layer photoelements to convert solar energy into electrical energy.

The external photoeffect was discovered by the German physicist H. Hertz in 1887 and was investigated in details in 1888 by the Russian scientist A. Stoletov. The Fig. 5.23 shows the scheme being used to study the external photoelectric effect.

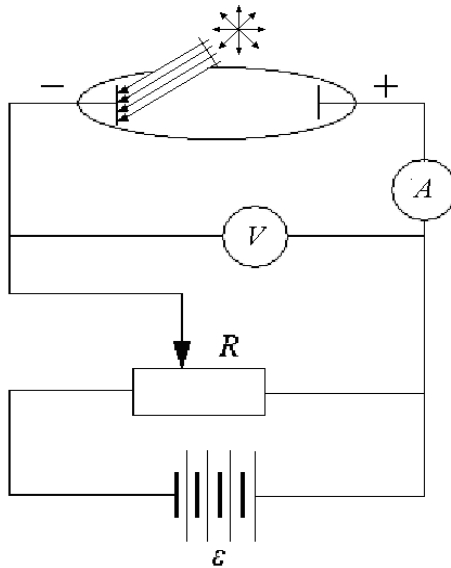


Figure 5.23

Monochromatic light through quartz window falls on the metallic cathode that will liberate photoelectrons which move to anode by means of a voltage U and create photoelectric current, which is measured by an ammeter.

Fig. 5.24 presents volt-ampere characteristics of photocurrent i.e. the relationship of photocurrent to the voltage U between electrodes at different radiant flux Φ .

3. Фотовольтаїчний ефект (вентильний фотоелемент), за якого під дією випромінювання на границі двох напівпровідників з різним типом провідності виникає е.р.с. Застосовується в роботі вентильних фотоелементів для перетворення сонячної енергії в електричну.

Зовнішній фотоелемент був відкритий німецьким фізиком Г. Герцем в 1887 р. та вивчений детально в 1888 р. російським вченим А. Столетовим. На рис. 5.23 зображено схему, що використовується для вивчення зовнішнього фотоелементу.

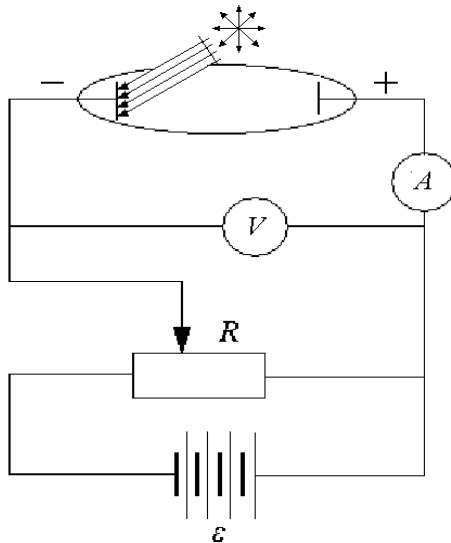


Рисунок 5.23

Монохроматичне світло через кварцове вікно падає на металевий катод, вивільнює фотоелектрони, які рухаються до анода завдяки напрузі U і утворюють фотоелектричний струм, який вимірюється амперметром. На рис. 5.24 зображено вольт-амперну характеристику фотоструму, тобто залежність фотоструму від напруги U між двома електродами, при різних світлових потоках Φ .

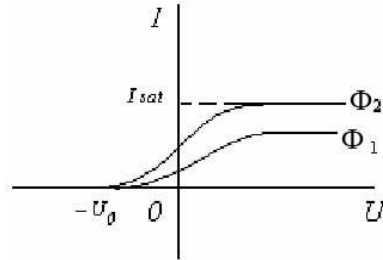


Figure 5.24

As the voltage increases the current reaches the maximum value and then remains constant. This means that all emitted electrons reach the anode. This current is called saturation current I_{sat} .

At negative voltage U_0 no current will flow between electrodes. The value of U_0 is called the stopping potential.

In 1888, A. Stoletov established the main laws of external photoeffect.

1. The saturation photocurrent i.e. the number of electrons liberated by light per second is directly proportional to the radiant flux:

$$I_{sat} = \gamma\Phi.$$

2. The maximum kinetic energy of the photoelectrons depends on the frequency of the incident light and does not depend on its intensity.

3. Each material has a cutoff frequency below which the light of any intensity doesn't produce photoeffect.

From volt-ampere characteristics (Fig 5.24) it follows, photocurrent exists at $U = 0$. It means that photoelectrons emits with certain initial speed have kinetic energy, which is not zero and can reach the anode in the absence of voltage between electrodes.

The photocurrent equals zero at applying stopping voltage U_0 so no one of electrons doesn't reaches the anode.

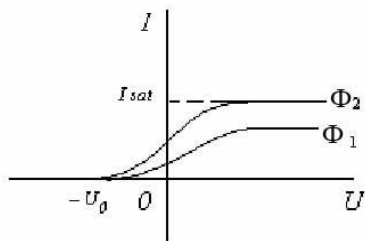


Рисунок 5.24

Якщо напруга зростає, то струм досягає максимального значення і потім залишається сталим. Це означає, що всі випромінені електрони досягають аноду. Цей струм називається струмом насичення $I_{нас}$.

При негативній напрузі U_0 струм не буде протікати між електродами. Значення U_0 називається затримуючою напругою.

А. Столетов у 1888 р. відкрив основні закони зовнішнього фотоефекту.

1. Фотострум насичення, тобто кількість електронів звільнена світлом за секунду, прямо пропорційний до потоку випромінювання:

$$I_{нас} = \gamma\Phi.$$

2. Максимальна кінетична енергія фотоелектронів визначається частотою світла і не залежить від його інтенсивності.

3. Для кожної речовини існує гранична частота світла («червона межа»), при якій світло будь-якої інтенсивності не викликає фотоефект.

З вольт-амперних характеристик (рис. 5.24) виходить, що фотострум існує і при $U = 0$. Тобто фотоелектрони вивільнюються з певною початковою швидкістю і мають відмінну від нуля кінетичну енергію і можуть досягати анода при відсутності напруги між електродами. При прикладанні затримуючої напруги U_0 фотострум дорівнює нулю, тобто жоден з електронів не може досягти анода.

Thus,

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0.$$

While measuring U_0 , one can find the maximum value of kinetic energy and speed of photoelectrons.

5.2.8 Einstein's Theory of Photoeffect

In 1905, Einstein succeeded in explanation of the photoelectric effect with his quantum theory of light. Einstein assumed that light is not only emitted, but also propagates in space and is absorbed by substance in separate undivided portions-quanta, that are called photons. The energy of the photon is equal to

$$E = h\nu.$$

According to the law of conservation of energy this energy is spent on the work of the electron exit from the metal surface and providing it with kinetic energy. This idea was the basis of the equation for external photoeffect which was first proposed by Einstein.

Einstein's equation for external photoeffect :

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

where A is so called electronic work function. This value is equal to the minimum energy that must be given to an electron so that it can escape from the metal surface into vacuum. The electronic work function depends on the nature of the metal and the state of its surface.

Einstein's equation explains all the laws of the external photoelectric effect for metals.

In 1916, the American physicist R. Millikan proved experimentally Einstein's theory. It was established that the stopping potential depends linearly on the frequency of the incident light (Fig. 5.25):

Отже,

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0.$$

Вимірюючи U_0 , можна знайти максимальне значення кінетичної енергії і швидкості фотоелектронів.

5.2.8 Теорія фотоefекту Ейнштейна

Пояснення фотоefекту дав А. Ейнштейн у 1905 році на основі запропонованої їм квантової теорії світла. Він припустив, що світло не лише випромінюється, але і поширюється у просторі і поглинається речовиною окремими неподільними порціями - квантами, які називаються фотонами. Енергія фотона дорівнює:

$$E = h\nu.$$

Згідно із законом збереження енергії ця енергія витрачається на роботу виходу електрона з поверхні металу, та надання йому кінетичної енергії. Ця ідея була покладена в основу рівняння для зовнішнього фотоefекту, яке вперше було запропоновано Ейнштейном.

Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоefекту:

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

де A - робота виходу електрона. Ця величина дорівнює найменшій енергії, яку треба надати електрону, щоб він міг вийти з поверхні металу у вакуум. Робота виходу електрона залежить від природи металу і стану його поверхні.

Рівняння Ейнштейна пояснює всі закони зовнішнього фотоefекту для металів.

У 1916 р. американський фізик Р. Міллікен експериментально підтвердив теорію Ейнштейна. Було виявлено, що затримуючий потенціал лінійно залежить від частоти падаючого світла (рис. 5.25):

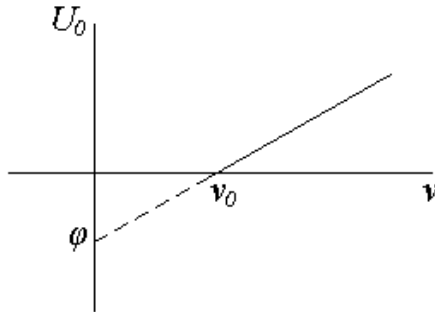


Figure 5.25

$$U_0 = k\nu - \phi,$$

where k and ϕ are constants.

As

$$\frac{m\nu_{\max}^2}{2} = eU_0,$$

Einstein's equation may be expressed as

$$h\nu = A + eU_0.$$

Thus,

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}.$$

Comparing the above equation with experimental one we obtain:

$$k = \frac{h}{e},$$

and

$$\phi = \frac{A}{e}.$$

The Planck's constant was obtained by Millikan from experimental results. Its value coincides with the theoretical value of $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ J·s, which confirms the validity of Einstein's theory.

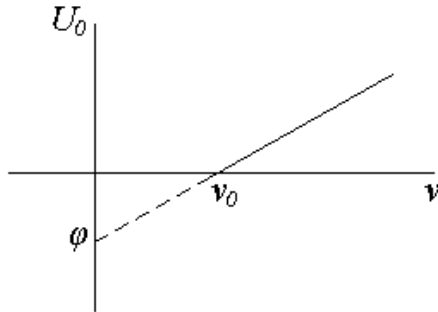


Рисунок 5.25

$$U_0 = k\nu - \phi,$$

де k , ϕ - константи.

Якщо

$$\frac{m\nu_{\max}^2}{2} = eU_0,$$

то рівняння Ейнштейна можна записати так:

$$h\nu = A + eU_0.$$

Отже,

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}.$$

Порівнявши останнє рівняння з експериментальним, отримаємо:

$$k = \frac{h}{e},$$

та

$$\phi = \frac{A}{e}.$$

За результатами проведеного експерименту Мілікеном отримана стала Планка. Її величина співпадає з теоретичним значенням $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, що підтверджує справедливість теорії Ейнштейна.

The photoelectric effect doesn't occur at a frequency less than a certain cutoff frequency ν_0 , which is called the photoelectric threshold. According to the Einstein's equation:

$$h\nu_0 = A,$$

$$\nu_0 = \frac{A}{h}.$$

The cutoff frequency ν_0 can be obtained from an experimental curve. At the condition $U_0 = 0$

$$\nu_0 = \frac{\phi}{k},$$

as

$$k = \frac{h}{e},$$

then

$$\nu_0 = \frac{e\phi}{h} = \frac{A}{h}.$$

It coincides with the theoretical value ν_0 determined by Einstein's equation.

5.2.9 Photon

Hypothesis of light quanta existence was proposed by A. Einstein in 1905.

According to this theory, light is emitted, propagated and absorbed by certain portions – photons. The energy of photon is

$$E = h\nu.$$

According to the theory of relativity, the mass of a body, which moves with a speed v is determined by the formula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Фотоелектричний ефект не виникає за частоти, меншої за певної граничної частоти ν_0 , яку називають «червоною межею» фотоелектру. Згідно рівняння Ейнштейна:

$$h\nu_0 = A,$$

$$\nu_0 = \frac{A}{h}.$$

Граничну частоту ν_0 можна обчислити за допомогою експериментальної кривої. За умови $U_0 = 0$

$$\nu_0 = \frac{\phi}{k},$$

якщо

$$k = \frac{h}{e},$$

то

$$\nu_0 = \frac{e\phi}{h} = \frac{A}{h}.$$

Вона співпадає з теоретичною величиною ν_0 , визначеною за допомогою рівняння Ейнштейна.

5.2.9 Фотон

Гіпотеза про існування світлових квантів була запропонована А. Ейнштейном у 1905 році.

Згідно цієї теорії, світло випромінюється, розповсюджується і поглинається певними порціями - фотонами. Енергія фотона визначається

$$E = h\nu.$$

Згідно з теорією відносності, маса тіла, що рухається зі швидкістю v визначається формулою:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

One can say that if $v \rightarrow c$, then $m \rightarrow \infty$. It is a contradiction. As a photon moves with the speed of light c , its mass of the rest is zero $m_0 = 0$. That is why a photon is assumed not to have mass of rest and in the state of rest it does not exist. A photon can only exist in motion at the speed of light c .

To apply the Einstein's formula

$$E = mc^2$$

and the formula of a photon energy

$$E = h\nu,$$

we can define the mass of a photon:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Impulse of a photon is the product of its mass by its velocity:

$$p = mc = \frac{h\nu}{c}. \quad (5.4)$$

The relation (5.4) can be written as follows:

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = k\hbar,$$

where $\hbar = h/2\pi$; $k = 2\pi/\lambda$ is module of wave vector.

In vector form, relationship (5.4) takes the following form:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Thus, a photon is the particle that has mass, impulse and energy. These corpuscular characteristics of a photon are related to the wave characteristic of light - its frequency.

5.2.10 Pressure of Light

As a photon has a definite impulse it could be expected the light exerts the pressure upon bodies surface. It was first discovered by the Russian scientist P. Lebedev in 1900. A great experimental skill was demonstrated by the author. Very small and light wings were the basic parts of Lebedev's device that were suspended by the thin elastic thread. One of the wings was black, and the surface of the other was mirrored (Fig.5.26).

Якщо $v \rightarrow c$, то $m \rightarrow \infty$. Виникає протиріччя. Так як фотон рухається зі швидкістю світла c , то його маса спокою дорівнює нулю $m_0 = 0$. Тобто фотон не має маси спокою і в стані спокою він не існує. Фотон може існувати тільки в стані руху зі швидкістю світла c .

Застосовуючи формулу Ейнштейна

$$E = mc^2$$

і формулу для енергії фотона

$$E = h\nu,$$

можна визначити масу фотона:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Імпульс фотона – це добуток його маси на швидкість:

$$p = mc = \frac{h\nu}{c}. \quad (5.4)$$

Співвідношення (5.4) можна записати наступним чином:

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = k\hbar,$$

де $\hbar = h/2\pi$, $k = 2\pi/\lambda$ – модуль хвильового вектора.

У векторній формі співвідношення (5.4) набуває наступного вигляду:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Таким чином, фотон є частинкою, яка має масу, імпульс і енергію. Ці корпускулярні характеристики фотона зв'язані з хвильовою характеристикою світла – його частотой.

5.2.10 Тиск світла

Так як фотони мають певний імпульс, то світло повинно чинити тиск на поверхню тіла. Вперше експериментально тиск світла виміряв російський вчений П. Лебедев у 1900 р, який виявив велику експериментальну майстерність. Основною частиною приладу Лебедева були дуже тонкі та легкі крильця, які підвішували на тонкій пружній нитці. Одне крильце було зачернене, а поверхня другого була дзеркальною (рис. 5.26).

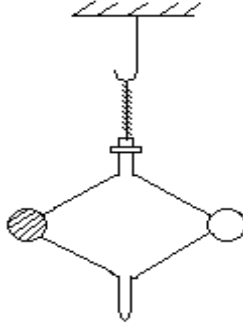


Figure 5.26

The light of big arc Volta was directed on to wings. As the result a thread on which wings were suspended was twisted. Pressure of light was determined by the measuring the angle of thread twist. The pressure of light falling normally on to the surface may be expressed by the formula:

$$P = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = \omega(1 + \rho),$$

where E_e is the quantity of radiation energy that falls normally on 1 m^2 per second;

ρ is the reflection coefficient;

ω is the volume density of radiation energy.

The light pressure on mirror surface with the reflection coefficient $\rho = 1$ is twice as high as for an absolutely absorbing surface, for which $\rho = 0$. This fact was experimentally confirmed in Lebedev's researches.

The light pressure is a small value. For instance the pressure of the Sun's rays upon a black body surface is equal to about $4 \times 10^{-7} \text{ Pa}$.

5.2.11 Compton's Effect

In 1923, the American physicist A. Compton investigated monochromatic X-ray scattering by substances with light atoms (paraffin, boron).

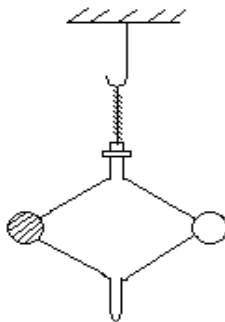


Рисунок 5.26

Світло від дуги Вольта напрямлялось на крильця. В результаті освітлення крилець нитка, на якій були підвішені крильця, закручувалась. За кутом закручування нитки визначався тиск світла. Тиск світла, що падає нормально на поверхню, визначається за формулою:

$$P = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = \omega(1 + \rho),$$

де E_e - величина енергії випромінювання, що падає нормально на 1 м^2 за секунду;

ρ - коефіцієнт відбиття;

ω - об'ємна густина енергії випромінювання.

Для дзеркальної поверхні з коефіцієнтом відбиття $\rho = 1$ тиск світла вдвічі більший, ніж для абсолютно поглинаючої поверхні, для якої $\rho = 0$. Експериментально це підтвердилось в дослідах Лебедева.

Величина тиску світла є досить малою величиною. Наприклад, тиск сонячних променів на поверхню чорного тіла приблизно дорівнює $4 \cdot 10^{-7}$ Па.

5.2.11 Ефект Комптона

Американський фізик А. Комптон у 1923 р. досліджував розсіяння монохроматичного рентгенівського випромінювання речовинами з легкими атомами (парафін, бор).

Compton discovered that X-radiation scattered by substance consists not only rays with an initial wavelength but also rays of longer waves.

Compton's effect consists in increasing of the wavelength of the scattered X-rays in comparison with the wavelength of incident radiation.

Compton's experimental installation is shown in Fig. 5.27. Narrow beam of monochromatic X-rays with a wavelength λ falls on scattering substance, scatterings at angle Ψ , and enters the X-ray spectrograph, which measures the wavelength λ' of scattered radiation.

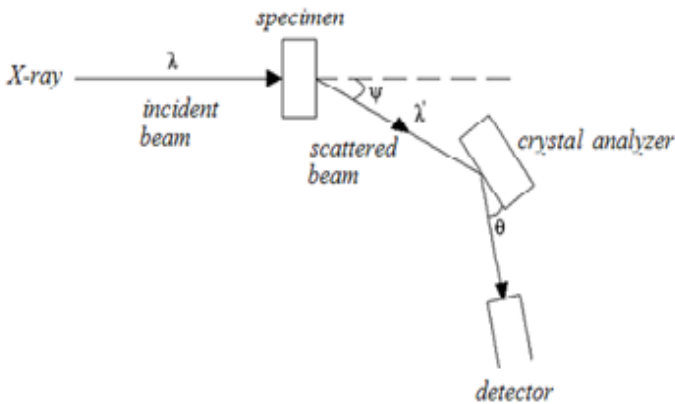


Figure 5.27

It was found that $\lambda' > \lambda$. Value of $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ is called Compton's shift and does not depend upon wavelength λ of incident radiation and the nature of the scattering substance.

The Compton's effect increases with increasing scattering angle Ψ and decreasing atomic mass. Compton explained the experimental results on the basis of quantum theory of radiation, supposing that an elastic collision between X-ray photons and free electrons of substance occurs. The scheme of the interaction is shown in Fig. 5.28:

Він виявив, що розсіяне речовиною рентгенівське випромінювання містить не тільки промені з початковою довжиною хвилі, а також і промені довших хвиль.

Ефект Комптона полягає у збільшенні довжини хвилі розсіяного рентгенівського випромінювання у порівнянні з довжиною хвилі падаючого випромінювання.

На рис. 5.27 зображена схема експериментальної установки Комптона. Вузький пучок монохроматичного рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі λ падає на розсіювальну речовину, розсіюється на кут ψ і потрапляє до рентгенівського спектрографа, який вимірює довжину хвилі λ' розсіяного випромінювання.

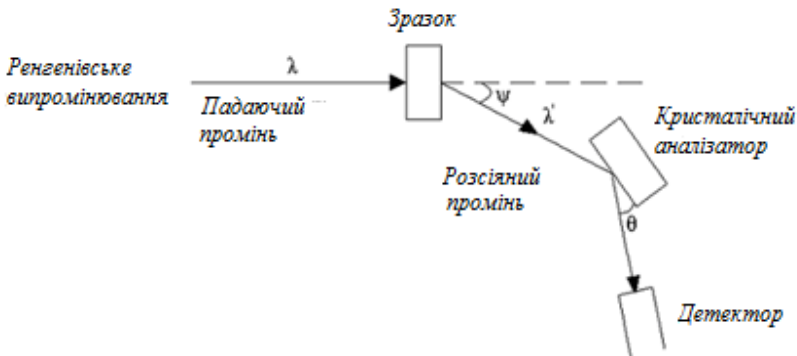


Рисунок 5.27

Було визначено, що $\lambda' > \lambda$. Величина $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ називається комптонівським зміщенням і не залежить від довжини хвилі λ падаючого випромінювання і природи розсіювальної речовини.

Ефект Комптона посилюється зі збільшенням кута розсіювання Ψ і зменшенням маси атома. Комптон пояснив результати досліду на основі квантової теорії випромінювання, припустивши, що відбувається пружне зіткнення рентгенівських фотонів з вільними електронами речовини. Схема взаємодії зображена на рис. 5.28:

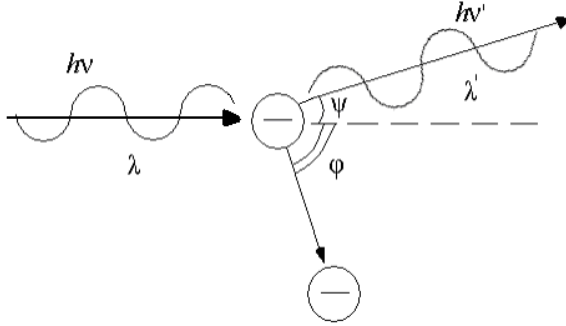


Figure 5.28

The energy of the X-ray quantum $h\nu$ decreases as a result of its collision with an electron in the state of rest. Thus, the energy of the incident photon is greater than the energy of the scattered one:

$$E_{\text{scattered}} < E_{\text{initial}},$$

accordingly

$$\begin{aligned} h\nu' &< h\nu, \\ \lambda' &> \lambda. \end{aligned}$$

Two basic conservation laws are realized during these collisions. The law of the energy conservation is

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{2},$$

where $h\nu$ is the energy of an incident photon;
 m_0c^2 is the energy of an electron at rest state;
 $h\nu'$ is the energy of the scattered photon;

$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{2}$ is the energy of the moving electron.

The law of the impulse conservation is:

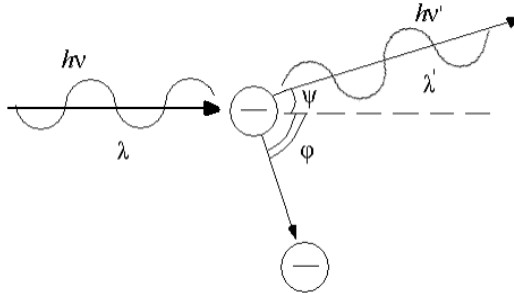


Рисунок 5.28

Енергія кванта рентгенівського випромінювання $h\nu$ зменшується в результаті його зіткнення з електроном, який знаходиться у стані спокою. Таким чином, енергія падаючого фотона більша енергії розсіяного:

$$E_{\text{розсіяного}} < E_{\text{падаючого}},$$

відповідно

$$\begin{aligned} h\nu' &< h\nu, \\ \lambda' &> \lambda \end{aligned}$$

Два основних закони збереження мають місце при цих зіткненнях. Закон збереження енергії:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{2},$$

де $h\nu$ - енергія падаючого фотона;

m_0c^2 - енергія електрона в стані спокою;

$h\nu'$ - енергія розсіяного фотона;

$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{2}$ - енергія електрона, що рухається.

Закон збереження імпульсу:

$$\vec{p}_{photon} + 0 = \vec{p}'_{photon} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v}.$$

In this way we obtain the set of equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{2} \\ \vec{p}_{photon} + 0 = \vec{p}'_{photon} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} \end{array} \right. .$$

It is possible to get the Compton's effect basic equation proceeding from these set of equations:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\Psi}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\Psi}{2},$$

where $\lambda_c = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{m}$ is the Compton's wavelength of an electron.

The Compton's equation is confirmed by the experimental data. For this discovery Compton was awarded Nobel Prize in 1927.

5.2.12 Corpuscular-Wave Dualism of Light

Studied phenomenon of interference, diffraction and polarization are explained by wave properties of light.

On the other hand the thermal radiation, photoeffect, Compton's effect is explained by quantum properties of light. And such phenomena as pressure and refraction of light can be explained as a wave as well as a quantum theory.

Therefore, light has corpuscular-wave duality that means that light has both wave and corpuscular properties.

$$\vec{p}_{photon} + 0 = \vec{p}'_{photon} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v}.$$

Таким чином, отримаємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{2} \\ \vec{p}_{photon} + 0 = \vec{p}'_{photon} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v}. \end{array} \right.$$

З цієї системи рівнянь можна отримати основне рівняння ефекту Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\Psi}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\Psi}{2},$$

де $\lambda_c = 2.43 \cdot 10^{-12}$ м є комптонівська довжина хвилі електрона.

Рівняння Комптона підтверджується експериментальними результатами. За цю роботу Комптон у 1927 р. був нагороджений Нобелівською премією.

5.2.12 Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла

Розглянуті явища інтерференції, дифракції і поляризації світла пояснюються хвильовими властивостями світла.

З іншого боку теплове випромінювання, фотоэффект, ефект Комптона пояснюються квантовими властивостями світла. А такі явища, як тиск світла і заломлення світла можна пояснити як хвильовою, так і квантовою теоріями.

Отже, світло має корпускулярно-хвильовий дуалізм, тобто світло має як хвильові, так і корпускулярні властивості.

Such light properties also reflect the equations that relate the wave and corpuscular properties of light:

$$E = h\nu ,$$
$$m = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} .$$

The wave properties of photons are mostly detected at low frequencies. At large frequency values, its corpuscular properties are more significant.

The corpuscular-wave dualism of light can be explained by applying a statistical approach to the laws of light propagation. When light passes through an optical system, such as a diffraction lattice, photons are redistributed in space, resulting in a diffraction pattern. Screen illumination is proportional to the probability of photons hitting a unit of screen surface per unit of time. On the other hand, according to the wave theory of light illumination is proportional to the square of the amplitude of the light wave. Therefore, based on these statements, we can conclude that the square of the amplitude of the light wave at any point is a measure of the probability of the photons entering this point. That is, the corpuscular and wave properties of light complement each other and together characterize the properties of electromagnetic radiation. Corpuscular-wave dualism expresses the dialectical unity of opposites - discontinuous and continuous in the structure of matter.

Thus, physics considers internal connection of corpuscle and wave, connection between discrete and continuous, in other words corpuscular-wave dualism of light.

Такі властивості світла відображають також рівняння, які зв'язують хвильові і корпускулярні властивості світла:

$$E = h\nu ,$$

$$m = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} .$$

Хвильові властивості фотонів найбільше виявляються при малих частотах. При великих значеннях частоти більш суттєвим є його корпускулярні властивості.

Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла можна пояснити, якщо застосувати статистичний підхід для закономірностей розповсюдження світла. При проходженні світла через оптичну систему, наприклад дифракційну ґратку, виникає перерозподіл фотонів у просторі, в результаті чого виникає дифракційна картина. Освітленість екрана пропорційна ймовірності попадання фотонів на одиницю поверхні екрана за одиницю часу. З іншого боку, згідно хвильовій теорії світла освітленість пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі. Отже, на підставі цих тверджень можна зробити висновок: квадрат амплітуди світлової хвилі в будь-якій точці є мірою ймовірності попадання фотонів в цю точку. Тобто корпускулярні і хвильові властивості світла взаємно доповнюють один одного і разом характеризують властивості електромагнітного випромінювання. Корпускулярно-хвильовий дуалізм виражає діалектичну єдність протилежностей - перервного і неперервного в структурі матерії.

Таким чином, фізика розглядає внутрішній зв'язок корпускули і хвилі, зв'язок дискретного і неперервного, тобто корпускулярно-хвильовий дуалізм світла.

Control Questions

Optics

1. What is light interference?
2. What is light diffraction?
3. What is the difference between Fresnel diffraction and Fraunhofer diffraction?
4. What is a diffraction grating?
5. What is X-rays? What does the Wulff-Bragg's formula describe?
6. What is light polarization?
7. Define thermal radiation and give its main characteristics.
8. What is an absolutely black-body? Formulate Kirchhoff's law.
9. Formulate absolute black-body radiation laws. Where are they applied?
10. What is the quantum hypothesis and Planck's formula?
11. What is optical pyrometry and what is it used for?
12. What is a photoelectric effect and what are its types?
13. What is Einstein's theory of photoelectric effect?
14. Write down the Einstein's equation for the external photoelectric effect.
15. How is the mass, momentum and pressure of light determined?
16. What is the Compton's effect?
17. Explain the corpuscular-wave dualism of light.

Контрольні запитання

Оптика

1. Що таке інтерференція світла?
2. Що таке дифракція світла?
3. Чим відрізняється дифракція Френеля від дифракції Фраунгофера?
4. Що таке дифракційна ґратка?
5. Що таке рентгенівське випромінювання? Що описує формула Вульфа-Брегга?
6. Що таке поляризація світла?
7. Дайте визначення теплового випромінювання і наведіть його основні характеристики.
8. Що таке абсолютно чорне тіло? Сформулюйте закон Кірхгофа.
9. Сформулюйте закони випромінювання абсолютно чорного тіла. Де вони застосовуються?
10. В чому полягає квантова гіпотеза і формула Планка?
11. Що таке оптична пірометрія і для чого вона застосовується?
12. Що таке фотоелектричний ефект і які існують його види?
13. В чому полягає теорія фотоефекту Ейнштейна?
14. Запишіть рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.
15. Як визначається маса, імпульс і тиск світла?
16. В чому полягає ефект Комптона?
17. Поясніть корпускулярно-хвильовий дуалізм світла.

6 ELEMENTS OF ATOMIC PHYSICS AND QUANTUM MECHANICS

6.1 Atomic Physics

6.1.1 Thomson and Rutherford Models of Atom

Atomic physics studies atom structure and its physical properties. From the old times there were two ideas of substance structure: one was based upon uninterrupted structure, the other was connected to the discrete structure. The latter one came from the ancient times and is found in Greek philosophers' studies like Democritus, Epicure, Lucretius.

The existence of the atom was proved in XVIII-XIX centuries in works of Lavoisier, Lomonosov, Dalton, and also by the Mendeleev's periodical system of elements. The discovery of the English physicist J. Thomson in 1897 of the existence of the electron proved that atom has its own internal structure and consists of microparticles.

In 1903, J. Thomson suggested the model of the atom on the base of experimental data. According to the Thomson's model, atom consists of positive and negative charges distributed in sphere of radius $\sim 10^{-10}$ m, where uninterrupted spreads positive charge, among which there are electrons in a form of separate particles. The sum of positive and negative charges is equal to zero and the atom is generally neutral. But this model had a lot of drawbacks and appeared to be wrong.

The further development of the image of atom structure is connected to the research of British physicist E. Rutherford in 1911 studying the scattering of α -particles by the substance. α -particles are nuclei of ${}^2\text{He}^4$ atoms. They are positively charged particles and their charge is equal to two electron charges $+2e$, and the mass is 7300 times over than the mass of the electron. Rutherford irradiated thin gold foil of ~ 1 micron thickness by α -particles (Fig.6.1).

6 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ І КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

6.1 Атомна фізика

6.1.1 Моделі атома Томсона і Резерфорда

Атомна фізика вивчає будову атома і його фізичні властивості. З давніх часів існувало два уявлення про будову речовини: одне ґрунтувалось на неперервній структурі, друге пов'язувалось з дискретністю структури. Останнє своїми коренями уходить ще в античні часи і зустрічається у вченні грецьких філософів Демокрита, Епікура, Лукреція.

Існування атома було доведено у XVIII-XIX століттях в роботах Лавуазьє, Ломоносова, Дальтона, а також відкриттям Менделєєвим періодичної системи елементів. Відкриття англійським фізиком Дж. Томсоном у 1897 р. існування електрона підтвердило, що атом має свою внутрішню структуру і складається з мікрочастинок.

Перша модель атома на основі експериментальних даних була запропонована Дж. Томсоном у 1903 році. Згідно моделі Томсона атом уявляє собою сферу радіусом $\sim 10^{-10}$ м, в якій безперервно розподілений позитивний заряд, між якого у вигляді окремих частинок містяться електрони. Сума позитивних і негативних зарядів дорівнює нулю і атом в цілому електронейтральний. Але ця модель мала ряд недоліків і виявлялася помилковою.

Подальший розвиток уявлень про будову атома пов'язаний з дослідженнями англійського фізика Е. Резерфорда у 1911 р. по вивченню розсіянням α -частинок речовиною. α -частинки є ядрами атомів ${}^4_2\text{He}$. Це позитивно заряджені частинки, заряд яких дорівнює двом зарядам електрона $+2e$, а маса у 7300 разів більше за масу електрона. Резерфорд опромінював тонку золоту фольгу товщиною ~ 1 мкм α -частинками (рис. 6.1).

Almost all α -particle have passed through the foil almost without deviation from its motion direction. Only a very small number of α -particles ($\sim 0.01\%$) deviated at large angles, i.e. they were reflected. The positive charge with great mass on which there are reflections of α -particles concentrated in very small atom's volume - in its nucleus.

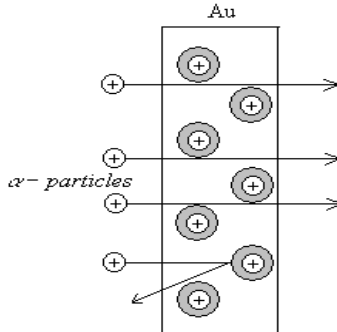


Figure 6.1

On the basis of these researches Rutherford offered a nuclear (planetary) model of an atom, according to which the electrons move around the positive nucleus of the atom like planets move around the Sun. The radius of the nucleus $r_n = 10^{-14}$ m is much smaller than the radius of an atom $r_a \approx 10^{-10}$ m. The ratio of these radii gives the relative number of deviated α -particles:

$$\frac{r_n}{r_a} = \frac{10^{-14}}{10^{-10}} = 0.01\% .$$

The nuclear model of atom developed by Rutherford allowed to explain the results of the experiment and gave the possibility to determine nucleus charge. It was established that the positive nucleus charge equals to the atomic number Z of the element in Mendeleev's periodical table. The number of electrons in the atom is also equal to Z .

Практично всі α -частинки проходили крізь фольгу майже не відхиляючись від напрямку свого руху. Лише дуже невелика кількість α -частинок ($\sim 0,01\%$) відхилялась на великі кути, тобто вони відбивались. Позитивний заряд з великою масою, на якому відбувається відбиття α -частинок, зосереджений в дуже малому об'ємі атома – його ядрі.

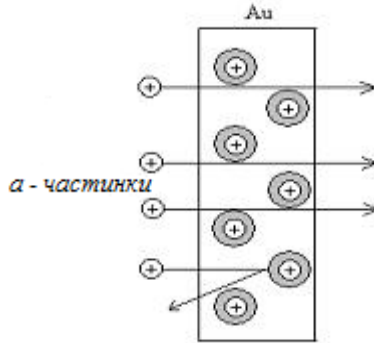


Рисунок 6.1.

На підставі цих досліджень Резерфорд запропонував ядерну (планетарну) модель атома, згідно якої електрони рухаються навколо позитивного ядра атома подібно планетам, що рухаються навколо Сонця. Радіус ядра $r_j = 10^{-14}$ м набагато менший, ніж радіус атома $r_a = 10^{-10}$ м. Відношення цих радіусів дає відносну кількість відхилених α -частинок:

$$\frac{r_j}{r_a} = \frac{10^{-14}}{10^{-10}} = 0,01\% .$$

Ядерна модель атома, розроблена Резерфордом дозволила пояснити результати експерименту і дала змогу визначити заряд ядра. Було встановлено, що позитивний заряд ядра дорівнює атомному номеру Z елементу в періодичній системі елементів Менделєєва. Число електронів в атомі також дорівнює Z .

However, the Rutherford's model has some contradictions. According to the laws of classical physics an electric charge rotates on an orbit around the nucleus of an atom (i.e. moves with acceleration) and must continuously emit electromagnetic waves. Because of this the energy of the electron must be decreased and the orbit of the electron will approach the nucleus. Finally the electron must fall on the nucleus and the atom will be destroyed. But we know that this is not really happening, the atom is a stable structure.

6.1.2 Atomic Spectra

Gas atoms being stimulated by an electric discharge emit a so-called linear spectrum, which consists of separate spectral lines. The atomic spectrum of hydrogen atoms is shown in Fig. 6.2.

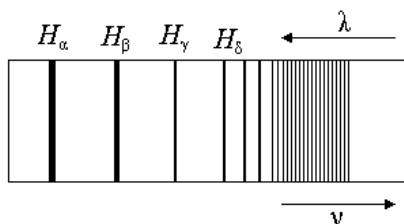


Figure 6.2

The atomic spectra have specific features. Every chemical element has its own location of lines which are naturally interconnected. Any line corresponds to the definite wavelength or frequency of radiation. The distance between the lines decreases as the frequency increases. The higher is the temperature the greater is the intensity of lines. However, the location of the lines and the corresponding wavelength do not change with rising temperature. The set of spectral lines, the sequence of which and the intensity distribution reveal a certain pattern, is called a spectral series.

A great contribution to the study of spectral patterns was made by scientists I. Balmer, J. Ridberg, and V. Ritz.

Проте, модель Резерфорда має деякі протиріччя. Згідно законам класичної фізики електричний заряд, рухається по орбіті навколо ядра атома (тобто рухається з прискоренням) і має безперервно випромінювати електромагнітні хвилі. Через це енергія електрона повинна зменшуватись і орбіта електрона буде наближуватися до ядра. Нарешті, електрон повинен впасти на ядро і атом зруйнується. Але ми знаємо, що насправді цього не відбувається, атом є стабільною структурою.

6.1.2 Атомні спектри

Атоми газу, що збуджуються електричним розрядом, випромінюють так званий лінійчастий спектр, який складається з окремих спектральних ліній. Атомний спектр атомів водню зображений на рис. 6.2.

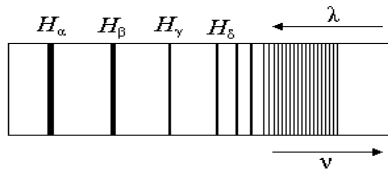


Рисунок 6.2

Атомні спектри мають особливі властивості. Кожен хімічний елемент має своє власне розташування ліній, які закономірно пов'язані між собою. Будь-яка лінія відповідає певній довжині хвилі, або частоті випромінювання. Відстань між лініями зменшується при збільшенні частоти. Чим більша температура, тим більша інтенсивність ліній. Проте, розташування ліній і відповідна їм довжина хвилі не змінюються при підвищенні температури. Сукупність спектральних ліній, послідовність яких і розподіл інтенсивності виявляють певну закономірність, називається спектральною серією.

Великий вклад в дослідження спектральних закономірностей було зроблено вченими І. Бальмером, Й. Рідбергом і В. Рітцем.

In 1885, the Swiss physicist Balmer proposed an empirical formula which describes the spectral lines of hydrogen in the visible region:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

where λ is the wavelength of spectral line,

$R' = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ is the Rydberg's constant.

These spectral lines in the visible region are called Balmer's series.

As $\nu = \frac{c}{\lambda}$, then

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

where $R = R'c = 3.29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ is called Rydberg's constant too.

Later the spectral line series was discovered in the ultraviolet and infrared regions. They are described by the similar formulas.

In the ultraviolet region the Lyman series is observed:

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

In the infrared region several series are observed:

the Paschen series $\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots,$

the Bracket series $\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots,$

the Pfund series $\nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, 8, \dots,$

the Hamphreys series $\nu = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 7, 8, 9, \dots$

The Balmer's generalized formula for any spectral series of hydrogen atom may be expressed as:

У 1885 році швейцарський фізик І. Бальмер запропонував емпіричну формулу, яка описує лінії спектру водню у видимій області.

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

де λ - довжина хвилі спектральної лінії; $R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ - стала Рідберга. Ці спектральні лінії у видимій області називаються серією Бальмера. Так як, $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $R = R'c = 3.29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ також називається сталою Рідберга.

Пізніше були виявлені серії спектральних ліній водню в ультрафіолетовій і інфрачервоній областях. Вони описуються подібними формулами.

В ультрафіолетовій області спостерігається серія Лаймана:

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

У інфрачервоній області спостерігаються декілька серій:

Серія Пашена $\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6 \dots$

Серія Брекета $\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7 \dots$

Серія Пфунда $\nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, 8 \dots$

Серія Хемпфрі $\nu = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 7, 8, 9 \dots$

Узагальнену формулу Бальмера для будь-яких серій спектру водневого атома водню можна виразити таким чином:

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

where $m = 1, 2, 3, \dots$, it determines the series; $n = m+1, m+2, \dots$, it determines the given lines in series.

Swedish physicist J. Rindberg has shown that in the linear spectra of different chemical elements there are spectral series whose line frequencies satisfy the conditions $\nu = T(m) - T(n)$, where m and n are integers. $T(m)$ and $T(n)$ are called spectral terms.

According to Ritz's combination principle, the frequencies of the spectral lines of radiation of any atom can be represented as the difference of two terms.

6.1.3 Bohr's Theory

Spectral regularities of linear spectrums of atoms, Rutherford's nuclear model of atom and quant character of radiation and absorption of atoms gave the Danish physicist N. Bohr a possibility to develop a qualitatively new theory of the atom in 1913. Bohr's theory is based on two postulates:

1. The Bohr's first postulate (postulate of stationary states): there exists the stationary states of atom in which atom doesn't emit energy.

2. The Bohr's second postulate (the rule of frequencies): the transition of an atom from one stationary state into the another is followed by the emission or absorption of one photon with an energy, that equals the difference of energies of these two stationary states

$$h\nu = E_n - E_m.$$

N. Bohr also established the rule of quantization of orbits: in the stationary state of the atom, the electron, moving in a circular orbit, must have quantized values of the moment of impulse

$$L = mvr = n\hbar, (n = 1, 2, 3, \dots),$$

where m is the mass of the electron, v is the velocity of orbital motion of the electron, r is the radius of the electron orbit, \hbar is Planck's constant.

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $m = 1, 2, 3, \dots$, визначає серію; $n = m+1, m+2, \dots$, визначає певні лінії в серіях.

Шведський фізик Й. Рідберг показав, що в лінійчастих спектрах різних хімічних елементів є спектральні серії, частоти ліній яких задовольняють умови $\nu = T(m) - T(n)$, де m і n цілі числа. $T(m)$ і $T(n)$ називаються спектральними термами.

Згідно комбінаційного принципу Рітца частоти спектральних ліній випромінювання будь-якого атома можна представити як різницю двох термів.

6.1.3 Теорія Бора

Спектральні закономірності лінійчастих спектрів атомів, ядерна модель атома Резерфорда і квантовий характер випромінювання та поглинання атомів дали змогу датському фізику Н. Бору у 1913 р. розробити якісно нову теорію атома. В основу теорії Бора покладено два постулати.

1. Перший постулат Бора (постулат стаціонарних станів): існують стаціонарні стани атома, перебуваючи в яких атом не випромінює енергії.

2. Другий постулат Бора (правило частот): перехід атома з одного стаціонарного стану в інший супроводжується випромінюванням або поглинанням одного фотона з енергією, яка дорівнює різниці енергій цих двох стаціонарних станів

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Н. Бор установив також правило квантування орбіт: в стаціонарному стані атома електрон, рухаючись по коловій орбіті, повинен мати квантовані значення моменту імпульсу:

$$L = mvr = n\hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

де m - маса електрона, v - швидкість руху електрона по орбіті, r - радіус орбіти електрона, \hbar - стала Планка.

According to the Bohr's theory during the transition of an atom from the state of bigger energy to the state of smaller energy the radiation of a photon occurs and the electron moves from a distant orbit on one closer to the nucleus. The absorption of energy is followed by the transition of an atom into the state with bigger energy, that corresponds to the transition of the electron onto more remote orbit from the nucleus.

The set of probable frequencies $\nu_i = \frac{E_n - E_m}{h}$ of quantum transitions determines the linear spectrum of an atom.

Bohr's theory made it possible to explain the mechanism of the appearance of the linear spectra of hydrogen atoms, the presence of series of spectral lines, and the correspondence of the frequency of each spectral line to quantum transitions.

6.1.4 Franck and Hertz's Experiments

Bohr's theory found the experimental confirmation in researches of German physicists D. Franck and J. Hertz in 1913. They studied the collision of electrons with mercury atoms by the method of the retarding potential and experimentally proved the discreteness of the energy of atoms. The scheme of the experimental installation is shown in Fig.6.3.

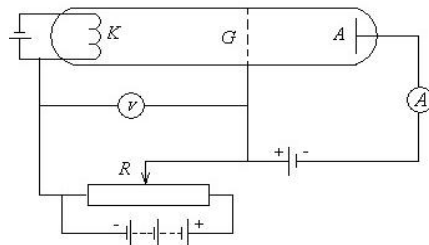


Figure 6.3

Glass tube, filled with mercury vapor with a pressure around 13 Pa, contained the cathode *K*, the anode *A* and the grid *G*. Electrons are emitted by the cathode as a result of thermoelectrical emission,

Згідно з теорією Бора при переході атома із стану з більшою енергією в стан з меншою енергією відбувається випромінювання фотона і електрон переходить з віддаленої орбіти на ближчу до ядра. Поглинання енергії супроводжується переходом атома в стан з більшою енергією, що відповідає переходу електрона на більш віддалену від ядра орбіту.

Набір можливих частот $\nu_i = \frac{E_n - E_m}{h}$ квантових переходів

визначає лінійчастий спектр атома.

Теорія Бора дала можливість пояснити механізм виникнення лінійчастих спектрів атомів водню, наявність серій спектральних ліній, а також відповідність частоти кожної спектральної лінії квантовим переходам.

6.1.4 Досліди Франка і Герца

Експериментальне підтвердження теорія Бора знайшла в дослідах німецьких фізиків Д. Франка і Г. Герца в 1913 р. Вони вивчали методом затримуючого потенціалу зіткнення електронів з атомами ртуті і експериментально довели дискретність енергії атомів. Схема експериментальної установки наведена на рис. 6.3.

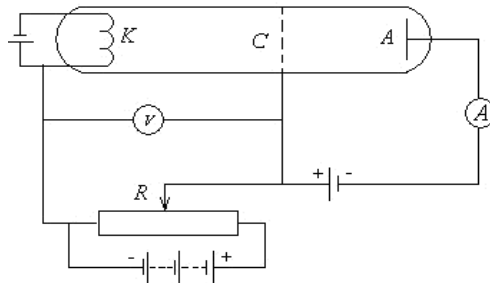


Рисунок 6.3

Скляна трубка, заповнена парою ртуті при тиску близько 13 Па, містила катод K , анод A і сітку C . Електрони, які емітуються катодом внаслідок термоелектронної емісії,

were accelerated by the difference of potentials U , that is applied between the cathode and the grid. This potential difference was regulated by potentiometer R . Between the grid and the anode was applied a small retarding potential difference of the order of 0.5 V, which inhibited the movement of electrons. D. Frank and G. Hertz obtained the dependence of the anode current I on the voltage U which is shown in Fig. 6.4.

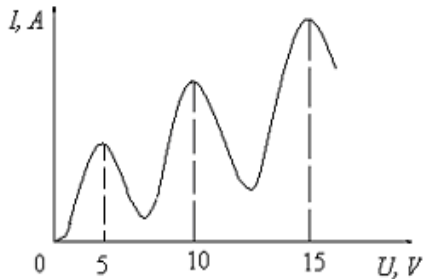


Figure 6.4

It was found that with increasing voltage, the intensity of the anode current increased gradually, reached the maximum at $U = 4.9$ V and then decreased sharply. A further increase in voltage led to a reincrease in the intensity of the anode current, which again reached a maximum at $U = 9.8$ V and then decreased sharply. Subsequent maxima of the anode current were observed at a voltage multiple of $U = 4.9$ V, namely 9.8 V, 14.7 V, etc.

Received results are explained in such manner. When electrons pass through mercury vapor, they collide with mercury atoms. While electrons are accelerated by voltage less than $U = 4.9$ V, they experience only elastic collisions with atoms, without loss of energy. This time, their energy is enough for the passage of the retarding potential between the grid and the anode, so as the voltage increases, the anode current gradually increases. Sharp drop of anode current intensity at $U = 4.9$ V means that inelastic collision of electrons with mercury atoms takes place.

прискорювались різницею потенціалів U , що прикладена між катодом і сіткою. Ця різниця потенціалів регулювалась потенціометром R . Між сіткою і анодом подавали невелику затримуючу різницю потенціалів порядку $0,5$ В, яка гальмувала рух електронів. Д. Франк і Г. Герц отримали залежність анодного струму I від напруги U , яка наведена на рис.6.4.

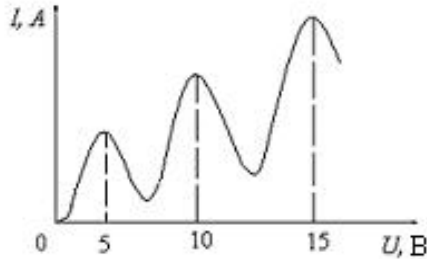


Рисунок 6.4

Було встановлено, що при підвищенні напруги сила анодного струму підвищувалась поступово, досягала максимуму при $U = 4,9$ В і далі різко зменшувалась. Подальше збільшення напруги призводило до повторного підвищення сили анодного струму, який знов досягав максимуму при $U = 9,8$ В і потім різко зменшувався. Наступні максимуми анодного струму спостерігалися при напрузі, кратній до $U = 4,9$ В, а саме $9,8$ В, $14,7$ В і т. д.

Отримані результати пояснюються наступним чином. При проходженні електронів крізь пару ртуті відбуваються їх зіткнення з атомами ртуті. Поки електрони прискорюються напругою, меншою $U = 4,9$ В, вони зазнають лише пружних зіткнень з атомами, не втрачаючи своєї енергії. При цьому їх енергії достатньо для проходження затримуючого потенціалу між сіткою і анодом, тому при збільшенні напруги анодний струм поступово збільшується.

Різде падіння сили анодного струму при $U = 4,9$ В означає, що відбувається непружне зіткнення електронів з атомами ртуті.

As a result, electrons completely lose their energy and can't overcome the retarding potential between the grid and the anode. The energy of such electrons is spent on the transition of the mercury atoms from the normal energetic state to the excited one, the energy difference between which is equal to 4.9 eV. The existence of the following maxima of the anode current at voltage values multiple of 4.9 V and its decrease after them is explained by the fact that electrons undergo 2, 3 ... times inelastic collision with mercury atoms, lose their energy completely and do not reach the anode. It is important that mercury atoms absorb the energy in certain discrete portions, the value of which is multiple to $eU_1 = 4.9$ eV. So, atoms when they collide with electrons can acquire not arbitrary, but only certain values of energy. This confirms the validity of Bohr's first postulate of the existence of stationary states of atoms.

It was found too, that at voltage between the grid and the cathode less than 4.9 V the radiation of mercury vapor didn't occur in the tube. But at a voltage $U = 4.9$ V and multiple values, ultraviolet radiation occurred with a wavelength of $0.2537 \mu\text{m}$. But at voltage $U = 4.9$ V and multiple values ultraviolet radiation with a wavelength of $0.2537 \mu\text{m}$ occurred. The existence of such radiation is explained as follows. Mercury atoms, acquire the energy ΔE at the collision with electrons and pass into the excited state. Then its transition in the normal state occurred, that is accompanied by the emission of light quantum of frequency

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}.$$

As $\Delta E = 4.86$ eV, then the corresponding wavelength of light is

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot h}{\Delta E} = 0.2537 \mu\text{m}.$$

This value of the wavelength coincides with experimental one, that proves the Bohr's second postulate to be true.

Thus, the researches of Frank and Hertz experimentally confirmed the basic statutes of Bohr's theory.

В результаті чого електрони повністю втрачають свою енергію і не можуть подолати затримуючий потенціал між сіткою і анодом. Енергія таких електронів витрачається на перехід атомів ртуті з нормального енергетичного стану у збуджений, різниця енергій між якими дорівнює 4,9 еВ. Існування наступних максимумів анодного струму при значеннях напруги, кратних 4,9 В, і його зменшення після них пояснюється тим, що електрони зазнають 2, 3... рази непружне зіткнення з атомами ртуті, втрачають повністю свою енергію і не досягають анода. Важливо те, що атоми ртуті поглинають енергію певними дискретними порціями, значення якої є кратною $eU_1 = 4,9$ еВ. Тобто, атоми при зіткненні з електронами можуть набувати не довільні, а тільки певні значення енергії. Це підтверджує справедливність першого постулату Бора про існування стаціонарних станів атомів.

Було також виявлено, що при напрузі між сіткою і катодом меншою 4,9 В випромінювання пару ртуті в трубці не відбувалось. Але при напрузі $U = 4,9$ В і кратних значеннях відбувалось ультрафіолетове випромінювання з довжиною хвилі 0,2537 мкм. Існування таке випромінювання пояснюється наступним чином. Атоми ртуті, які набувають при зіткненні з електроном енергію ΔE , переходять у збуджений стан. Далі відбувається перехід їх в основний нормальний стан, який супроводжується випромінюванням кванта світла з частотою

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}.$$

Так як $\Delta E = 4,86$ еВ, то відповідна довжина хвилі світла становить

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot h}{\Delta E} = 0,2537 \text{ мкм.}$$

Це значення довжини хвилі співпадає з експериментальним, що підтверджує справедливність другого постулату Бора. Таким чином, досліди Франка і Герца експериментально підтвердили основні положення теорії Бора.

6.1.5 Bohr's Theory of Hydrogen Atom and its Spectrum

Bohr's theory allowed to calculate the spectrum of the hydrogen atom and hydrogen-like systems. The hydrogen atom is the simplest system, which consists of one electron that moves in a circular orbit around the nucleus. The hydrogen-like atom consists of a nucleus which carries the charge of $+Ze$ and one electron, for example the ion He^+ .

Let's consider the movement of an electron in a hydrogen-like system. The Newton's second law for such system is written with such equation:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m\nu^2}{r_n}. \quad (6.1)$$

According to the rule of quantization of orbits:

$$m\nu r_n = n\hbar. \quad (6.2)$$

We obtain the set of equations:

$$\begin{cases} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m\nu^2}{r_n} \\ m\nu r_n = n\hbar \end{cases}. \quad (6.3)$$

Solving the set of these equations we obtain the formula for the radius of electron orbits:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Zme^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.4)$$

That is, the radii of electron orbits grow in proportion to the squares of integers.

The radius of the first electron orbit ($n = 1$) of the hydrogen atom ($Z = 1$) equals:

$$r_1 = 0.528 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

and it is called the first Bohr's radius.

The total energy of the hydrogen atom is the sum of the potential energy of the interaction between electron and the nucleus and the kinetic energy of electron's movement:

6.1.5 Теорія атома водню по Бору і його спектр

Теорія Бора дозволила розрахувати спектр атома водню і воднеподібних систем. Атом водню є найпростішою системою, яка складається з одного електрона, який рухається по коловій орбіті навколо ядра. Воднеподібний атом складається з ядра зарядом $+Ze$ і одного електрона, наприклад, іон He^+ .

Розглянемо рух електрона в воднеподібній системі. Кулонівська сила взаємодії електрона з ядром надає електрону доцентрове прискорення. Другий закон Ньютона для такої системи запишеться наступним рівнянням:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m v^2}{r_n}. \quad (6.1)$$

Згідно з правилом квантування орбіт:

$$m v r_n = n \hbar. \quad (6.2)$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m v^2}{r_n} \\ m v r_n = n \hbar \end{cases} \quad (6.3)$$

Розв'язавши систему рівнянь (6.3), отримаємо формулу для радіуса електронних орбіт:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z m e^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3... \quad (6.4)$$

Тобто, радіуси електронних орбіт зростають пропорційно квадратам цілих чисел.

Для атома водню ($Z = 1$) радіус першої орбіти електрона ($n = 1$) дорівнює

$$r_1 = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

і називається першим борівським радіусом.

Повна енергія атома водню є сумою потенціальної енергії взаємодії електрона з ядром і кінетичної енергії руху електрона:

$$E = E_p + E_k,$$

$$E_p = -\int_{\infty}^{r_n} F dr = \int_{\infty}^{r_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} dr = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Thus,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (6.5)$$

Substituting in (6.5) the value for r_n we obtain:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 me^4}{8h^2 \epsilon_0^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.6)$$

A minus sign indicates that the electron is in a bound state.

The number n in formula (6.6) determines the energy levels of an atom and is called the principal quantum number. A state with $n = 1$ is called a ground (normal) state. If $n > 1$ it is called an excited state. Fig. 6.3 illustrated the possible allowed orbits of the hydrogen atom originated from formula (6.6):

$$E \sim \frac{1}{n^2}.$$

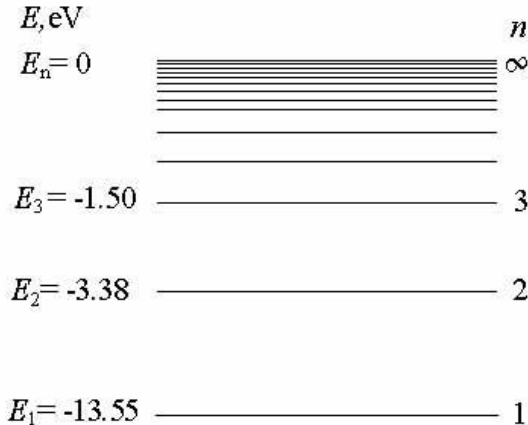


Figure 6.5

$$E = E_n + E_k.$$

$$E_p = -\int_{\infty}^{r_n} F dr = \int_{\infty}^{r_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} dr = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Отже,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (6.5)$$

Підставивши в (6.5) значення для r_n , отримуємо:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 m e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.6)$$

Знак мінус означає, що електрон знаходиться у зв'язаному стані.

Число n у формулі (6.6) визначає енергетичні рівні атома і називається головним квантовим числом. Стан з $n = 1$ називається основним (нормальним) станом. Якщо $n > 1$ стан називається збудженим станом. На рис.6.5 зображені можливі енергетичні рівні атома водню, що походять з формули (6.6):

$$E \sim \frac{1}{n^2}.$$

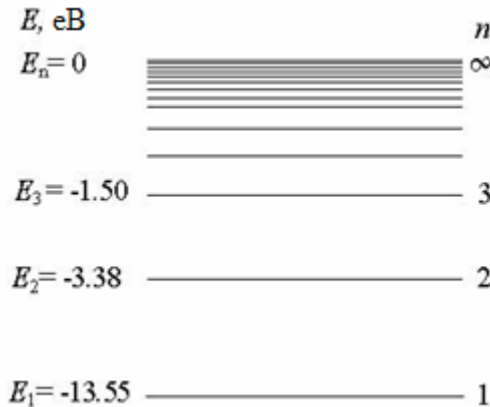


Рисунок 6.5

The energy of the hydrogen atom increases with increasing n , as its negative value decreases. The energy levels of the atom approach each other and tend to the boundary corresponding to the maximum energy value $E_\infty = 0$ at $n = 1$. The maximum energy value corresponds to the ionization energy of the hydrogen atom. The minimum value of the hydrogen atom energy is $E_1 = -13.55$ eV at $n = 1$.

According to Bohr's second postulate:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (6.7)$$

where

$$R = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}.$$

Theoretical calculations of R value show, it coincides with experimental one. That fact confirms Bohr's theory to be true.

An atom can be transferred in an excited state with an electric discharge. Due to this process energy of an electron increases according to the equation (6.6). However the excited state is unstable. Thus an atom makes a transition from one state E_n to the state with lower energy E_m , ($n > m$). This emits a photon with an energy that is determined according to the Bohr's second postulate:

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Thus, the spectrum of hydrogen consists of series of lines (three of which are shown in Fig.6.6 and is described by the formula (6.7) which was obtained from Bohr's theory and coincides with the general Balmer formula:

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Енергія атома водню зростає із збільшенням значення n , так як зменшується її від'ємна величина. При цьому енергетичні рівні атома наближуються один до одного і прямують до границі, що відповідає максимальному значенню енергії $E_\infty = 0$ при $n = 1$. Максимальне значення енергії відповідає енергії іонізації атома водню. Мінімальне значення енергії атома водню дорівнює $E_1 = -13,55$ еВ при $n = 1$.

Згідно з другим постулатом Бора:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (6.7)$$

де

$$R = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}.$$

Теоретичні розрахунки величини R показали, що вона співпадає з експериментальним значенням. Цей факт підтверджує справедливість теорії Бора.

Атом може бути переведений у збуджений стан електричним розрядом. Завдяки цьому процесу енергія електрона збільшується згідно рівняння (6.6). Проте збуджений стан нестійкий. Тому атом здійснює перехід зі стану E_n до стану з меншою енергією E_m ($n > m$). При цьому випромінюється фотон з енергією, яка визначається згідно з другим постулатом Бора:

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Тому спектр водню складається з серій ліній (три з яких зображені на рис.6.6 і описується формулою (6.7), отриманою з теорії Бора, яка співпадає з узагальненою формулою Бальмера:

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

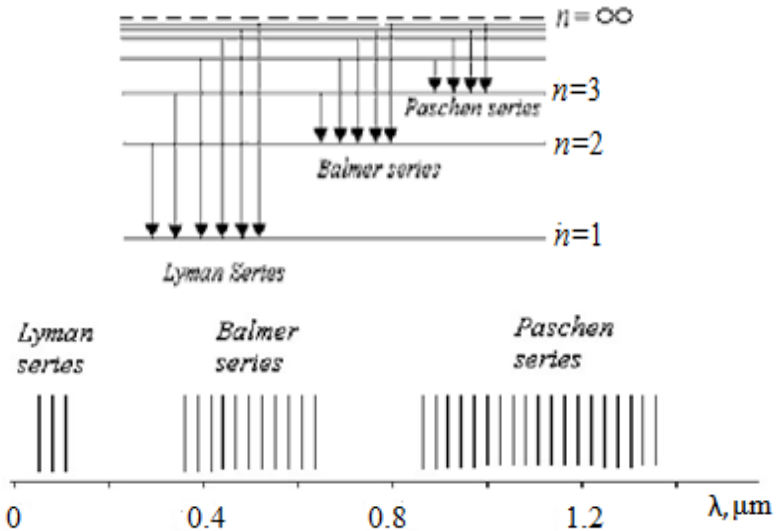


Figure 6.6

Bohr's theory was of great importance for the development of atomic physics. But it has internal contradictions because it combines laws of classical physics as well as quantum images. Bohr's theory could not explain the intensity of spectral lines and the reason of atom transition to different states. The biggest failure of Bohr's theory was in inability to describe more complex atomic systems than hydrogen atom. Despite of its own drawbacks, Bohr's theory was an important step towards the creation of quantum mechanics.

6.2 Elements of Quantum Mechanics

6.2.1 Wave Properties of Particles

In 1924, the French physicist Louis De Broglie was the first to put the hypothesis that there is an analogy between corpuscular-wave dualism of light and the properties of material particles. He assumed that any particle just like photons has not only corpuscular, but also wave properties. The quantitative relationship between the

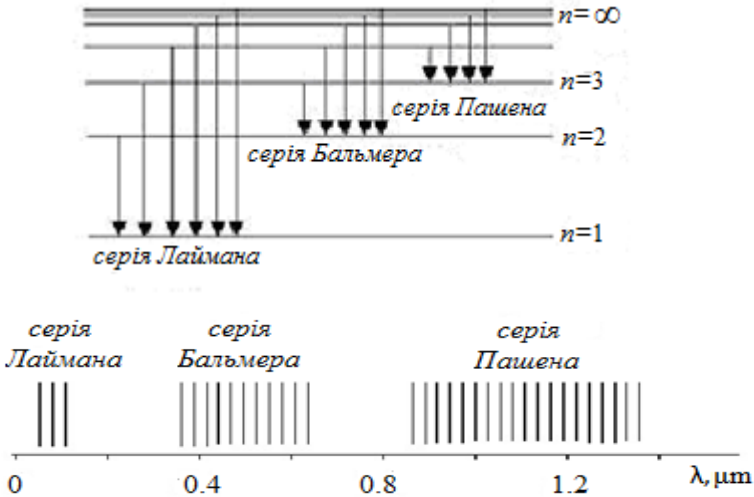


Рисунок 6.6

Теорія Бора мала велике значення для розвитку атомної фізики. Але вона містить внутрішні протиріччя, так як поєднує закони класичної фізики з квантовими уявленнями. Теорія Бора не змогла пояснити інтенсивність спектральних ліній і причину переходів атомів в різні стани. Найбільшою невдачею теорії Бора була неможливість описати більш складні за атом водню атомні системи. Не зважаючи на свої недоліки теорія Бора була важливим шагом до утворення квантової механіки.

6.2 Елементи квантової механіки

6.2.1 Хвильові властивості частинок

Французький фізик Луї де Бройль у 1924 р. вперше висунув гіпотезу про існування аналогії між корпускулярно-хвильовим дуалізмом світла і властивостями матеріальних частинок. Він припустив, що будь-які частинки, так само як і фотони, мають не тільки корпускулярні, а й хвильові властивості. Кількісні співвідношення між

corpuscular and wave properties of particles should be the same as for the photon. So the wavelength of a particle with mass m that moves with velocity v is determined by the formula, which is called the de Broglie formula:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (6.8)$$

This relationship is true for any particle with impulse p .

According to this formula the wavelength of the electron, which accelerates in an electric field with a difference of potentials $\Delta\phi$, is determined as follows. Since its kinetic energy is equal to

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = e\Delta\phi,$$

then

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2me\Delta\phi}}.$$

Calculations of λ_e for $\Delta\phi = 10$ V give the value of the wavelength of the order of $\sim 10^{-10}$ m. For comparison, the wavelength of a football the speed of which is 10 m / s, equals $\lambda_b \approx 10^{-35}$ m.

Bohr's postulate of stationary orbits based on de Broglie formula can be written as

$$mvr = n \frac{h}{2\pi},$$

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} = n\lambda.$$

That is, the stationary states of an electron in an atom are such states if an integer number of de Broglie waves is placed along the length of their orbit.

De Broglie's hypothesis was experimentally confirmed in 1927 by American physicists K. Davison and L. Germer. They found diffraction of the electron beam in the crystals of nickel. The diffraction maxima corresponded to the Wolf-Bragg's equation:

корпускулярними і хвильовими властивостями частинки мають бути такі самі, як і для фотона. Тобто, довжина хвилі частинки масою m , яка рухається зі швидкістю v визначається рівнянням, яке називається формулою де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (6.8)$$

Це співвідношення справедливо для будь-якої частинки з імпульсом p .

Згідно цієї формули довжина хвилі електрона, який прискорюється в електричному полі з різницею потенціалів $\Delta\varphi$, визначається наступним чином. Його кінетична енергія

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = e\Delta\varphi.$$

Тоді

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2me\Delta\varphi}}.$$

Розрахунки λ_e для $\Delta\varphi = 10$ В дають значення довжини хвилі порядку $\sim 10^{-10}$ м. Для порівняння, довжина хвилі футбольного м'яча, швидкість якого 10 м/с, дорівнює $\lambda_{.m} \approx 10^{-35}$ м.

Постулат Бора про стаціонарні орбіти з урахуванням формули де Бройля можна записати

$$mvr = n \frac{h}{2\pi},$$

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} = n\lambda.$$

Тобто стаціонарними станами електрона в атомі є такі стани, якщо на довжині їхньої орбіти укладається ціле число хвиль де Бройля.

Гіпотезу де Бройля експериментально підтвердили у 1927 р. американські фізики К. Девісон і Л. Джермер. Вони виявили дифракцію електронного пучка на кристалах нікелю. Дифракційні максимуми відповідали рівнянню Вульфа-Брега:

$$2d \cdot \sin\theta = n\lambda.$$

So, electrons show wave properties, and the wavelength λ coincided with the wavelength of de Broglie according to the equation (6.8).

Further researches discovered the diffraction of neutrons, protons, atom and molecule beams.

The practical usage of wave properties of particles is found in the development of modern methods of research - electrographic, neutronography and others.

6.2.2 Uncertainty Principle

In classical mechanics to describe the motion of the body concepts such as coordinate and speed of the body, the trajectory of its movement are used. Coordinates of the body and its speed can be simultaneously expressed with any precision. Certain values of accuracy of coordinates $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ and impulse Δp are measurement errors and can be maximally reduced, that is $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0, \Delta p \rightarrow 0$.

In quantum mechanics the motion of a microparticle is regarded as the propagation of the de Broglie wave. Due to the wave properties of a microparticle it doesn't have a clear trajectory of motion and simultaneous accurate determination of coordinates and impulse is impossible to find. Thus, if the impulse of a microparticle is known exactly, then its location, that is, the coordinate, becomes quite uncertain.

This idea was first formulated by German physicist Heisenberg in 1927 as the uncertainty principle: a microparticle can't simultaneously have a definite coordinate and a definite relative impulse projection, considering that the uncertainties of these values satisfy the condition:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar \end{cases}$$

$$2d \cdot \sin \theta = n\lambda.$$

Тобто електрони проявляли хвильові властивості, а довжина хвилі λ співпадала з довжиною хвилі де Бройля згідно формули (6.8).

В подальших дослідках була виявлена дифракція нейтронів, протонів, атомних і молекулярних пучків.

Практичне застосування хвильових властивостей частинок знайшло в розвитку сучасних методів дослідження – електронографії, нейтронографії та інших.

6.2.2 Співвідношення невизначеностей

У класичній механіці для характеристики руху тіла застосовують такі поняття, як координата і швидкість тіла, траєкторія його руху. Координати тіла і його швидкість можна визначити одночасно з будь-якою точністю. Певні значення точності координат $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ і імпульса Δp вважаються як похибка вимірювання і можуть бути максимально зменшені, тобто $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0, \Delta p \rightarrow 0$.

У квантовій механіці рух мікрочастинки розглядається, як поширення хвилі де Бройля. Внаслідок хвильових властивостей мікрочастинка не має чіткої траєкторії руху і одночасне точне визначення координат і імпульсу неможливе. Отже, якщо точно відомий імпульс мікрочастинки, то її місцеположення, тобто координата, стає цілком невизначеною.

Цю ідею вперше сформулював німецький фізик В. Гейзенберг у 1927 р. у вигляді співвідношення невизначеностей: мікрочастинка не може одночасно мати певну координату і певну відповідну проекцію імпульсу, причому невизначеності цих величин задовольняють умові:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar \end{cases}.$$

That is, the product of the uncertainties of the coordinate by the corresponding projection of the impulse cannot be less than the Planck's constant. On the basis of this principle the coordinate of a micoparticle and its impulse cannot be simultaneously measured exactly. Actually, if $\Delta x \rightarrow 0$ then $\Delta p \rightarrow \infty$ and contrary if $\Delta p \rightarrow 0$ then $\Delta x \rightarrow \infty$. The impossibility of simultaneous determination of the coordinate and the corresponding projection of the impulse is determined by the corpuscular-wave nature of the microparticles and isn't related to the capabilities of measuring instruments.

On the basis of the uncertainty principle it is impossible to speak of the motion of an electron in an atom along a certain trajectory and apply the laws of classical mechanics to its determination. The quantum theory leads also to the relationship of uncertainties of energy and time:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

where Δt is the time of receiving energy ΔE by the particle.

This relationship means, that the shorter the existence of a certain state, the greater the uncertainty of the energy of this state.

So, the frequency of radiation of a photon has uncertainty

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h},$$

which is proved by blurring of all spectral lines. If we measure the width of the spectral line, we can determine the time of existence of the atom in the excited state.

The uncertainty principle is the proof for atoms stability existence. Let's assume that an electron approaches to a nucleus, then $\Delta x \rightarrow 0$. Accordingly, $\Delta p_x \rightarrow \infty$, thus the velocity and the energy of an electron increases. As a result an electron moves away from a nucleus and the atom is in a stable state.

The uncertainty principle cannot be interpreted as a relationship that establishes the limit of knowledge of the universe. It characterizes the limits of the application of the ideas and laws of classical physics to the knowledge of the objects of the microworld.

Тобто добуток невизначеностей координати і відповідної проекції імпульсу не може бути меншим за сталу Планка. На підставі цього координати мікрочастинки і її імпульс не можуть бути визначені одночасно точно. Дійсно, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta p \rightarrow \infty$ і навпаки, якщо $\Delta p \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow \infty$. Неможливість одночасного визначення координати і відповідної проекції імпульсу визначається корпускулярно-хвильовою природою мікрочастинок і зовсім не пов'язана з можливостями вимірювальних приладів.

На підставі співвідношення невизначеностей не можна говорити про рух електрона в атомі по певній траєкторії і застосовувати для його визначення закони класичної механіки.

Квантова теорія також призводить до співвідношення невизначеностей енергії та часу:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

де Δt - час отримання мікрочастинкою енергії ΔE .

Це співвідношення означає, що чим менший час існування певного стану, тим більша невизначеність енергії цього стану.

Тобто, частота випромінювання фотона має невизначеність

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h},$$

що підтверджується розмитістю всіх спектральних ліній. Якщо виміряти ширину спектральної лінії, то можна визначити час існування атома у збудженому стані.

Співвідношення невизначеностей доводить стабільність існування атомів. Припустимо, що електрон наближається до ядра, тоді $\Delta x \rightarrow 0$. Відповідно $\Delta p_x \rightarrow \infty$, отже, швидкість і енергія електрона збільшуються. В результаті електрон рухається від ядра і атом знаходиться в стабільному стані.

Співвідношення невизначеностей не можна трактувати як співвідношення, що встановлює межу пізнання всесвіту. Воно характеризує межі застосування уявлень і законів класичної фізики для пізнання об'єктів мікросвіту.

6.2.3 Wave Function

The location of a material point is determined in classical physics by means of three x , y , z coordinates. According to the uncertainty principle the precise determination of the coordinates is impossible as the concept of the trajectory has no any physical sense. The wave function Ψ is introduced in quantum mechanics to characterize the microparticle state and it depends on time and coordinates: $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$.

The concept of the wave function was introduced by the German physicist M. Born in 1926 on the basis of electron diffraction experiments. He suggested that according to the wave law the value of $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ changes, which is called the probability amplitude, or the wave function. He argued that the probability of finding an electron at that point was proportional to the square of the wave function. That is, the state of the microparticle is described by the wave function and has a statistical, probabilistic character.

The square of the modulus of the wave function multiplied by an elementary volume dV is equal to the probability of a microparticle being inside volume dV :

$$d\omega = |\Psi|^2 dV = \Psi \cdot \Psi^* dV,$$

where Ψ^* is the complex conjugated function with Ψ .

Thus, the wave function Ψ has no physical sense by itself, the physical sense has the value $|\Psi|^2$, as it makes the sense of probability density, that it determines the probability of the microparticle location in the elementary volume dV :

$$|\Psi|^2 = \frac{d\omega}{dV}.$$

Correspondently the probability of a microparticle location in a finite volume V at a time t according to the theorem of probabilities addition is equal to

$$\omega = \int_V d\omega = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

6.2.3 Хвильова функція

Знаходження матеріальної точки в класичній фізиці визначається за допомогою трьох координат: x , y , z . Згідно з співвідношенням невизначеностей точне визначення координат мікрочастинки неможливе, так як поняття траєкторії в квантовій механіці не має фізичного змісту. Щоб визначити стан мікрочастинки в квантовій механіці вводиться хвильова функція Ψ , яка залежить від координат і часу: $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$.

Поняття хвильової функції було введено німецьким фізиком М. Борн у 1926 р. на підставі дослідів дифракції електронів. Він припустив, що за хвильовим законом змінюється величина $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$, яка називається амплітудою ймовірності, або хвильовою функцією. Він стверджував, що ймовірність знаходження електрона в даній точці пропорційна квадрату хвильової функції. Тобто, стан мікрочастинки описується хвильовою функцією і має статистичний, ймовірнісний характер.

Квадрат модуля хвильової функції, помножений на елементарний об'єм dV дорівнює ймовірності знаходження мікрочастинки в момент часу t в середині об'єму dV :

$$d\omega = |\Psi|^2 dV = \Psi \cdot \Psi^* dV,$$

де Ψ^* - функція, комплексно спряжена з Ψ .

Таким чином, фізичний зміст має не сама хвильова функція Ψ , а квадрат її модуля $|\Psi|^2$, так як він має зміст густини ймовірності, тобто визначає ймовірність знаходження мікрочастинки в елементарному об'ємі dV :

$$|\Psi|^2 = \frac{d\omega}{dV}.$$

Відповідно ймовірність знаходження мікрочастинки в скінченному об'ємі V в момент часу t згідно з теоремою додавання ймовірностей, дорівнює

$$\omega = \int_V d\omega = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

Analogically to the wave the wave function Ψ can be considered as the amplitude of possibility, and a square of its modulus $|\Psi|^2$ determines the intensity of de Broglie wave, which corresponds to a certain microparticle.

Since the microparticle must be located somewhere in space, the wave function Ψ must satisfy the normalization condition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \Psi^* dV = 1.$$

This formula means that the existence of a microparticle in space and time is a reliable event, the probability of which is equal to one.

The wave function must be finite, unambiguous and continuous.

The wave function satisfies the principle of superposition:

if there are different states of the system with wave functions Ψ_i , then there may be a state with a function Ψ that is a linear combination of these functions:

$$\Psi = \sum_i c_i \Psi_i,$$

where c_i are some complex numbers.

Addition of the wave functions Ψ_i (probability amplitudes) rather than square modulus of the wave function (probability) principally distinguishes quantum mechanics from the principles of classical statistic theory in which the probability summation theorem holds.

The average values of physical quantities are calculated with the help of the wave function in quantum mechanics. For example, we can find the average distance of an electron from a nucleus in an atom:

$$\bar{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int r |\Psi|^2 dV.$$

По аналогії з хвилею хвильову функцію Ψ можна розглядати як амплітуду ймовірності, а квадрат її модуля $|\Psi|^2$ визначає інтенсивність хвилі де Бройля, яка відповідає певній мікрочастинці.

Так як мікрочастинка повинна знаходитись десь у просторі, то хвильова функція Ψ повинна задовольняти умові нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \Psi^* dV = 1.$$

Ця формула означає, що існування мікрочастинки в просторі і часі є достовірною подією, ймовірність якої дорівнює одиниці.

Хвильова функція повинна бути скінченною, однозначною і неперервною.

Хвильова функція задовольняє принцип суперпозиції: якщо існують різні стани системи з хвильовими функціями Ψ_i , то може існувати стан з функцією Ψ , яка є лінійною комбінацією цих функцій:

$$\Psi = \sum_i c_i \Psi_i,$$

де c_i - деякі комплексні числа.

Складання хвильових функцій Ψ_i (амплітуд ймовірності), а не квадратів модулів хвильових функцій (ймовірностей) принципово відрізняє квантову механіку від принципів класичної статистичної теорії, в якій справедлива теорема складання ймовірностей.

За допомогою хвильової функції у квантовій механіці обчислюють середні значення фізичних величин. Наприклад, можна знайти середню відстань електрона від ядра в атомі:

$$\bar{r} = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi|^2 dV.$$

6.2.4 Schrödinger's Equation

In classical mechanics the motion of a body is described by Newton's laws. Since microparticles have wave properties, in quantum mechanics their motion is described by other equations.

The basic equation of quantum mechanics was formulated by the Austrian physicist Schrödinger in 1926 on the basis of ideas about the wave motion of an electron in an atom. This motion must be defined by the wave equation, which Schrodinger wrote as

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = U\Psi - E\Psi,$$

where $\hbar = h/2\pi$ is Plank's constant;

m is the mass of the particle;

Δ is Laplass operator;

$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ is the wave function;

U is potential energy of the microparticle;

i is the imaginary unit.

This equation is called the general Schrödinger's equation.

The Schrödinger's equation, like all the basic equations of physics, is not deduced but postulated. The Schrödinger's equation holds for any particle moving at a low velocity $v \ll c$. Mathematically, it is a linear differential equation with partial derivatives. Such an equation has many solutions, and that linear combination of any set of solutions of the equation will also be a solution of the equation.

For the case when the potential energy U doesn't depend on the time t the stationary Schrödinger's equation is used:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

where E is the total energy of the microparticle;

$\Psi = \Psi(x, y, z)$ is the wave function.

6.2.4 Рівняння Шредингера

В класичній механіці рух тіла описується законами Ньютона. Так як мікрочастинки мають хвильові властивості, то в квантовій механіці їх рух описують іншими рівняннями.

Основне рівняння квантової механіки було сформульоване австрійським фізиком Шредингером в 1926 році на підставі уявлень про хвильовий рух електрона в атомі. Такий рух повинен визначатись хвильовим рівнянням, яке Шредингер записав у вигляді:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ стала Планка,

m - маса частинки,

Δ - оператор Лапласа,

$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ - хвильова функція,

$U = U(x, y, z, t)$ – потенціальна енергія мікрочастинки

i – уявна одиниця.

Це рівняння називається загальним рівнянням Шредингера.

Рівняння Шредингера, як і усі основні рівняння фізики не виводиться, а постулюється. Рівняння Шредингера справедливе для будь-якої частинки, яка рухається з малою швидкістю $v \ll c$. Математично воно уявляє собою лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними. Таке рівняння має багато розв'язків, таких, що лінійна комбінація будь-якої сукупності розв'язків рівняння також буде розв'язком рівняння.

Для випадку, коли потенціальна енергія U не залежить від часу t , застосовують стаціонарне рівняння Шредингера :

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

де E – повна енергія мікрочастинки,

$\psi = \psi(x, y, z)$ – хвильова функція.

The Schrödinger's equation has solutions at certain values of energy E_n , which are called their own energies and correspond to the stationary states. The wave functions ψ_n corresponding to these values of energy are also called own functions. The own values of energy E_n can form both a continuous and a discrete series. Depending on this, we speak of a continuous or continuous spectrum, respectively.

Schrödinger's equation allows to find the wave function $\Psi(x, y, z, t)$ and its change over the time and thus determine the state of microparticle at any moment of time.

At their significance Schrödinger's equation in quantum mechanics is analogous to the fundamental law of classical mechanics - Newton's second law. The validity of the Schrödinger equation is confirmed by the experimental results of many experiments.

6.2.5 Motion of a Free Particle and its Energetic Spectrum

A particle is called free if its motion isn't limited in space and if its potential energy doesn't depend upon coordinates $U = 0$. In this case the total energy E of the particle coincides with the kinetic one.

The stationary Schrödinger's equation for a free particle is

$$\Delta\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0,$$

as

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2,$$

then

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0.$$

The partial solution of this differential equation for a particle, that moves along x axes is a function:

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

where A and B are constants; k is a wave number.

Рівняння Шредінгера має рішення при певних значеннях енергії E_n , які називаються власними і відповідають стаціонарним станам. Хвильові функції ψ_n , які відповідають цим значенням енергії, також називаються власними функціями. Власні значення енергії E_n можуть утворювати як неперервний, так і дискретний ряд. В залежності від цього говорять про неперервний або суцільний спектр відповідно.

Рівняння Шредінгера дає змогу знайти хвильову функцію $\Psi(x, y, z, t)$, її зміну в часі і таким чином визначити стан мікрочастинки в будь-який момент часу.

За своїм значенням рівняння Шредінгера в квантовій механіці є аналогом основного закону класичної механіки – другого закону Ньютона. Справедливість рівняння Шредінгера підтверджується експериментальними результатами багатьох дослідів.

6.2.5 Рух вільної частинки і її енергетичний спектр

Частинка називається вільною, якщо її рух не обмежується у просторі і її потенціальна енергія дорівнює нулю $U = 0$. У цьому випадку повна енергія E частинки співпадає з кінетичною.

Стаціонарне рівняння Шредінгера для вільної частинки набуває вигляду:

$$\Delta\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0,$$

так як

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2,$$

То

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0.$$

Частковим розв'язком цього диференційного рівняння для частинки, яка рухається вздовж осі x є функція:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

де A і B - сталі; k – хвильове число.

The general solution of the Schrödinger equation can be obtained if the function $\psi(x)$ is multiplied by $e^{-i(\frac{E}{\hbar})t}$:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = Ae^{i\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)} + Be^{-i\left(kx + \frac{E}{\hbar}t\right)},$$

as
$$\frac{E}{\hbar} = \omega,$$

then

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}.$$

The function $\Psi(x,t)$ is a superposition of two plane monochromatic waves with the same frequency ω , which spread in opposite directions.

From the equation $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$ we find that the particle energy is

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \frac{P_x^2}{2m}.$$

From this equation it can be seen that the energy of the free particle is a quadratic function of the wave number k . It depends on its impulse as in classical mechanics and can take arbitrary values. The graph of relationship $E = f(k)$ for a free particle is shown in Fig.6.7.

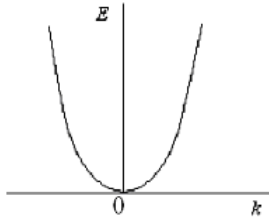


Figure 6.7

Thus, the energy of a free particle can acquire arbitrary values, that is, its energy spectrum is continuous.

Загальний розв'язок рівняння Шредингера можна отримати,

якщо функцію $\psi(x)$ помножити на $e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}$:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = Ae^{i\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)} + Be^{-i\left(kx + \frac{E}{\hbar}t\right)},$$

так як $\frac{E}{\hbar} = \omega$,

то

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}.$$

Функція $\Psi(x,t)$ уявляє собою суперпозицію двох плоских монохроматичних хвиль однакової частоти ω , що розповсюджуються в протилежних напрямках.

З рівняння $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$ знаходимо, що енергія частинки дорівнює

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{P_x^2}{2m}.$$

З цього рівняння видно, що енергія вільної частинки є квадратичною функцією хвильового числа k . Вона залежить від її імпульсу так, як і в класичній механіці і може набувати довільні значення. Графік залежності $E=f(k)$ для вільної частинки наведено на рис.6.7.

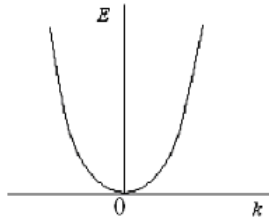


Рисунок 6.7

Таким чином, енергія вільної частинки може набувати довільних значень, тобто її енергетичний спектр є неперервний.

6.2.6 Particle in One-Dimensional Infinitely Deep Potential Well

Let's consider the motion of the particle in a potential field, which is determined by the function

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l \\ \infty, & x > l \end{cases}$$

and looks like an infinitely deep potential well (Fig.6.8.).

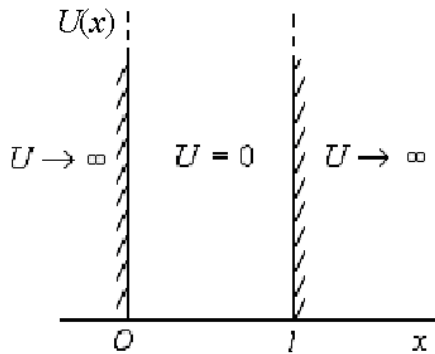


Figure 6.8

The movement of the particle in this case is limited in space and occurs only within a potential well, it can't go out its borders. We use the stationary Schrödinger's equation to describe the motion of a particle in a one-dimensional well:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

As the particle moves only within the segment Ol , the probability of its existence and wave function ψ outside this interval is zero. Under the condition of continuity of the wave function at the boundaries of the potential well, it must turn into zero. Thus, we have the boundary conditions as

6.2.6 Частинка в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі

Розглянемо рух частинки в потенціальному полі, яке визначається функцією:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l \\ \infty, & x > l \end{cases}$$

і має вигляд нескінченно глибокої потенціальної ями (рис.6.8.).

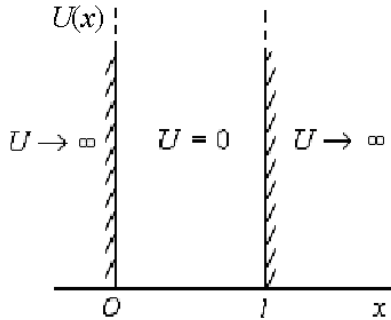


Рисунок 6.8

Рух частинки в цьому випадку обмежений в просторі і відбувається тільки в межах потенціальної ями, за границі якої вийти вона не може.

Застосуємо стаціонарне рівняння Шредінгера для описання руху частинки в одновимірній потенціальній ямі:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Так як частинка рухається тільки в межах відрізка Ol , то ймовірність її існування і хвильова функція ψ за межами цього відрізка дорівнюють нулю. За умови неперервності хвильової функції на границях потенціальної ями вона повинна перетворюватись в нуль. Отже, маємо граничні умови у вигляді:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

The Schrödinger's equation within borders of the potential well is written in the form

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

or

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0,$$

where

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E.$$

The total solution of this differential equation is

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

From the first boundary condition $\psi(0) = 0$ we obtain $B = 0$.

Thus,

$$\psi(x) = A \sin kx.$$

Let's use the second boundary condition $\psi(l) = 0$, then

$$\psi(l) = A \sin kl = 0,$$

$$kl = n\pi,$$

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Let's find the own values of the particle energy that satisfy the Schrödinger's equation:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2, \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Therefore, the energy of a particle moving in a potential well acquires only discrete values, i.e. it is quantized. The number n determines the energy levels E_n of the particle and is a principal quantum number.

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Рівняння Шредінгера в границях потенціальної ями запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

або

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0,$$

де

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння :

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

З першої граничної умови $\psi(0) = 0$ отримаємо, що $B = 0$.

Отже,

$$\psi(x) = A \sin kx.$$

Застосуємо другу граничну умову $\psi(l) = 0$, тоді

$$\psi(l) = A \sin kl = 0,$$

$$kl = n\pi,$$

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Знайдемо власні значення енергії частинки, які задовольняють рівняння Шредінгера:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2, \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Отже, енергія частинки, що рухається в потенціальній ямі, набуває лише дискретні значення, тобто квантується. Число n визначає енергетичні рівні E_n частинки і є головним квантовим числом.

Taking into account k , the wave function is

$$\psi = A \sin \frac{n\pi}{l} x .$$

The A constant may be determined with the help of normalization condition:

$$\int_0^l A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1,$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}} .$$

Consequently,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

The graphs of this function are represented in Fig.6.9a. Accordingly, Fig. 6.9b shows the probability density of the particle location within the potential well.

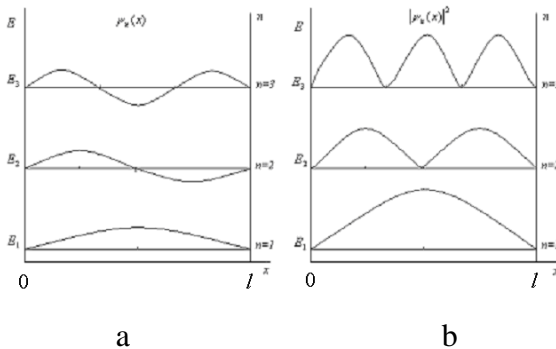


Figure 6.9

From these graphs it follows that the probability of the particle location in different places of the segment Ol is different. With increasing quantum number n , the number of maxima in Fig.6.9b increases, the probability of a particle being within the potential well is almost the same as for a quantum particle.

З урахуванням k , хвильова функція

$$\psi = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Стала A може бути визначена за допомогою умови нормалізації:

$$\int_0^l A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1,$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Графіки цієї функції зображені на рис.6.9а. Відповідно, на рис.6.9б надана густина ймовірності знаходження частинки в межах потенціальної ями.

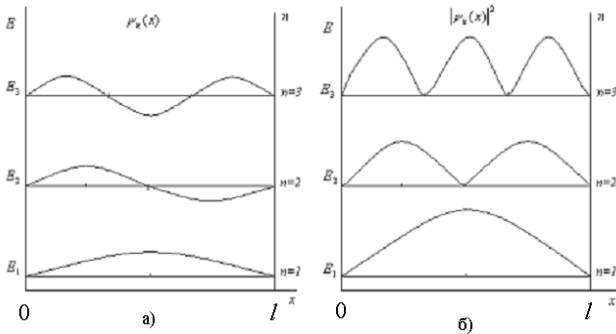


Рисунок 6.9

З цих графіків випливає, що ймовірність перебування частинки в різних місцях відрізка Ol є різною. Із зростанням квантового числа n , число максимумів на рис. 6.9б збільшується і ймовірність перебування частинки в межах потенціальної ями стає практично однаковою, як для квантової частинки.

The energy difference between neighboring energy levels is:

$$\Delta E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1).$$

With large quantum numbers relative portion of this difference is

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \ll 1$$

the denser are the energy levels the larger is n . That is, the energy spectrum becomes almost continual.

Presented results correspond to the Bohr's correspondence principle, according to which the laws of quantum mechanics at large quantum numbers are transferred into the laws of classical physics.

6.2.7 Tunneling the Particle Through a Potential Barrier. Tunnel Effect

Let's consider the motion of a particle along the Ox axis in the potential field determined by the function:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & x > l \end{cases}$$

and has a form of a rectangular potential barrier of height U and width l (Fig.6.10):

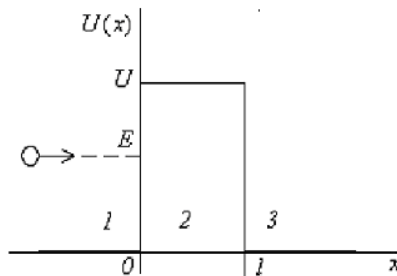


Figure 6.10

Різниця енергій між сусідніми енергетичними рівнями дорівнює:

$$\Delta E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1).$$

При великих квантових числах відносна частина цієї різниці

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \ll 1$$

і енергетичні рівні розміщені тим густіше, чим більше n . Тобто енергетичний спектр стає практично неперервним.

Наведенні результати відображають принцип відповідностей Бора, згідно з яким закони квантової механіки при великих значеннях квантових чисел переходять в закони класичної фізики.

6.2.7 Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Тунельний ефект

Розглянемо рух частинки вздовж осі Ox в потенціальному полі, яке визначається функцією:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & x > l \end{cases}$$

і має вигляд прямокутного потенціального бар'єра висоти U і ширини l (рис.6.10).

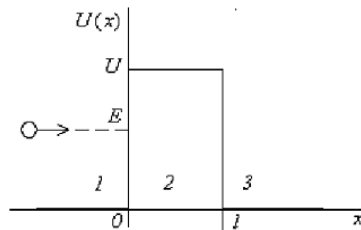


Рисунок 6.10

According to the laws of classical mechanics, a particle can only be found where the potential energy U is less than its total energy E . This is due to the fact that the kinetic energy of the particle must always be a positive value:

$$E_k = E - U > 0.$$

That is, a classical particle with energy $E < U$ can move in region 1 or 3. It cannot be in region 2. If the particle moves along the positive direction of the Ox axis, it will not pass through the potential barrier and will be reflected from it. If $E > U$, then the particle will pass over the barrier. But for a microparticle quantum mechanics gives a completely different result. At $E < U$, the particle is likely to pass through the potential barrier, and at $E > U$, the particle is likely to get away from the potential barrier.

Let's write the Schrodinger's equation for every of three regions of the potential field:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + k_3^2 \psi_3 &= 0,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}k_1^2 = k_3^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ for region 1,3;} \\ k_2^2 &= \frac{2m(E-U)}{\hbar^2} \text{ for region 2.}\end{aligned}$$

The total solution of the Schrödinger's equation for different regions is wave functions:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}, \\ \psi_3(x) &= A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x}.\end{aligned}$$

Згідно із законами класичної механіки, частинка може знаходитись тільки там, де потенціальна енергія U менша від її повної енергії E . Це обумовлено тим, що кінетична енергія частинки завжди має бути додатною величиною:

$$E_k = E - U > 0.$$

Тобто, класична частинка з енергією $E < U$ може рухатись в ділянці 1 або 3. В ділянці 2 вона знаходиться не може. Якщо частинка рухається вздовж позитивного напрямку осі Ox , то вона не пройде крізь потенціальний бар'єр і відіб'ється від нього. Якщо $E > U$, то частинка пройде над бар'єром. Але для мікрочастинки квантова механіка дає зовсім інший результат. При $E < U$ існує ймовірність того, що частинка пройде крізь потенціальний бар'єр, а при $E > U$ існує ймовірність того, що частинка відіб'ється від потенціального бар'єра.

Запишемо рівняння Шредінгера для кожної з трьох областей потенціального поля:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + k_3^2 \psi_3 = 0,$$

де $k_1^2 = k_3^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ для області 1, 3;

$$k_2^2 = \frac{2m(E-U)}{\hbar^2} \quad \text{для області 2.}$$

Загальним розв'язок рівняння Шредінгера для різних областей є хвильові функції:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x},$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x}.$$

The total wave function for every region is:

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x) \cdot e^{-\frac{E}{\hbar}t} = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + B_1 e^{-i(k_1 x + \omega t)},$$

$$\Psi_2(x, t) = \psi_2(x) \cdot e^{-\frac{E}{\hbar}t} = A_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} + B_2 e^{-i(k_2 x + \omega t)},$$

$$\Psi_3(x, t) = \psi_3(x) \cdot e^{-\frac{E}{\hbar}t} = A_3 e^{i(k_3 x - \omega t)} + B_3 e^{-i(k_3 x + \omega t)}.$$

These equations are the result of superposition of two waves that are spreading in opposite directions.

The graph of the wave function in different regions is shown in Fig.6.11:

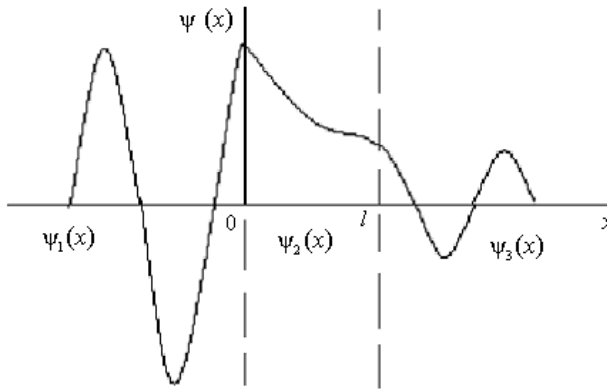


Figure 6.11

Analysis of this graph shows, that the wave function in region 2 doesn't equal zero, and in region 3 has the form of a de Broglie wave with the same impulse but with the smaller amplitude. If energy of microparticle $E < U$ then there is a probability of passing through the potential barrier. The phenomenon of a microparticle passing through the potential barrier is called the tunnel effect.

Calculations prove that the probability of passing of a microparticle through a potential barrier is determined by the formula:

Повна хвильова функція для кожної області має вигляд:

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + B_1 e^{-i(k_1 x + \omega t)},$$

$$\Psi_2(x, t) = \psi_2(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = A_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} + B_2 e^{-i(k_2 x + \omega t)},$$

$$\Psi_3(x, t) = \psi_3(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = A_3 e^{i(k_3 x - \omega t)} + B_3 e^{-i(k_3 x + \omega t)}.$$

Ці рівняння є результатом суперпозиції двох хвиль, які розповсюджуються в протилежних напрямках.

Графік хвильової функції для різних областей зображений на рис. 6.11:

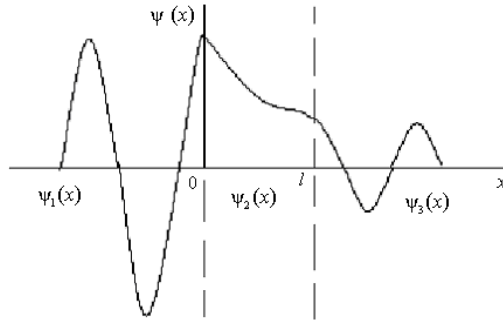


Рисунок 6.11

Аналіз цього графіку показує, що хвильова функція в області 2 не дорівнює нулю, а в області 3 має вигляд хвилі де Бройля з тим самим імпульсом, але з меншою амплітудою. Отже, якщо енергія частинки $E < U$, то існує відмінна від нуля ймовірність проходження її крізь потенційний бар'єр. Явище проходження частинки крізь потенційний бар'єр називається тунельним ефектом.

Обчислення доводять, що ймовірність проходження мікрочастинки крізь потенціальний бар'єр визначається за формулою:

$$\omega = \exp \left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \right].$$

The basis of the theory of tunnel transitions is formed by Soviet scientists L. Mandelishtam and M. Leontovich. The tunnel effect occurs in contact phenomena, cold electron field emission from metals, α -radioactive decay and other phenomena. The phenomenon of the tunnel effect lies in the principle of work of tunnel diodes, a tunnel electron microscope.

6.2.8 Hydrogen Atom in Quantum Mechanics

In quantum mechanics the Schrödinger's equation is used to determine the energy levels of an electron in a hydrogen atom. Its solution is a wave function ψ .

The electron moves in the hydrogen atom around the nucleus in the potential field of Coulomb's force:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2},$$

Let's find the potential energy interaction of the electron and the nucleus:

$$\begin{aligned} dU &= -Fdr, \\ dU &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} dr, \\ U &= \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} dr = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

We use the Schrödinger's equation to find out the electron state in the atom:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

The Schrödinger's equation has a solution only with own values of energy of the electron:

$$\omega = \exp \left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \right].$$

Основи теорії тунельних переходів розроблені радянськими вченими Л. Мандельштамом і М. Леонтовичем. Тунельний ефект відбувається в контактних явищах, при холодній емісії електронів з металів, явищах радіоактивного α -розпаду та інших. Явище тунельного ефекту лежить в основі роботи тунельних діодів, тунельного електронного мікроскопа.

6.2.8 Атом водню в квантовій механіці

В квантовій механіці для визначення енергетичних рівнів електрона в атомі водню застосовується рівняння Шредингера, розв'язком якого є хвильова функція ψ .

В атомі водню електрон рухається навколо ядра в потенціальному полі кулонівської сили:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2}.$$

Визначимо потенціальну енергію взаємодії електрона з ядром:

$$\begin{aligned} dU &= -Fdr, \\ dU &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} dr, \\ U &= \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} dr = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

Застосуємо стаціонарне рівняння Шредингера для визначення стану електрона в атомі:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

Рівняння Шредингера має рішення тільки при власних значеннях енергії електрона:

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.9)$$

where n is the principal quantum number.

The discreteness of energy levels is the result of the solution of the Schrödinger's equation. Obtained own values of energy coincide with the results that are given earlier in Bohr's theory.

The state with $n = 1$ is the base state of an electron. If $n > 1$, these are excited states.

The formula (6.9) gives directly the energy values of the allowed stationary states (Fig.6.12).

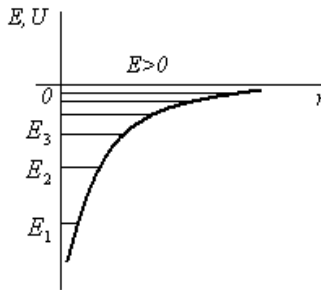


Figure 6.12

The upper level when $n = \infty$ corresponds to a state at which the electron is completely removed from the atom (i.e. $E = 0, r = \infty$) and becomes free. Region $E > 0$ corresponds to the ionized atom. The energy of ionization of the hydrogen atom is

$$E_1 = -\frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} = -13.55 \text{ eV.}$$

6.2.9 Quantum Numbers

The solution of the Schrödinger's equation for the hydrogen atom shows that the state of the electron in the atom is determined by four quantum numbers: the principal quantum number n , the orbital l , the magnetic m_l , and the magnetic spin quantum number m_s .

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.9)$$

де n - головне квантове число.

Дискретність енергетичних рівнів є результатом рішення рівняння Шредингера. Одержані власні значення енергії збігаються зі значеннями, наведеними раніше в теорії Бора.

Стан електрона, який відповідає $n = 1$, є основним станом. Якщо $n > 1$, то такий стан є збудженим.

За формулою (6.9) обчислюється значення енергії дозволених стаціонарних станів (рис.6.12).

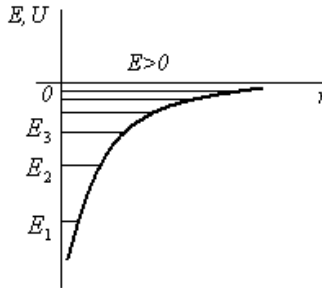


Рисунок 6.12

Верхній рівень, при $n = \infty$ відповідає стану, в якому електрон повністю віддаляється від атома і стає вільним (тобто, $E = 0, r = \infty$). Область $E > 0$ відповідає іонізованому атому. Енергія іонізації атома водню дорівнює:

$$E_1 = -\frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} = -13,55 \text{ eV.}$$

6.2.9 Квантові числа

Розв'язок рівняння Шредингера для атома водню показує, що стан електрона в атомі визначається чотирма квантовими числами: головним n , орбітальним l , магнітним m_l і магнітним спіновим m_s .

1. The principal quantum number n determines energy levels of the electron in the atom. The electron in the hydrogen atom has a discrete energy spectrum and own values of energy of the electron depend mainly upon this number:

$$E_n = -\frac{me^4Z^2}{8\epsilon_0^2h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

where n can only be equal to integer: $n = 1, 2, 3, \dots$

2. The orbital quantum number l determines moment of impulse L of an electron in an atom, which is determined by the formula:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}. \quad (6.10)$$

The moment of impulse of the electron L takes only discrete values multiple to \hbar i.e. quantizes. This is the difference between classical and quantum mechanics. The value of l at given n can be equal to 0, 1, 2, ... $(n-1)$, that is, n total values. Numerical values of l are denoted by letters as shown in Table 6.1.

Table 6.1

n	l	Notations
1	0	s
2	0, 1	s, p
3	0, 1, 2	s, p, d
4	0, 1, 2, 3	s, p, d, f

Accordingly, the electron may be denoted as $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d\dots$

3. The magnetic quantum number m_l determines the projection of an electron moment of impulse in a given direction of the external magnetic field.

An electron moving in orbit in an atom has an orbital magnetic moment \vec{p}_m in addition to the orbital momentum of impulse. There is the following relationship between them:

1. Головне квантове число n визначає енергетичні рівні електрона в атомі. Електрон в атомі водню має дискретний енергетичний спектр і власні значення енергії електрона залежать тільки від головного квантового числа:

$$E_n = \frac{me^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

де n може набувати тільки цілочислових значень $n = 1, 2, 3 \dots$

2. Орбітальне квантове число l визначає момент імпульсу електрона в атомі, який обчислюють за формулою:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (6.10)$$

Момент імпульсу електрона L набуває тільки дискретних значень, кратних \hbar , тобто квантується. В цьому полягає різниця між класичною і квантовою механікою. Величина l при заданому n набуває значень $l = 0, 1, 2 \dots (n-1)$, тобто всього n значень. Значення l позначають символами, які показано в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

n	l	Позначення
1	0	s
2	0, 1	s, p
3	0, 1, 2	s, p, d
4	0, 1, 2, 3	s, p, d, f

Відповідно, електрон може бути позначений як $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d \dots$

3. Магнітне квантове число m_l визначає проекцію моменту імпульсу електрона на заданий напрямок зовнішнього магнітного поля.

Електрон, який рухається по орбіті в атомі, крім орбітального моменту імпульсу має ще і орбітальний магнітний момент \vec{p}_m . Між ними існує таке співвідношення:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L} = -g\vec{L}, \quad (6.11)$$

where $g = e / 2m$ is the gyromagnetic ratio of the orbital moments.

The vectors \vec{p}_m and \vec{L} are opposite in direction.

Given formula (6.10), the relation (6.11) can be written in the following form:

$$p_m = \frac{e}{2m}\hbar\sqrt{l(l+1)} = \mu_B\sqrt{l(l+1)},$$

where $\mu_B = \frac{e}{2m}\hbar$ is called a Bohr's magneton.

A space quantization occurs in quantum physics. The vector \vec{L} of the momentum of the electron can have only such an orientation, at which its projection to the direction Z of the external magnetic field acquires discrete values, multiples of \hbar :

$$L_z = \hbar \cdot m_l.$$

The magnetic quantum number m_l at given l possesses integer values from zero to $\pm l$:

$$m_l = \pm 1, \pm 2 \dots \pm l.$$

There are $2l + 1$ values of the magnetic quantum number m_l at given l . Fig. 6.13 shows the possible orientations of the vector L_z for electrons at $l = 2$.

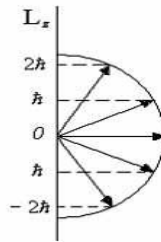


Figure 6.13

If the atom is placed in an external magnetic field new energy levels occur and the splitting of spectral lines in the atom spectrum is observed. The level with main quantum number n is split into $2l+1$ sublevels. This phenomenon was discovered by the Dutch physicist P. Zeeman in 1896 and it is called the Zeeman effect.

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L} = -g\vec{L}, \quad (6.11)$$

де $g = e / 2m$ – гіромагнітне відношення орбітальних моментів.

Вектори \vec{p}_m і \vec{L} протилежні за напрямком.

З урахуванням формули (6.10), співвідношення (6.11) можна записати у такому вигляді:

$$p_m = \frac{e}{2m}\hbar\sqrt{l(l+1)} = \mu_B\sqrt{l(l+1)},$$

де $\mu_B = \frac{e}{2m}\hbar$ – називається магнетоном Бора.

У квантовій фізиці відбувається просторове квантування. Вектор \vec{L} моменту імпульсу електрона може мати лише таку орієнтацію, при якій його проекція на напрямок Z зовнішнього магнітного поля набуває дискретних значень, кратних \hbar :

$$L_z = \hbar \cdot m_l.$$

Магнітне квантове число m_l при заданому l набуває значень від нуля до $\pm l$:

$$m_l = \pm 1, \pm 2 \dots \pm l.$$

Всього магнітне квантове число m_l при заданому l набуває $2l+1$ значень. На рис.6.13 наведені можливі орієнтації вектора L_z для електронів у випадку $l = 2$.

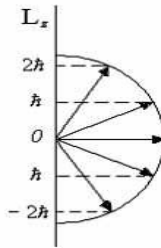


Рисунок 6.13

Якщо атом розмістити в зовнішньому магнітному полі, то виникає розщеплення спектральних ліній в атомному спектрі. Рівень з головним квантовим числом n розщеплюється на $2l+1$ підрівнів. Це явище було виявлено голландським фізиком П. Зеєманом у 1896 р. і отримало назву ефект Зеємана.

4. The magnetic spin quantum number m_s determines the projection of the electron's own impulse at a given direction of the magnetic field.

In 1922, German physicists O. Stern and V. Gerlach discovered that a beam of hydrogen atoms in s -states splits into two parts in an inhomogeneous magnetic field. In this state the moment of impulse of the electron is zero, and the magnetic moment of the atom is equal to zero too. The magnetic field should not affect the hydrogen atom in this state. But the use of high-precision optical spectrometers indicated that emission lines of hydrogen have two very closely spaced lines.

To explain this result American physicists S. Godsmith and G. Uhlenbeck in 1925 assumed that the electron rotates around its axis and has its own moment of impulse L_s that is called electron spin. Due to the common laws of quantum mechanics, spin is the quantum value that is determined by the formula:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

where s is the spin quantum number.

The momentum of an electron impulse has only one value:

$$L_s = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar.$$

On the analogy of the orbital moment of impulse the projection of L_{sz} in the direction of the external magnetic field is quantized, vector \vec{L}_s can take $2s+1$ values. In O. Stern and V. Gerlach's researches there were only 2 values of orientation: $2s + 1 = 2 \Rightarrow s = 1/2$

The projection \vec{L}_s into the direction Z of the external magnetic field is quantized and is determined by the formula:

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

4. Магнітне спінове квантове число m_s визначає проєкцію власного імпульсу електрона на заданий напрямок магнітного поля.

У 1922 р. німецькі фізики О. Штерн і В. Герлах виявили, що пучок атомів водню в s -стані розщеплюється на дві частини в неоднорідному магнітному полі. У цьому стані момент імпульсу електрона дорівнює нулю і магнітний момент атома теж дорівнює нулю. Магнітне поле не повинне впливати на атом водню в цьому стані. Але використання високоточних оптичних спектрометрів показало, що спектральні лінії водню складаються з двох дуже близько розташованих ліній.

Для пояснення цього результату американські фізики С. Гаудсміт і Г. Уленбек в 1925 р. припустили, що електрон обертається навколо своєї осі і має власний момент імпульсу L_s , який називається спіном електрона. Згідно загальних законів квантової механіки, спін є квантовою величиною і визначається за формулою:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

де s - спінове квантове число.

Власний момент імпульсу електрона має лише одне значення:

$$L_s = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar.$$

За аналогією з орбітальним моментом імпульсу проєкція L_{sz} на напрямок Z квантується і вектор \vec{L}_s може набувати $2s+1$ значень орієнтації. В дослідах Штерна і Герлаха спостерігалось лише 2 значення орієнтації, тобто $2s + 1 = 2 \Rightarrow s = 1/2$.

Проєкція \vec{L}_s на напрямок Z зовнішнього магнітного поля квантується і визначається за формулою:

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

where $m_s = \pm \frac{1}{2}$ is called the magnetic spin quantum number, that gets only two values.

In this way the projection of the spin magnetic moment of impulse into the the direction of the external magnetic field gets only two values (Fig. 6.14):

$$L_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

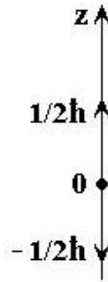


Figure 6.14

The electron also has its own magnetic moment \vec{p}_{ms} corresponding to the spin. From the experiments of O. Stern and V. Gerlach it follows that the projection \vec{p}_{msz} of the electron's own magnetic moment to the direction of the magnetic field is equal to the Bohr's magneton:

$$p_{msz} = \mu_B = \hbar \frac{e}{2m},$$

where e and m are the charge and mass of the electron, respectively. The ratio of the projections of the own magnetic moment and the own moment of the impuls is equal to:

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m} = g_s.$$

It is known that the ratio of the numerical values of the projections of vectors directed in the opposite direction is equal to the ratio of the numerical values of the vectors themselves:

де $m_s = \pm 1/2$ - магнітне спінове квантове число, яке набуває тільки двох значень.

Таким чином, проекція спінового механічного моменту імпульса на напрямок зовнішнього магнітного поля набуває тільки двох значень (рис.6.14):

$$L_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

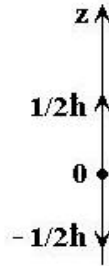


Рисунок 6.14

Електрону властивий також власний магнітний момент \vec{p}_{ms} , що відповідає спіну. З дослідів О. Штерна і В. Герлаха випливає, що проекція \vec{p}_{msz} власного магнітного моменту електрона на напрямок магнітного поля дорівнює магнетону Бора:

$$p_{msz} = \mu_B = \hbar \frac{e}{2m},$$

де e і m заряд і маса електрона відповідно.

Відношення проекцій власного магнітного моменту і власного моменту імпульсу дорівнює:

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m} = g_s.$$

Відомо, що відношення числових значень проекцій векторів, напрямлених взаємно протилежно, дорівнює відношенню числових значень самих векторів:

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{e}{m} = g_s.$$

In vector form:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_s, \quad g_s = \frac{e}{m}.$$

The value of g_s is the spin gyromagnetic ratio.

Thus, $g_s = 2g$, that is, the spin gyromagnetic ratio is twice that of the orbital gyromagnetic ratio.

6.2.10 Types of Wave Functions

The state of an electron in an atom is described by the wave function ψ , its view depends on the set of quantum numbers. The probability of an electron being placed at some distance from the nucleus is determined by the square modulus of wave function $|\Psi|^2$. The probability of location an electron at the distance r from the nucleus for the states $1s$ and $2s$ is shown in the Fig. 6.15.

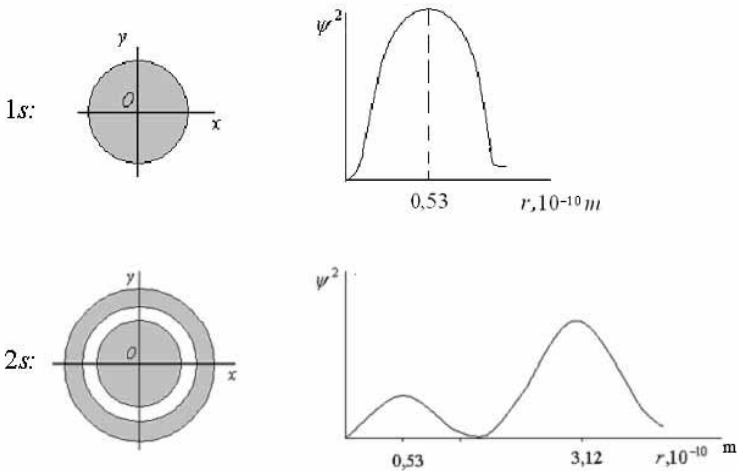


Figure 6.15

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{e}{m} = g_s.$$

У векторній формі:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_s, \quad g_s = \frac{e}{m}.$$

Величина g_s - спінове гіромагнітне відношення.

Таким чином, $g_s = 2g$, тобто спінове гіромагнітне відношення вдвічі більше за орбітальне гіромагнітне відношення.

6.2.10 Види хвильових функцій

Стан електрона в атомі описується хвильовою функцією ψ , вид якої залежить від набору квантових чисел. Ймовірність знаходження електрона на деякій відстані від ядра визначається квадратом модуля хвильової функції $|\Psi|^2$. На рис. 6.15 наведено розподіл ймовірності знаходження електрона на відстані r від ядра для $1s$ і $2s$ станів.

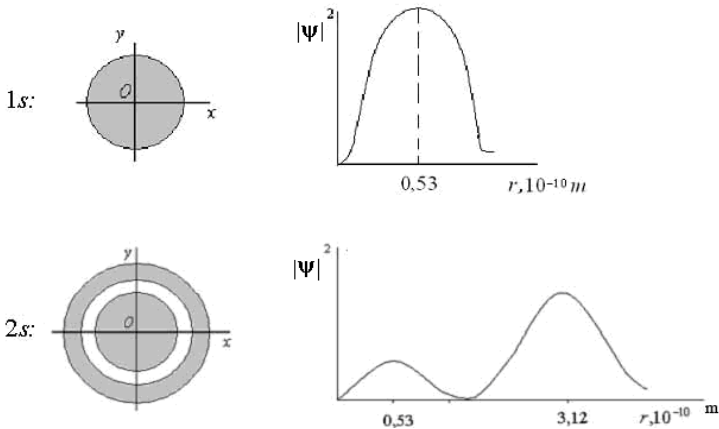


Рисунок 6.15.

For an electron in 1s state the distribution of probability has a spherical symmetry with an uneven density. The maximum probability of location of an electron is at $r_0 = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{m}$ that coincides with the Bohr's radius. For an electron in 2s state the distribution of probability has the form of two concentric spheres with two maxima.

In other states the distribution of probability is nonspherical. For example, for 2p-state electron with $l = 1$, the function $|\Psi|^2$ takes the form of eight, that orientates along the axis according to different values of the magnetic quantum number m_l (Fig.6.16).

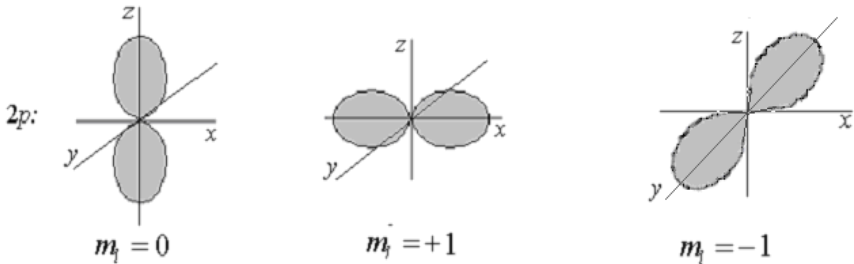


Figure 6.16

Consequently, the form of the wave function and the probability of location of an electron on distance from the nucleus is determined by the set of quantum numbers.

6.2.11 Pauli's Principle. Distribution of Electrons in Atom at States

Application of quantum mechanics for describing more complicated atom systems than the atom of hydrogen requires considering of interaction of electrons not only with the nucleus but among themselves. To solve such problems Austrian physicist W. Pauli in 1925 proposed the fundamental principle of quantum theory.

Для електрона в $1s$ стані розподіл ймовірності має сферичну симетрію з нерівномірною густиною. Максимальна ймовірність знаходження електрона відповідає відстані $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, яка співпадає з радіусом Бора.

Для електрона в $2s$ стані розподіл ймовірності має вигляд двох концентричних сфер з двома максимумами.

В інших станах розподіл ймовірності має несферичний характер. Наприклад, для електрона в $2p$ стані при $l = 1$, функція $|\Psi|^2$ має вигляд вісімки, яка орієнтована уздовж координатних вісей відповідно для різних значень магнітного квантового числа m_l (рис.6.16).

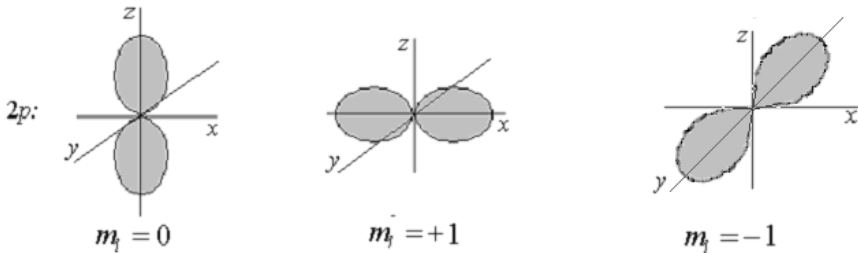


Рисунок 6.16

Таким чином, вид хвильової функції і ймовірність знаходження електрона на відстані від ядра визначається набором квантових чисел.

6.2.11 Принцип Паулі. Розподіл електронів в атомі по станах

Застосування квантової механіки для описання більш складних атомних систем ніж атом водню потребує урахування взаємодії електронів не тільки з ядром, а також і між собою. Для розв'язання таких задач австрійський фізик В. Паулі в 1925 р. запропонував фундаментальний принцип квантової теорії.

Pauli's principle states that in any atom system there can't be more than one electron with identical four quantum numbers n , l , m_l , m_s .

Based on the Pauli's principle, it is possible to calculate the maximum quantity of electrons in an atom that are located at different energetic levels, in other words in different orbits. As the magnetic quantum number at given l can have $2l + 1$ different values and taking into account that $m_s = \pm \frac{1}{2}$ a total number of electrons in the state with given main quantum number n is equal to

$$Z = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2 .$$

The community of electrons in the state with the same n value is called an electron shell. The distribution of electrons to their first four shells is shown in the Table 6.2:

Table 6.2

n	Shell	$Z=2n^2$
1	<i>K</i>	2
2	<i>L</i>	8
3	<i>M</i>	18
4	<i>N</i>	32

An electron shell consists of subshells, which correspond to a given value of the orbital quantum number l . The number of subshells equals n , as l takes values from 0 to $n-1$. The number of electrons in subshells is determined by the magnetic and magnetic spin quantum numbers and is equal to $2(2l+1)$. The distribution of electrons in the atom in shells and subshells is shown in Table 6.3:

Принцип Паулі полягає в тому, що в будь-якому атомі не може бути більш одного електрона з однаковим набором чотирьох квантових чисел n, l, m_l, m_s .

На підставі принципу Паулі можна розрахувати максимальне число електронів в атомі, які знаходяться на різних енергетичних рівнях, тобто на різних орбітах. Так як магнітне квантове число при заданому l набуває $2l+1$ значень, і взявши до уваги, що магнітне спінове квантове число набуває двох значень $m_s = \pm \frac{1}{2}$, загальна кількість електронів, що перебуває в стані зі значенням головного квантового числа n , дорівнює:

$$Z = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 .$$

Сукупність електронів, які перебувають в стані з однаковим головним квантовим числом n , називається електронною оболонкою. Розподіл електронів по першим чотирьом оболонкам і їх позначення наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

n	Оболонка	$Z=2n^2$
1	<i>K</i>	2
2	<i>L</i>	8
3	<i>M</i>	18
4	<i>N</i>	32

Електронна оболонка складається з підоболонок, які відповідають даному значенню орбітального квантового числа l . Число підоболонок дорівнює n , оскільки l приймає значення від 0 до $n-1$. Кількість електронів в підоболонках визначається магнітним і магнітним спіновим квантовими числами і дорівнює $2(2l+1)$. Розподіл електронів в атомі по оболонкам і підоболонкам наведено в табл. 6.3.

Table 6.3

n	1	2		3			4			
Shell symbol	K	L		M			N			
Max.number of electrons in shells	2	8		18			32			
Orbital quantum number l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
Subshell symbol	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$
Max.number of electrons in subshells	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14

Thus, on the basis of the Pauli's principle the periodicity of the location of the elements in Mendeleev's table can be explained.

6.2.12 Structure of Electron Shells in Mendeleev's Periodic System of Elements

In 1869, the Russian scientist D. Mendeleev proposed the periodic system of the elements, in which he arranged the chemical elements in such a way that their properties were periodically repeated as the atomic mass of the elements increased. Pauli's principle makes it possible to explain the periodicity of the arrangement of elements in the periodic table. The main parameter is the atomic number of the element Z in Mendeleev's table. It is equal to the number of protons in the nucleus or the number of electrons in an electron shell of the atom, which in the neutral atom are equal to each other.

Таблиця 6.3

n	1		2		3			4		
Символ оболонки	K		L		M			N		
Максимальне число електронів в оболонці	2		8		18			32		
Орбітальне квантове число l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
Символ підоболонки	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$
Максимальне число електронів в підоболонці	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14

Таким чином, на підставі принципу Паулі можна пояснити періодичність розташування елементів в таблиці Менделєєва.

6.2.12 Структура електронних оболонок у періодичній системі елементів Менделєєва

У 1869 р. російський вчений Д. Менделєєв запропонував Періодичну систему елементів, в якій він упорядкував хімічні елементи таким чином, що їх властивості періодично повторюються при збільшенні атомної маси елементів. Принцип Паулі дає можливість пояснити періодичність розташування елементів в таблиці Менделєєва. Основним параметром, який визначає властивості елементів є порядковий номер Z їх в таблиці Менделєєва. Він дорівнює числу протонів в ядрі абу числу електронів в електронній оболонці атома, які в нейтральному атомі дорівнюють одне одному.

So, the chemical elements are located in the periodic table depending on the structure of the electron shells in the atom. To explain it let's consider the sequence of filling electron shells in atoms.

The first element in Mendeleev's periodic table is a hydrogen atom **H** ($Z = 1$). Its electron shell consists of one electron only in $1s^1$ state ($n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \frac{1}{2}$). Electron configuration of the hydrogen atom is $1s$.

The next element is the helium atom **He** ($Z = 2$). Its electron shell consists of two electrons in $1s$ state which have antiparallel spins ($n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm \frac{1}{2}$). Electron K -shell consists of two electrons and is filled up completely. Electron configuration of the helium atom is $1s^2$.

In the atom of lithium **Li** ($Z = 3$) the electron shell consists of three electrons, two of which are in $1s$ state and have antiparallel spins, the third one is located in $2s$ state (L -shell). Electron configuration of the lithium atom is $1s^2 2s^1$.

Beryllium atom **Be** ($Z = 4$) the electronic shell consists of four electrons. Two of which fill up K -shell and they are located in $1s$ state, other two fill up L -shell and are located in $2s$ state. Electron configuration of the beryllium atom is $1s^2 2s^2$.

Further, the following six elements starting with Bohr ($Z = 5$) and till Neon ($Z = 10$) the filling of $2p$ takes place and L -shell ($n = 2$) turns out to be filled completely. Electronic configuration of these elements is the following.

B: $1s^2 2s^2 2p^1$, **C**: $1s^2 2s^2 2p^2$, **N**: $1s^2 2s^2 2p^3$, **O**: $1s^2 2s^2 2p^4$, **F**: $1s^2 2s^2 2p^5$, **Ne**: $1s^2 2s^2 2p^6$.

Filling of electron shells in other elements is analogical.

The structure of electron shells for chemical elements of the first three periods is shown in Table 6.4.

Тобто хімічні елементи розташовані в періодичній таблиці в залежності від структури електронних оболонок в атомі. Для пояснення цього розглянемо послідовність заповнення електронних оболонок в атомах.

Першим елементом в періодичній таблиці Менделєєва є атом водню **H** ($Z = 1$). Його електронна оболонка складається лише з одного електрона, який знаходиться в $1s^1$ стані ($n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \frac{1}{2}$). Електронна конфігурація атома H: $1s$.

Наступним елементом є атом гелію **He** ($Z = 2$). В ньому електронна оболонка складається з двох електронів в $1s$ стані, які мають антипаралельні спіни ($n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm \frac{1}{2}$).

Електронна K -оболонка містить два електрона і повністю зайнята. Електронна конфігурація атома He: $1s^2$.

В атомі літію **Li** ($Z = 3$) електронна оболонка складається з трьох електронів, два з яких з антипаралельними спінами знаходяться в $1s$ стані, а третій електрон розміщується на більш високому стані $2s$ (L -оболонка). Електронна конфігурація атома Li: $1s^2 2s$.

В атомі берилію **Be** ($Z = 4$) електронна оболонка складається з чотирьох електронів. Два з них заповнюють K -оболонку і знаходяться в $1s$ стані, а два інших заповнюють L -оболонку і знаходяться в $2s$ стані. Електронна конфігурація атома Be: $1s^2 2s^2$.

Далі в наступних шести елементах, починаючи з бора **B** ($Z = 5$) і до неону ($Z = 10$) відбувається забудова $2p$ станів і L -оболонка ($n = 2$) виявляється заповненою повністю. Електронна конфігурація цих елементів наступна. **B**: $1s^2 2s^2 2p^1$, **C**: $1s^2 2s^2 2p^2$, **N**: $1s^2 2s^2 2p^3$, **O**: $1s^2 2s^2 2p^4$, **F**: $1s^2 2s^2 2p^5$, **Ne**: $1s^2 2s^2 2p^6$.

Аналогічно відбувається заповнення електронних оболонок і в інших елементах.

Структура електронних оболонок для хімічних елементів перших трьох періодів наведена в табл. 6.4.

Table 6.4.

Period	Z	Element	K	L		M			N			
			1 s	2s	2p	3s	3d	3p	4s	4p	4d	4f
I	1	H	1									
	2	He	2									
II	3	Li	2	1								
	4	Be	2	2								
	5	B	2	2	1							
	6	C	2	2	2							
	7	N	2	2	3							
	8	O	2	2	4							
	9	P	2	2	5							
	10	Ne	2	2	6							
III	11	Na	2	2	6	1						
	12	Mg	2	2	6	2						
	13	Al	2	2	6	2	1					
	14	Si	2	2	6	2	2					
	15	P	2	2	6	2	3					
	16	S	2	2	6	2	4					
	17	Cl	2	2	6	2	5					
	18	Ar	2	2	6	2	6					
IV												

Atoms with the same structure of the external electron shell have the same chemical activity. For example the external electron shell of alkaline metals consists only of one *s*-electron and they show bigger chemical activity. The external electron shell of inert gases consists of eight electrons (*s* and *p*- states are filled up completely) and they show less chemical activity.

Таблиця 6.4

Період	Z	Елемент	K			L			M			N			
			1s	2s	2p	3s	3d	3p	4s	4p	4d	4f			
I	1	H	1												
	2	He	2												
II	3	Li	2	1											
	4	Be	2	2											
	5	B	2	2	1										
	6	C	2	2	2										
	7	N	2	2	3										
	8	O	2	2	4										
	9	P	2	2	5										
	10	Ne	2	2	6										
III	11	Na	2	2	6	1									
	12	Mg	2	2	6	2									
	13	Al	2	2	6	2	1								
	14	Si	2	2	6	2	2								
	15	P	2	2	6	2	3								
	16	S	2	2	6	2	4								
	17	Cl	2	2	6	2	5								
	18	Ar	2	2	6	2	6								
IV															

Атоми з однаковою структурою зовнішньої електронної оболонки мають однакоку хімічну активність. Наприклад, зовнішня електронна оболонка лужних металів складається лише з одного *s*-електрона і вони проявляють більшу хімічну активність. Зовнішня електронна оболонка інертних газів складається з восьми електронів (*s* і *p*- стани заповнені повністю) і вони проявляють меншу хімічну активність.

Periodicity is also found in the physical properties of atoms. For example, in the structure of the linear spectra of radiation. The spectra of all alkali metals have the same spectral series and differ only in the wavelengths of the spectral lines. Such regularities are characteristic of other groups of elements, due to the fact that the nature of the line spectra is determined by the radiation of electrons of the outer electron shells. The periodicity of the ionization potential of the elements is also detected. Thus, inert gases with completely filled outer shells have the highest ionization potentials. The elements to the left of them in the periodic table, with less filled shells, have lower ionization potentials by location.

So, the regularities of filling up electron shells of chemical elements explain the periodicity of their chemical and physical properties. Quantum mechanics explained the principle of structure of Mendeleev's periodic table of elements and opened the opportunities for synthesis of new elements.

Періодичність виявляється і в фізичних властивостях атомів. Наприклад, у структурі лінійчастих спектрів випромінювання. Спектри всіх лужних металів мають однакові спектральні серії і відрізняються лише довжинами хвиль спектральних ліній. Такі закономірності характерні і для інших груп елементів, що пояснюється тим, що характер лінійчастих спектрів визначається випромінюванням електронів зовнішніх електронних оболонок. Виявляється також і періодичність залежності потенціалу іонізації елементів. Так, інертні гази, у яких повністю заповнені зовнішні оболонки, мають найбільш високі іонізаційні потенціали. Елементи, що знаходяться зліва від них в періодичній таблиці, з менш заповненими оболонками, мають менші потенціали іонізації відповідно до розташування.

Таким чином, закономірності заповнення електронних оболонок хімічних елементів пояснюють періодичність їх хімічних і фізичних властивостей. Квантова механіка пояснила принципи побудови періодичної таблиці елементів Менделєєва і відкрила можливість синтезу нових елементів.

Control Questions

Elements of Atomic Physics and Quantum Mechanics

1. What are the Thomson and Rutherford atom models?
2. Formulate Bohr's postulates.
3. Explain the experiments of Franck and Hertz.
4. What are the wave properties of particles and how is the wavelength of de Broglie determined?
5. Write down and explain the Heisenberg's uncertainty principles.
6. What is a wave function and what does the square of its modulus determine?
7. Write down and explain Schrödinger's equation.
8. What is a tunnel effect?
9. What quantum numbers do you know?
10. What is the Pauli's principle and what way are electrons distributed in an atom by states?

Контрольні запитання

Елементи атомної фізики і квантової механіки

1. В чому полягають моделі атома Томсона і Резерфорда?
2. Сформулюйте постулати Бора.
3. Поясніть досліди Франка і Герца.
4. В чому полягають хвильові властивості частинок і як визначається довжина хвилі де Бройля?
5. Запишіть і поясніть співвідношення невизначеностей Гейзенберга.
6. Що таке хвильова функція і що визначає квадрат її модуля?
7. Запишіть і поясніть рівняння Шредінгера.
8. Що таке тунельний ефект?
9. Які квантові числа ви знаєте?
10. В чому полягає принцип Паулі і як розподіляються електрони в атомі по станах?

7 ELEMENTS OF SOLID STATE PHYSICS

7.1 Elements of Quantum Statistics

7.1.1 Phase Space. Function of Distribution

Quantum statistics is a part of statistic physics which deals with systems that contain a huge number of particles described by the laws of quantum mechanics.

Quantum statistics is based on the principle of non-differentiation of identical particles: we cannot experimentally distinguish two identical particles. Identical particles have the same physical properties, for example all electrons have the same mass, charge, spin. The main problem of quantum statistics is to determine the function of distribution of system particles by physical parameters such as coordinates, impulses, energies and calculate the average values of these parameters of macroscopic state of the whole system.

Let's consider the system of N particles. In order to describe this system the six-dimensional space is used with coordinate axis x, y, z, p_x, p_y, p_z . It is called the phase space. According to the uncertainty principle the elementary cell $d\tau$ of phase space is equal to

$$d\tau = dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

The volume of this elementary cell isn't less than h^3 :

$$d\tau \geq h^3.$$

The probability of system state dW may be expressed by the function of distribution f :

$$dW = f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) d\tau = f d\tau.$$

Thus, the function of distribution is the probability density of a system state:

$$f = \frac{dW}{d\tau}.$$

The function of distribution satisfies the normalization condition:

7 ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

7.1 Елементи квантової статистики

7.1.1 Фазовий простір. Функція розподілу

Квантова статистика – це розділ статистичної фізики, що розглядає системи з великою кількістю частинок, які описуються законами квантової механіки.

Квантова статистика заснована на принципі нерозрізненості тотожних частинок: не можна експериментально відрізнити дві тотожні частинки. Тотожними називаються частинки, які мають однакові фізичні властивості, наприклад, всі електрони мають однакову масу, заряд, спіні. Основна задача квантової статистики полягає у визначенні функції розподілу системи частинок за певними фізичними параметрами, такими, як координати, імпульс, енергія, а також у розрахунку середніх значень цих параметрів макроскопічного стану всієї системи.

Розглянемо систему з N частинок. Для того, щоб описати таку систему, використовується шестивимірний простір з координатами x, y, z, p_x, p_y, p_z . Він називається фазовим простором. Згідно з співвідношенням невизначеностей елементарна комірka фазового простору $d\tau$ дорівнює:

$$d\tau = dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

Об'єм цієї елементарної комірki не може бути менший від h^3 :

$$d\tau \geq h^3.$$

Ймовірність стану системи dW можна виразити за допомогою функції розподілу f :

$$dW = f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) d\tau = f d\tau.$$

Отже, функція розподілу – це густина ймовірності стану системи:

$$f = \frac{dW}{d\tau}.$$

Функція розподілу задовольняє умові нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\tau = 1.$$

With the help of the function of distribution we can determine the average values of macro system parameters.

7.1.2 Quantum Statistics of Fermi-Dirac and Bose-Einstein

If particles obey the principle of Pauli then the quantum statistics of Fermi-Dirac is used to describe the ideal gas of these particles. Such particles are called fermions and the ideal gas of fermions is Fermi-gas. Fermions are individualists, as in a quantum state there may be no more than one particle. The function of distribution of fermions according to their states is called Fermi-Dirac's function of distribution:

$$f_{F-D} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1},$$

where E is energy; μ is the chemical potential; k is the Boltzmann constant; T is absolute temperature.

The distribution function f_{F-D} is equal to the average number of fermions which are in the state with energy E .

The chemical potential μ is equal to work that is required to increase the number of system particles per unit at given conditions:

$$\mu = \frac{U - TS + pV}{N},$$

where U is internal system energy, S is entropy, T is absolute temperature, p is pressure, V is system volume, N is amount of particles.

The graph of the Fermi-Dirac function of distribution is shown in Fig.7.1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\tau = 1.$$

За допомогою функції розподілу можна розрахувати середні значення параметрів макросистеми.

7.1.2 Квантова статистика Фермі-Дірака і Бозе-Ейнштейна

Якщо частинки задовольняють принципу Паулі, то ідеальний газ таких частинок описується квантовою статистикою Фермі-Дірака. Такі частинки називаються ферміонами, а ідеальний газ ферміонів є фермі-газ. Ферміони є індивідуалістами, так як в даному квантовому стані не може бути більше одної частинки. Функція розподілу ферміонів по їх станам називається функцією розподілу Фермі-Дірака:

$$f_{\phi-d} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1},$$

де E – енергія; μ - хімічний потенціал; k - стала Больцмана; T – абсолютна температура.

Функція розподілу $f_{\phi-d}$ дорівнює середньому числу ферміонів, що знаходяться в стані з енергією E .

Хімічний потенціал μ дорівнює роботі, яку необхідно виконати для збільшення кількості частинок системи на одиницю за даних умов:

$$\mu = \frac{U - TS + pV}{N},$$

де U – внутрішня енергія системи, S - ентропія, T – абсолютна температура, P - тиск, V – об'єм системи, N – кількість частинок в системі.

Графік функції розподілу Фермі-Дірака зображено на рис.7.1:

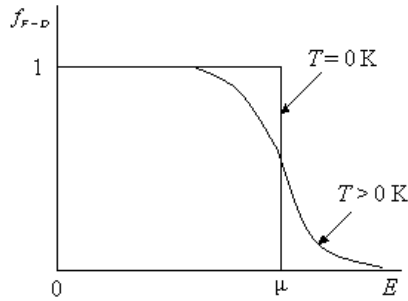


Figure 7.1

The Fermi – Dirac distribution function at absolute zero temperature $T = 0$ K:

$$\begin{cases} f_{F-D} = 1, E < \mu \\ f_{F-D} = 0, E > \mu \end{cases}.$$

All states with energy $E < \mu$ are filled with fermions and states with energy $E > \mu$ are free. The graph is blurred in the area $E = \mu$ when temperature increases $E > 0$ K as a result of thermal excitation.

If particles aren't subordinated to Pauli's principle the Bose-Einstein quantum statistics is used to describe its ideal gas. These particles are called bosons and their ideal gas is called bose-gas.

The distribution of bosons as per states is called Bose-Einstein distribution function:

$$f_{B-E} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} - 1}.$$

Bosons are collectivists as in given quantum states there may be more than one particle. It means that the number of particles may be arbitrary.

Fermi-gas and bose-gas are described by quantum statistic. Their properties are significantly different from classic ideal gas and therefore they are degenerated.

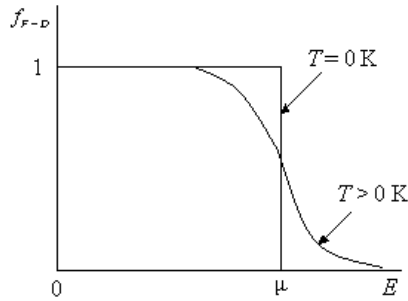


Рисунок 7.1

При абсолютному нулі $T = 0$ К функція розподілу Фермі-Дірака:

$$\begin{cases} f_{\Phi-D} = 1, E < \mu \\ f_{\Phi-D} = 0, E > \mu \end{cases}$$

Всі стани з енергіями $E < \mu$ заповнені ферміонами, а стани з енергіями $E > \mu$ - вільні. З підвищенням температури $T > 0$ К внаслідок теплового збудження графік розмивається в області $E = \mu$.

Якщо частинки не підпорядковуються принципу Паулі, то їх ідеальний газ описується квантовою статистикою Бозе-Ейнштейна. Такі частинки називаються бозонами, а їх ідеальний газ – бозе-газом.

Розподіл бозонів по їх станам називається функцією розподілу Бозе-Ейнштейна:

$$f_{B-E} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} - 1}$$

Бозони є колективістами, так як у даному квантовому стані може перебувати більше одної частинки, тобто їх кількість може бути довільною.

Фермі-газ і бозе-газ описуються квантовою статистикою. Їх властивості істотно відрізняються від класичного ідеального газу і, тому, вони є виродженими.

If the exponent $e^{\frac{E-\mu}{kT}} \gg 1$, then the distribution of Fermi-Dirac and Bose-Einstein transfer into the classical Maxwell – Boltzmann distribution:

$$f_{M-B} = Ae^{-\frac{E}{kT}},$$

where $A = e^{\frac{\mu}{kT}}$ is parameter of degeneracy.

The degeneracy temperature T_0 is the temperature below which the ideal gas has quantum properties stipulated by identical particles. If $T \gg T_0$, the ideal gas is described by the classical distribution function.

7.1.3 Energy Distribution of Electrons in Metals. Fermi Energy

We consider electrons in metals as ideal gas that is described by the quantum statistics of Fermi-Dirac. The function of distribution of electrons as per states with a different energy:

$$f_{F-D} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}.$$

All quantum states with energy $E < \mu$ are filled with electrons at $T = 0$ K, but if $E > \mu$ they are free (Fig.7.1). The value of μ is the maximum kinetic energy of conductivity electrons in metal at $T = 0$ K and is called Fermi energy:

$$E_F = \mu.$$

The highest energetic level that corresponds to Fermi energy is called Fermi level.

If $T > 0$ K the function of distribution f_{F-D} is changed in the region of Fermi energy (Fig.7.1). It can be explained by the transition of electrons with energy $E < E_F$ that is excited at the expense of heat motion and transfers to states with higher energy $E > E_F$.

Якщо експонента $e^{\frac{E-\mu}{kT}} \gg 1$, то розподіли Фермі-Дірака і Бозе-Ейнштейна переходять у класичний розподіл Максвелла-Больцмана:

$$f_{M-B} = A e^{\frac{-E}{kT}},$$

де $A = e^{\frac{\mu}{kT}}$ - параметр виродження.

Температура виродження T_0 – це температура, нижче якої ідеальний газ має квантові властивості, обумовлені тотожністю частинок. Якщо $T \gg T_0$, ідеальний газ описується класичною функцією розподілу.

7.1.3 Розподіл електронів в металах за енергіями. Енергія Фермі

Електрони провідності у металах можна розглядати як ідеальний газ, що описується квантовою статистикою Фермі-Дірака. Функція розподілу електронів за станами з різною енергією:

$$f_{\Phi-D} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}.$$

При $T = 0$ К всі квантові стани з енергією $E < \mu$ заповнені електронами, а стани з енергією $E > \mu$ вільні (рис. 7.1). Максимальне значення кінетичної енергії електронів провідності в металі при $T = 0$ К, яка відповідає μ , називається енергією Фермі:

$$E_F = \mu.$$

Найвищий енергетичний рівень, що відповідає енергії Фермі називається рівнем Фермі.

При $T > 0$ К функція розподілу $f_{\Phi-D}$ змінюється в області енергії Фермі (рис. 7.1). Це пояснюється тим, що частина електронів з енергіями $E < E_F$ збуджується за рахунок теплового руху і переходить у стани з більшою енергією $E > E_F$.

The distribution of electrons as per energy in the metal is determined by the formula:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}.$$

Figure 7.2 shows a graph of this function, which shows the dependence of the number of electrons in a unit metal volume that is found in a unit energy interval.

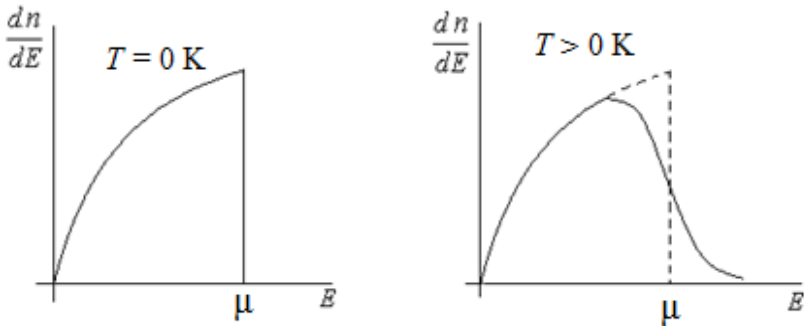


Figure 7.2

At absolute zero temperature $T = 0$ K the kinetic energy of electrons isn't zero. It changes within interval $0 < E < \mu$.

Fermi energy that is equal to μ can be determined by the formula:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}},$$

where $n = \frac{N}{V}$ is the concentration of electron gas in metal.

At the room temperature Fermi energy is equal to $E_F \approx 3 - 10$ eV. Molecules of ideal gas have such energy at the temperature of $T \approx 10^4$ K. Therefore, the electron gas in the metal is in a degenerated state.

Розподіл електронів за енергіями у металі визначається за формулою:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}.$$

На рис.7.2 зображено графік цієї функції, яка показує залежність числа електронів в одиниці об'єму металу, що припадає на одиничний інтервал енергії.

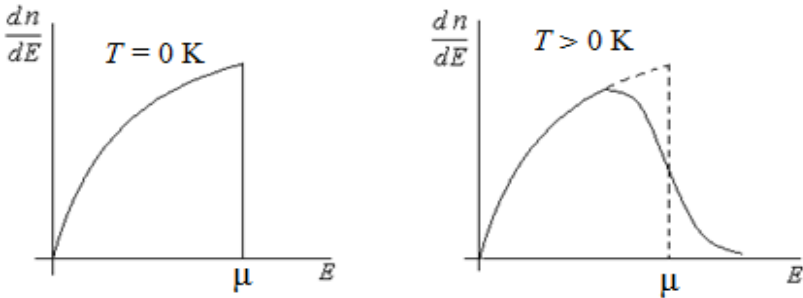


Рисунок 7.2

При абсолютному нулю $T = 0$ К кінетична енергія електронів відмінна від нуля. Вона змінюється в інтервалі $0 < E < \mu$.

Енергію Фермі, яка відповідає μ , можна визначити за формулою:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}},$$

де $n = \frac{N}{V}$ концентрація електронного газу в металі.

При кімнатній температурі енергія Фермі дорівнює $E_F \approx 3-10$ еВ. Таку енергію молекули ідеального газу мають при температурах $T \approx 10^4$ К. Тобто електронний газ в металі знаходиться у виродженому стані.

The relationship of the electron gas energy to temperature may be expressed by the graph shown in Fig.7.3

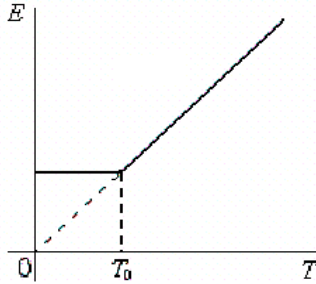


Figure 7.3

At the temperature of $T < T_0$ that is lower of the degeneracy temperature the electron gas energy doesn't depend on the temperature and it is degenerated.

At the temperature of $T > T_0$ the electron gas energy is proportional to the temperature and the gas is not degenerated.

7.1.4 Internal Energy and Heat Capacity of Electron Gas

The Internal energy of an electron gas is determined by the average energy of electrons and their number:

$$U = \bar{E} \cdot N,$$

where N is the number of electrons; \bar{E} is the average energy of an electron.

The internal energy of one mole of electron gas is

$$U_{\mu} = \bar{E} \cdot N_A,$$

The total energy of the electron gas can be determined by the formula:

$$E = \int_0^{\infty} E dn(E) = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{E^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} dE.$$

The average energy of an electron at $T = 0$ K is

Графік залежності енергії електронного газу від температури зображено на рис.7.3.

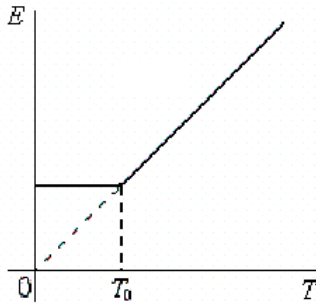


Рисунок 7.3

При температурі, що менша за температуру виродження $T < T_0$, енергія електронного газу не залежить від температури і він є виродженим.

При температурі $T > T_0$ енергія електронного газу пропорційна до температури і він є невиродженим.

7.1.4 Внутрішня енергія і теплоємність електронного газу

Внутрішня енергія електронного газу визначається середньою енергією електронів та їхньою кількістю:

$$U = \bar{E} \cdot N,$$

де N - кількість електронів; \bar{E} - середня енергія електрона.

Внутрішня енергія одного моля електронного газу:

$$U_{\mu} = \bar{E} \cdot N_A,$$

Повну енергію електронного газу можна визначити за формулою:

$$E = \int_0^{\infty} E dn(E) = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{E^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} dE.$$

Середня енергія електрона при $T = 0$ К:

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{\mu} \frac{E^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} dE \approx \frac{3}{5} \cdot \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \approx \frac{3}{5} E_F.$$

Then
$$U_{\mu} = \frac{3}{5} E_F \cdot N_A.$$

The molar heat capacity of the electron gas is equal to

$$C_V = \left(\frac{\partial U_{\mu}}{\partial T} \right)_V.$$

If $V = \text{const}$, $n = \frac{N}{V} = \text{const}$, $E_F = \text{const}$, then

$$C_V = \frac{\pi^2 R}{2} \cdot \frac{kT}{E_F},$$

$$C_V^{cl} = \frac{3}{2} R,$$

$$\frac{C_V}{C_V^{cl}} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{kT}{E_F} \approx 0.01.$$

The heat capacity of the electron gas is less than heat capacity of the crystal lattice. It is connected with the fact that only a little number of free electrons is subjected to thermal excitation, i.e. only those electrons energy of which is in the vicinity to the Fermi level.

7.1.5 Heat Capacity of Solids. Phonons

Atoms in solids oscillate nearby of equilibrium positions. The atom displacement is described by the equation of the wave:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx),$$

where $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ is a wave vector.

Different waves propagate continuously along a crystal (Fig.7.4).

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{4\pi(2m)^2}{h^3} \int_0^{\mu} \frac{E^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{KT}} + 1} dE \approx \frac{3}{5} \cdot \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \approx \frac{3}{5} E_F.$$

Тоді
$$U_{\mu} = \frac{3}{5} E_F \cdot N_A.$$

Молярна теплоємність електронного газу дорівнює

$$C_V = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V.$$

Якщо $V = \text{const}$, $n = \frac{N}{V} = \text{const}$, $E_F = \text{const}$, то

$$C_V = \frac{\pi^2 R}{2} \cdot \frac{kT}{E_F},$$

$$C_V^{кл} = \frac{3}{2} R,$$

$$\frac{C_V}{C_V^{кл}} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{kT}{E_F} \approx 0,01.$$

Теплоємність електронного газу менша за теплоємність кристалічної ґратки. Це пов'язано з тим фактом, що тільки незначна кількість вільних електронів піддається тепловому збудженню, тобто збуджуються тільки ті електрони, енергія яких близька до рівня Фермі.

7.1.5 Теплоємність твердих тіл. Фонони

Атоми в твердих тілах коливаються біля позиції рівноваги. Зміщення атома описується рівнянням хвилі:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx).$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильовий вектор.

Різні хвилі безперервно розповсюджуються вздовж кристала (рис.7.4).

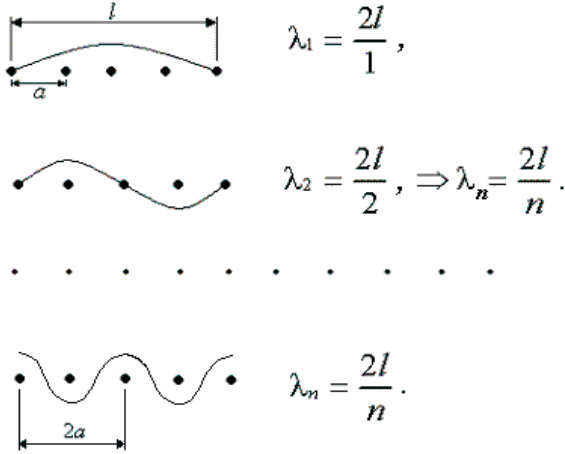


Figure 7.4

Since at the distance l lies an integer number of half – wave lengths

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

then

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Due to the discrete structure of the crystal lattice in solids and with consideration of $n = \frac{l}{a}$ there is a minimum wavelength:

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{\frac{l}{a}} \cdot 2l = 2a.$$

A maximum frequency corresponding to λ_{\min} is

$$\nu_{\max} = \frac{v}{\lambda_{\min}} = \frac{v}{2a}.$$

The waves having frequency of $\nu > \nu_{\max}$ can't exist in the crystal lattice.

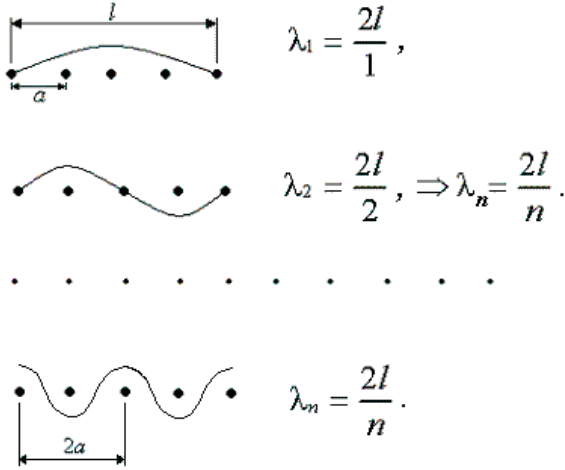


Рисунок 7.4

Так як на відстані l укладається ціле число довжин півхвиль

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

то

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Завдяки дискретній структурі кристалічної ґратки в твердих тілах, з урахуванням $n = \frac{l}{a}$, існує мінімальна довжина хвилі:

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{\frac{l}{a}} \cdot 2l = 2a.$$

Максимальна частота, що відповідає λ_{\min} :

$$v_{\max} = \frac{v}{\lambda_{\min}} = \frac{v}{2a}.$$

Хвилі, що мають частоту $v > v_{\max}$, не можуть існувати в кристалічній ґратці.

According to the classical theory of heat capacity, the crystal contains N atoms, each of which has three degrees of freedom. Each degree of freedom has an average energy of $E = kT$ ($1/2 kT$ of kinetic energy and $1/2 kT$ of potential energy). The average energy of the atom is $3kT$. The energy of one mole of a solid is

$$U_{\mu} = 3kTN_A = 3RT,$$

as $R = kN_A$.

The molar heat capacity of a solid is

$$C_V = \frac{\partial U_{\mu}}{\partial T} = 3R = 25 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}.$$

This law was experimentally established by French physicists P. Dulong and A. Petit in 1819.

The Dulong and Petit law: the molar heat capacity of all monoatomic solids is equal to $3R$.

But it was established experimentally that the heat capacity of solids is related to temperature and at low temperatures deviation from the Dulong and Petit law occurs.

The Fig. 7.5 represents the relationship between the heat capacity of silver and temperature:

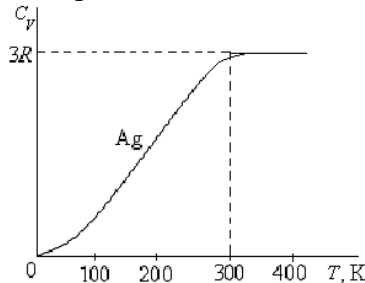


Figure 7.5

Classical physics couldn't explain these results. The imperfection of classical theory is caused by two reasons.

Згідно класичної теорії теплоємності, кристал є системою з N атомів, кожен з яких має три ступені свободи. На кожен ступінь свободи в середньому припадає енергія $E = kT$ ($1/2 kT$ кінетичної і $1/2 kT$ потенціальної енергії). Середня енергія атома дорівнює $3kT$. Енергія одного моля твердого тіла, що містить N_A атомів, дорівнює:

$$U_\mu = 3kTN_A = 3RT,$$

так як $R = kN_A$.

Молярна теплоємність твердого тіла дорівнює:

$$C_V = \frac{\partial U_\mu}{\partial T} = 3R = 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Цей закон був експериментально встановлений французькими фізиками П. Дюлонгом і А. Пті у 1819 р.

Закон Дюлонга і Пті: молярна теплоємність всіх одноатомних твердих тіл дорівнює $3R$.

Але експериментально було встановлено, що теплоємність твердих тіл залежить від температури і при низьких температурах відбувається відхилення від закону Дюлонга і Пті. На рис. 7.5 наведено залежність теплоємності срібла від температури.

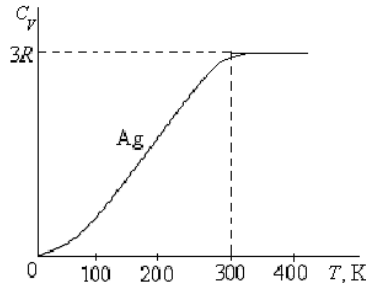


Рисунок 7.5

Класична фізика не змогла пояснити ці результати. Недосконалість класичної теорії викликана двома причинами.

1. In the classical theory it is supposed that atoms oscillate independently to each other with equal frequency. But the atoms in the crystal are bound to each other and oscillate as one system.

2. The energy of atoms in solids can be calculated according to the laws of quantum mechanics, therefore the atom is to be considered as a quantum oscillator.

In 1907, A. Einstein presented the quantum theory of heat capacity of solids. Einstein considered that energy of the quantum oscillator i.e. atom is quantized:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

The average energy that corresponds to one degree of freedom of the quantum oscillator may be expressed as:

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Then, the internal energy of one mole of a solid is

$$U_\mu = 3N_A \bar{E} = 3N_A \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

So, the molar heat capacity of a solid is equal to

$$C_V = \frac{\partial U_\mu}{\partial T} = 3R \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}.$$

The value $\theta = \frac{h\nu}{k}$ is called the characteristic temperature.

Thus,

$$C_V = 3R \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(e^{\frac{\theta}{T}} - 1 \right)^2}.$$

1. В класичній теорії припускається, що атоми коливаються незалежно один від одного з однаковою частотою. Але атоми у кристалі зв'язані один з одним і коливаються, як одна система.

2. Енергія атомів в твердих тілах визначається за допомогою законів квантової механіки, тобто атом треба розглядати як квантовий осцилятор.

У 1907 році А. Ейнштейн запропонував квантову теорію теплоємності твердих тіл. Ейнштейн взяв до уваги, що енергія квантового осцилятора, тобто атома, квантується:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Середню енергію, яка відповідає одному ступеню вільності квантового осцилятора, можна виразити як:

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Тоді, внутрішня енергія одного моля твердого тіла дорівнює:

$$U_\mu = 3N_A \bar{E} = 3N_A \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Отже, молярна теплоємність твердого тіла дорівнює

$$C_V = \frac{\partial U_\mu}{\partial T} = 3R \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}.$$

Величина $\theta = \frac{h\nu}{T}$ називається характеристичною температурою.

Тому
$$C_V = 3R \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(e^{\frac{\theta}{T}} - 1 \right)^2}.$$

In the region of high temperatures $kT \gg hv$:

$$C_V = 3R$$

and it corresponds to the Dulong and Petit law.

In the region of low temperatures $kT \ll hv$

$$C_V = 3R \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \cdot e^{-\frac{\theta}{T}}.$$

Above is the exponential relationship.

The results of Einstein's theory don't coincide with the experiment in the region of low temperatures. This is related to the assumption that solid body atoms oscillate with the same frequency.

In 1912, the German physicist Debye assumed that atoms in a crystal are connected with each other and form the common system. The oscillations of N atoms in this system may be presented as standing waves with frequencies ν_i . These types of oscillations are called normal oscillations. The energy of normal oscillations is

$$E_i = \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h\nu_i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

The total energy of a crystal is

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h\nu_i = E_0 + \sum_{i=1}^{3N} n_i h\nu_i,$$

where $E_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} h\nu_i$ is the energy of zero oscillations.

Consequently, the energy of normal oscillations is quantized. A portion of energy i.e. quant is called a phonon. The energy of a phonon is $E = hv$.

Therefore, a quant of normal oscillations in a crystal is a phonon. The velocity of a phonon is equal to the velocity of a sound in crystal. The impulse of a phonon is

$$p = \hbar k = \frac{hv}{v} = \frac{k}{\lambda},$$

where k is a wave vector.

В області високих температур $kT \gg hv$:

$$C_v = 3R,$$

що відповідає закону Дюлонга і Пті.

В області низьких температур $kT \ll hv$:

$$C_v = 3R \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \cdot e^{-\frac{\theta}{T}},$$

тобто теплоємність змінюється по експоненті.

Результати теорії Енштейна не співпадають з експериментом в області низьких температур. Це зв'язано з припущенням, що атоми твердого тіла коливаються з однаковою частотою.

У 1912 році німецький фізик П. Дебай припустив, що атоми в кристалі зв'язані один з одним і утворюють суцільну систему. Коливання N атомів в цій системі можна представити як стоячі хвилі з частотами ν_i . Ці типи коливань називаються нормальними коливаннями. Енергія нормальних коливань дорівнює:

$$E_i = \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h\nu_i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Повна енергія кристала:

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h\nu_i = E_0 + \sum_{i=1}^{3N} n_i h\nu_i,$$

де $E_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} h\nu_i$ є енергією нульових коливань.

Отже, енергія нормальних коливань квантується. Порція енергії, тобто квант називається фононом. Енергія фонона дорівнює $E = h\nu$.

Фонон є квантом нормальних коливань в кристалі. Швидкість фонона дорівнює швидкості звуку в кристалі. Імпульс фонона визначається за формулою:

$$p = \hbar k = \frac{h\nu}{v} = \frac{k}{\lambda}, \text{ де } k - \text{хвильовий вектор.}$$

A phonon is a quasiparticle as it can exist only in a crystal lattice. A phonon can't exist in a vacuum. Unlimited number of the same phonons may exist in a crystal so they are bosons. The spin of a phonon is equal to zero. Phonons are submitted to the quantum statistics of Bose-Einstein. The energy of a crystal may be determined as the energy of the phonon gas. The number of phonons dn with frequencies in the range from ν to $\nu + d\nu$ is determined as:

$$dn = \frac{dg}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

where dg is the number of normal oscillations in a crystal volume V or number of quantum states.

$$dg = 3 \cdot \frac{4\pi V}{\nu^3} \nu^2 d\nu,$$

where ν is the velocity of sound in a crystal.

Thus,

$$dn = \frac{12\pi V \nu^2 d\nu}{\nu^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}.$$

Then the internal energy of a crystal is

$$U = \int_0^{\nu_{\max}} h\nu dn = \frac{12\pi V h}{\nu^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

$$\nu_{\max} = \nu \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

To calculate U , the characteristic temperature of Debye is introduced:

$$\theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}.$$

1. In the region of high temperatures ($T \geq \theta_D$) for one mole of solid $N = N_A$ and the molar heat capacity is:

Фонон є квазічастинкою, так як він може існувати тільки в кристалічній ґратці. Фонон не може існувати у вакуумі. Необмежена кількість фононів, може існувати в кристалі, тому вони є бозонами. Спін фонона дорівнює нулю. Фонони підпорядковуються квантовій статистиці Бозе-Енштейна. Енергію кристалу можна визначити як енергію фононного газу. Число фононів dn з частотами у межах від ν до $\nu + d\nu$ визначається як:

$$dn = \frac{dg}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

де dg - число нормальних коливань в об'ємі кристалу V , або число квантових станів.

$$dg = 3 \cdot \frac{4\pi V}{\nu^3} \nu^2 d\nu,$$

де ν - швидкість звуку в кристалі.

Тому

$$dn = \frac{12\pi V \nu^2 d\nu}{\nu^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}.$$

Тоді внутрішня енергія кристала дорівнює:

$$U = \int_0^{\nu_{\max}} h\nu d\nu = \frac{12\pi V h}{\nu^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

$$\nu_{\max} = \nu \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для того, щоб обчислити U , вводиться характеристична температура Дебая:

$$\theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}.$$

1. В області високих температур ($T \geq \theta_D$) для одного моля твердого тіла $N = N_A$ і молярна теплоємність дорівнює:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3N_A k = 3R.$$

2. In the region of low temperatures ($T \ll \theta_D$):

$$U = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5h^3 \nu^3} \cdot T^4,$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{16\pi^5 k^4 V}{5h^3 \nu^3} T^3 = \beta T^3.$$

In this case function of $C_V = f(T)$ is in agreement to experimental results (Fig.7.5). This relationship is called Debye's law.

7.1.6 Quantum Theory of Metal Electronic Conductivity

German physicist Sommerfeld carried out the calculation of the electronic conductivity of metals based on the quantum mechanics and Fermi-Dirac statistics. The formula for specific conductivity was obtained:

$$\gamma = \frac{ne^2 \bar{\lambda}_F}{m \bar{v}_F},$$

where n is the concentration of electrons conductivity in metal; $\bar{\lambda}_F$ is the average free path of electron, energy of which is equal to Fermi energy; \bar{v}_F is the average velocity of electron heat motion.

This formula is an analogous to the formula of specific conductivity in classical theory but physical sense of parameters is different. So, in classical physics $\bar{v}_F \sim \sqrt{T}$, but in quantum theory it doesn't practically depend upon temperature. There is a significant difference in the sense of the electron free path length $\bar{\lambda}_F$. In classical theory it is believed that there is a continuous collision of electrons with nodes of the crystal lattice and the electron is free to travel a distance approximately equal to the period of the crystal lattice $\bar{\lambda}_F$.

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3N_A k = 3R.$$

2. В області низьких температур ($T \ll \theta_D$):

$$U = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5h^3 \nu^3} \cdot T^4,$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{16\pi^5 k^4 V}{5h^3 \nu^3} T^3 = \beta T^3.$$

В даному випадку, функція $C_V = f(T)$ відповідає експериментальним результатам (рис.7.5). Це співвідношення називається законом Дебая.

7.1.6 Квантова теорія електронної провідності металів

Німецький фізик А. Зоммерфельд виконав розрахунок електронної провідності металів на основі квантової механіки і статистики Фермі-Дірака. Була отримана формула для питомої електропровідності:

$$\gamma = \frac{ne^2 \bar{\lambda}_F}{m \bar{v}_F},$$

де n – концентрація електронів провідності в металі; $\bar{\lambda}_F$ – середня довжина вільного пробігу електрона, енергія якого дорівнює енергії Фермі; \bar{v}_F – середня швидкість теплового руху такого електрона.

Ця формула є аналогічною формулі питомої електропровідності в класичній теорії але фізичний зміст її параметрів інший. Так, в класичній фізиці $\bar{v}_F \sim \sqrt{T}$, але в квантовій теорії \bar{v}_F практично не залежать від температури. Суттєва різниця існує у змісті величини довжини вільного пробігу електрона $\bar{\lambda}_F$. В класичній теорії вважається, що відбувається безперервне зіткнення електронів з вузлами кристалічної ґратки і електрон вільно проходить відстань $\bar{\lambda}_F$, що приблизно дорівнює періоду кристалічної ґратки.

In quantum theory the motion of an electron is examined as the process of propagation of electron waves in a crystal lattice, whose length is determined by the de Broglie formula.

The scattering of electron waves, which is the reason for the existence of electrical resistance, occurs with inhomogeneities of the crystal lattice. Inhomogeneities can be impurities, vacancies, inhomogeneities due to thermal fluctuations. The scattering of electron waves by inhomogeneities due to thermal oscillations can be considered as collisions of electrons with phonons. The dimensions of the inhomogeneities must be greater than the electron wavelength. The fluctuations of density in the crystal are also centers of scattering of electron waves. Its existence is the reason for resistivity for absolute pure metals. The scattering of the electron wave can be estimated by the scattering coefficient:

$$\alpha = \frac{1}{\bar{\lambda}_F}.$$

On the other hand calculations show:

$$\alpha = \frac{\pi n k T}{E d},$$

where E is the Young's modulus, d is the period of the crystal lattice. Therefore, the average free path of an electron in metal is

$$\bar{\lambda}_F = \frac{E d}{\pi n k T}.$$

Substituting this value of $\bar{\lambda}_F$ into Sommerfeld's formula, we obtaine:

$$\gamma = \frac{e^2 E d}{m \bar{v}_F \pi k T}.$$

Therefore, the electrical conductivity is inversely proportional to the temperature:

$$\gamma \sim \frac{1}{T}.$$

This result is in a good agreement with experimental data.

У квантовій теорії рух електронів розглядається, як процес розповсюдження електронних хвиль де Бройля у кристалічній ґратці. Розсіювання електронних хвиль, що є причиною існування електричного опору, відбувається на неоднорідностях кристалічної ґратки. Неоднорідностями можуть бути домішки, вакансії, неоднорідності, що обумовлені тепловими коливаннями. Розсіювання електронних хвиль на неоднорідностях, обумовлених тепловими коливаннями можна розглядати як зіткнення електронів з фононами. Розміри неоднорідностей повинні бути більшими за довжину хвилі електрона. Флуктуації густини в кристалі є також центрами розсіювання електронних хвиль. Їх існування є причиною електричного опору абсолютно чистих металів. Розсіювання електронної хвилі можна оцінити за допомогою коефіцієнту розсіювання:

$$\alpha = \frac{1}{\bar{\lambda}_F}.$$

З іншого боку, розрахунки показують, що:

$$\alpha = \frac{\pi nkT}{Ed},$$

де E - модуль Юнга, d - період кристалічної ґратки.

Тому довжина вільного пробігу електрона у металі дорівнює:

$$\bar{\lambda}_F = \frac{Ed}{\pi nkT}.$$

Якщо підставити це значення $\bar{\lambda}_F$ у формулу Зоммерфельда, то

ми отримаємо:

$$\gamma = \frac{e^2 Ed}{m\bar{v}_F \pi kT}.$$

Отже, питома електропровідність обернено пропорційна до температури:

$$\gamma \sim \frac{1}{T}.$$

Цей результат добре узгоджується з експериментальними даними.

7.1.7 Superconductivity

The phenomenon of disappearance of electric resistance of substance at low temperatures is called superconductivity. The phenomenon of superconductivity was discovered by the Dutch physicist Kamerling-Onnes in 1911. He studied mercury and found that its resistivity sharply decreases to zero at $T = 4.2$ K (Fig.7.6).

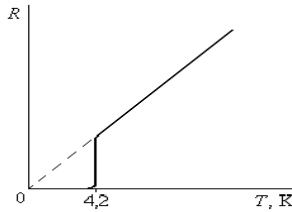


Figure 7.6

The temperature at which the substance from normal state transfers into superconductivity state is called the critical temperature T_c . The specific electrical resistivity of superconductive materials is very small:

$$\rho < 10^{-25} \text{ Om}\cdot\text{m}.$$

The superconductivity state has a set of specific properties. In 1914, Kamerling-Onnes discovered that closed-circuit electric current can exist for several hours. Subsequently, experiments were conducted to induce current and control its attenuation in circular superconductors. It has been found that the superconductivity damping time exceeds many years.

Kamerling-Onnes also discovered that the state of superconductivity is destroyed by magnetic field whose magnetic induction exceeds the critical value B_c . The dependence B_c on temperature is shown in Fig.7.7. The area of existence of superconductivity state is below this curve. The critical magnetic field which destroys the superconductivity state can be formed by current itself in the superconductor. If a current exceeds a value which is called the critical current I_c then the state of superconductivity is destroyed.

7.1.7 Надпровідність

Явище зникнення електричного опору речовини при низьких температурах називається надпровідністю. Явище надпровідності було відкрито нідерландським фізиком Г. Камерлінг-Оннесом у 1911 р. Він виявив, що опір ртуті при $T_k = 4,2$ К різко падає до нуля (рис.7.6).

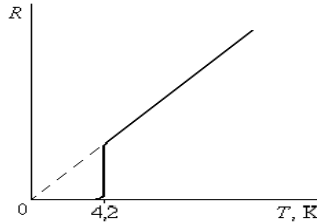


Рисунок 7.6

Температура, при якій відбувається перехід речовини в надпровідний стан, називається критичною температурою T_k . Питомий опір надпровідникових матеріалів дуже малий:

$$\rho < 10^{-25} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Надпровідний стан має ряд специфічних властивостей. В 1914 р. Камерлінг-Оннес виявив, що електричний струм в замкнутому колі може існувати де кілька годин. В подальшому були проведені експерименти по наведенню струму і контролю його затухання у колових надпровідниках. Було встановлено, що час затухання струму надпровідності перевищує багато років.

Камерлінг-Оннес виявив також, що надпровідний стан руйнується магнітним полем, магнітна індукція якого перевищує критичне значення B_k . Залежність B_k від температури зображена на рис. 7.7. Область існування надпровідного стану знаходиться під кривою. Критичне магнітне поле, яке руйнує надпровідний стан, може утворюватись і самим струмом в надпровіднику. Якщо струм перевищує деяке значення, яке називається критичним струмом I_k , то надпровідний стан руйнується.

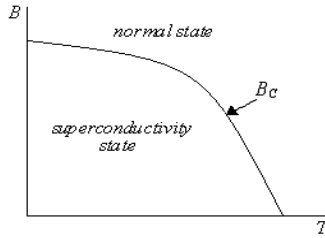


Figure 7.7

In 1933, German physicists V. Meissner and R. Oxenfeld discovered that at a temperature lower the critical the magnetic field is pushed out of the volume of the superconductor. The induction of magnetic field inside the superconductor is equal to zero $B = 0$ (Fig7.8). So, the superconductor is an ideal diamagnetic. This phenomenon is called Meissner's effect. The physical nature of the Meissner effect is that in the surface layer of the superconductor 10^{-7} - 10^{-8} m thick in a magnetic field, there are shielding circular currents that form such a magnetic field that completely compensates for the external.

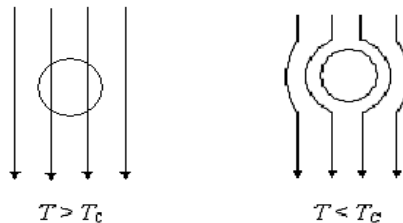


Figure 7.8

The superconductivity phenomenon is observed in some metals, alloys and metal oxide ceramics. Some of them are shown in table 7.1. Metal oxide ceramics demonstrate superconductivity at temperature of liquid nitrogen $T \approx 100$ K. The transition of a substance into a superconductivity state is the phase transition of the second order and it is accompanied with a sharp change in heat capacity.

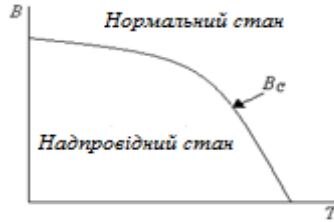


Рисунок 7.7

В 1933 р. німецькі фізики В. Мейснер і Р. Оксенфельд встановили, що при температурі, нижчій від критичної, магнітне поле виштовхується з об'єму надпровідника. Магнітна індукція всередині надпровідника у цьому стані дорівнює нулю $B = 0$ (рис.7.8). Отже, надпровідник є ідеальним діамагнетиком. Це явище називається ефектом Мейснера. Фізична природа ефекта Мейснера полягає в тому, що у поверхневому шарі надпровідника завтовшки $10^{-7} - 10^{-8}$ м у магнітному полі, виникають екрануючі колові струми, які утворюють таке магнітне поле, що повністю компенсує зовнішнє.

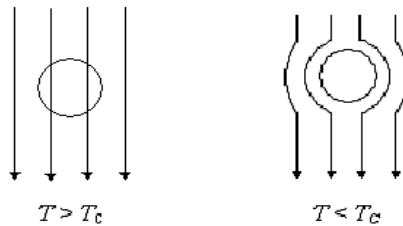


Рисунок 7.8

Явище надпровідності спостерігається у деяких металів, сплавів і металооксидних кераміках. Деякі з них наведені в табл. 7.1. Металооксидні кераміки виявляють надпровідність при температурах рідкого азоту $T \approx 100$ К. Перехід речовини в надпровідний стан є фазовим переходом другого роду, він супроводжується стрибкоподібною зміною теплоємності.

Table 7.1

Material	T_c , K	H_c , $\frac{A}{m}$
Hg	4.2	-
Al	1.2	-
Sn	3.7	$8 \cdot 10^3$
Pb	7.2	$64 \cdot 10^3$
Nb ₃ Sn	18.0	$20 \cdot 10^6$
La-Ba-Cu-O	30.0	-
La-Sr-Cu-O	40.0	-
Y-Ba-Cu-O	100	-

The superconductivity theory was developed by American physicists J. Bardeen, L. Cooper and D. Schrieffer in 1957. The physical nature of superconductivity states is the following: at $T < T_c$ some electrons form pairs. These pairs are called cooper pairs. The charge of this pair equals $q = -2e$. The distance between electrons in cooper pair is large enough, it is bigger than distance between atoms and it is of the order of 10^{-6} m.

In cooper pairs attractive forces, which are bigger than Coulomb repulsion force, originate due to electron-phonon interaction. Electrons in cooper pair have the opposite spins. So the spin of cooper pair equals zero and it is the boson. At lower temperatures cooper pairs are accumulated into basic state. There is a so-called condensate, from which it is difficult to remove a single pair. To transmit the cooper pair into an excitation state it is necessary to destroy the cooper bond and spend E_{coop} energy. That is why there is slot of E_{coop} in energetic spectrum of electrons of superconductivity state. That is found in the vicinity of Fermi level.

Таблиця 7.1

Матеріал	T_c , К	H_c , $\frac{A}{M}$
Hg	4,2	-
Al	1,2	-
Sn	3,7	$8 \cdot 10^3$
Pb	7,2	$64 \cdot 10^3$
Nb ₃ Sn	18,0	$20 \cdot 10^6$
La-Ba-Cu-O	30,0	-
La-Sr-Cu-O	40,0	-
Y-Ba-Cu-O	100	-

Теорія надпровідності була створена американськими фізиками Дж. Бардіним, Л. Купером і Дж. Шріфером у 1957 р. Фізична природа надпровідних станів полягає в тому, що при $T < T_c$ деякі електрони утворюють пари. Такі пари електронів називаються куперівськими парами. Заряд цієї пари дорівнює $q = -2e$. Відстань між електронами в куперівській парі достатньо велика, вона набагато більше відстані між атомами і досягає величину порядку 10^{-6} м.

В куперівських парах завдяки електрон-фононній взаємодії виникають сили притягання, які перевищують сили кулонівського відштовхування. Така взаємодія є квантовим ефектом. Електрони в куперівській парі мають протилежні спіни. Отже, спін куперівської пари дорівнює нулю і вона є бозоном. При низьких температурах куперівські пари накопичуються в основному стані. Виникає так званий конденсат, з якого видалити окрему пару важко. Для того, щоб перевести куперівську пару в збуджений стан, необхідно зруйнувати куперівський зв'язок і витратити енергію $E_{\text{куп}}$. Тому в енергетичному спектрі електронів в надпровідному стані є щілина шириною $E_{\text{куп}}$, яка розташована біля рівня Фермі.

The system of cooper pairs of low motion speed is not excited, that means cooper pairs are moving through the crystal lattice freely. That is why electrical resistance is zero. As the temperature increases the width of the slot E_{coop} decreases and approaches zero at the critical temperature T_c . At temperature $T > T_c$ all cooper pairs are destroyed and matter transfers into normal state.

The phenomenon of superconductivity underlies the operation of devices for the accurate measurements of weak magnetic fields up to 10^{-18} T, low current up to 10^{-10} A and low voltage up to 10^{-15} V.

Superconductors are used to make high-speed logic elements, amplifiers and other electrical devices.

The development of new high temperature superconductors is one of the most important tasks in modern science and it has importance for progress in electromechanics, electronics, computer technology, and in creation of fundamentally new cars.

7.2 Band Theory of Solids

7.2.1 Band Structure of Solids

In the band theory of solids body is considered as a periodic crystalline structure consisting of ions in the field of which electrons move. There are two methods that consider the nature of the interaction of an electron with an atom and give practically the same results. The application of these methods allows us to describe the behavior of electrons in the periodic field of a crystal.

The first method is the approximation coming from the bound electrons or the the strong bond approximation. This method assumes that the binding energy of an electron to an atom is much greater than its kinetic energy of motion in the crystal. During the formation of crystals from individual isolated atoms the energy spectrum of electrons changes and only the valence electrons can move from one atom to another.

Система куперівських пар при малих швидкостях руху не збуджується, а це означає, що вони рухаються крізь ґратку кристала без опору, і тому електричний опір дорівнює нулю. При збільшенні температури ширина щілини $E_{\text{куп}}$ зменшуються і наближається до нуля при критичній температурі T_c . При температурі $T > T_c$ всі куперівські пари руйнуються і речовина переходить в нормальний стан.

Явище надпровідності лежить в основі роботи приладів для точних вимірювань слабких магнітних полів (до 10^{-18} Тл), малих струмів (до 10^{-10} А), малих напруг (до 10^{-15} В). Надпровідники використовують для виготовлення швидкодіючих логічних елементів, в підсилювачах та інших електричних приладах.

Розробка нових високотемпературних надпровідників є однією з найважливіших задач сучасної науки і має велике значення для розвитку різних галузей: електротехніки, електроніки, комп'ютерної техніки, створення принципово нових транспортних засобів.

7.2 Зонна теорія твердих тіл

7.2.1 Зонна структура твердих тіл

В зонній теорії тверде тіло розглядається як кристалічна періодична структура, що складається з іонів, в полі яких рухаються електрони. Існують два методи, які розглядають характер взаємодії електрона з атомом і приводять практично до однакових результатів. Застосування цих методів дозволяє описати поведінку електронів в періодичному полі кристала.

Перший метод – наближення, що виходить із зв'язаних електронів або наближення сильного зв'язку. В цьому методі припускають, що енергія зв'язку електрона з атомом значно більша за його кінетичну енергію руху в кристалі. При утворенні кристалів з окремих ізольованих атомів енергетичний спектр електронів змінюється і лише валентні електрони мають можливість переміщуватись від одного атома до другого.

The second method is based on the approximation of free electrons or the approximation of a weak bond. It is assumed that the kinetic energy of electron motion is much greater than the binding energy of the atom. The electron moves in the periodic field of the crystal lattice and is considered free.

Both of these methods lead to almost identical results.

Let's consider the strong bond approximation. If isolated atoms are at a big distance from each other $L \gg d$, where d is the diameter of the atom, then the potential barrier for valence electrons is wide enough and possibility of their penetration through the barrier is almost zero (Fig. 7.9).

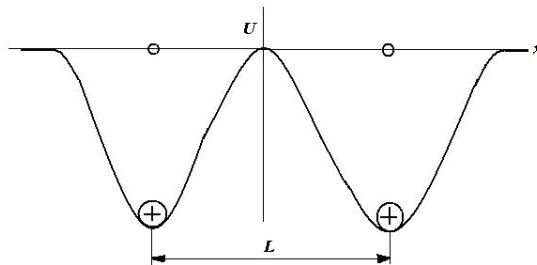


Figure 7.9

As atoms approach to the distance $L \approx d$ there occurs interaction between atoms and the potential barrier is reduced and narrowed. The electrons become able to move from one atom to another due to the tunneling effect (Fig.7.10).

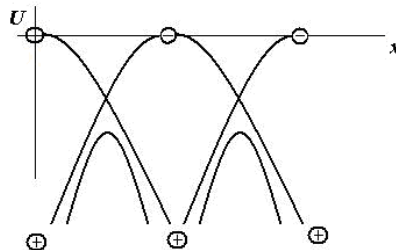


Figure 7.10

Другий метод виходить із наближення вільних електронів або наближення слабого зв'язку. Припускають, що кінетична енергія руху електрона набагато більша за енергію зв'язку з атомом. Електрон рухається в періодичному полі кристалічної ґратки і вважається вільним.

Обидва ці методи приводять практично до однакових результатів.

Розглянемо наближення сильного зв'язку. Якщо ізольовані атоми знаходяться на великій відстані один від одного $L \gg d$, де d – діаметр атома, то потенціальний бар'єр для валентних електронів достатньо широкий і ймовірність їх проникнення через бар'єр практично дорівнює нулю (рис.7.9).

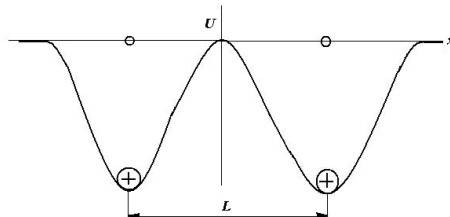


Рисунок 7.9

При наближенні атомів до відстані $L \approx d$ виникає взаємодія між атомами і потенціальний бар'єр знижується і звужується. Електрони отримують можливість переходити від одного атома до другого внаслідок тунельного ефекту (рис.7.10).

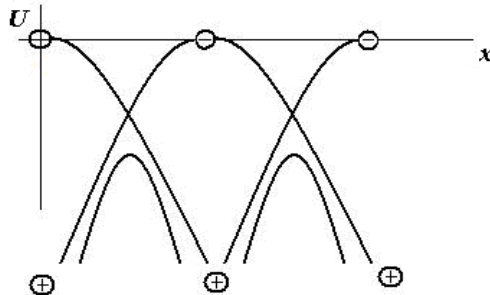


Рисунок 7.10

Let's consider a formation of a crystal from separate atoms. The energy spectrum of an isolated atom is discrete. If atoms approach each other, interaction forces arise between them, that leads to the formation of a crystal lattice and the energy spectrum changes. Energy levels shift, split and expand into zones, forming a band energy spectrum (Fig.7.11).

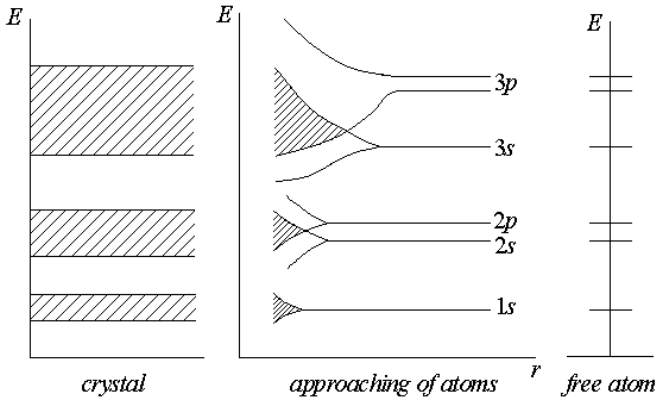


Figure 7.11

The levels of external valence electrons mostly split and expand, the binding energy to the nucleus of which is the lowest. Valence electrons can move from atom to atom, overcoming the potential barrier due to tunneling effect.

The average lifetime of a valence electron in a given atom is equal to $\sim 10^{-8}$ s. According to the uncertainty principle $\Delta E \geq \frac{h}{\tau}$, i.e.

the energy levels of the valence electrons expand and form energy bands. Thus, the formation of the band energy spectrum in the crystal is a quantum effect.

The value of the energy bands in the crystal is $\Delta E \approx 1 \div 10$ eV and they contain as many closely located levels as many atoms are there in the crystal.

Розглянемо процес утворення кристала з окремих ізольованих атомів. Енергетичний спектр ізольованого атома дискретний. При наближенні атомів один до одного між ними виникають сили взаємодії, що приводять до утворення кристалічної ґратки і енергетичний спектр змінюється. Енергетичні рівні зміщуються, розщеплюються і розширюються в зони, утворюючи зонний енергетичний спектр (рис.7.11).

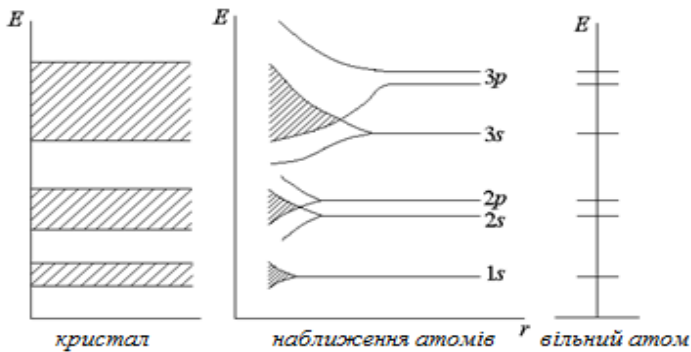


Рисунок 7.11

Найбільше розщеплюються і розширюються рівні зовнішніх валентних електронів, енергія зв'язку яких з ядром найменша. Валентні електрони мають можливість переходити від атома к атому, долаючи потенціальний бар'єр внаслідок тунельного ефекту.

Середній час життя валентного електрона в даному атомі дорівнює $\sim 10^{-8}$ с. Згідно з співвідношенням невизначеностей

$$\Delta E \geq \frac{h}{\tau},$$

енергетичні рівні валентних електронів розширюються і утворюють енергетичні зони. Таким чином, утворення зонного енергетичного спектра в кристалі є квантовим ефектом.

Величина енергетичних зон в кристалі дорівнює $\Delta E \approx 1 \div 10$ еВ і вони вміщують стільки близько розташованих рівнів, скільки атомів знаходиться в кристалі.

If the number of atoms per cubic centimeter is equal to 10^{22} - 10^{23} , then the distance between the energy levels that they create in the energy area is $\Delta E_i \approx 10^{-23} - 10^{-22}$ eV. So, energy bands can be considered almost continuous.

By the degree of filling allowed energy bands can be of two kinds.

The valence band is the highest allowed zone, which is completely filled with electrons and formed from the energy levels of electrons of the inner shells of free atoms (at $T = 0$ K).

The conduction band is either free (at $T = 0$ K) or partially filled with electrons (at $T > 0$ K) and formed from the energy levels of the electrons of the outer shells of atoms.

Allowed energy bands are divided by the forbidden bands (band gaps), in which electrons can't be located (Fig.7.12).

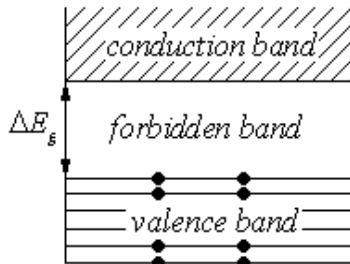


Figure 7.12

7.2.2 Metals, Dielectrics and Semiconductors

Band theory explains the existence of metals, dielectrics and semiconductors. Differences of electrical properties of these types of materials associated with the degree of filling by electrons of allowed energy bands and the width of the forbidden band.

1. Metals.

Conductors are solids in which the valence band has free, unoccupied with electrons levels. Conductors are also

Якщо кількість атомів в кубічному сантиметрі дорівнює $10^{22} - 10^{23}$, то відстань між енергетичними рівнями, які вони утворюють в енергетичній зоні $\Delta E_i \approx 10^{-23} - 10^{-22}$ еВ. Тому енергетичні зони можна розглядати практично безперервними.

По ступеню заповнення дозволені енергетичні зони можуть бути двох видів.

Валентна зона є самою верхньою дозволеною зоною, що повністю заповненою електронами і утворена з енергетичних рівнів електронів внутрішніх оболонок вільних атомів (при $T = 0$ К).

Зона провідності або вільна (при $T = 0$ К), або частково заповнена електронами (при $T > 0$ К) і утворена з енергетичних рівнів електронів зовнішніх оболонок атомів.

Дозволені енергетичні зони розділені забороненими зонами, в яких електрони знаходяться не можуть (рис.7.12).

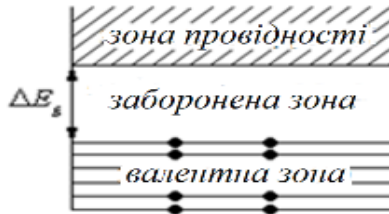


Рисунок 7.12

7.2.2 Метали, діелектрики і напівпровідники

Зонна теорія пояснює існування металів, діелектриків і напівпровідників. Відмінності електричних властивостей цих видів матеріалів пов'язані зі ступенем заповнення електронами дозволених енергетичних зон, а також шириною забороненої зони.

1. Метали.

Провідниками є такі тверді тіла, у яких валентна зона має вільні, не зайняті електронами рівні. Провідниками є також

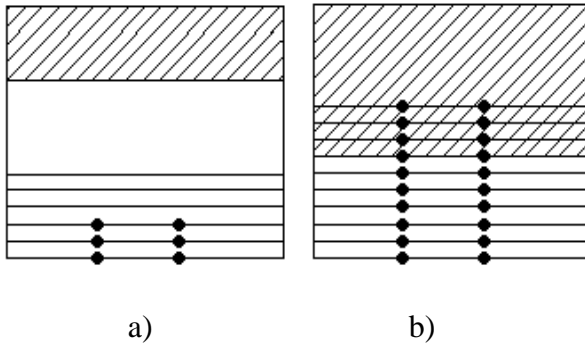
metals

Figure 7.13

solids in which the valence band overlaps with the conduction band. Such band structures are characteristic of metals that are conductors of electric current.

The band structure of metals is shown in Fig.7.13. If the valence band is partially filled with electrons (Fig. 7.13a), then it is sufficient to give the electron a small bit of energy (for example, to heat, illuminate, or attach an electric field) so that it can pass to a higher energy level. The electron becomes free and can be involved in the conductivity process when an external electric field is applied. Solids with this structure are metals.

Electrical conductivity in solids also exists if the valence band overlaps the conduction band, which results incomplete filling of the zone (Fig. 7.13b). In this case a hybrid zone is formed, which is partially filled by valence electrons. It is the typical structure for alkaline-earth elements of the second group of Mendeleev's periodic table: Be, Mg, Ca, Zn..., which are also metals.

2. Dielectrics.

Solids that aren't conductors of electrical current belong to dielectrics. The band structure of dielectrics is shown in Fig.7.14.

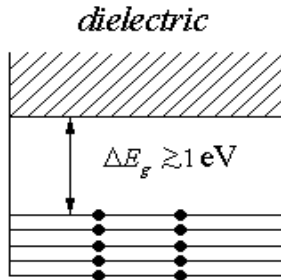


Figure 7.14

The valence band is completely filled up with electrons. The conduction band is completely free. Width of the forbidden band is $\Delta E_g \geq 1 \text{ eV}$. Thermal excitation and the electric field aren't able to transfer electrons from the valence band to the conduction one. Therefore, the external electric field doesn't cause electric current to flow. These solids are dielectrics.

3. Semiconductors.

Solids occupying the intermediate state between metals and dielectrics by electrical conductivity belong to semiconductors. The band structure of semiconductors is shown in Fig. 7.15.

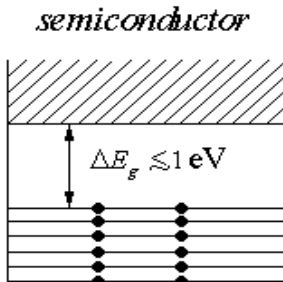


Figure 7.15

The valence band at $T = 0 \text{ K}$ is completely filled up with electrons, but the band gap is smaller than that of the dielectrics $\Delta E_g \leq 1 \text{ eV}$.

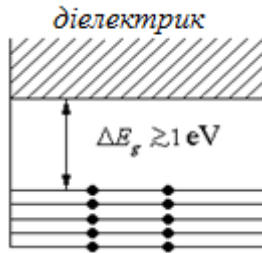


Рисунок 7.14

Валентна зона заповнена електронами повністю. Зона провідності повністю вільна. Ширина забороненої зони складає декілька електрон-вольт $\Delta E_g \geq 1\text{eV}$. Теплове збудження і електричне поле не спроможні перевести електрони з валентної зони в зону провідності. Тому зовнішнє електричне поле не може спричинити протікання електричного струму. Такі тверді тіла є діелектриками.

3. Напівпровідники.

Тверді тіла, які займають за електропровідністю проміжний стан між металами і діелектриками відносяться до напівпровідників. Зонна структура для напівпровідників наведена на рис. 7.15.

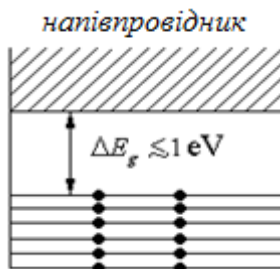


Рисунок 7.15

Валентна зона при $T = 0\text{ K}$ заповнена електронами повністю, але ширина забороненої зони менша ніж у діелектриків $\Delta E_g \leq 1\text{eV}$.

There is the possibility of transferring of electrons from the valence band to the conduction band under the influence of external factors-thermal excitation, lighting, etc. As a result of these transfers, the conduction band is partially filled, and in the valence band free spaces-holes originate. The external electric field causes the flow of electric current. Solids with such a band structure are semiconductors.

7.2.3 Semiconductors

Semiconductors are solids the valence band of which is completely filled by electrons at $T = 0$ K and the width of the forbidden band is less than $\Delta E_g \leq 1\text{eV}$. Semiconductors are placed between metals and dielectrics in electrical conductivity. The specific resistivity of semiconductors is $\rho = 10^{-5} \div 10^8$ Om·m. A special feature of semiconductors is that its conductivity increases with increase of the temperature. There are intrinsic and extrinsic semiconductors.

7.2.3.1 Intrinsic Semiconductors

Intrinsic semiconductors are chemically pure crystals that don't contain impurities. The most common semiconductors are silicon Si and germanium Ge. They have a crystal lattice of a diamond. Four valence electrons of each atom create covalent bands with the electrons of neighboring atoms (Fig.7.16).

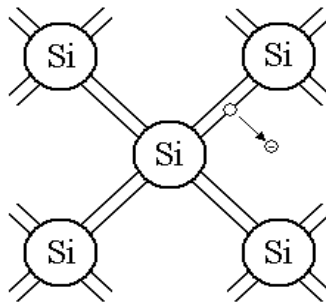


Figure 7.16

Виникає можливість переходу електронів з валентної зони в зону провідності під дією зовнішніх факторів-теплого збудження, освітлення і т.д. В результаті таких переходів зона провідності стає частково заповненою, а у валентній зоні виникають вільні місця-дірки. Зовнішнє електричне поле спричиняє протікання електричного струму. Тверді тіла з такою зонною структурою є напівпровідниками.

7.2.3 Напівпровідники

Напівпровідники – це тверді тіла, валентна зона яких цілком заповнена електронами при $T = 0 \text{ K}$ і ширина забороненої зони менша за $\Delta E_g \leq 1 \text{ eV}$. За електропровідністю напівпровідники знаходяться між металами і діелектриками. Питомий опір напівпровідників складає $\rho = 10^{-5} \div 10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Особливою рисою напівпровідників є те, що їх електропровідність збільшується зі збільшенням температури. Існують власні і домішкові напівпровідники.

7.2.3.1 Власні напівпровідники

Власні напівпровідники –це хімічно чисті кристали, що не містять домішків. Найбільш поширеними напівпровідниками є кремній Si і германій Ge. Вони мають кристалічну ґратку типу алмаза. Чотири валентних електрона кожного атома утворюють ковалентні зв'язки з електронами сусідніх атомів (рис.7.16):

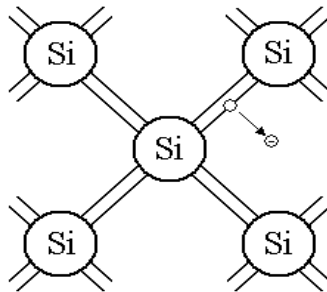


Рисунок 7.16

There are no free electrons in Si at $T = 0$ K, so it is a dielectric. In this case all levels of the valence band are filled by electrons, but there are no electrons in a conduction band.

Under the action of the external factors (heating, radiation and strong electric fields) the electrons from the highest level of the valence band transfer to the lower level of the conduction band. As a result there appear holes in the valence band (Fig.7.17).

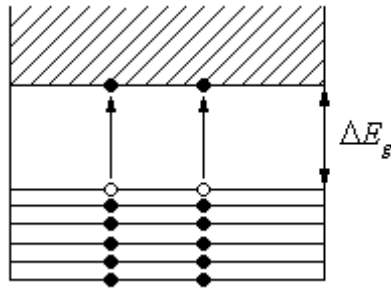


Figure 7.17

If one applies an external electric field the electrons move against the field, and the holes move along the electric field. The conductivity of an intrinsic semiconductor due to the electrons is called electronic conductivity of n -type. The conductivity of an intrinsic semiconductor due to the holes is called hole conductivity of p -type. So, there are two types of the conductivity mechanism of intrinsic semiconductors: electron and hole ones.

The concentration of electrons and holes is the same: $n_e = n_p$.

The Fermi level in the intrinsic semiconductor is situated in the middle of a forbidden band (Fig.7.18). This is due to the fact that the transition of the electron to the conduction band requires energy equal to the width of the band gap. But when the electron is excited and it appears in the conduction band, a hole arises in the valence band. Therefore, this energy is split in half.

При $T = 0 \text{ K}$ у кремнію немає вільних електронів і він є діелектриком. В даному випадку всі рівні валентної зони заповнені електронами, а в зоні провідності електронів немає.

Під дією зовнішніх факторів (нагрівання, опромінювання, сильних електричних полів) електрони переходять з найвищого рівня валентної зони на нижчий рівень зони провідності. В результаті у валентній зоні з'являються дірки (рис.7.17).

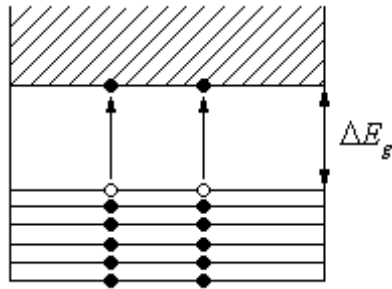


Рисунок 7.17

Якщо прикласти зовнішнє електричне поле, то електрони рухатимуться проти поля, а дірки рухатимуться вздовж електричного поля. Провідність власних напівпровідників, обумовлена електронами, називається електронною провідністю n -типу. Провідність власних напівпровідників обумовлена дірками, називається дірковою провідністю p -типу. Отже, власні напівпровідники мають два типи механізму провідності: електронну і діркову.

Концентрація електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні однакова: $n_e = n_p$.

Рівень Фермі у власному напівпровіднику знаходиться на середині забороненої зони (рис.7.18). Це пов'язано з тим, що для переходу електрона у зону провідності необхідна енергія, яка дорівнює ширині забороненої зони. Але при збудженні електрона і появи його у зоні провідності у валентній зоні виникає дірка. Тому ця енергія ділиться навпіл.

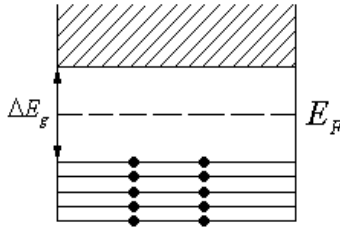


Figure 7.18

A characteristic feature of the intrinsic semiconductors is an increase of their electrical conductivity with increasing of temperature. Band theory explains this by the fact that with increasing temperature, the number of electrons increases, which due to thermal excitation pass into the conduction band and participate in the formation of electric current.

The temperature relationship of specific electron conductivity may be expressed as:

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right),$$

where γ_0 is the constant characteristic for the given semiconductor.

The graph of this relationship in half-logarithmic coordinates is shown in Fig. 7.19.

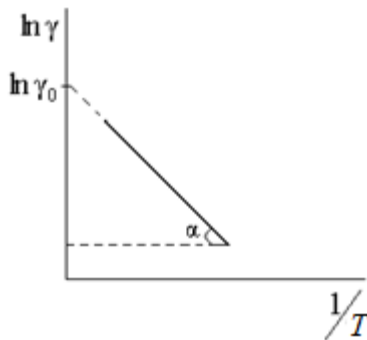


Figure 7.19

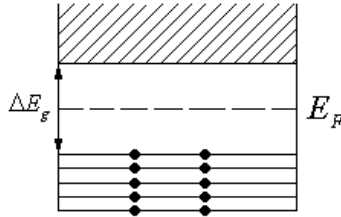


Рисунок 7.18

Характерною особливістю власних напівпровідників є збільшення їх питомої електропровідності із підвищенням температури. Зонна теорія пояснює це тим, що при підвищенні температури росте кількість електронів, що внаслідок теплового збудження переходять в зону провідності і беруть участь в утворенні електричного струму.

Температурна залежність питомої електропровідності визначається так:

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right),$$

де γ_0 - стала, характерна для даного напівпровідника.

Графік цього рівняння в напівлогарифмічних координатах зображено на рис. 7.19:

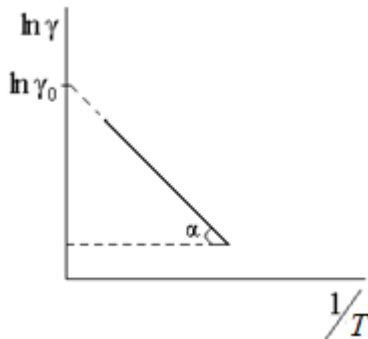


Рисунок 7.19

From this graph we can calculate the width of the forbidden band ΔE_g :

$$\ln \gamma = \ln \gamma_0 - \frac{\Delta E_g}{2kT},$$

$$\frac{\Delta E_g}{2k} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\Delta E_g = 2k \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

For example, the width of the forbidden band for Si is $\Delta E_g = 1.2$ eV, for Ge - $\Delta E_g = 0.72$ eV.

7.2.3.2 Extrinsic Semiconductors

An important feature of semiconductors is the noticeable dependence of their conductivity upon presence of impurities and insignificant amount of impurity sharply increases the conductivity of semiconductors. For example, one atom of boron B per 10^5 atoms of silicon Si increases conductivity by 1000 times.

The electrical conductivity of the semiconductor, is due to impurities, is called impurity electrical conductivity, and the semiconductor itself is called an extrinsic semiconductor.

Impurities can be as atoms of foreign elements and various defects in the crystal lattice.

If the valence of impurity per unit is higher than the valence of basic atoms, then electron impurity conductivity of *n*-type appears. Semiconductors, with this type of conductivity are called electronic or *n*-type semiconductors. Impurities that give electrons are called donors.

If the valence of impurity is one less than the valence of basic atoms, there appears a hole that can move through the crystal. There occurs a hole electrical conductivity of *p*-type. Semiconductors with this type of electrical conductivity are called hole or *p*-type.

З цього графіка можна обчислити ширину забороненої зони ΔE_g

$$\ln \gamma = \ln \gamma_0 - \frac{\Delta E_g}{2kT},$$

$$\frac{\Delta E_g}{2k} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\Delta E_g = 2k \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Наприклад, ширина забороненої зони для Si дорівнює $\Delta E_g = 1,2$ еВ, для Ge - $\Delta E_g = 0,72$ еВ.

7.2.3.2 Домішкові напівпровідники

Важливою особливістю напівпровідників є помітна залежність їхньої електропровідності від наявності домішок, незначна кількість домішок різко збільшує провідність напівпровідників. Наприклад, один атом бору В на 10^5 атомів кремнію Si збільшує електропровідність в 1000 разів. Електропровідність напівпровідника обумовлена домішками, називається домішковою електропровідністю, а сам напівпровідник - домішковим напівпровідником.

Домішками можуть бути як атоми сторонніх елементів, так і різні дефекти кристалічної ґратки.

Якщо валентність домішки на одиницю більша валентності основних атомів, то виникає електронна домішкова електропровідність *n*-типу. Напівпровідники з таким типом електропровідності називається електронними, або *n*-типу. Домішки, які віддають електрони називаються донорами.

Якщо валентність домішки на одиницю менша валентності основних атомів, виникає дірка, яка може рухатись по кристалу. Виникає діркова електропровідність *p*-типу. Напівпровідники з таким типом електропровідності називаються дірковими, або *p*-типу.

Impurities that create holes are called acceptors.

Let's consider impurity atoms of arsenic As^{V} in silicon Si^{IV} (Fig.7.20). Arsenic As^{V} is the donor impurity and forms the semiconductor of *n*-type, because valence of As^{V} is greater than the valence of Si^{IV} per one unit.

An unpaired electron can leave the arsenic atom and move freely through the crystal. As the result, the impurity conductivity of *n*-type appears.

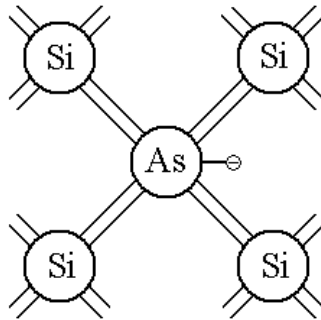


Figure 7.20

Now let's consider atoms of boron B^{III} in silicon Si^{IV} (Fig. 7.21).

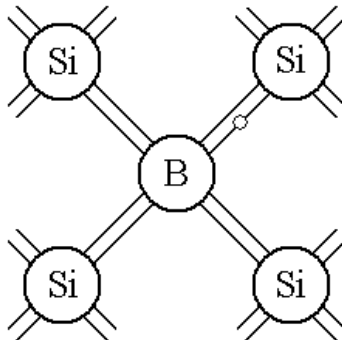


Figure 7.21

Домішки, що утворюють дірки називаються акцепторами.

Розглянемо домішкові атоми миш'яку As^V в кремнії Si^{IV} (рис.7.20). Миш'як As^V - це донорна домішка, тому що валентність As^V більша за валентність Si^{IV} на одиницю і тому його введення в кремній утворює напівпровідник n -типу.

Неспарений електрон може залишити атом миш'яку і вільно пересуватись по кристалу. В результаті виникає домішкова електропровідність n -типу.

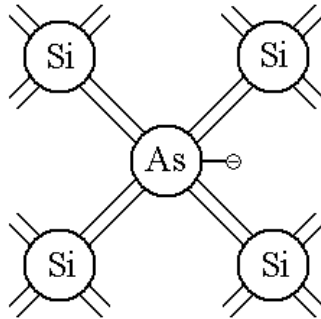


Рисунок 7.20

Розглянемо домішкові атоми бору B^{III} в кремнії Si^{IV} (рис. 7.21).

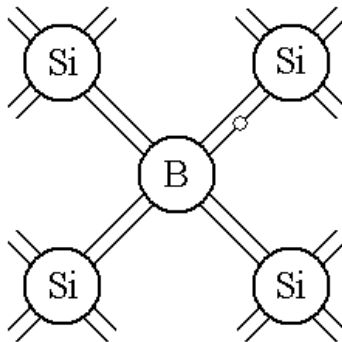


Рисунок 7.21

The valence of B atom is less than the valence of Si atom by one unit. So, boron is the acceptor impurity in silicon. One electron of silicon is non-paired and as a result a hole arises. Holes can move in a crystal lattice. As a result, the hole conductivity arises and a semiconductor of p -type is formed.

The existence of impurities in a semiconductor leads to arising of additional energetic levels. These levels are in the forbidden band and they are called impurity donor levels in n -type semiconductor and impurity acceptor levels in p -type semiconductor (Fig. 7.22).

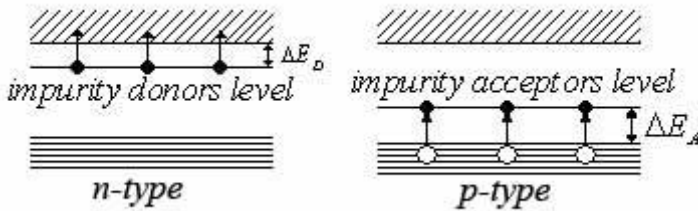


Figure 7.22

As $\Delta E_D < \Delta E_g$ and $\Delta E_A < \Delta E_g$, that is the reason why impurities can affect the conductivity of the semiconductor. Fig. 7.23 shows the relationship of Fermi level with the temperature: in extrinsic semiconductors of n -type and p -type.

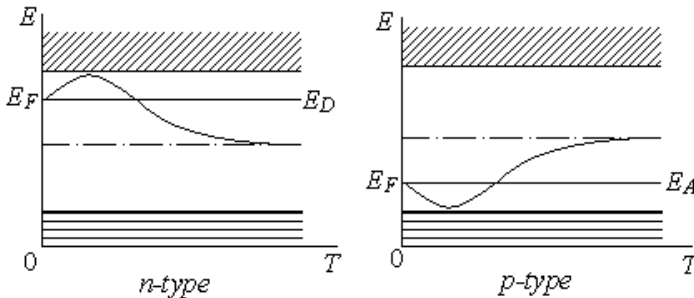


Figure 7.23

Валентність атома В менша за валентність атома Si на одиницю. Отже, бор – акцепторна домішка в кремнії. Один електрон кремнію є неспареним і в результаті виникає дірка. Дірки можуть рухатися в кристалічній ґратці під дією електричного поля. В результаті виникає діркова провідність і утворюється напівпровідник *p*-типу.

Існування домішок в напівпровіднику приводить до виникнення додаткових енергетичних рівнів. Ці рівні знаходяться в забороненій зоні і вони називаються домішковими донорними рівнями в напівпровіднику *n*-типу і домішковими акцепторними рівнями в напівпровіднику *p*-типу (рис. 7.22).

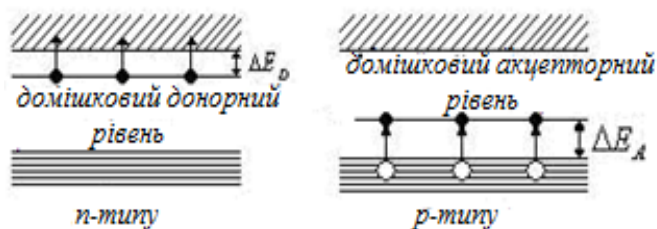


Рисунок 7.22

Так як $\Delta E_D < \Delta E_g$ і $\Delta E_A < \Delta E_g$, то це є причиною того, що домішки можуть впливати на провідність напівпровідника. На рис. 7.23 зображено зміну положення рівня Фермі від температури: в домішкових напівпровідниках *n*-типу і *p*-типу.

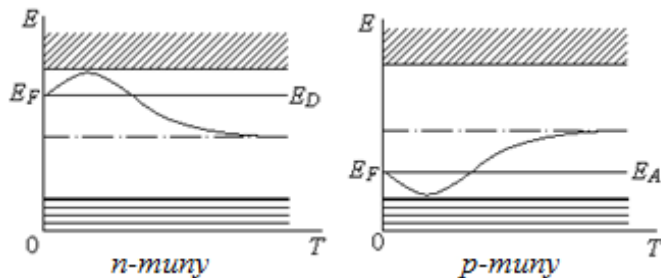


Рисунок 7.23

When the temperature increases the concentration of charges carriers arises, the impurity levels become empty. The semiconductor approaches the state of the intrinsic semiconductor and Fermi level deviates to the middle of the forbidden band. The temperature relationship of extrinsic conductivity is shown in Fig. 7.24.

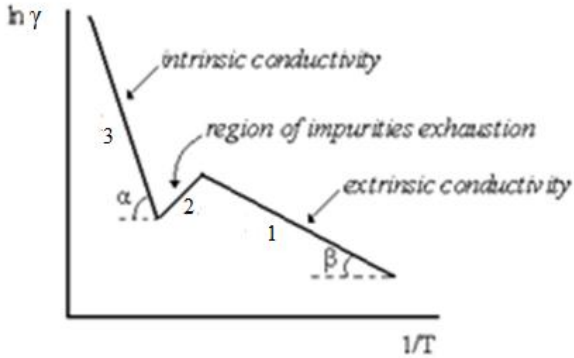


Figure 7.24

At low temperatures in region 1 dominates the extrinsic conductivity. Conductivity in this region for n -type semiconductors is

$$\gamma_D = \gamma_0^D e^{-\frac{E_D}{2kT}},$$

for p -type semiconductors:

$$\gamma_A = \gamma_0^A e^{-\frac{E_A}{2kT}}.$$

With increasing the temperature the impurity concentration of charge approaches saturation and impurity levels are emptied. The temperature relationship of the electrical conductivity of the region 2, which corresponds to the region of impurities exhaustion, is determined by the mobility of charge carriers. The decrease in electrical conductivity in this region is explained by the decrease of carrier's mobility as the result of scattering by thermal vibrations of the crystal lattice.

При підвищенні температури концентрація носіїв заряду збільшується, а домішкові рівні спустошуються. Напівпровідник наближується до стану власного напівпровідника і рівень Фермі зміщується до середини забороненої зони. Температурна залежність домішкової електропровідності наведена на рис. 7.24:



Рисунок 7.24

При низьких температурах на ділянці 1 має місце домішкова електропровідність. Питома провідність в цій області для напівпровідників n -типу дорівнює:

$$\gamma_D = \gamma_0^D e^{-\frac{E_D}{2kT}},$$

для напівпровідників p -типу:

$$\gamma_A = \gamma_0^A e^{-\frac{E_A}{2kT}}.$$

При підвищенні температури концентрація домішкових носіїв заряду наближається до насичення і домішкові рівні спустошуються. Температурна залежність електропровідності на ділянці 2, яка відповідає області виснаження домішок, визначається рухливістю носіїв заряду. Зменшення електропровідності на цій ділянці пояснюється зменшенням рухливості носіїв заряду при розсіянні на теплових коливаннях кристалічної ґратки.

With further increase in temperature (region 3) impurity levels are devastated and electrical conductivity becomes the main one, which is determined by the transition of electrons from the valence band to the conduction band:

$$\gamma_A = \gamma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

Thus, the excitation energy of intrinsic conductivity is larger than excitation energy of the impurity conductivity:

$$\Delta E_g > \Delta E_{D,A}.$$

7.2.4 P-n Junction

The border of two regions of a semiconductor with electron and hole conductivity is called electron-hole junction or *p-n* junction. *P-n* junction is a thin layer with thickness about 10^{-6} - 10^{-7} m on the border of the same semiconductor crystal that has different types of electrical conductivity. Let's consider physical processes at the contact between an electron and a hole type regions of a semiconductor crystal (Fig. 7.25).

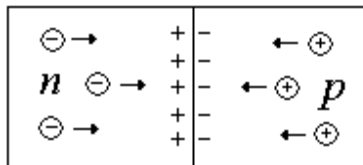


Figure 7.25

The concentration of electrons inside the *n*-type region of a semiconductor is much higher than inside *p*-type region. This results in a diffusion of electrons from *n*-type into *p*-type. Consequently, there occurs diffusion of holes from *p*-type, where their concentration is bigger than in *n*-type. As some electrons left *n*-type semiconductor, a positive compensative charge arises in *n*-type, but *p*-type becomes negatively charged.

При подальшому підвищенні температури (ділянка 3) домішкові рівні спустошуються і основною стає власна електропровідність, яка визначається переходом електронів з валентної зони в зону провідності:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

Отже, енергія збудження власної електропровідності більша ніж енергія збудження домішкової електропровідності:

$$\Delta E_g > \Delta E_{D,A}.$$

7.2.4 *P-n* перехід

Границя двох областей напівпровідника з електронною і дірковою провідностями називається електронно-дірковим переходом, або *p-n* переходом.

P-n перехід уявляє собою тонкий шар завтовшки $10^{-6} \div 10^{-7}$ м на границі між двома областями одного і того напівпровідникового кристалу, які мають різний тип електропровідності. Розглянемо фізичні процеси, які відбуваються на контакті між електронною та дірковою областями в кристалі напівпровідника (рис.7.25).

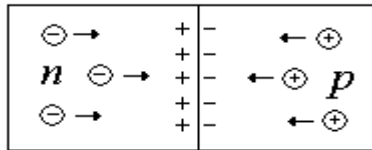


Рисунок 7.25

Концентрація електронів в *n*-області набагато більше ніж їх концентрація в *p*-області. В результаті відбувається дифузія електронів із *n*-області в *p*-область. Відповідно відбувається дифузія дірок з *p*-області, де їх концентрація більша, в *n*-область. Внаслідок переходу електронів і дірок в сусідні області, *n*-область заряджається позитивно, а *p*-область – негативно.

On the border of two regions the double electric layer originates which is characterized by the contacting potential difference that grows until the dynamic balance is reached. The potential barrier arises in the area of p - n junction. The value of contact difference of potentials is $\varphi_c \approx 0.1$ V.

The energetic diagram of p - n junction is shown in Fig. 7.26.

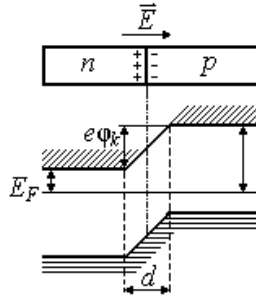


Figure 7.26

The contact layer of p - n junction has high resistance and is therefore blocking. Its resistance can be changed by the external electrical field.

If a voltage is applied to the p - n junction so that the plus is applied to the p -region and the minus is applied to the n -region, an electric field is formed, which is directed opposite to the field of the contact layer (Fig. 7.27).

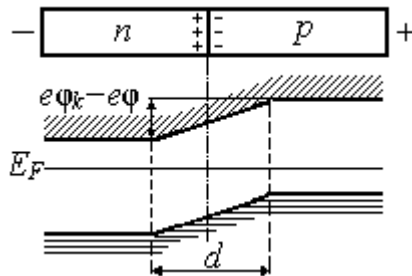


Figure 7.27

На границі двох областей виникає подвійний електричний шар, який характеризується контактною різницею потенціалів, яка зростає до встановлення динамічної рівноваги. Величина контактної різниці потенціалів складає $\phi_k \approx 0,1$ В.

В області p - n переходу утворюється потенціальний бар'єр $e\phi_k$. Зонна структура p - n переходу наведена на рис.7.26.

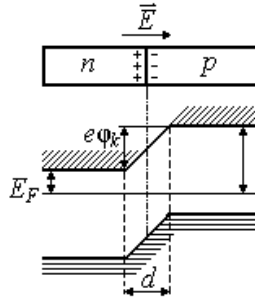


Рисунок 7.26

Контактний шар p - n переходу має високий опір і тому є заірним. Змінити його опір можна за допомогою зовнішнього електричного поля.

Якщо до p - n переходу прикласти напругу так, що плюс подається до p -області, а мінус – до n -області, то утворюється електричне поле, яке напрямлене протилежно полю контактного шару (рис.7.27).

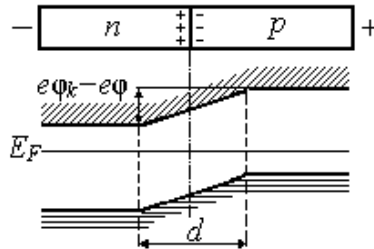


Рисунок 7.27

Such connection causes the decreases of the potential barrier for major charge carriers $e\phi_k - e\phi$. The thickness of the layer and its resistance decreases and the current intensity through $p-n$ junction increases. Such current is called a direct current.

If a voltage is applied to the $p-n$ junction in the opposite direction, plus applied to the n -region, and minus to the p -region, an electric field is formed, the direction of which coincides with the field of the contact layer (Fig. 7.28). This connection causes the rise of the potential barrier for the major charge carriers by $e\phi_k + e\phi$. The thickness of the contact layer and its resistance increases. Electrical current almost doesn't pass through $p-n$ junction. This direction of the electric field is called blocking (reversed). Electrical current in this case is found by the flux of the minor charge carriers (Fig. 7.28).

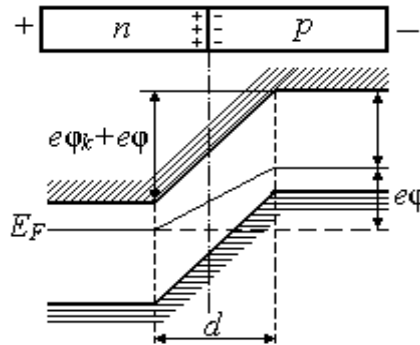


Figure 7.28

The relationship between the current intensity I and external applied voltage U is

$$I = I_s \left(e^{\pm \frac{qU}{kT}} - 1 \right),$$

where I_s is a saturation current, which is determined by the minor charge carriers. The graph of this relationship is shown in Fig. 7.29.

Таке підключення викликає пониження потенціального бар'єра для основних носіїв заряду $e\phi_k - e\phi$. Товщина контактної шару і його опір зменшується і електричний струм через $p-n$ перехід зростає. Цей струм називається прямим.

Якщо до $p-n$ переходу прикласти напругу в зворотному напрямку, плюс подати до n -області, а мінус до p -області, то утворюється електричне поле, напрямком якого співпадає з полем контактної шару (рис.7.28). Таке підключення викликає підвищення потенціального бар'єра для основних носіїв заряду на $e\phi_k + e\phi$. Товщина контактної шару і його опір збільшуються. Електричний струм через $p-n$ перехід практично не проходить. Цей напрямок зовнішнього електричного поля називається запираючим (зворотним). Електричний струм в цьому випадку визначається потоком неосновних носіїв заряду, яким можна знехтувати.

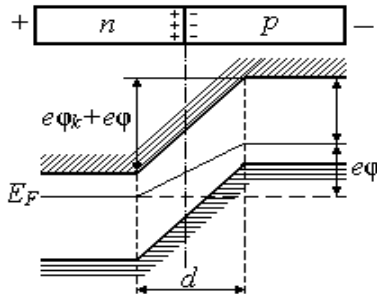


Рисунок 7.28

Співвідношення між силою струму та зовнішньою прикладеною напругою U визначається:

$$I = I_s \left(e^{\pm \frac{qU}{kT}} - 1 \right),$$

де I_s - струм насичення, який визначається неосновними носіями заряду. Графік цієї залежності зображено на рис.7.29:

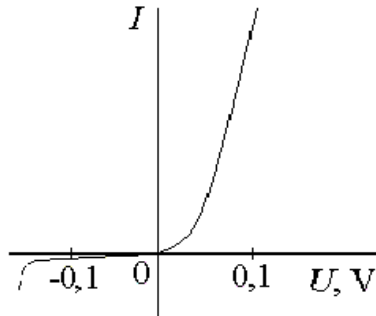


Figure 7.29

This graph is called voltage-ampere characteristics of p - n junction.

Such properties of the p - n junction may be used in order to rectify alternative current.

The p - n junction has a great use in practice. On its basis there are created a lot of devices, which are the basis of modern electronic engineering.

7.2.5 Semiconductors Photoconductivity

The semiconductor photoconductivity is an increase in the electrical conductivity of a semiconductor under the action of electromagnetic radiation. The photoconductivity of semiconductors arises as a result of the internal photoeffect. In the semiconductor, under the influence of light additional non-equilibrium carriers of electric current appear.

The band theory explains photoconductivity of semiconductors. According to this theory, if the photon energy is greater than the width of a forbidden band of the semiconductor

$$h\nu \geq \Delta E_g, \quad (7.1)$$

an intrinsic photoconductivity occurs which is characterized by electrons passing from the valence band to conduction one (Fig. 7.30).

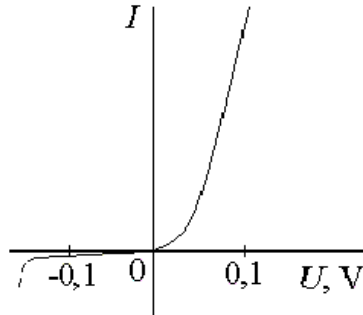


Рисунок 7.29

Цей графік називається вольт-амперною характеристикою *p-n* переходу.

Такі властивості *p-n* переходу використовують для спрямлення змінного струму.

P-n перехід має велике практичне застосування. На його основі створюють багато приладів, які є основою сучасної електронної техніки.

7.2.5 Фотопровідність напівпровідників

Фотопровідність напівпровідників – це збільшення електропровідності напівпровідників під дією електромагнітного випромінювання. Фотопровідність напівпровідників виникає в результаті внутрішнього фотоефекта. У напівпровіднику під дією світла виникають додаткові нерівноважні носії електричного струму.

Зонна теорія пояснює фотопровідність напівпровідників. Згідно з цією теорією, якщо енергія фотонів більша за ширину забороненої зони напівпровідника

$$h\nu \geq \Delta E_g, \quad (7.1)$$

то виникає власна фотопровідність, обумовлена переходом електронів з валентної зони у зону провідності рис. (7.30).

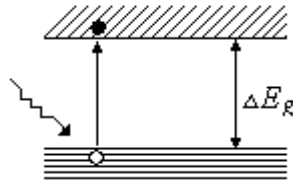


Figure 7.30

In extrinsic semiconductors the impurity photoconductivity arises if the energy of a photon is greater than the activation energy of impurity:

$$h\nu \geq E_a. \quad (7.2)$$

In an n -type semiconductor electrons pass from donor levels to the conduction band. In a p -type semiconductor electrons pass from the valence band to the acceptor level (Fig. 7.31).

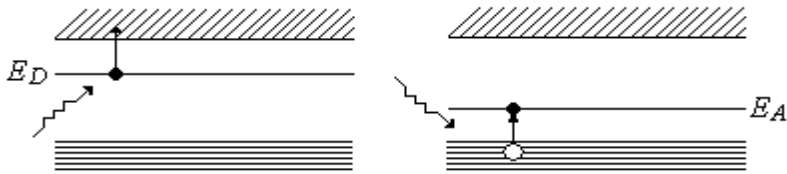


Figure 7.31

The activation energy of the impurity photoconductivity is smaller than activation energy of an intrinsic photoconductivity $\Delta E_a < \Delta E_g$.

From conditions (7.1) and (7.2) the cutoff wavelength can be determined, which is the maximum wavelength, because of which the photoconductivity is still excited.

The cutoff wavelength can be determined from the following conditions for intrinsic semiconductors:

$$\lambda_0 = \frac{ch}{\Delta E_g};$$

The cutoff wavelength for extrinsic semiconductors is

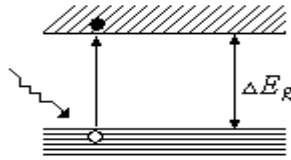


Рисунок 7.30

У домішкових напівпровідниках виникає домішкова фотопровідність, при умові, якщо енергія фотона більша за енергію активації домішки:

$$h\nu \geq E_a. \quad (7.2)$$

У напівпровіднику *n*-типу електрони переходять з донорного рівня в зону провідності. У напівпровіднику *p*-типу електрони переходять з валентної зони на акцепторний рівень (рис.7.31).

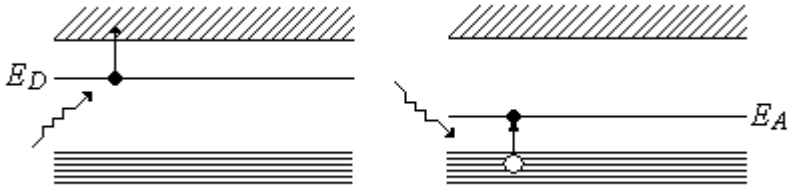


Рисунок 7.31

Енергія активації домішкової фотопровідності менша за енергію активації власної фотопровідності. $\Delta E_a < \Delta E_g$.

З умов (7.1) і (7.2) можна визначити червону границю фотопровідника, яка є максимальною довжиною хвилі, при якій фотопровідність ще збуджується.

Червона границя для власних напівпровідників визначається наступним чином:

$$\lambda_0 = \frac{ch}{\Delta E_g};$$

червона границя для домішкових напівпровідників:

$$\lambda_0 = \frac{ch}{\Delta E_a} .$$

The cutoff wavelength of the intrinsic semiconductor lies in the visible region and for the extrinsic semiconductors it lies in the infrared region. Fig.7.32 represents the relationship of the photoconductivity γ and the absorptive factor α with respect to electromagnetic radiation wavelength.

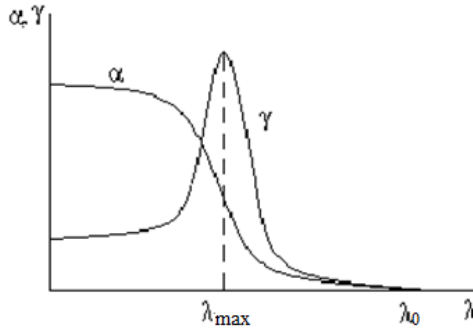


Figure 7.32

If $\lambda > \lambda_0$ then the photoconductivity doesn't exist. The decrease in photoconductivity when $\lambda < \lambda_{\max}$ is related to big velocity of recombination of charges and big absorption in the surface layer of a semiconductor.

Absorption of light can cause excitons. Excitons are quasi-particle that represent binding excited electron and a hole. Excitons occur if energy of excitation is less than the width of the forbidden band. The level of excitons is close to the band of conductivity. Since excitons are electroneutral, their appearance doesn't cause an increase in the photoconductivity of the semiconductor.

The operation of photoresistors, the electrical conductivity of which is very sensitive to electromagnetic radiation, is based on the phenomenon of photoconductivity of semiconductors. Semiconductor crystals PbS, CdS, PbSe and other are the basic materials of photoresistors.

$$\lambda_0 = \frac{ch}{\Delta E_a}$$

Червона границя для власного напівпровідника лежить у видимій області спектра, для домішкового напівпровідника – в інфрачервоній області. На рис.7.32 показана залежність фотопровідності γ і коефіцієнта поглинання α від довжини хвилі електромагнітного випромінювання.

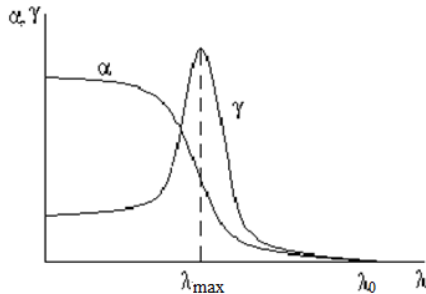


Рисунок 7.32

При $\lambda > \lambda_0$ фотопровідність не виникає. Зменшення фотопровідності при $\lambda < \lambda_{max}$ пов'язане з великою швидкістю рекомбінації носіїв заряду і великим поглинанням в поверхневому шарі напівпровідника.

Поглинання світла може визивати виникнення екситонів. Екситони – це квазічастинки, які уявляють собою зв'язані між собою збуджений електрон і дірку. Вони виникають, якщо енергія збудження менша ніж ширина забороненої зони. Рівні екситонів знаходяться біля дна зони провідності. Так як екситони електронейтральні, то їх поява не викликає збільшення фотопровідності напівпровідника.

На явищі фотопровідності напівпровідників заснована робота фоторезисторів, електропровідність яких є дуже чутливою до електромагнітного випромінювання. Основними матеріалами для фоторезисторів є напівпровідникові кристали PbS, Cds, PbSe та інші.

7.2.6 Luminescence of Solids

Luminescence is a nonequilibrium radiation, excess heat radiation upon given temperature, which has a duration greater than a period of light waves.

There are several kinds of luminescence, depending on the kind of excitation:

- photoluminescence occurs under the action of light radiation;
- X-rayluminescence occurs under the action of X-ray radiation;
- cathode-luminescence occurs under the action of the electron radiation;
- electroluminescence occurs under the action of an electric field;
- radioluminescence occurs under the action of γ -radiation, neutrons, protons;
- chemiluminescence occurs as a result of chemical reactions;
- triboluminescence occurs as a result of the destruction of crystals.

The duration of the luminescence is distinguished by short-term luminescence - fluorescence ($t \leq 10^{-8}$ s) and phosphorescence ($t > 10^{-8}$ s), which can continue for a long time after excitation.

In 1852, the English physicist G. Stokes discovered that the spectrum of luminescence differs from the spectrum of exciting (absorbance) radiation (Fig.7.33).

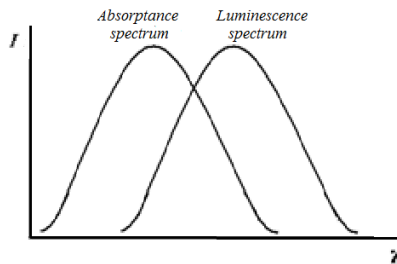


Figure 7.33

7.2.6 Люмінесценція твердих тіл

Люмінесценція – нерівноважне випромінювання, надлишкове над тепловим випромінюванням при даній температурі, яке має тривалість більшу за період світлових хвиль. Залежно від способу збудження розрізняють декілька видів люмінесценції:

- фотолюмінесценція виникає під дією світлового випромінювання;
- рентгенолюмінесценція виникає під дією рентгенівського випромінювання;
- катодолюмінісценція виникає під дією електронного опромінення;
- електролюмінесценція виникає під дією електричного поля;
- радіолюмінесценція виникає під дією γ -випромінювання, нейтронів та протонів;
- хемілюмінесценція виникає в результаті хімічних реакцій;
- триболюмінесценція виникає в результаті руйнування кристалів.

За тривалістю свічення розрізняють короточасну люмінесценцію - флуоресценцію ($t \leq 10^{-8}$ с) і фосфоресценцію ($t > 10^{-8}$ с), яка може продовжуватись тривалий час після збудження.

Англійський фізик Дж. Стокс у 1852 році виявив, що спектр люмінесценції відрізняється від спектра збуджуючого (поглинутого) випромінювання (рис. 7.33).

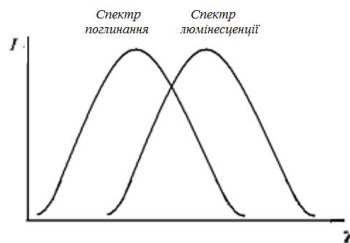


Рисунок 7.33

Stokes' rule: the wavelength of luminescent radiation is always bigger than the wavelength of exciting radiation.

According to the quantum theory it proves that the energy of a photon, that is being excited, is spent on luminescence excitation and other intramolecular processes:

$$h\nu = h\nu_{lum} + \Delta E .$$

From this equation it follows that $\nu_{lum} < \nu$ and $\lambda_{lum} > \lambda$.

In 1924, the Russian physicist S.I. Vavilov introduced the basic energy characteristic of luminescence - the energetic output. This is the ratio of the emitting energy of luminophore upon full emit to the energy which it absorbed:

$$\eta_e = \frac{E_{lum}}{E_{abs}} .$$

The quantum output of luminescence is defined as the ratio of number of luminescence quanta to absorbed quanta:

$$\eta_q = \frac{N_{lum}}{N_{abs}} .$$

The energetic output depends on the wavelength of exciting radiation (Fig.7.34):

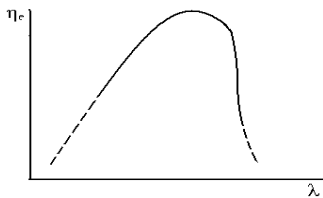


Figure 7.34

The energy output first increases directly in proportion to the wavelength of the exciting light to some maximum value, and then rapidly drops to zero (Vavilov's law).

The direct proportional increase in the energetic output with increasing wavelength of the exciting light is explained by the fact, that the quantum output of the luminescence is constant.

Правило Стокса: довжина хвилі люмінесцентного випромінювання завжди більша за довжину збуджуючого (поглинутого) випромінювання.

Згідно з квантовою теорією це означає, що енергія фотона збуджуючого випромінювання витрачається на збудження люмінесценції та на інші внутрішньомолекулярні процеси:

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + \Delta E.$$

З цього рівняння випливає, що $\nu_{\text{люм}} < \nu$ і $\lambda_{\text{люм}} > \lambda$.

Російський фізик С. І. Вавілов у 1924 р. ввів основну енергетичну характеристику люмінесценції - енергетичний вихід. Це відношення енергії, що випромінюється люмінофором при повному висвічуванні, до енергії, яку він поглинув:

$$\eta_e = \frac{E_l}{E_n}.$$

Квантовий вихід люмінесценції визначається відношенням числа квантів люмінесценції до числа поглинутих квантів:

$$\eta_{\text{кв}} = \frac{N_l}{N_n}.$$

Енергетичний вихід залежить від довжини збуджуючого світла (рис. 7.34).

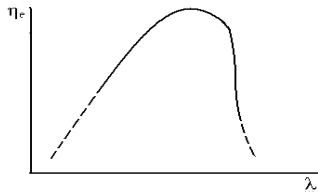


Рисунок 7.34

Енергетичний вихід спочатку росте прямо пропорційно довжині хвилі збуджуючого світла до деякого максимального значення, а потім швидко падає до нуля (закон Вавілова).

Прямо пропорційне збільшення енергетичного виходу із збільшенням довжини хвилі збуджуючого світла пояснюється тим, що квантовий вихід люмінесценції є постійним.

The sharp decrease in energetic output after the maximum value is a consequence of the fact, that at such wavelengths the energy of incident photons is insufficient to excite the phosphor atoms.

From the band theory point of view luminescence mechanism is the following: the electron under the effect of light transfers from the admixture level of A activator into zone of conductivity moves freely along the crystal until it collides with the activator ion and recombines with it, transferring to the admixture level again (Fig. 7.35).

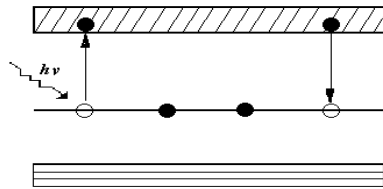


Figure 7.35

Electron recombination is accompanied with luminescent radiation. Such glowing is short and disappears fast after the termination of radiation.

Artificially made crystal luminophores with impurities are called crystalline phosphors. As such crystals used ZnS, CdS and others, with impurities Ag, Cu, Mn, etc.

Longer luminescence (phosphorescence) occurs in crystal phosphors with capture centers or traps for electrons. Their levels are found in the vicinity of the conductivity band (Fig 7.36).

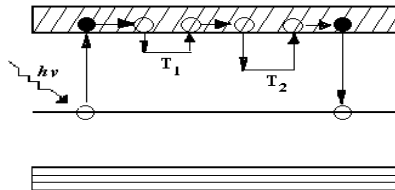


Figure 7.36

Різде зменшення енергетичного виходу після максимального значення є наслідком того, що при таких довжинах хвиль енергія падаючих фотонів виявляється недостатньою для збудження атомів люмінофора.

З точки зору зонної теорії механізм люмінесценції полягає в наступному: електрон під дією світла з домішкового рівня активатора переходить в зону провідності, вільно переміщується по кристалу доти, доки не зустрінеться з іоном активатора і рекомбінує з ним, перейшовши знову на домішковий рівень (рис. 7.35).

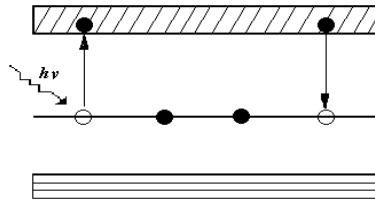


Рисунок 7.35

Рекомбінація електрона супроводжується люмінесцентним випромінюванням. Таке свічення є короткочасним і швидко зникає після припинення опромінювання.

Штучно виготовлені кристалічні люмінофори з домішками називаються кристалофосфорами. В якості таких кристалів застосовують ZnS, CdS та інші, з домішками Ag, Cu, Mn і т.д.

Більш тривале свічення (фосфоресценція) виникає в кристалофосфорах з центрами захвату або пастками для електронів. Їх рівні знаходяться біля зони провідності (рис. 7.36).

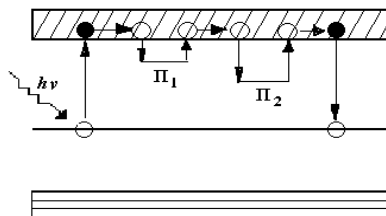


Рисунок 7.36

Under the effect of light electrons from the extrinsic level of activator A transfer into the zone of conductivity. When they are moving through the crystal they can be caught by traps. In this case the radiation of the luminescence photon doesn't happen. Being some time on the level of a trap, electrons under the action of thermal excitation can transfer to the conductivity zone again, from where they may move to the level of the activator. This transition corresponds to the recombination of the electron with the activation ion, resulting in the emitting of the luminescence photon. The duration of phosphorescence is determined by the time of the electron being caught in a trap and can last for several hours.

7.2.7 Absorption, Spontaneous and Induced Radiation

Under the action of external radiation the atom may transfer from the base E_1 energy state to the excited E_2 energy state (Fig.7.37) because of absorption of the energy of photon $E=h\nu$. This process is called the absorption.

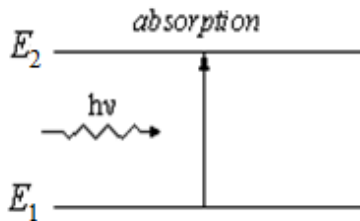


Figure 7.37

An atom from the excited state of E_2 energy can spontaneously transfer to the ground state of E_1 energy after some time without any external influence. During this transition a spontaneous (self-made) radiation of the photon occurs, its energy is determined by the relationship $h\nu = E_2 - E_1$ (Fig.7.38). Spontaneous transitions aren't interconnected, so spontaneous radiation is incoherent.

Під дією світла електрони з домішкового рівня активатора переходять в зону провідності. Переміщуючись по кристалу, вони можуть захоплюватись пастками. При цьому не відбувається випромінювання фотолюмінесценції. Перебуваючи деякий час на рівні пастки, електрони під дією теплового збудження знову переходять в зону провідності, з якої вони можуть перейти на рівень активатора. Такий перехід відповідає рекомбінації електрона з іоном активатора, в результаті чого випромінюється фотон люмінесценції. Тривалість фосфоресценції визначається часом перебування електрона в пастках і може відбуватись декілька годин.

7.2.7 Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання

Під дією зовнішнього випромінювання атом може здійснювати вимушений перехід з основного енергетичного стану E_1 до збудженого енергетичного стану E_2 в результаті поглинання енергії фотону $E = h\nu$ (рис.7.37). Цей процес називається поглинанням.

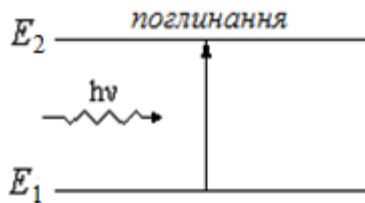


Рисунок 7.37

Атом із збудженого стану з енергією E_2 може через деякий час спонтанно перейти до основного стану з енергією E_1 без будь-якого зовнішнього впливу. При такому переході відбувається спонтанне (самочинне) випромінювання фотона, енергія якого визначається співвідношенням $h\nu = E_2 - E_1$ (рис.7.38). Спонтанні переходи взаємно не зв'язані, тому спонтанне випромінювання некогерентне.

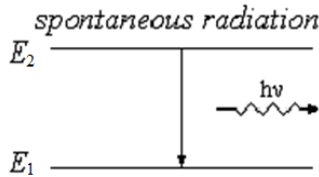


Figure 7.38

In 1916, A. Einstein noted that in addition to absorption and spontaneous radiation, there must be a third type of interaction, the so-called induced transition. If an atom being in the excited state is influenced by external radiation with frequency which satisfies the equation $h\nu = E_2 - E_1$, then there exists induced transition to the base E_1 state with the same energy of photon's radiation (Fig.7.39).

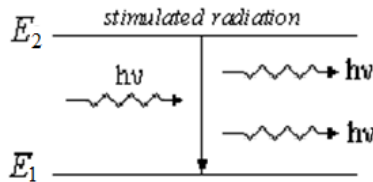


Figure 7.39

Einstein and Dirac proved, that induced radiation is identical to initial radiation. Thus, these two types of radiation are coherent with respect to each other. They have the same frequency, phase, polarization and direction of spreading, that is why they are coherent. This peculiarity of induced radiation is the basis of the making of amplifiers and generators of light called lasers.

It is necessary to create the nonequilibrium state of the system, where the number of excited atoms will be greater than the number of atoms in the normal state to amplify the initial radiation. Such state is called the state of population inversion. The process of creation of such a state is called pumping. Pumping can be realized optically, electrically and by other methods.



Рисунок 7.38

У 1916 році А. Ейнштейн зазначив, що крім поглинання і спонтанного випромінювання повинен існувати третій тип взаємодії, так званий вимушений перехід. Якщо на атом, який перебуває у збудженому стані, діє зовнішнє випромінювання з частотою, яка відповідає рівнянню $h\nu = E_2 - E_1$, виникає вимушений перехід до основного стану E_1 з випромінюванням фотона такої самої частоти (рис.7.39).

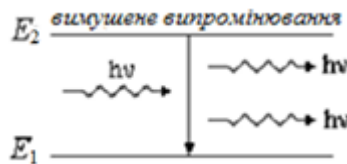


Рисунок 7.39

Ейнштейн і Дірак довели, що вимушене випромінювання тотожне змушуючому випромінюванню. Вони мають однакову частоту, фазу, поляризацію і напрямок поширення, тому є когерентними. Цю особливість вимушеного випромінювання покладено в основу роботи підсилювачів і генераторів світла, які називаються лазерами.

Щоб середовище підсилювало падаюче на нього випромінювання необхідно створити нерівноважний стан системи, в якому число збуджених атомів буде більшою за кількість атомів у основному стані. Такий стан називається станом з інверсною заселеністю. Процес створення такого стану називається накачкою. Накачку можна здійснити оптичним, електричним та іншими способами.

In the medium with a population inversion, being called active, the incident beam of light is amplified. In Bouguer's law coefficient α changes its sign on the opposite one $I = I_0 e^{+\alpha x}$.

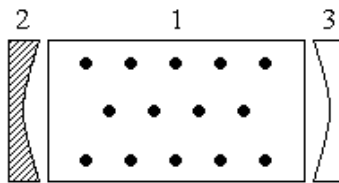
For the first time Soviet physicist V. Fabricant in 1940 proposed the light amplifier in active medium. His works made the foundation for quantum electronics.

7.2.8 Laser

In 1954, Soviet scientists M. Basov, A. Prohorov and independently from them the American scientist Ch. Townes applied induced radiation to amplify the electromagnetic waves of microwave range. They created the quantum generator of electromagnetic waves in centimeter range – maser (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

In 1960, T. Meiman (USA) created analogical device working in the optical range – laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) or the optical quantum generator.

There are solids, gas, semiconductor and liquid lasers accordingly to the type of an active medium. The basic components of the laser are an active medium, system of pumping, optical resonator. The scheme of the laser is shown in Fig. 7.40.



- 1- active medium ;
- 2- mirror;
- 3- semitransparent mirror.

Figure 7.40

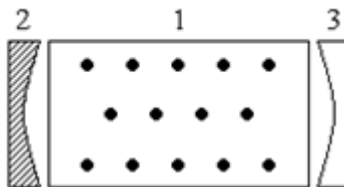
В середовищі з інверсною заселеністю, яке називають активним, падаючий промінь світла підсилюється. В законі Бугера коефіцієнт α змінює свій знак на протилежний $I = I_0 e^{+\alpha x}$. Підсилення світла в активних середовищах уперше запропонував в 1939 р. радянський фізик В. Фабрикант. Його роботи лягли в основу створення квантової електроніки.

7.2.8 Лазер

У 1954 р. радянські вчені М. Басов і О. Прохоров та незалежно від них американський вчений Ч.Таунс застосували вимушене випромінювання для підсилення електромагнітних хвиль у мікрохвильовому діапазоні. Вони створили квантовий генератор електромагнітних хвиль сантиметрового діапазону – мазер (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

У 1960 році Т. Мейман (США) створив аналогічний пристрій який працював в оптичному діапазоні – лазер (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation), або оптичний квантовий генератор.

За типом активного середовища лазери поділяються на твердотільні, газові, напівпровідникові і рідинні. Основними складовими компонентами лазера є активне середовище, система накачки і оптичний резонатор. Схема лазера показана на рис. 7.40.



- 1- активне середовище
- 2- дзеркало
- 3- напівпрозоре дзеркало

Рисунок 7.40

The active medium amplifies light. The system of pumping realizes transition of medium to the state with population inversion. For the selection of direction of laser radiation the optical resonator is used. For example, a pair of parallel mirrors facing each other being on the common optical axis between which optical medium exists. One of the mirrors is semitransparent through which amplified flux of photons laser radiation escapes.

Let's consider the principle of operation of the He-Ne laser (Fig.7.41).

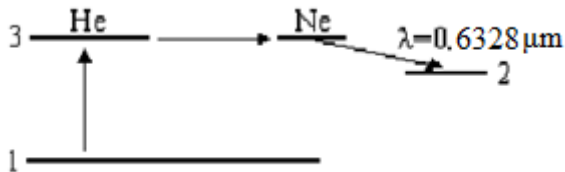


Figure 7.41

Population inversion of levels is realized by an electric gas discharge: electrons formed in gas discharge collide with He atoms. As a result, He atoms excited and transfer to the higher level 3. Then excited He atoms collide with Ne atoms and excite them. As a result, Ne atoms transfer to the higher level that is situated near the level of He atoms. Passing of Ne atoms from the higher level 3 to the lower level 2 causes laser radiation with a wavelength of $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$.

Laser radiation is characterized by:

- high time and space coherence;
- rigid monochrometism ($\Delta\lambda < 10^{-11} \text{ m}$);
- high intensity of radiation;
- very small angular discrepancy of the beam.

The laser is widely used in science and engineering. It is used in communication, location, machining the materials, measuring devices, medicine and researches in different branches.

Активне середовище підсилює світло. Система накачки здійснює перехід середовища до стану з інверсною населеністю. Для виділення напрямку лазерного випромінювання застосовується оптичний резонатор. Наприклад, пара паралельних дзеркал, направлених одне на одне і розмішених на спільній оптичній осі, між якими знаходиться оптичне середовище. Одне з дзеркал напівпрозоре і крізь нього виходить підсилений потік лазерного випромінювання.

Розглянемо принцип роботи He-Ne лазера (рис.7.41).

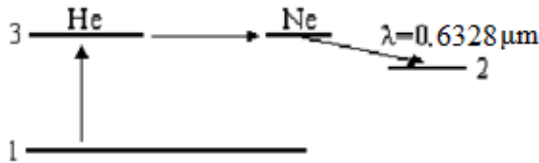


Рисунок 7.41

Інверсна населеність рівнів здійснюється електричним розрядом: електрони, які з'являються в розряді, при зіткненні збуджують атоми He, які переходять в стан 3. При зіткненні збуджених атомів He з атомами Ne, останні збуджуються і переходять до вищого рівня, який розташований біля рівня атомів Ne. Переходи атомів Ne з вищого рівня 3 до нижчого рівня 2 спричиняють лазерне випромінювання довжиною хвилі $\lambda = 0,6328$ мкм.

Лазерне випромінювання характеризується:

- високою часовою і просторовою когерентністю;
- суворою монохроматичністю ($\Delta\lambda < 10^{-11}$ м);
- великою інтенсивністю випромінювання;
- дуже малим кутовим розходженням;

Лазер широко використовується в науці і техніці. Його застосовують для зв'язку, локації, обробки матеріалів, у вимірювальних пристроях, медицині, для досліджень в різних галузях.

Control Questions
Elements of Solid State Physics

1. What is phase space and function of distribution?
2. What does the quantum statistics of Fermi-Dirac and Bose-Einstein describe?
3. What is Fermi energy?
4. What are the properties of the phonon?
5. What is the quantum theory of electron conductivity of metals?
6. Explain the phenomenon of superconductivity.
7. Explain the basic principles of the band theory of solids.
8. Explain the difference between metals, dielectrics and semiconductors based on the band theory.
9. What are intrinsic and extrinsic semiconductors?
10. Explain the principle of operation of p - n junction.
11. Explain the phenomenon of photoconductivity of semiconductors.
12. What is luminescence of solids and what types of it exist?
13. What kind of radiation is called induced?
14. Explain the principle of operation of an optical quantum generator.

Контрольні запитання
Елементи фізики твердого тіла

1. Що таке фазовий простір і функція розподілу?
2. Що описує квантова статистика Фермі-Дірака і Бозе-Ейнштейна?
3. Що таке енергія Фермі?
4. Які властивості фонона?
5. В чому полягає квантова теорія електронної провідності металів?
6. Поясніть явище надпровідності.
7. Поясніть основні положення зонної теорії твердих тіл.
8. Поясніть на основі зонної теорії різницю між металами, діелектриками і напівпровідниками.
9. Що таке власні і домішкові напівпровідники?
10. Поясніть принцип роботи $p-n$ переходу.
11. Поясніть явище фотопровідності напівпровідників.
12. Що таке люмінесценція твердих тіл і які її види існують?
13. Яке випромінювання називають вимушеним?
14. Поясніть принцип роботи оптичного квантового генератора.

8 ELEMENTS OF NUCLEAR PHYSICS

8.1 The Structure of Atomic Nucleus

In 1932, the Soviet scientist D. Ivanenko suggested a proton-neutron model of the atomic nucleus, which was developed by W. Heizenberg. According to that model the atomic nucleus of any chemical element consists of protons and neutrons, which are called nucleons.

A proton has positive charge and numerically is equal to the electron charge

$$q_p = +e = +1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

The mass of a proton is $m_p = 1.67267 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ and it is much bigger than the mass of an electron $m_p = 1836.2 \cdot m_e$.

A neutron is the neutral particle and its electronic charge equals zero: $q_n = 0 \text{ C}$. The mass of the neutron $m_n = 1.67492 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ is close to the proton mass.

The atomic nucleus has the following characteristics: electric charge, mass, spin, magnetic moment etc.

The electric charge of the atomic nucleus is positive. It is determined by the number of protons inside the nucleus and is equal to $+Ze$, where Z is the atomic number of element in Mendeleyev's periodic table, e is elementary charge.

The mass of the atomic nucleus is almost identical with the mass of the atom as the electron mass is small. The mass of the atomic nucleus is expressed in atomic mass units (a.m.u.). 1 a.m.u. equals 1/12 the mass of the nuclide of carbon ${}^{12}_6\text{C}$:

$$1 \text{ a.m.u.} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

The nucleus mass in a.m.u, that is approximated to an integer, is called the mass number A .

The mass number is equal to the sum of protons and neutrons inside the atom nucleus:

$$A = Z + N,$$

where Z is number of protons, N is number of neutrons.

8 ЕЛЕМЕНТИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

8.1 Склад атомного ядра

У 1932 р. радянський вчений Д. Іваненко запропонував протонно-нейтронну модель атомного ядра, яка була розвинута В. Гейзенбергом. Згідно цієї моделі атомне ядро будь-якого елемента складається з протонів і нейтронів, які називаються нуклонами.

Протон має позитивний заряд, що чисельно дорівнює заряду електрона

$$q_p = +e = +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Маса протона $m_p = 1,67267 \cdot 10^{-27}$ кг набагато більша за масу електрона $m_p = 1836,2 \cdot m_e$.

Нейтрон є нейтральною частинкою, електричний заряд якої дорівнює нулю: $q_n = 0$ Кл. Маса нейтрона $m_n = 1,67492 \cdot 10^{-27}$ кг близька до маси протона.

Атомне ядро має наступні характеристики: електричний заряд, масу, spin, магнітний момент та інші.

Електричний заряд атомного ядра є позитивним. Він визначається кількістю протонів в ядрі і дорівнює $+Ze$, де Z є порядковим номером хімічного елемента в періодичній таблиці Менделєєва, e - елементарний заряд.

Маса атомного ядра практично збігається з масою атома, так як маса електронів не значна. Масу атомного ядра виражають в атомних одиницях маси (а.о.м.). 1 а.о.м. дорівнює 1/12 маси нукліда вуглецю $^{12}_6\text{C}$:

$$1 \text{ а.о.м} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Маса атомного ядра в а.о.м., заокруглена до цілого числа, називається масовим числом A .

Масове число дорівнює сумі протонів і нейтронів в ядрі атома:

$$A = Z + N,$$

де Z - кількість протонів, N - кількість нейтронів.

A given atomic nucleus is denoted by its chemical symbol ${}^A_Z X$, where X is the symbol of the chemical element in Mendeleev's periodic table, Z is the atomic number and A is the mass number (the number of nucleons in the nucleus). For example:

$${}^{235}_{92}\text{U} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = 235 \\ Z = 92 \end{matrix}, N = 143.$$

Atomic nuclei differing in the number of protons Z and neutrons N are called nuclides.

Atomic nuclei with the same number of protons Z , but with different mass numbers A , are called isotopes. For example, hydrogen has three isotopes:

- ${}^1_1\text{H}$ - protium,
- ${}^2_1\text{H}$ - deuterium,
- ${}^3_1\text{H}$ - tritium.

Uranium has fourteen isotopes from ${}^{227}_{92}\text{U}$ to ${}^{240}_{92}\text{U}$.

Atomic nuclei with the same mass A , but with different numbers of protons Z , are called isobars. Atomic nuclei with the same number of neutrons N are called isotons. Radioactive nuclei with the same number of Z and A , which differ in their half-life are called isomers.

The spin of the nucleus is determined by the vector sum of the moments of the impulse of nuclides. Nuclei with an even value of A have a whole or zero spin, nuclei with an odd value of A - half-whole spin.

The magnetic moment of the nucleus is determined by

$$\mu_n = \frac{eh}{4\pi m_p},$$

where e is the charge of the proton, h is the Plank's constant, m is the mass of the proton. The magnetic moments of nuclei are negligible. For their measurement the method of magnetic resonance is used.

The radius of the nucleus is determined by the empirical formula:

Для позначення атомних ядер використовують символ ${}^A_Z X$, де X - символ хімічного елемента в періодичній таблиці Менделєєва, Z - атомний номер, A - масове число (число нуклонів в ядрі). Наприклад:

$${}^{235}_{92}\text{U} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = 235 \\ Z = 92 \end{matrix}, N = 143.$$

Атомні ядра, що відрізняються числом протонів Z і нейтронів N , називаються нуклідами.

Атомні ядра з однаковою кількістю протонів Z , але з різними масовими числами A , називаються ізотопами. Наприклад, водень має три ізотопи:

${}^1_1\text{H}$ - протій,

${}^2_1\text{H}$ - дейтерій,

${}^3_1\text{H}$ - тритій.

Уран має чотирнадцять ізотопів від ${}^{227}_{92}\text{U}$ до ${}^{240}_{92}\text{U}$.

Атомні ядра з однаковою масою A , але з різною кількістю протонів Z , називаються ізобарами. Атомні ядра з однаковим числом нейтронів N називаються ізотонами. Радіоактивні ядра з однаковими Z і A , які відрізняються за періодом піврозпаду, називаються ізомерами.

Спін ядра визначається векторною сумою моментів імпульсів нуклідів. Ядра з парним значенням A мають цілий, або нульовий спін, ядра з непарним значенням A - напівцілий спін.

Магнітний момент ядра визначається

$$\mu_y = \frac{eh}{4\pi m_p},$$

де e - заряд протону, h - стала Планка, m_p - маса протону. Магнітні моменти ядер незначні. Для їх вимірювання застосовують метод магнітного резонансу.

Радіус ядра визначається емпіричною формулою:

$$R_n = R_0 A^{\frac{1}{3}},$$

where $R_0 = (1.3 - 1.5) \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

The average density of nucleus substance is enormous and equals $\rho \approx 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, due to the nucleus forces.

8.2 Binding Energy and Mass Defect of Nucleus

Protons and neutrons are strongly bonded to each other in the atomic nucleus by means of specific attractive forces that are called nuclear forces. Nuclear forces are much bigger than Coulomb's one, and the atomic nucleus is a stable system.

The binding energy of a nucleus is equal to the energy required to split the nucleus into nucleons, that is, protons and neutrons. Mass-spectrometric measurements discovered that the mass of the nucleus is always less than the sum of masses of nucleons, forming the nucleus:

$$m_{nucleus} < Zm_p + Nm_n.$$

The difference in masses Δm is called the defect in mass:

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_{nucleus}.$$

According to the Einstein's equation $E = mc^2$ the binding energy is determined as

$$E_{binding} = [(Zm_p + Nm_n) - m_{nucleus}]c^2.$$

The important characteristic of the nucleus is the specific bounding energy. It is equal to the average binding energy per nucleon in a stable nucleus:

$$\omega = \frac{E_{binding}}{A}.$$

Fig. 8.1 shows the relationship between the specific bounding energy ω and the mass number A :

$$R_{\text{я}} = R_0 A^{\frac{1}{3}},$$

де $R_0 = (1,3-1,5) \cdot 10^{-15}$ м.

Середня густина ядерної речовина величезна і дорівнює $\rho \approx 10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, що обумовлено дією ядерних сил.

8.2 Енергія зв'язку та дефект маси ядра

Протони і нейтрони в атомному ядрі зв'язані між собою специфічними силами, які називаються ядерними силами. Ядерні сили значно більші за кулонівські, і атомне ядро є стабільною системою.

Енергія зв'язку ядра дорівнює енергії, яку необхідно витратити для розщеплення ядра на нуклони, тобто на протони і нейтрони.

Мас-спектрометричні дослідження показали, що маса ядра завжди менша за суму мас нуклонів що утворюють ядро:

$$m_{\text{я}} < Zm_p + Nm_n.$$

Різниця мас Δm називається дефектом маси ядра:

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_{\text{я}}.$$

Згідно рівняння Ейнштейна $E = mc^2$ енергія зв'язку ядра визначається

$$E_{\text{зв}} = [(Zm_p + Nm_n) - m_{\text{я}}]c^2.$$

Важливою характеристикою ядра є питома енергія зв'язку. Вона дорівнює середній енергії зв'язку, яка припадає на нуклон в стабільному ядрі:

$$\omega = \frac{E_{\text{зв}}}{A}.$$

На рис.8.1 наведена залежність питомої енергії зв'язку ω від масового числа A .

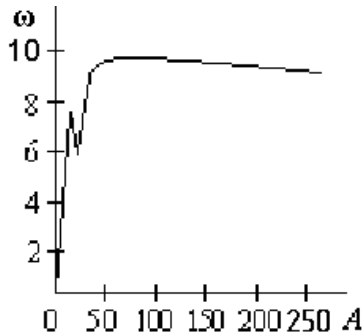


Figure 8.1

We can see that value of ω grows rapidly for a light nuclei ($A < 12$) up to 6-7 MeV. Then slowly increases and reaches value of $\omega = 8.6$ MeV for nuclei with mass numbers of $40 \leq A \leq 120$. Further, with the increasing of A the specific binding energy decreases, due to the increasing numbers of protons in the nucleus and increasing of Coulomb's repelling forces.

8.3 Nuclear Forces

Extremely strong attractive forces that bind nucleons together exist inside the nucleus. They act over the distance that is less than 10^{-15} m and are of sufficient magnitude to overcome electrostatic repulsion between protons. These forces are called nuclear forces.

There are some features of nuclear forces.

1. Nuclear forces are forces of attraction.
2. Nuclear forces are quite significant, so such interaction is called strong. The specific bounding energy in the nucleus reaches ~ 8.6 MeV, which is much higher than other types of interaction.
3. Nuclear forces are so-called short-range forces occurring at a distance of less than 10^{-15} m and sharply decrease with the distance growth.
4. Nuclear forces have the property of independence charge of nucleons. They don't depend upon electrical nucleons charge.

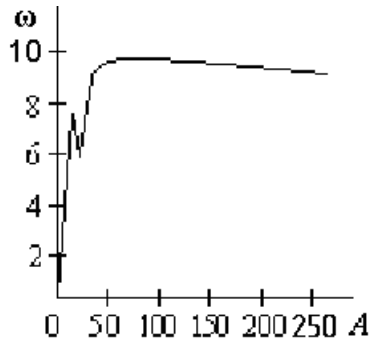


Рисунок 8.1

Значення ω швидко зростає для легких ядер ($A \leq 12$) до 6-7 MeV. Потім повільно збільшується і досягає значень $\omega \approx 8,6$ MeV для ядер з масовим числом $40 \leq A \leq 120$. Далі, зі збільшенням A питома енергія зв'язку зменшується, що пов'язано зі збільшенням кількості протонів в ядрі і зростанням кулонівського відштовхування між ними.

8.3 Ядерні сили

Неймовірно великі сили притягання зв'язують нуклони всередині ядра. Вони діють на відстані, меншій за 10^{-15} м, та значно перевищують кулонівське відштовхування між протонами. Ці сили називаються ядерними силами.

Існує декілька особливостей ядерних сил:

1. Ядерні сили є силами притягання.
2. Ядерні сили досить значні, тому така взаємодія називається сильною. Питома енергія зв'язку в ядрі досягає $\sim 8,6$ MeV, що значно перевищує інші види взаємодії.
3. Ядерні сили є короткодійними силами, адже вони діють на відстані, меншій ніж 10^{-15} м, та різко зменшуються зі збільшенням відстані.
4. Ядерні сили мають властивість зарядової незалежності нуклонів. Вони не залежать від електричного заряду нуклонів.

Thus, nuclear forces act between a neutron and a proton or two protons and two neutrons, and are the same.

5. Nuclear forces have the property of saturation. The nucleon interacts only with a limited number of nearest nucleons and specific binding energy of nucleons is approximately constant if the number of nucleons increases.

6. Nuclear forces depend upon the orientation of nucleons spins.

7. Nuclear forces are not central. They act between nucleons along the line that doesn't connect nucleons centers.

To explain the properties of nuclear forces, Heisenberg hypothesized the exchange nature of nuclear forces. That is, the nuclear forces between two nucleons exist due to the third particle.

In 1934, the Soviet physicist I. Tamm supposed that nuclear forces exist due to an exchange between nucleons by virtual particles. In 1935, the Japanese physicist H. Yukawa hypothesized that the nuclear interaction is due to the exchange of particles between nucleons, having the mass 200-300 times the electron mass and having the energy of about 130 MeV. These particles were called mesons. These particles were later found in cosmic rays and called π -mesons or pions.

There are neutral and charged π -mesons: π^0, π^-, π^+ . The charge of π -meson is equal to the electron charge. Charged π -mesons have the mass of $273 \cdot m_e$. The neutral π -mesons have the mass of $264 \cdot m_e$. The spin of π -mesons equals zero. π -mesons are unstable particles. The time of exchange for the π -meson is about 10^{-23} s.

As a result of virtual processes

$$p \leftrightarrow n + \pi^+$$

$$n \leftrightarrow p + \pi^-$$

$$p \leftrightarrow p + \pi^0$$

$$n \leftrightarrow n + \pi^0$$

Отже, ядерні сили діють між протоном та нейтроном, або двома протонами та двома нейтронами, та є однаковими.

5. Ядерні сили мають властивість насичення. Нуклон взаємодіє тільки з обмеженою кількістю найближчих до нього нуклонів, а питома енергія зв'язку нуклонів залишається приблизно постійною зі зростанням кількості нуклонів.

6. Ядерні сили залежать від орієнтації спінів нуклонів.

7. Ядерні сили не є центральними. Вони діють між нуклонами не вздовж лінії, яка з'єднує центри нуклонів.

Для пояснення властивостей ядерних сил Гейзенберг висунув гіпотезу про обмінний характер ядерних сил. Тобто, що ядерні сили між двома нуклонами існують завдяки третій частинки.

В 1934 р. радянський фізик І. Тамм припустив, що взаємодія між нуклонами здійснюється за допомогою якихось віртуальних частинок. В 1935 р. японський вчений Х. Юкава висунув гіпотезу, що ядерна взаємодія між нуклонами обумовлена обміном частинок, що мають масу у 200-300 разів більшу маси електрона з енергією близько 130 МеВ. Ці частинки були названі мезонами. Пізніше вони були знайдені в складі космічних променів та названі π -мезони, або піонами.

Існують нейтральні та заряджені π -мезони: π^0, π^-, π^+ . Заряд π -мезонів дорівнює заряду електронів. Заряджені π -мезони мають масу $273 \cdot m_e$, нейтральні - $264 \cdot m_e$. Спін π -мезонів дорівнює нулю. π -мезони - нестабільні частинки. Час обміну для π -мезону складає 10^{-23} с.

Внаслідок віртуальних процесів

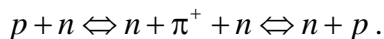
$$p \Leftrightarrow n + \pi^+$$

$$n \Leftrightarrow p + \pi^-$$

$$p \Leftrightarrow p + \pi^0$$

$$n \Leftrightarrow n + \pi^0$$

the nucleon is covered by a cloud of virtual π -mesons, which form the field of nuclear forces. The absorption of these mesons by other nucleons causes a strong interaction between nucleons, for example according to the following scheme:



The proton emits π -meson and transforms into a neutron. The meson is absorbed by the neutron, which thereby transforms into a proton. The process is repeated but in the opposite direction.

8.4 Radioactivity

A spontaneous transformation of unstable nuclei into nuclei of another element which is accompanied by the emission of some particles is called radioactivity.

There exists natural radioactivity associated with existence of unstable isotopes in nature and artificial radioactivity that exists as the result of nuclear reactions.

For the first time the French physicist A. Becquerel discovered radioactivity in 1896. He studied the fluorescence of uranium salts and found that they emit rays of unknown nature that act on the photographic plate, penetrate through thin layers of substance.

Later, in 1898, Pierre and Marie Curie discovered that other heavy elements are radioactive too: polonium, radium, actinium and thorium.

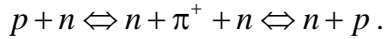
There are three types of radioactive radiation:

- 1) α - decay;
- 2) β - decay;
- 3) γ - radiation.

The process of α - decay accompanied with the emission of α -particles. α -particles are deflected by electric and magnetic fields, are easily absorbed by thin layers of substance and have little penetrability. α -particles carry the charge of $+2e$ and represent nuclei of helium atoms ${}^4_2\text{He}$.

The process of β - decay accompanied with the emission of β -particles that are deflected by electric and magnetic field, possess

нуклон виявляється охопленим хмарою віртуальних π -мезонів, які утворюють поле ядерних сил. Поглинання цих мезонів іншими нуклонами зумовлює сильну взаємодію між нуклонами, наприклад за такою схемою:



Протон випромінює π^+ мезон і перетворюється в нейтрон. Мезон поглинається нейтроном, який внаслідок цього перетворюється у протон. Процес повторюється але у зворотному напрямку.

8.4 Радіоактивність

Спонтанний перехід нестабільних ядер у ядра іншого елемента, який супроводжується випромінюванням деяких часток, називається радіоактивністю.

Існує природна радіоактивність, пов'язана з існуванням нестабільних ізотопів у природі, та штучна радіоактивність, що існує внаслідок ядерних реакцій.

Вперше радіоактивність відкрив французький фізик А. Беккерель в 1896 р. Він вивчав люмінесценцію солей урану та з'ясував, що вони випромінюють промені невідомої природи, які діють на фотографічну плівку і проникають крізь тонкий шар речовини. Пізніше, в 1898 р. П'єр і Марі Складовська-Кюрі виявили, що інші важкі елементи радіоактивні також: полоній, радій, актиній та торій.

Радіоактивне випромінювання буває трьох типів:

- 1) α - розпад;
- 2) β - розпад;
- 3) γ - випромінювання.

Процес α – розпаду супроводжується випромінюванням α – частинок. α – частинки відхиляються магнітним та електричним полями та легко поглинаються тонким шаром речовини, мають малу проникність. α – частинкам властивий заряд $+2e$, і вони представляють ядра атомів гелію ${}^4_2\text{He}$.

Процес β – розпаду супроводжується емісією β –частинок, що відхиляються магнітним та електричним полями, та мають

a higher penetrability than α -particles and carry a negative charge $-e$. β -particles represent a flux of fast electrons. Thus β - decay is the electron emission from the nucleus of an atom.

γ - radiation isn't deflected by electric and magnetic fields and possesses a very high penetrability. γ - radiation represents a flux of photons with very short waves of $\lambda < 10^{-10}$ m.

8.5 Radioactive Decay Law

Radioactive decay is called natural radioactive transformation of atomic nuclei, which occurs independently. The decaying atomic nucleus is called the parent nucleus, and the decaying nucleus is the child nucleus.

The theory of radioactive decay is based on experiments, that confirm its statistical nature. Since the individual radioactive nuclei decay independently of each other, a certain part of the radioactive nuclei dN decays over time dt :

$$dN = -\lambda N dt,$$

where λ is decay constant, $[\lambda] = \text{s}^{-1}$.

Decay constant λ is equal to the relative decrease in the number of radioactive nuclei per unit of time or the probability of nuclear decay per unit of time:

$$\lambda = -\frac{dN}{N dt}.$$

Integrating this equation we obtain the law of radioactive decay:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

where N_0 is the number of nuclei at initial time $t = 0$;

N is the number of nuclei which remained after time t .

So, the number of nuclei of radioactive substance is decreased with time by the exponential law (Fig. 8.2).

вищу проникність ніж α – частинки і несуть негативний заряд $-e$. Вони представляють потік швидких електронів. Таким чином, β – розпад – це емісія електронів з ядра атома.

γ – випромінювання не відхиляється електричним і магнітним полями та має дуже високу проникність. γ – випромінювання уявляє собою потік фотонів з дуже короткими хвилями $\lambda < 10^{-10}$ м.

8.5 Закон радіоактивного розпаду

Радіоактивним розпадом називається природне радіоактивне перетворення атомних ядер, яке відбувається самочинно. Атомне ядро, яке розпадається називається материнським, а ядро, що виникло внаслідок розпаду – дочірним.

Теорія радіоактивного розпаду ґрунтується на дослідях, що підтверджують його статистичний характер. Так як окремі радіоактивні ядра розпадаються незалежно один від одного, то певна частина радіоактивних ядер dN розпадається протягом часу dt :

$$dN = -\lambda N dt,$$

де λ – постійна розпаду, $[\lambda] = \text{с}^{-1}$.

Постійна розпаду λ дорівнює відносному зменшенню кількості ядер радіоактивних атомів в одиницю часу, або ймовірність ядерного розпаду за одиницю часу:

$$\lambda = -\frac{dN}{N dt}.$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо закон радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

де N_0 – це кількість ядер на початку часу $t = 0$; N – кількість ядер, що не розпались через час t .

Отже, кількість ядер радіоактивної речовини зменшується з часом за експоненціальним законом (рис.8.2).

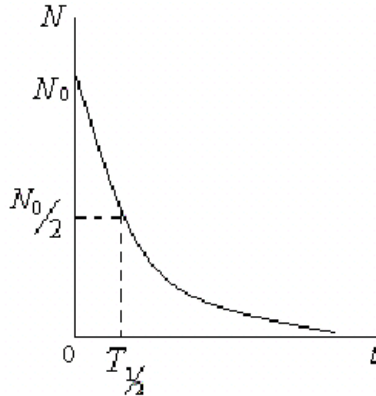


Figure 8.2

Time $T_{1/2}$ is the time during which the initial number of radioactive nuclei decreases twofold. $T_{1/2}$ is called the half-life.

As

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \quad ,$$

then

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} .$$

The activity of radioactive element A is the number of nuclei that disintegrate in one second:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N ,$$

$$A = \frac{N \ln 2}{T_{1/2}} .$$

The unit of activity is a becquerel (Bq). This is such an activity, when one disintegration per second occurs.

Non-system unit of curie (Ci) is used also:

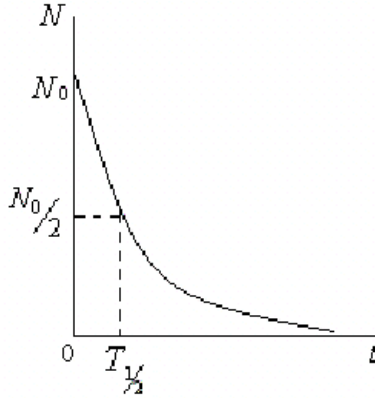


Рисунок. 8.2

Час $T_{1/2}$ - це час, за який початкова кількість радіоактивних ядер зменшується вдвічі. $T_{1/2}$ називається періодом піврозпаду.

Якщо

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

то

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Активність радіоактивного елементу A - це число ядер, які розпадаються за одну секунду:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N,$$

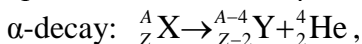
$$A = \frac{N \ln 2}{T_{1/2}}.$$

Одиниця активності - беккерель (Бк). Це така активність, коли відбувається один розпад в секунду.

Також використовується несистемна одиниця кюрі (Ки):

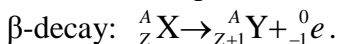
$$1\text{Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{Bq}.$$

Radioactive decay process submitted to the displacement laws, that on the basis of laws of conservation of matter and electric charge permit to establish the mass number and charge of the nucleus of a new element which is produced from α - or β - decay:



The nucleus of atomic number Z and mass number A at the decay transforms into a nucleus with atomic number $Z-2$ and mass number $A-4$, is shifted two places to the left in the periodic table of elements.

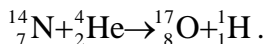
At β - decay, the positive charge of the nucleus increases by one and the nucleus shifts to one place to the right in the periodic table:



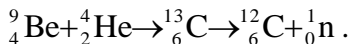
8.6 Nuclear Reactions

Nuclear reactions are processes of transformation of atomic nuclei at interactions with elementary particles or with each other. Nuclear reactions are realized as the result of interaction of particles under nuclear forces.

For the first time Rutherford performed artificial nuclear reaction in 1919:

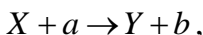


The artificial transformation of nuclei by bombarding them with α - particles led to the discovery of the neutron. This nuclear reaction was carried out in 1930 by W. Bothe and G. Becker, and explained it in 1932 by J. Chadwick:



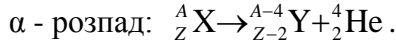
Neutrons have been widely used for nuclear reactions. Nuclear reactions under neutrons are the most wide spread and are of great practical use in nuclear power.

The general scheme of nuclear reactions is



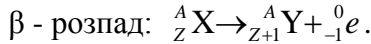
$$1\text{Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{Вк}.$$

Процес радіоактивного розпаду підпорядковується законам зміщення, які на підставі законів збереження речовини і електричного заряду, дозволяють встановити масове число і заряд ядра нового елемента, який виникає після α , β - розпаду:



Ядро з атомним номером Z і масовим числом A при розпаді перетворюється в ядро з атомним номером $Z-2$ і масовим числом $A-4$, тобто зміщується на два місця лівіше в періодичній системі елементів.

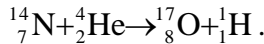
При β - розпаді позитивний заряд ядра збільшується на одиницю і ядро зміщується на одне місце правіше в періодичній системі:



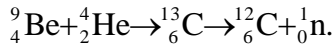
8.6 Ядерні реакції

Ядерні реакції – це процеси перетворення атомних ядер при взаємодії з елементарними частинками, або друг з другом. Ядерні реакції відбуваються в результаті взаємодії частинок під дією ядерних сил.

Вперше ядерну реакцію здійснив Резерфорд в 1919 р. :

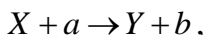


Штучне перетворення ядер при бомбардуванні їх α - частинками привело до відкриття нейтрона. Таку ядерну реакцію здійснили в 1930 р. В. Боте і Г. Беккер, а пояснив її в 1932 р. Дж. Чедвік:



Нейтрони почали широко застосовувати для проведення ядерних реакцій. Ядерні реакції під дією нейтронів є найбільш поширеними і мають велике практичне застосування в ядерній енергетиці.

Загальна схема ядерних реакцій має наступний вигляд:

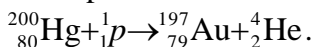


where X and Y are the initial and final nuclei,

a and b are bombarding and emissive particles.

It is interesting that ancient alchemists were right. It is possible to turn chemical elements into gold.

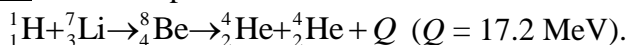
The following reaction proves this fact:



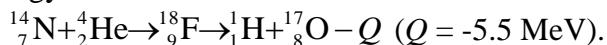
Unfortunately, the real process is expected to be very expensive. Such production of gold would be a dead loss.

During nuclear reactions the basic physical laws are obeyed—the laws of conservation of the charge, energy and the mass.

If the nuclear reaction releases energy, such reactions are exoenergetic. For example:



Endoenergetic reactions are called the reactions with the negative energy of a nuclear reaction:



The probability of a nuclear reaction is characterized by an effective cross section σ :

$$\sigma = \frac{dN}{nNdx},$$

where N – the number of particles incident per unit time per unit cross-sectional area of substance, which has n nuclei in the unit of volume;

dN – the number of particles involved in nuclear reactions in the layer thickness dx .

The unit of effective cross-section: 1 barn = 10^{-28} m^2 .

Nuclear reactions are classified according to the following criteria:

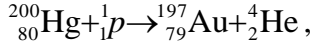
1. By the nature of the particles involved in nuclear reactions: under the action of neutrons, charged particles, γ -rays.

2. By the energy of particles: with small energies ($\sim 1 \text{ eV}$) with neutrons; with average energy (up to 10 MeV) with γ -quantum and charged particles; with high energies

де X і Y – це початкові і кінцеві ядра;

a і b - бомбардувальна та випромінювальна частинки.

Цікаво, що стародавні алхіміки були праві, адже можливо перетворити хімічні елементи на золото. Наступна реакція доводить цей факт:



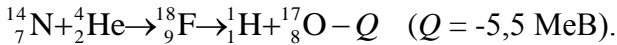
Нажаль, такий реальний процес буде дуже дорогим. Таке виробництво золота було б чистим збитком.

Під час ядерних реакцій виконуються основні фізичні закони - закони збереження енергії, заряду і маси.

Якщо в результаті ядерної реакції виділяється енергія, то такі реакції є екзоенергетичними. Наприклад:



Ендоенергетичними називаються реакції з від'ємним значенням енергії ядерної реакції:



Ймовірність здійснення ядерної реакції характеризується ефективним перерізом σ :

$$\sigma = \frac{dN}{nNdx},$$

де N – число частинок, що падають за одиницю часу на одиницю площі поперечного перерізу речовини, яке має в одиниці об'єму n ядер;

dN – число частинок, що беруть участь в ядерній реакції в шарі завтовшки dx .

Одиниця ефективного перерізу: 1 барн = 10^{-28} м^2 .

Ядерні реакції класифікують за наступними ознаками:

1. За родом частинок, що беруть участь в ядерній реакції: під дією нейтронів, заряджених частинок, γ – квантів.

2. За енергією частинок: при малих енергіях ($\sim 1\text{eV}$) за участю нейтронів; при середніх енергіях (до 10 MeV) за участю γ – квантів і заряджених частинок; при високих енергіях

(10-100 MeV) with the birth of elementary particles that are absent in the free state.

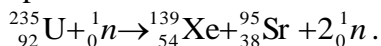
3. By the kind of nuclei, that take part in reactions: reaction with light nuclei ($A < 50$); with medium nuclei ($50 < A < 100$); with heavy nuclei ($A > 100$).

4. By the nature of nuclear transformations: reactions with emission of neutrons; reactions with emission of charged particles, capture reactions.

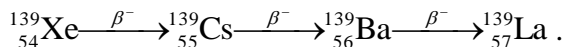
8.7 Nuclear Fission Reactions

Nuclear fission reactions proceed when a heavy nucleus under the action of neutrons is divided into two lighter nuclei with the emission of secondary neutrons.

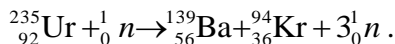
German scientists O. Hahn and F. Strassmann discovered the nuclear fission reaction in 1938. They found that an uranium nucleus is divided into two almost equal fragments of Ba and La during collisions with a neutron. The fission reaction is accompanied by the release of a large quantity of energy up to 200 MeV order per nucleus. As a result 2-3 secondary neutrons are liberated during one act of nuclear fission. The mass number of fragments lies within the limits from 79 to 165. There are several variants of fission reactions of uranium. For example:



The unstable fragment ${}_{54}^{139}\text{Xe}$ during three β^- - decays transforms into the stable isotope of lanthanum ${}_{57}^{139}\text{La}$:



The fission reaction of uranium can be accompanied by the emission of three neutrons:



Nuclei of ${}^{235}\text{U}$ and ${}^{239}\text{Pu}$ are divided under the action of fast as well as slow neutrons, but under the action of slow neutrons reactions proceed better. Nucleus of ${}^{238}\text{U}$ is divided only by the fast neutrons with energy more than 1.8 MeV.

(10-100 MeV) з народженням елементарних частинок, що відсутні у вільному стані.

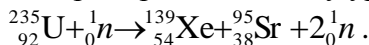
3. За родом ядер, що беруть участь в реакції: реакції на легких ядрах ($A < 50$); на середніх ядрах ($50 < A < 100$); на важких ядрах ($A > 100$).

4. За характером ядерних перетворювань: реакції з випусканням нейтронів, з випусканням заряджених частинок, реакції захоплення.

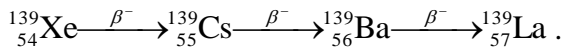
8.7 Ядерні реакції поділу

Ядерні реакції поділу відбуваються, якщо важке ядро під дією нейтронів ділиться на два більш легкі ядра з виділенням вторинних нейтронів.

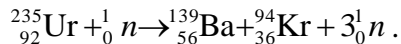
Німецькі вчені О. Хан і Ф. Штрассман відкрили ядерну реакцію поділу в 1938 р. Вони виявили, що ядро урану ділиться на два майже рівні фрагменти Ва і La під час зіткнень з нейтроном. Реакція поділу супроводжується виділенням великої кількості енергії до 200 MeV на ядро. Протягом одного акту ядерного поділу звільняються 2-3 вторинні нейтрони. Масове число фрагментів лежить в межах від 79 до 165. Існує декілька варіантів протікання ядерної реакції поділу урану. Наприклад:



Нестабільний фрагмент ${}_{54}^{139}\text{Xe}$ протягом трьох β^- - розпадів перетворюється в стабільний ізотоп ${}_{57}^{139}\text{La}$:



Реакція поділу урану може супроводжуватися виділенням трьох нейтронів:



Ядра ${}_{54}^{235}\text{U}$ та ${}_{84}^{239}\text{Pu}$ діляться під дією як швидких так і повільних нейтронів, але під дією повільних нейтронів реакції відбуваються краще. Ядро ${}_{82}^{238}\text{U}$ ділиться тільки швидкими нейтронами з енергією більш ніж 1,8 MeV.

The secondary neutrons may produce fission reactions of other nuclei of uranium, which under certain conditions lead to the development of the chain fission reaction.

8.8 Chain Fission Reactions

The chain fission reaction of division is a nuclear reaction of the separation of heavy nuclei by neutrons, resulting in the formation of secondary neutrons that cause the division of other nuclei with subsequent progressive increase in the number of acts of division.

The chain fission reaction is of large interest for practical purpose, because it allows to obtain a great amount of energy.

The theory of the uranium fission chain reaction was developed by Soviet physicists J. Zeldovich and Y. Khariton in 1939.

The chain reaction is characterized by the coefficient of reproduction k of neutrons, which is equal to the ratio of number N_n neutrons in a certain generation to the number N_{n-1} neutrons in the

previous generation:

$$k = \frac{N_n}{N_{n-1}}.$$

When $k < 1$, the number of divisions per unit of time decreases and the chain reaction is damped. When $k = 1$, the number of fissions per unit of time is constant and the chain reaction is sustained with a constant velocity, it is a self-maintained reaction. When $k > 1$, the number of fission acts increases exponentially, in this case the developing reaction occurs and it may become explosive. That is, a chain reaction is possible, when $k \geq 1$.

The coefficient of reproduction depends upon the nature of fissionable substance, its quantity, dimensions and forms of the active zone.

The critical mass of fissionable material is equal to the minimum mass required to carry out a chain reaction. If the mass of fissionable material is greater than the critical one, then $k > 1$ and the chain reaction develops.

Вторинні нейтрони можуть викликати реакції поділу інших ядер урану, які за певних умов приводять до розвитку ланцюгової реакції поділу.

8.8 Ланцюгова реакція поділу

Ланцюгова реакція поділу – це ядерна реакція поділу важких ядер нейтронами, внаслідок якої утворюються вторинні нейтрони, які викликають поділ інших ядер з наступним прогресивним зростанням кількості актів поділу.

Ланцюгова реакція поділу представляє великий інтерес для практичного використання, так як дозволяє отримувати велику кількість енергії.

Теорія ланцюгової реакції поділу урану була розроблена радянськими фізиками Я. Зельдовичем і Ю. Харитоновим в 1939 р.

Ланцюгова реакція характеризується коефіцієнтом розмноження k нейтронів, який дорівнює відношенню кількості нейтронів N_n в певному поколінні до кількості нейтронів N_{n-1} в попередньому поколінні:

$$k = \frac{N_n}{N_{n-1}}.$$

При $k < 1$, число поділів за одиницю часу зменшується і ланцюгова реакція є затухаючою. При $k = 1$ число поділів за одиницю часу стає і ланцюгова реакція відбувається з постійною швидкістю, це самопідтримуюча реакція. При $k > 1$ число поділів збільшується експоненціально, і в даному випадку має місце наростаюча реакція, яка може стати вибуховою. Тобто ланцюгова реакція можлива при $k \geq 1$.

Коефіцієнт розмноження залежить від природи речовини, що ділиться, його кількості, а також від розмірів і форми активної зони.

Критична маса речовини, що ділиться дорівнює мінімальній масі, потрібній для здійснення ланцюгової реакції. Якщо маса речовини більша, ніж критична, то $k > 1$ і ланцюгову реакцію розвивається.

There are controllable and uncontrollable chain reactions. The explosion of an atomic bomb is the result of the uncontrollable chain reaction. The nuclear charge of an atomic bomb consists of the two separate parts of ^{235}U , mass of which is less than critical one. As a result, chain reactions doesn't occur. If these two parts are united together, for example with the help of a simple explosion, uranium mass becomes bigger than critical one, the explosion chain reaction elaborates. As a result of the atomic bomb explosion, a large amount of energy is released.

Controllable nuclear reactions are used in nuclear reactors.

8.9 Nuclear Reactor

Controllable chain nuclear fission reactions with a regulated fission rate occur in nuclear reactors which are widely used for energy production in nuclear power stations.

For the first time the Italian physicist E. Fermi created the nuclear reactor in 1942. In USSR the nuclear reactor was developed under the guidance of I. Kurchatov in 1946, and the first nuclear power station with power 5MW was constructed in 1954.

Fissionable elements $^{235}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{232}_{90}\text{U}$ are used now as nuclear fuel. Uranium is mostly useable. The natural uranium contains mostly two nuclides $^{238}_{92}\text{U}$ and $^{235}_{92}\text{U}$. The principal part of natural uranium consists of isotope $^{238}_{92}\text{U}$, which only fissions under the action of fast neutrons. Nuclide $^{235}_{92}\text{U}$ fissions by both fast and slow neutrons (thermal) and is found in natural uranium in a very small amount $\sim 0.7\%$. The fission reaction on slow neutrons is better. So, the enriched uranium $^{235}_{92}\text{U}$ with a concentration of 5% is used as a fuel for the nuclear reactor.

One of the possible reactions of uranium $^{235}_{92}\text{U}$ fission is the reaction that occurs according to the following scheme:

Існують керовані і некеровані ланцюгові реакції. Вибух атомної бомби – результат некерованої ланцюгової реакції. Ядерний заряд атомної бомби складається з двох відокремлених частин ^{235}U , маси яких менші за критичну. Внаслідок чого ланцюгова реакція не відбувається. Якщо ці дві частини з'єднати разом, наприклад за допомогою звичайного вибуху, маса урану стає більше за критичну і розвивається вибухова ланцюгова реакція. В результаті вибуху атомної бомби виділяється велика кількість енергії. Керовані ланцюгові реакції використовуються в ядерних реакторах.

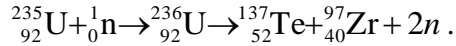
8.9 Ядерний реактор

Керовані ланцюгові реакції ядерного поділу з регульованою швидкістю поділу відбуваються в ядерних реакторах, які широко використовуються для виробництва енергії на атомних електростанціях.

В 1942 р. італійський фізик Е. Фермі вперше створив ядерний реактор. У СРСР ядерний реактор був введений в дію в 1946 р. під керівництвом І. Курчатова, а в 1954 р. була побудована перша атомна електростанція потужністю 5 МВт.

Елементи поділу $^{235}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{232}_{90}\text{U}$ використовуються як ядерне паливо. Найбільш використовується уран. Природний уран містить переважно два нукліди $^{238}_{92}\text{U}$ і $^{235}_{92}\text{U}$. Основна частина природного урану складається з нукліду $^{238}_{92}\text{U}$, який розщеплюється лише під дією швидких нейтронів. Нуклід $^{235}_{92}\text{U}$ розщеплюється як швидкими, так і повільними (тепловими) нейтронами та знаходиться у природному урані у дуже малій кількості $\sim 0,7\%$. Реакція поділу на повільних нейтронах відбувається краще. Тому в якості ядерного палива використовують збагачений уран $^{235}_{92}\text{U}$ до концентрації 5%.

Однією з можливих реакцій поділу урану $^{235}_{92}\text{U}$ є реакція, яка відбувається за такою схемою:



Let's consider the principle of an operation of a nuclear reactor with the slow neutrons. The scheme of the nuclear reactor is shown in Fig. 8.3

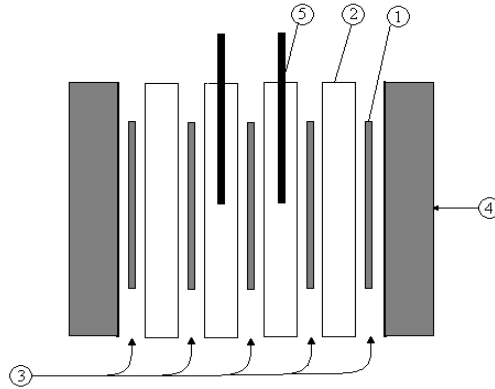
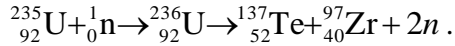


Figure 8.3

The main parts of the nuclear reactor are: fuel rods – heat-generating fuel elements (1), moderator (2), coolant (3), reflector (4), control rods (5).

Fuel elements contain nuclear fuel - uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$ and are in moderator environment. To slow the neutrons a moderator containing the substance with light atoms is used – graphite, beryllium, heavy water. Fuel elements are heated as a result of the fission chain reaction. A cooler (gas, water) is used to cool the fuel rods and transfer thermal energy to the generator. The active zone of a nuclear reactor is surrounded by a reflector that reduces neutron leakage.

The chain reaction is controlled by means of special control rods made of materials that strongly absorb neutrons. The materials of control rods are boron and cadmium. The chain reaction is developed when control rods are put out, when control rods are put in the chain reaction stops.



Розглянемо принцип дії ядерного реактора на повільних нейтронах. Схема ядерного реактора зображена на рис. 8.3.

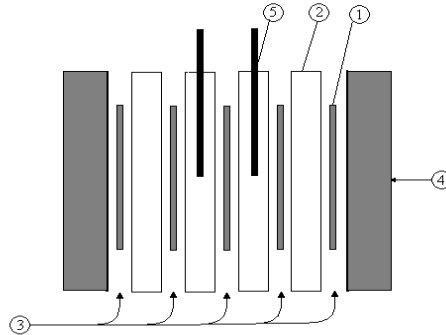


Рисунок 8.3

Головними частинами ядерного реактора є: паливні стержні – тепловиділяючі елементи (твेलі) (1), сповільнювач (2), охолоджувач (3), відбивач (4), керуючі стрижні (5).

Тепловиділяючі елементи містять ядерне паливо – уран ${}_{92}^{235}\text{U}$ і знаходяться в середовищі сповільнювача. Для уповільнення нейтронів використовується сповільнювач, матеріалом якого є речовини з легкими ядрами – графіт, берилій, важка вода. Тепловиділяючі елементи розігріваються в результаті ланцюгової реакції поділу. Для охолодження твелів і передачі теплової енергії до генератора використовують охолоджувач (газ, вода).

Активна зона ядерного реактора оточена відбивачем, який зменшує витік нейтронів.

Керування ланцюговою реакцією здійснюється за допомогою спеціальних керуючих стрижнів з матеріалів, що сильно поглинають нейтрони. Матеріалами для керуючих стрижнів є бор і кадмій. Ланцюгова реакція відбувається, якщо керуючі стрижні видалені. Якщо вони опускаються, реакція зупиняється.

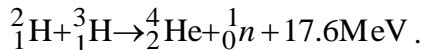
Nowadays the nuclear power engineering is highly developed in many well developed countries, it is the cheapest and the most eco-friendly way of receiving electrical energy.

8.10 Nuclear Fusion

A nuclear reaction of synthesis of light atomic nuclei in which a heavier nucleus is formed with the release of big value of energy is called nuclear fusion. Synthesis reactions of atomic nuclei occur at very high temperatures of $\sim 10^7$ K and are therefore called thermonuclear reactions. Under such conditions any substance can exist only in the form of high-temperature plasma. Thermonuclear reactions occur in the star depth. This reactions might be the base source of energy of radiation of stars and the Sun.

The energy released per nucleon in these reactions is much greater than in fission reactions of heavy nuclei. The emission of energy during nuclear fusion is ~ 3.5 MeV/nucleon, when in fission reactions the energy equals 0.85 MeV/nucleon.

At first uncontrollable thermonuclear reaction was received in hydrogen bomb in USSR (1953), in which the nuclear fusion reaction was realized:



The explosive substance was the mixture of deuterium and tritium. The required temperature was received during the explosion of the atomic bomb.

The basic problem of a controlled thermonuclear reaction is the formation and storage of high-temperature plasma in the working volume. So, in 1950, Soviet scientist A. Sakharov and I. Tamm introduced the idea of maintenance of high-temperature plasma with the help of a strong magnetic field. This method is most effective for thermal insulation of plasma. That is why the efforts of scientists all over the world today are aimed at the implementation of controlled thermonuclear fusion, which can become a practically inexhaustible source of nuclear energy for humanity.

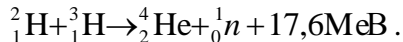
На сьогодні атомна енергетика широко розвивається у багатьох високо розвинутих країнах, вона є одним з найбільш дешевих і екологічно чистих способів отримання електроенергії.

8.10 Ядерний синтез

Ядерна реакція злиття легких атомних ядер з утворенням більш важких ядер, в результаті якої виділяється велика кількість енергії, називається ядерним синтезом. Реакції синтезу атомних ядер відбуваються за дуже високих температур $\sim 10^7$ К і тому називаються термоядерними реакціями. При таких умовах будь-яка речовина може існувати лише у вигляді високотемпературної плазми. Термоядерні реакції відбуваються в глибинах зірок. Можливо, ці реакції є головним джерелом енергії випромінювання Сонця і зірок.

Енергія, яка виділяється на один нуклон при цих реакціях, значно більша, ніж в реакціях поділу важких ядер. Енерговиділення при реакції синтезу складає $\sim 3,5$ МеВ/нуклон, тоді як при реакції поділу важких ядер $\sim 0,85$ МеВ/нуклон.

Вперше некерована термоядерна реакція була здійснена у водневій бомбі в СРСР (1953 р.), в якій була реалізована наступна реакція ядерного синтезу:



Вибуховою речовиною була суміш дейтерію і тритію, а необхідна для термоядерної реакції температура досягала при вибуху атомної бомби.

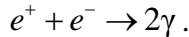
Основною задачею для здійснення керованої термоядерної реакції є утворення і збереження високотемпературної плазми у робочому об'ємі. Так в 1950 р. радянські вчені А. Сахаров і І. Тамм започаткували ідею утримання високотемпературної плазми за допомогою сильного магнітного поля. Такий метод є найбільш ефективним для термоізоляції плазми. Тому сьогодні зусилля вчених усього світу спрямовані на здійснення керованого термоядерного синтезу, який може стати практично невичерпним джерелом ядерної енергії для людства.

8.11 Elementary Particles

Elementary particles are undivided particles which have no any intrinsic structure.

Now we know about 400 elementary particles. More of them are unstable. Elementary particles can be transformed into other particles when they collide. Elementary particles have mass, electric charge, spin and other quantum characteristics. Special particles called antiparticles correspond to each elementary particle. A particle and the corresponding antiparticle have the same mass, spin and lifetime. But the electric charge and magnetic moment of this pair of particles are opposite in sign.

The process of interaction of a particle and an antiparticle is called annihilation. The formation of γ -quanta or other particles is the result of annihilation. For example, annihilation of an electron and a positron is accompanied with the transformation of these particles into two γ -quanta:



These interactions are characterized by constant of interaction and average life time or characteristic time of transfer. Constant of interaction characterizes the intensity of the interaction between elementary particles. It is the dimensionless value, which determines the probability of interaction processes. There are four types of fundamental interactions between elementary particles: a strong interaction, an electromagnetic, a weak and a gravitational ones. Table 8.1 shows the comparative description for the four types of fundamental interactions.

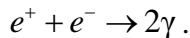
Table 8.1

Type of interaction	Constant of interaction	Average lifetime, s	Radius of interaction, m
Strong	10	10^{-23}	10^{-15}
Electromagnetic	$\sim 10^{-2}$	10^{-16}	∞
Weak	$\sim 10^{-10}$	$10^{-10} \dots 10^{-13}$	10^{-18}
Gravitational	$\sim 10^{-40}$	-	∞

8.11 Елементарні частинки

Елементарні частинки - неподільні частинки, які не мають ніякої внутрішньої структури. Зараз відомо близько 400 елементарних частинок. Більшість з них є нестійкими. Елементарні частинки можуть перетворюватись в інші при зіткненнях. Елементарні частки мають масу, електричний заряд, спин і інші квантові характеристики. Кожній елементарній частинці відповідають спеціальні частинки, що називаються античастинками. Частинка і відповідна античастинка мають однакову масу, спин і час життя. Але електричний заряд і магнітний момент цієї пари частинок протилежні за знаком.

Процес взаємодії частинки і античастинки називається анігіляцією. В результаті анігіляції утворюються γ - кванти або інші частинки. Наприклад, анігіляція електрона і позитрона супроводжується перетворенням цих частинок на два γ -кванта:



Взаємодія елементарних частинок характеризується константою взаємодії і середнім часом життя або характеристичним часом переходу. Константа взаємодії характеризує інтенсивність взаємодії елементарних часток. Це - безрозмірна величина, що визначає ймовірність процесів взаємодії. Існує чотири види фундаментальних взаємодій елементарних часток: сильна взаємодія, електромагнітна, слабка і гравітаційна. В табл. 8.1 наведено порівняльну характеристику чотирьох видів фундаментальних взаємодій.

Таблиця 8.1

Тип взаємодії	Константа взаємодії	Середній час життя, с	Радіус взаємодії, м
Сильна	10	10^{-23}	10^{-15}
Електромагнітна	$\sim 10^{-2}$	10^{-16}	∞
Слабка	$\sim 10^{-10}$	$10^{-10} \dots 10^{-13}$	10^{-18}
Гравітаційна	$\sim 10^{-40}$	-	∞

The strong interaction exists between nucleons in a nucleus. It is characterized by the higher constant of interaction $k \sim 10$. The radius of interaction is $r \sim 10^{-15}$ m. The strong interaction is the reason for existence of stable elements in nature.

The strong interaction between two nucleons is caused by exchange particles being called mesons.

The electromagnetic interaction is weaker than the strong interaction. The constant of interaction equals $\sim 10^{-2}$. The radius of interaction is unlimited $r = \infty$. The electromagnetic interaction exists between the electron and the nuclear, between atoms in the molecule. The exchange particle of the electromagnetic interaction is a photon.

The weak interaction is responsible for the processes of β - decay of nuclei, decay of particles and the interaction of neutrinos with substances.

The constant of interaction is of small value $\sim 10^{-10}$, the radius of interaction is of the order of $r \approx 10^{-18}$ m.

The gravitational interaction is the weakest interaction. The constant of interaction is of the order of $\sim 10^{-40}$. The radius of interaction is unlimited $r = \infty$.

The gravitational interaction exists among all particles. The relative part of this type of interaction is very small and it is negligible one.

Elemental particles are classified according to their properties and characteristics. There exist four types of elementary particles: photons, leptons, mesons, baryons. All elementary particles are divided into weakly interacting (leptons) and highly interacting (hadrons - mesons, baryons). The table 8.2 presents the groups of elementary particles and their basic characteristics.

In addition to these types of elementary particles, there are short-lived particles with a strong interaction, which are called resonances. These particles correspond to the resonance states being formed as a result of the interaction of several particles. The average lifetime of resonances is of the order of $\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ s. The physical nature of resonances is unknown today.

Сильна взаємодія існує між нуклонами в ядрі. Вона характеризується найвищою константою взаємодії $k \sim 10$. Радіус взаємодії складає $r \sim 10^{-15}$ м. Сильна взаємодія є причиною існування стійких елементів в природі.

Сильна взаємодія між двома нуклонами здійснюється частинками обміну - мезонами.

Електромагнітна взаємодія слабкіша, ніж сильна взаємодія. Константа взаємодії є порядку $\sim 10^{-2}$. Радіус взаємодії необмежений $r = \infty$. Електромагнітна взаємодія існує між електроном і ядром, між атомами в молекулі. Обмінною частинкою електромагнітної взаємодії є фотон.

Слабка взаємодія відповідальна за процеси β - розпаду ядер, розпаду частинок і взаємодії нейтрино з речовинами.

Постійна взаємодії має маленьке значення $\sim 10^{-10}$, радіус взаємодії є порядку $r \sim 10^{-18}$ м.

Гравітаційна взаємодія - найслабкіша взаємодія. Константа взаємодії є порядку $\sim 10^{-40}$. Радіус взаємодії необмежений $r = \infty$. Гравітаційна взаємодія існує між всіма частинками. Відносна частина цього виду взаємодії дуже незначна і нею можна знехтувати.

Класифікують елементарні частинки за їх властивостями і характеристиками. Існують чотири групи елементарних частинок: фотони, лептони, мезони, баріони. Всі елементарні частинки поділяються на слабовзаємодіючі (лептони) і сильно взаємодіючі (адрони – мезони, баріони). В табл. 8.2 наведені групи елементарних частинок та їх основні характеристики.

Крім цих видів елементарних частинок існують короткоживучі частинки з сильною взаємодією, які називаються резонансами. Ці частинки відповідають резонансним станам, які утворюються в результаті взаємодії декількох частинок. Середній час існування резонансів становить порядку $\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ с. Фізична природа резонансів на сьогодні ще невідома.

Table 8.2

Group	Particle	Symbol	Rest mass	Charge	Spin	Average lifetime,s
Photon	Photon	γ	0	0	1	stable
Leptons	Electron	e^-	1	-1	1/2	stable
	Positron	e^+	1	+1	1/2	stable
	Neutrino	ν_e	0	0	1/2	stable
	Antineutrino	$\tilde{\nu}_e$	0	0	1/2	stable
	Muon (μ -meson)	μ^+ μ^-	206.8 206.8	+1 -1	1/2 1/2	$\sim 10^{-6}$ $\sim 10^{-6}$
Mesons	π -meson (pion)	π^0	264.2	0	0	$\sim 10^{-15}$
		π^0	273.2	+1	0	$\sim 10^{-8}$
		π^0	273.2	-1	0	$\sim 10^{-8}$
	k -meson	k^+	966.5	+1	0	$\sim 10^{-8}$
		k^-	966.5	-1	0	$\sim 10^{-8}$
		k^0	974.8	0	0	$\sim 10^{-10}$
		\tilde{k}^0	974.8	0	0	$\sim 10^{-10}$
Baryons	Proton	p	1836.1	+1	1/2	stable
	Antiproton	\tilde{p}	1836.1	-1	1/2	stable
	Neutron	n	1838.6	0	1/2	$\sim 10^3$
	Antineutron	\tilde{n}	1838.6	0	1/2	$\sim 10^3$
	Lambda hyperon	λ^0	2182	0	1/2	$\sim 10^{-10}$
	Sigma hyperon	Σ^0	2324	0	1/2	$\sim 10^{-10}$
		Σ^+	2327	+1	1/2	$\sim 10^{-10}$
		Σ^-	2341	-1	1/2	$\sim 10^{-10}$

Таблиця 8.2

Група	Частинка	Символ	Маса спокою	Заряд	Спін	Середній час існування, с
Фотон	Фотон	γ	0	0	1	стійкий
Лептони	Електрон	e^-	1	-1	1/2	стійкий
	Позитрон	e^+	1	+1	1/2	стійкий
	Нейтрино	ν_e	0	0	1/2	стійкий
	Антинейтрино	$\tilde{\nu}_e$	0	0	1/2	стійкий
	Мюон (μ-мезон)	μ^+ μ^-	206,8 206,8	+1 -1	1/2 1/2	$\sim 10^{-6}$ $\sim 10^{-6}$
Мезони	π-мезон (піон)	π^0	264,2	0	0	$\sim 10^{-15}$
		π^+	273,2	+1	0	$\sim 10^{-8}$
		π^-	273,2	-1	0	$\sim 10^{-8}$
	k-мезон	k^+	966,5	+1	0	$\sim 10^{-8}$
		k^-	966,5	-1	0	$\sim 10^{-8}$
		k^0	974,8	0	0	$\sim 10^{-10}$
		\tilde{k}^0	974,8	0	0	$\sim 10^{-10}$
Баріони	Протон	p	1836,1	+1	1/2	стійкий
	Антипротон	\tilde{p}	1836,1	-1	1/2	стійкий
	Нейтрон	n	1838,6	0	1/2	$\sim 10^3$
	Антинейтрон	\tilde{n}	1838,6	0	1/2	$\sim 10^3$
	Лямбда гіперон	λ^0	2182	0	1/2	$\sim 10^{-10}$
	Сігма гіперон	Σ^0	2324	0	1/2	$\sim 10^{-10}$
		Σ^+	2327	+1	1/2	$\sim 10^{-10}$
		Σ^-	2341	-1	1/2	$\sim 10^{-10}$

Control Questions
Elements of Nuclear Physics

1. What does an atomic nucleus consist of?
2. What is binding energy and mass defect?
3. What are the properties and nature of nuclear forces?
4. What is called radioactivity?
5. Formulate the law of radioactive decay.
6. What are nuclear reactions and what are their types?
7. What is a chain fission reaction?
8. Explain the principle of operation of a nuclear reactor.
9. What is nuclear fusion?
10. What are the properties and types of elementary particles?

Контрольні запитання
Елементи ядерної фізики

1. З чого складається атомне ядро?
2. Що таке енергія зв'язку та дефект маси?
3. Які властивості і природа ядерних сил?
4. Що називається радіоактивністю?
5. Сформулюйте закон радіоактивного розпаду.
6. Що таке ядерні реакції і які їх види існують?
7. Що таке ланцюгова реакція поділу?
8. Поясніть принцип роботи ядерного реактора.
9. Що таке ядерний синтез?
10. Які властивості і види елементарних частинок?

Subject Index

Предметний покажчик

- | | |
|---|---------------------------------------|
| Absorption of light 168 | Поглинання світла 169 |
| Absorptance (spectral absorptive ability) 168 | Спектральна поглинальна здатність 169 |
| Acceptor level 340 | Акцепторний рівень 341 |
| Acceptor 338 | Акцептор 341 |
| Acoustics 94 | Акустика 95 |
| Alpha-decay 382 | Альфа-розпад 383 |
| Annihilation 402 | Анігіляція 403 |
| Antineutrino 406 | Антинейтрино 407 |
| Antiparticle 402 | Античастинка 403 |
| Atomic bomb 396 | Атомна бомба 397 |
| Atomic spectrum 208 | Атомний спектр 209 |
|
 |
 |
| Band theory of solids 318 | Зонна теорія твердих тіл 319 |
| Barion 404 | Баріон 405 |
| Binding energy of nucleus 376 | Енергія зв'язку ядра 377 |
| Becquerel 386 | Беккерель 387 |
| Beta-decay 382 | Бета-розпад 383 |
| Bohr's postulates 212 | Постулати Бора 213 |
| Bohr's theory 212 | Теорія Бора 213 |
| Bohr's magneton 262 | Магнетон Бора 263 |
| Boson 288 | Бозон 289 |
| Bouger's law 366 | Закон Бугера 367 |
| Bracket's series 210 | Серія Брекета 211 |
| Brewster's law 160 | Закон Брюстера 161 |
| Balmer's series 210 | Серія Бальмера 211 |
| Balmer's formula 210 | Формула Бальмера 211 |
|
 |
 |
| Coefficient of reproduction 394 | Коефіцієнт розмноження 395 |
| Coherency 124 | Когерентність 125 |
| Chain fission reaction 394 | Ланцюгова реакція поділу 395 |
| Charge carriers mobility 342 | Рухливість носіїв заряду 343 |

- Compton's effect 192
 Conduction band 342
 Cooper pair 316
 Corpuscular-wave dualism 198
- Crystal grating 154
 Critical mass 394
 Critical temperature 312
 Cutoff wavelength of photoconductivity 352
- Damped oscillations 38
 de Broglie formula 228
 Debye's law 308
 Degenerated gas 288
 Degeneracy temperature 290
 Dielectrics 324
 Diffraction grating 148
 Diffraction of light 134
 Donor level 340
 Doppler's effect 106
 Dulong-Petit law 300
- Einstein's equation for external photoeffect 184
 Einstein's theory of photoeffect 184
 Elastic wave 82
 Electron conductivity 336
 Electron work function 184
 Electron-hole junction (p-n junction) 344
 Electronic work function 184
 Elementary particle 402
- Ефект Комптона 193
 Зона провідності 343
 Куперівська пара 317
 Корпускулярно-хвильовий дуалізм 199
 Кристалічна ґратка 155
 Критична маса 395
 Критична температура 313
 Червона границя фотопровідності 353
- Затухаючі коливання 39
 Формула Де Бройля 229
 Закон Дебая 309
 Вироджений газ 289
 Температура виродження 291
 Діелектрики 325
 Дифракційна ґратка 149
 Дифракція світла 135
 Донорний рівень 341
 Ефект Доплера 107
 Закон Дюлонга-Пті 301
- Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту 185
 Теорія фотоефекту Ейнштейна 185
 Пружня хвиля 83
 Провідність електронна 337
 Робота виходу електрона 185
 Електронно-дірковий перехід (p-n перехід) 345
 Робота виходу електрона 185
 Елементарна частинка 403

- Emission ability 164
- Energetic band 322
- Energy flux density 118
- Energy of an electromagnetic wave 118
- Energy of binding of nucleons in the nucleus 376
- Excitone 354
- Extrinsic semiconductors 336
- Fermi energy 290
- Fermi level 290
- Fermion 286
- Fluorescence 356
- Forbidden band (band gap) 324
- Forced oscillations 44
- Franck and Hertz's experiments 214
- Fraunhofer's diffraction 134
- Fresnel's diffraction 134
- Fresnel's zones method 134
- Function of distribution 284
- Hadron 404
- Half-life 386
- Harmonic oscillations 16
- Hemphrey's series 210
- Hole conductivity 336
- Huygens-Fresnel's principle 134
- Hydrogen atom 220
- Випромінювальна здатність 165
- Енергетична зона 323
- Густина потоку енергії 119
- Енергія електромагнітної хвилі 119
- Енергія зв'язку нуклонів у ядрі 377
- Екситон 355
- Домішкові напівпровідники 337
- Енергія Фермі 291
- Рівень Фермі 291
- Ферміон 287
- Флуоресценція 357
- Заборонена зона 325
- Вимушені коливання 45
- Досліди Франка і Герца 215
- Дифракція Фраунгофера 135
- Дифракція Френеля 135
- Метод зон Френеля 135
- Функція розподілу 285
- Адрон 405
- Період піврозпаду 387
- Гармонічні коливання 17
- Серія Хемфрі 211
- Діркова провідність 337
- Принципи Г'юйгенса-Френеля 135
- Атом водню 221

- Ideal black body 168
 Impurity conductivity 336
 Impurity level 340
 Impurity photoconductivity 340
 Induced radiation 362
 Integral emission ability 164
 Intensity of sound 96
 Interference 124
 Intrinsic conductivity 330
 Intrinsic photoconductivity 350
 Intrinsic semiconductors 330
 Isobars 374
 Isomers 374
 Isotones 374
 Isotope 374
 Kirchhoff's law 170
 Laser 364
 Law of radioactive decay 384
 Lepton 404
 Luminescence 356
 Lyman's series 210
 Magnetic quantum number 260
 Magnetic spin quantum number 264
 Main quantum number 260
 Malus' law 160
 Mass defect 376
 Абсолютно чорне тіло 167
 Домішкова провідність 337
 Домішковий рівень 341
 Домішкова фотопровідність 341
 Вимушене випромінювання 363
 Інтегральна випромінююча здатність 165
 Інтенсивність звуку 97
 Інтерференція 125
 Власна провідність 331
 Власна фотопровідність 351
 Власні напівпровідники 331
 Ізобари 375
 Ізомери 375
 Ізотони 375
 Ізотопи 375
 Закон Кірхгофа 171
 Лазер 365
 Закон радіоактивного розпаду 385
 Лептон 405
 Люмінесценція 357
 Серія Лаймана 211
 Магнітне квантове число 261
 Магнітне спінове квантове число 265
 Головне квантове число 261
 Закон Малюса 161
 Дефект маси 377

- Mass number 372
 Maxwell's equations 108
 Metals 324
 Meisner's effect 314
 Meson 380
 Muon 380
- Natural light 158
 Neutrino 406
 Neutron 372
 Nuclear fission reaction 392
 Nuclear forces 378
 Nuclear fusion 400
 Nuclear reactions 388
 Nuclear reactor 396
 Nucleon 372
 Nucleus of atom 372
 Nuclides 374
- Optical path difference 126
 Optical pyrometry 174
 Optical resonator 368
 Orbital quantum number 260
 Oscillatory contour 54
- Paschen's series 210
 Pauli's principle 270
 Pfunda series 210
 Phase space 284
 Phase velocity 88
 Phonon 296
 Phosphorescence 356
 Photoelectric effect 178
 Photoluminescence 356
- Масове число 373
 Рівняння Максвела 109
 Метали 325
 Ефект Мейснера 315
 Мезон 381
 Мюон 381
- Природне світло 159
 Нейтрино 407
 Нейтрон 373
 Реакція ядерного поділу 393
 Ядерні сили 379
 Ядерний синтез 401
 Ядерні реакції 389
 Ядерний реактор 397
 Нуклон 373
 Ядро атома 373
 Нукліди 375
- Оптична різниця ходу 127
 Оптична пірометрія 175
 Оптичний резонатор 369
 Орбітальне квантове число 261
 Коливальний контур 55
- Серія Пашена 211
 Принцип Паулі 271
 Серія Фонда 211
 Фазовий простір 285
 Фазова швидкість 89
 Фонон 297
 Фосфоресценція 357
 Фотоелектричний ефект 179
 Фотолюмінесценція 357

- Photon 188
 Physical Pendulum 26
 Plane-polarized wave 158
 Plank's formula 172
 Polarization of light 156
 Polarizer 160
 Population inversion 368
 Positron 402
 Pressure of light 190
 Proton 372
 Pumping 368
- Quality of oscillatory system 44
- Quantum 172
 Quantum mechanics 226
 Quantum numbers 258
 Quantum statistics of Bose-Einstein 286
 Quantum statistics of Fermi-Dirac 286
- Radioactive decay 384
 Radioactive decay law 384
- Radioactivity 382
 Recombination 360
 Resonance of voltages 78
 Resonances 404
 Roentgen 152
 Rutherford's model of atom 204
 Rydberg's constant 210
- Saturation current 348
- Фотон 189
 Фізичний маятник 27
 Площина поляризації 159
 Формула Планка 173
 Поляризація світла 157
 Поляризатор 161
 Інверсна заселеність 369
 Позитрон 403
 Тиск світла 191
 Протон 373
 Накачка 369
- Добротність коливальної системи 45
 Квант 173
 Квантова механіка 227
 Квантові числа 259
 Квантова статистика Бозе-Енштейна 287
 Квантова статистика Фермі-Дірака 287
- Радіоактивний розпад 385
 Закон радіоактивного розпаду 385
 Радіоактивність 383
 Рекомбінація 361
 Резонанс напруг 79
 Резонанси 405
 Рентген 153
 Модель атома Резерфорда 205
 Стала Рідберга 211
- Струм насичення 349

- Schrodinger's equation 238
 Semiconductor
 photoconductivity 350
 Semiconductors 330
 Sound 96
 Sound waves 94
 Sound location 104
 Spectral lines 208
 Spectrum of electromagnetic waves 120
 Spin 264
 Spin quantum number 264
 Spontaneous emission 362

 Spring pendulum 22
 Standing wave 90
 Stephan-Bolzman's law 172
 Stokes' rule 358
 Stoletov's law for external photoeffect 182
 Strong interaction 404
 Superconductivity 312
 Superposition principle 236

 Thermal radiation 164
 Thermonuclear reaction 400
 Thomson's model of atom 204
 Thomson's formula 58
 Transverse wave 82
 Traps 360
 Travelling wave 86
 Tunnel effect 250

 Ultrasound 94
- Рівняння Шредінгера 239
 Фотопровідність напівпровідників 351
 Напівпровідники 331
 Звук 97
 Звукові хвилі 95
 Звукова локація 105
 Спектральні лінії 209
 Спектр електромагнітних хвиль 121
 Спін 265
 Спінове квантове число 265
 Спонтанне випромінювання 363
 Пружинний маятник 23
 Стояча хвиля 91
 Закон Стефана-Больцмана 173
 Правило Стокса 359
 Закон Столетова для зовнішнього фотоефекту 183
 Сильна взаємодія 405
 Надпровідність 313
 Принцип суперпозиції 237

 Теплове випромінювання 165
 Термоядерна реакція 401
 Модель атома Томсона 205
 Формула Томсона 59
 Поперечна хвиля 83
 Пастки 361
 Біжуча хвиля 87
 Тунельний ефект 251

 Ультразвук 95

Umov-Poynting's vector 118	Вектор Умова-Пойнтінга 119
Uncertainty principle 230	Співвідношення невизначеностей 231
Uranium 392	Уран 393
Valence band 324	Зона провідності 325
Volt-ampere characteristic of p-n junction 350	Вольт-амперна характеристика p-n переходу 351
Wave 82	Хвиля 83
Wave equation 90	Хвильове рівняння 91
Wave function 234	Хвильова функція 235
Wave number 88	Хвильове число 89
Wave optics 124	Хвильова оптика 125
Weak interaction 402	Слабка взаємодія 403
Wien's displacement law 172	Закон зміщення Віна 173
Wulff-Bragg's formula 154	Формула Вульфа-Брегга 155
X-ray analysis 156	Рентгеноструктурний аналіз 157
X-ray diffraction 152	Дифракція рентгенівського випромінювання 153
X-rays 120	Рентгенівські промені 121
Zeeman effect 262	Ефект Зеемана 263

References Література

1. Воронкин А. С. Линейные колебания и волны: Введение в акустику: учеб. пособие. Луганськ : СПД Резніков В.С., 2012. 224 с.
2. Грехов А. М. Фізика. Навч. посіб. (англ. мовою). Київ : Вид-во Європ. ун-ту, 2003. 356 с.
3. Епифанов Г. И. Физика твердого тела. М. : Высшая школа, 1982. 288 с.
4. Кучерук І. М. Загальний курс фізики. Т.3. Оптика. Квантова фізика: навч. посібник. Київ : Техніка, 2006. 518 с.
5. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб.: в 3 т. М. : Наука, 1986. Т. 1. 432 с., Т. 2. 496 с., Т. 3. 318 с.
6. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. М. : Высшая школа, 2001. 542 с.
7. Чертов А. Г. Физические величины (терминология, определения, размерности, единицы): справочное изд. М.: Высшая школа, 1990. 336 с.
8. Чолпан П. П. Фізика: підручник. Київ : Вища школа, 2003. 568 с.
9. Errede S. The Human Ear - Hearing, Sound Intensity and Loudness Levels. Acoustical Physics of Music: Lectures. USA : The University of Illinois at Urbana-Champaign. URL: <https://courses.physics.illinois.edu>
10. Gevorkjan R. G. A Course of General Physics. Moscow : Higher School, 1967. 550 p.
11. Halliday D., Resnick R. and Walker J. Fundamentals of Physics. 10 edition : Wiley, 2015. 1232 p.
12. Kireev P. S. Semiconductor Physics. Moscow : Mir Publishers, 1974. 672 p.
13. Koshkin N. I. and Shierikevich M. G. Handbook of Elementary Physics. Moscow : Mir Publishers, 1977. 272 p.
14. Англо-русский физический словарь / под ред. Д. М. Толстого. М. : Советская энциклопедия, 1968. 848 с.

Навчальне видання

ЛУЩИН Сергій Петрович

COURSE OF PHYSICS
Volume 2
КУРС ФІЗИКИ
Том 2

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір: *Луцин С.П.*
Комп'ютерна верстка: *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 07.07.2020. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 26,16.
Тираж 100 прим. Зам. № 682.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.