

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет

"Запорізька політехніка"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної та практичної роботи з дисципліни "Електротехніка.

Частина II.

Однофазні кола синусоїдного струму" для студентів спеціальностей

131 "Прикладна механіка" всіх форм навчання

2019

Методичні вказівки до самостійної та практичної роботи з дисципліни "Електротехніка. Частина II. Однофазні кола синусоїдного струму" для студентів спеціальності 131 "Прикладна механіка" всіх форм навчання/ Укл.: І.О. Афанасьєва, Т.В. Малахова - Запоріжжя: НУЗП, 2019 - 50 с.

Укладач: І.О.Афанасьєва, ст. викладач;
Т.В. Малахова, лаборант

Рецензент: В.В.Козлов ,доцент .к.т.н.

Відповідальний за випуск: С.М. Тиховод. Доцент , д.т.н.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри ТЗЕ

Протокол №3 від 07.03.2019 р.

РЕКОМЕНДОВАНО

до видання НМК

Машинобудівельного факультету

Протокол №9 від 18.04.2019 р.

ЗМІСТ

Передмова.....	4
1. ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИНУСОЇДНИХ ВЕЛИЧИН ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРІВ І КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.....	6
2. ЕЛЕМЕНТИ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. ВЕКТОРНІ ДІАГРАМИ І КОМПЛЕКСНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ НИХ.....	15
3. СПОСОБИ З'ЄДНАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА.....	21
4. ОСНОВИ СИМВОЛІЧНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	26
5. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ. МИТТЄВА, АКТИВНА, РЕАКТИВНА І ПОВНА ПОТУЖНОСТІ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	28
6. РЕЗОНАНСИ В КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	36
7. ВЕКТОРНІ І ТОПОГРАФІЧНІ ДІАГРАМИ.....	43
8. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ.....	46
ЛІТЕРАТУРА	50

ПЕРЕДМОВА

У методичних вказівках розглянуті рекомендації до виконання контрольної роботи, приведені варіанти завдань з електричними схемами.

Метою контрольної роботи є перевірка засвоєння студентами відповідних розділів курсу.

Зміст контрольної роботи повинний відповідати варіанту завдання. Номер варіанта визначається за номером залікової книжки чи номеру прізвища студента в журналі обліку занять. Контрольні варіанти за курсом зроблені 30-варіантними. Якщо дві останні цифри більш 30, то для визначення номера варіанта необхідно відняти число 30. Якщо дві останні цифри є нулями, то варіант відповідає першому номеру.

При виконанні контрольної роботи необхідно керуватися наступними правилами:

- на початку кожної задачі варто приводити коротку умову, розрахункову схему і вхідні дані для свого варіанта;

- при оформленні розрахункової частини контрольної роботи необхідно приводити використані формули, розмірність знайдених значень, результати обчислень записувати з точністю до третьої значущої цифри;

- при обчисленні задач не слід перевантажувати оформлення приведенням всіх алгебраїчних перетворень, однак кожен етап рішення повинний мати нумерацію і пояснення;

- малюнки, схеми і графіки повинні бути виконані акуратно за допомогою креслярських інструментів, причому на осях координат графіків треба вказувати значення, що відкладаються, і одиниці їхнього виміру;

- кінцевий результат повинний бути виділений із загального тексту;

- на титульному листі контрольної роботи повинне бути зазначене найменування інституту, кафедри, дисципліни,

- прізвище, ініціали слухача і номер залікової книжки;
наприкінці роботи необхідно привести список використаної літератури.

При вивченні даного розділу студенти повинні:

- *знати* зміст таких термінів, як: резистор, опір, індуктивна котушка, індуктивність, індуктивний опір, конденсатор, ємність, ємнісний опір; фаза, початкова фаза, кут зсуву фази, період, кутова частота; миттєве, діюче і середнє значення гармонійних величин; повний, активний, реактивний і комплексний опори і провідності; повна, активна, реактивна і комплексна потужності; характеристики і параметри елементів схем заміщення кіл однофазного струму; умови і способи одержання резонансів напруг і струмів;

- *розуміти* особливості електромагнітних процесів і енергетичні співвідношення в колах синусоїдного струму, значення коефіцієнта потужності;

- *уміти* представляти гармонічно змінні величини тригонометричними функціями, графіками, векторами і комплексними числами; визначати струми електричного кола комплексним методом; будувати векторні діаграми нерозгалужених кіл і кіл з паралельним з'єднанням віток; визначати параметри схем заміщення пасивних двополюсників; за допомогою електровимірювальних приладів вимірювати струми, напруги і потужності в електричних колах; будувати потенційні діаграми.

При вивченні явищ резонансу в колах змінного струму необхідно знати умови їхнього виникнення. Звернути увагу на те, що виникнення резонансу напруг представляє серйозну пожежну небезпеку для електричних кіл і обслуговуючого персоналу, а резонанс струмів має практичне застосування для штучного підвищення коефіцієнта потужності в промислових електроустановках.

1. ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИНУСОЇДНИХ ВЕЛИЧИН ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРІВ І КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Змінний струм довгий час не знаходив практичного застосування. Це було зв'язано з тим, що перші генератори електричної енергії виробляли постійний струм, що цілком задовольняв технологічним процесам електрохімії, а двигуни постійного струму мають гарні регульовальні характеристики. Однак у міру розвитку виробництва постійний струм усе менш став задовольняти зростаючим вимогам економічного електропостачання. Змінний струм дав можливість ефективного дроблення електричної енергії і зміни величини напруги за допомогою трансформаторів.

З'явилася можливість виробництва електроенергії на електростанціях з наступним економічним її розподілом споживачам, збільшився радіус електропостачання.

В даний час центральне виробництво і розподіл електричної енергії здійснюється в основному на змінному струмі. Змінні струми і напруги викликають змінні електричні і магнітні поля. В результаті зміни цих полів у колах виникають явища самоіндукції і взаємної індукції, що роблять істотний вплив на процеси, що протікають у колах, ускладнюючи їхній аналіз.

Змінним струмом (напругою, ЕРС і т.д.) називається струм (напруга, ЕРС і т.д.), що змінюється в часі. Струми, значення яких повторюються через рівні проміжки часу в одній і тій же послідовності, називаються **періодичними**, а найменший проміжок часу, через який ці повторення спостерігаються, - **періодом T** . Для періодичного струму маємо

$$i = F(t) = F(t + T)$$

Величина, зворотна періоду, є **частота**, вимірювана в герцах (Гц):

$$\bar{f} = 1/T,$$

Діапазон частот, застосовуваних у техніці: від наднизьких частот (0.01, 10 Гц – у системах автоматичного регулювання, в аналоговій обчислювальній техніці) – до надвисоких (3000 , 300000

МГц – міліметрові хвилі: радіолокація, радіоастрономія), промислова частота $f = 50\text{Гц}$.

Миттєве значення змінної величини є функція часу. Її прийнято позначати малою літерою:

- миттєве значення струму $i(t)$;

u – миттєве значення напруги $u(t)$;

e – миттєве значення ЕРС $e(t)$;

p - миттєве значення потужності $p(t)$.

Найбільше миттєве значення змінної величини за період називається амплітудою (її прийнято позначати заголовною буквою з індексом m).

I_m - амплітуда струму;

U_m - амплітуда напруги;

E_m - амплітуда ЕРС.

Значення періодичного струму, рівне такому значенню постійного струму, що за час одного періоду зробить той же самий тепловий чи електродинамічний ефект, що і періодичний струм, називають **діючим значенням** періодичного струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Аналогічно визначаються діючі значення ЕРС і напруги.

З усіх можливих форм періодичних струмів найбільше поширення одержав синусоїдний струм. У порівнянні з іншими видами струму синусоїдний струм має ту перевагу, що дозволяє в загальному випадку найбільше економічно здійснювати виробництво, передачу, розподіл і використання електричної енергії. Тільки при використанні синусоїдного струму вдається зберегти незмінними форми кривих напруг і струмів на всіх ділянках складного лінійного кола. Теорія синусоїдного струму є ключем до розуміння теорії інших кіл.

Синусоїдні струми і напруги можна зобразити графічно, записати за допомогою рівнянь із тригонометричними функціями, представити

у виді векторів на декартовій площині чи комплексними числами. Приведеним на рис. 1,1, 1,2 графікам двох синусоїдних ЕРС e_1 і e_2 відповідають рівняння:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\alpha\pi + \Psi_{e1});$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\alpha\pi + \Psi_{e2});$$

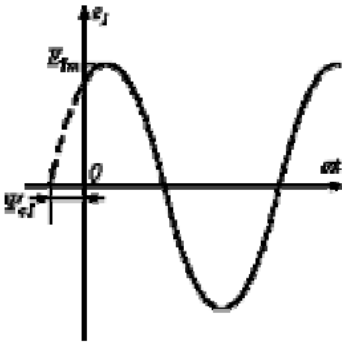


Рисунок 1.1 – Графік ЕРС

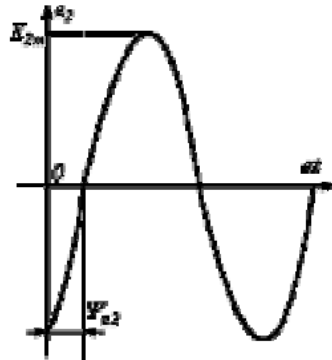


Рисунок 1.2 – Графік ЕРС

Значення аргументів синусоїдних функцій $(\alpha\pi + \Psi_{e1})$ і $(\alpha\pi + \Psi_{e2})$ називаються **фазами** синусоїд, а значення фази в початковий момент часу ($t=0$): Ψ_{e1} і Ψ_{e2} - **початковою фазою** ($\Psi_{e1} > 0$; $\Psi_{e2} < 0$).

Величину ω що характеризує швидкість зміни фазового кута, називають кутовою частотою. Тому що фазовий кут синусоїди за час одного періоду T змінюється на 2π рад., то кутова частота є $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, де f – частота.

При спільному розгляді двох синусоїдних величин однієї частоти різницю їхніх фазових кутів, яка дорівнює різниці початкових фаз, називають **кутом зсуву фаз**.

Для синусоїдних ЕРС e_1 і e_2 кут зсуву фаз:

$$\alpha = (\alpha\pi + \Psi_{e1}) - (\alpha\pi + \Psi_{e2}) = \Psi_{e1} - \Psi_{e2}.$$

На декартовій площині з початку координат проводять вектори, рівні по модулю амплітудним значенням синусоїдних величин, і

обертають ці вектори проти стрілки (даний **напрямок прийнято за позитивний**) з кутовою частотою, рівною ω . Фазовий кут при обертанні відраховується від позитивної півосі абсцис.

Проекції обертювх векторів на вісь ординат дорівнюють миттєвим значенням ЕРС e_1 і e_2 (рис.1. 3). Сукупність векторів, що зображують синусоїдно змінні ЕРС, напруги і струми, називають **векторними діаграмами**. При побудові векторних діаграм вектори зручно розташовувати для початкового моменту часу ($t=0$), що впливає з рівності кутових частот синусоїдних величин і еквівалентно тому, що система декартових координат сама обертається проти стрілки зі швидкістю ω . Таким чином, у цій системі координат вектори нерухомі (рис. 1.4). Векторні діаграми знайшли широке застосування при аналізі кіл синусоїдного струму. Їхнє застосування робить розрахунок кола більш наочним і простим. Це спрощення полягає в тім, що додавання і вирахування миттєвих значень величин можна замінити додаванням і вирахуванням відповідних векторів.

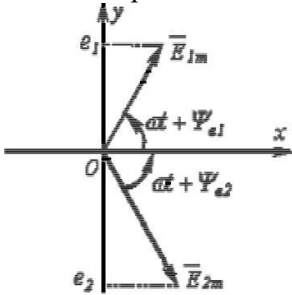


Рисунок 1.3-Векторна діаграма

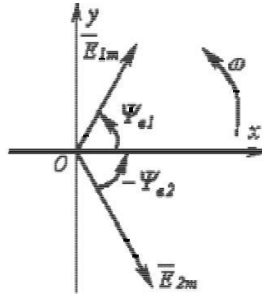


Рисунок 1.4-Векторна діаграма

Нехай, наприклад, у кращі розгалуження кола (рис.1.5) загальний струм i_3 дорівнює сумі струмів i_1 і i_2 двох віток:
 $i_3 = i_1 + i_2$.

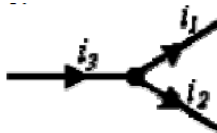


Рисунок 1.5-Вузол кола

Кожний з цих струмів синусоїдний і може бути представлений рівнянням

$$i_1 = I_{1m} \sin(\alpha\pi + \Psi_1);$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\alpha\pi + \Psi_2);$$

Результуючий струм також буде синусоїдний:

$$i_3 = I_{1m} \sin(\alpha\pi + \Psi_1) + I_{2m} \sin(\alpha\pi + \Psi_2) = I_{3m} \sin(\alpha\pi + \Psi_3);$$

Визначення амплітуди I_{3m} і початкової фази Ψ_3 цього струму шляхом відповідних тригонометричних перетворень виходить досить громіздким і мало наочним, особливо, якщо розглядається велике число синусоїдних величин. Значно простіше це здійснюється за допомогою векторної діаграми.

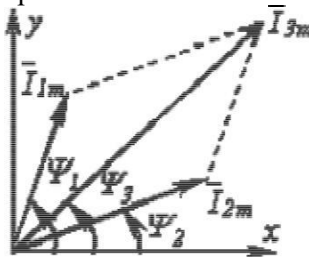


Рисунок 1.6-Векторна діаграма струмів

На рис . 1.6 зображені початкові положення векторів струмів, проекції яких на вісь ординат дають миттєві значення струмів при $t=0$. При обертанні цих векторів з однаковою кутовою швидкістю ω їхнє взаємне розташування не міняється, і кут зсуву фаз між ними залишається рівним $\alpha = \Psi_1 - \Psi_2$

Тому що алгебраїчна сума проекцій векторів на вісь ординат дорівнює миттєвому значенню загального струму, вектор загального струму дорівнює геометричній сумі векторів струмів:

$$\dots \quad \bar{I}_{3m} = \bar{I}_{1m} + \bar{I}_{2m}.$$

Побудова векторної діаграми в масштабі дозволяє визначити значення I_{3m} і Ψ_3 з діаграми, після чого може бути записане рішення

для миттєвого значення i_3 шляхом формального обліку кутової частоти:
 $i_3 = I_{3m} \sin(\alpha\pi + \Psi_3)$;

Геометричні операції з векторами можна замінити алгебраїчними операціями з комплексними числами, що істотно підвищує точність одержуваних результатів.

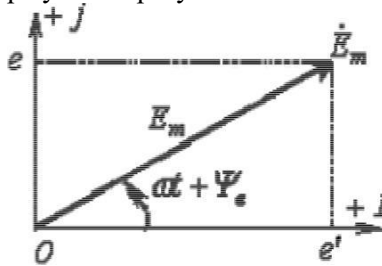


Рисунок 1.7-Вектор на комплексній площині

Кожному вектору на комплексній площині відповідає визначене комплексне число, що може бути записане в :

- показовий $\dot{a} = a e^{j\Psi}$
- тригонометричний $\dot{a} = a \cos \Psi + j a \sin \Psi$, чи
- алгебраїчний $\dot{a} = b + jc$ - формах.

Наприклад, ЕРС $e = E_m \sin(\alpha\pi + \Psi_e)$, зображеної на рис.1. 7 обертовим вектором, відповідає комплексне число

$$E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)} = E_m \cos(\omega t + \Psi_e) + j E_m \sin(\omega t + \Psi_e) = e' + j e.$$

Фазовий кут $\alpha\pi + \Psi_e$ визначається по проєкціях вектора на осі “+1” і “+j” системи координат, як

$$\operatorname{tg}(\alpha\pi + \Psi_e) = \frac{e}{e'}$$

Відповідно до тригонометричної форми запису мнима складова комплексного числа визначає миттєве значення синусоїдно змінної ЕРС:

$$e = E_m \sin(\omega t + \Psi_e) = I_m \{E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)}\}.$$

Комплексне число $E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)}$ зручно представити у виді добутку двох комплексних чисел:

$$E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)} = E_m e^{j\Psi_e} \cdot e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t}.$$

Параметр $\dot{E}_m$, що відповідає положенню вектора для $t=0$ (чи на обертовій зі швидкістю ω в комплексній площині), називають **комплексною амплітудою**: $\dot{E}_m = E_m e^{j\Psi_e}$, а параметр $\dot{E}_m e^{j\omega t}$ - **комплексом миттєвого значення**.

Параметр $e^{j\omega t}$ є **оператором повороту** вектора на кут ωt щодо початкового положення вектора.

Взагалі говорячи, множення вектора на оператор повороту $e^{\pm j\alpha}$ є його поворот щодо первісного положення на кут $\pm\alpha$.

Отже, миттєве значення синусоїдної величини дорівнює мнимій частини без знака “ j ” добутку комплексу амплітуди $\dot{E}_m$ оператора повороту $e^{j\omega t}$:

$$e = E_m \sin(\omega t + \Psi_e) = I_m \{E_m e^{j\omega t}\}.$$

Перехід від однієї форми запису синусоїдної величини до іншої здійснюється за допомогою формули Ейлера:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha.$$

Якщо, наприклад, комплексна амплітуда напруги задана у виді комплексного числа в алгебраїчній формі:

$$\dot{U}_m = U'_m + jU''_m,$$

то для запису її в показовій формі, необхідно знайти початкову фазу Ψ_U , тобто кут, що утворить вектор $\dot{U}_m$ з позитивною піввіссю +1

$$\operatorname{tg} \Psi_U = \frac{U''_m}{U'_m}.$$

Тоді миттєве значення напруги:

$$U = I_m \{ \dot{U}_m e^{j\omega t} \} = I_m \left\{ \sqrt{U_m'^2 + U_m''^2} e^{j \arctg \frac{U_m''}{U_m'}} e^{j\omega t} \right\} = U_m \sin(\omega t + \Psi_U),$$

де $\Psi_U = \arctg \left(\frac{U_m''}{U_m'} \right)$.

При запису виразу для визначеності було прийнято, що $U_m' > 0$, тобто що вектор знаходиться в першому чи четвертому квадрантах.

Якщо $U_m' < 0$, то при $U_m'' > 0$ - другий квадрант:

$$\Psi_U = \pi - \arctg \left| \frac{U_m''}{U_m'} \right|,$$

а при $U_m'' < 0$ - третій квадрант

$$\Psi_U = \pi + \arctg \left| \frac{U_m''}{U_m'} \right|,$$

чи

$$\Psi_U = -\pi + \arctg \left| \frac{U_m''}{U_m'} \right|.$$

Якщо задане миттєве значення струму у виді $i = I_m \sin(\alpha t + \Psi_i)$, то комплексну амплітуду записують спочатку в показовій формі, а потім (при необхідності) по формулі Ейлера переходять до алгебраїчної форми:

$$\dot{i}_m = I_m e^{j\Psi_i} = I_m \cos \Psi_i + j I_m \sin \Psi_i = I_m' + j I_m''.$$

Варто вказати, що при додаванні і вираховуванні комплексів варто користатися алгебраїчною формою їхнього запису, а при множенні і розділі зручна показова форма.

Отже, застосування комплексних чисел дозволяє перейти від геометричних операцій над векторами до алгебраїчного над комплексами.

Так при визначенні комплексної амплітуди результуючого струму по рис.1. 5 одержимо:

$$\begin{aligned}
 I_{3m} &= I_{1m} + I_{2m} = I_{1m}e^{j\psi_1} + I_{2m}e^{j\psi_2} = I_{1m}(\cos \psi_1 + j\sin \psi_1) + I_{2m}(\cos \psi_2 + \\
 &+ j\sin \psi_2) = (I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2) + j(I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2) = \\
 &= I_{3m} \cos \psi_3 + jI_{3m} \sin \psi_3 = I_{3m}e^{j\psi_3}
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 I_{3m} &= \sqrt{(I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2)^2 + (I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2)^2}; \\
 \operatorname{tg} \psi_3 &= \frac{I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2}{I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2}.
 \end{aligned}$$

Діюче значення синусоїдних ЕРС, напруг і струмів

Для діючого значення синусоїдного струму запишемо:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{I_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2 \cdot T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Таким чином, діючі значення синусоїдних струмів, ЕРС і напруг

менше своїх амплітудних значень у $\sqrt{2}$ раз: $X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}.$

Оскільки, як буде показано далі, енергетичний розрахунок кіл змінного струму звичайно проводиться з використанням діючих значень величин, за аналогією з попереднім уведемо поняття **комплексу діючого значення**

$$\dot{E} = E e^{j\psi_e} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_e}$$

2. ЕЛЕМЕНТИ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. ВЕКТОРНІ ДІАГРАМИ І КОМПЛЕКСНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ НИХ

Резистор

Ідеальний резистивний елемент не володіє ні індуктивністю, ні ємністю. Якщо до нього прикласти синусоїдну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$

(див. Рис.2. 1), то струм i через нього дорівнює

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \Psi) = I_m \sin((\omega t + \Psi)).$$

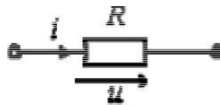


Рисунок 2.1-Ідеальний резистивний елемент

Співвідношення показує, що струм має ту ж початкову фазу, що і напруга. Таким чином, якщо на входи двопроменевого осцилографа подати сигнали u і i , то відповідні їм синусоїди на його екрані будуть проходити (див. рис.2.2) через нуль одночасно, тобто **на резисторі напруга і струм збігаються по фазі.**

$$U_m = R I_m;$$

$$U = RI.$$

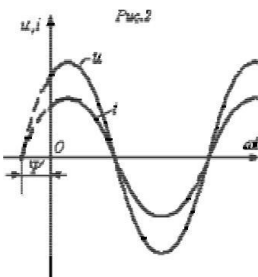


Рисунок 2.2-Графіки u , i

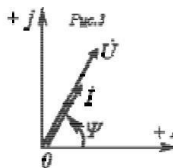


Рисунок 2.3-Векторна діаграма

Перейдемо від синусоїдних функцій напруги і струму до відповідних їм комплексів:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \Psi) \rightarrow \dot{U} = U e^{j\Psi}; \\ i &= I_m \sin(\omega t + \Psi) \rightarrow \dot{I} = I e^{j\Psi}, \end{aligned}$$

Розділимо перший з них на другий:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\Psi}} = \frac{U}{I} = R,$$

чи

$$\dot{U} = R \dot{I}.$$

Отриманий результат показує, що відношення двох комплексів є дійсна константа. Отже вектори напруги і струму (див. рис.2.3) збігаються по напрямку.

Конденсатор

Ідеальний ємнісний елемент не має ні активного опору (провідність), ні індуктивного. Якщо до нього прикласти синусоїдну напругу

$u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ (див. Рис.2. 4), то струм i через нього буде дорівнювати

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (Cu) = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

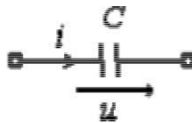


Рисунок 2.4-Ідеальний ємнісний елемент

Отриманий результат показує, що **напруга на конденсаторі відстає по фазі від струму на $\pi/2$** . Таким чином, якщо на входи двопроменевого осцилографа подати сигнали u і i , то на його екрані буде мати місце картинка, що відповідає рис.2. 5:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m;$$

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I = X_C I.$$

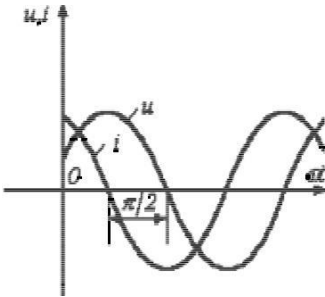
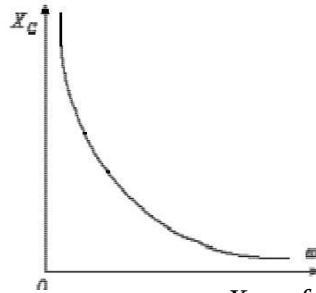


Рисунок 2.5 –Графіки напруг та струму

Рисунок 2.6 – Графік $X_C = f(\omega)$

Введений параметр $X_C = 1/(\omega C)$ називають **реактивним ємнісним опором конденсатора**. Як і резистивний опір, X_C має розмірність **Ом**. Однак на відміну від R даний параметр є функцією частоти, що ілюструє рис.2.6. З рис.2.6 випливає, що при $f = 0$ конденсатор представляє розрив для струму, а при $f \rightarrow \infty, X_C = 0$.

Перейдемо від синусоїдних функцій напруги і струму до відповідних їм комплексів:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \Psi) \rightarrow \dot{U} = U e^{j\Psi}; \\ i &= I_m \sin(\omega t + \Psi) \rightarrow \dot{I} = I e^{j(\Psi + \frac{\pi}{2})}, \end{aligned}$$

розділимо перший з них на другий:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j(\Psi + \frac{\pi}{2})}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j X_C = \underline{Z}_C,$$

чи

$$\dot{U} = -j X_C \dot{I} = \underline{Z}_C \dot{I}$$

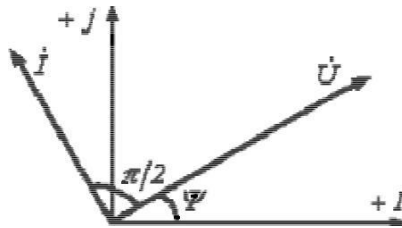


Рисунок 2.7-Векторна діаграма

В останнім співвідношенні $\underline{Z}_C = -jX_C$ - комплексний опір конденсатора. Множення на $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ відповідає повороту вектора на кут $\pi/2$ по годинній стрілці. Отже, рівнянню відповідає векторна діаграма, представлена на рис.2. 7.

Котушка індуктивності

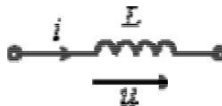


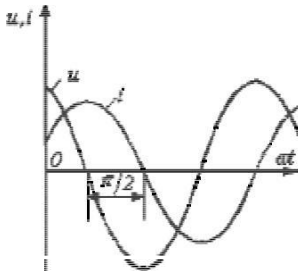
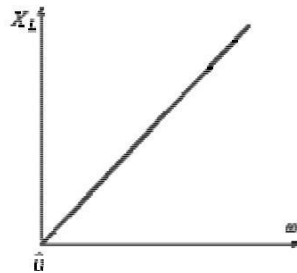
Рисунок 2.8-Ідеальний індуктивний елемент

Ідеальний індуктивний елемент не має ні активного опору, ні абл. ног. Нехай струм (див. рис.2. 8) через нього визначається виразом $i = I_m \sin(\omega t + \Psi)$. Тоді для напруги на затисках котушки індуктивності можна записати.

$$u = -e = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Отриманий результат показує, що **напряга на котушці індуктивності випереджає по фазі струм на $\pi/2$** . Таким чином, якщо на входи двохпроменевого осцилографа подати сигнали u і i , то на його екрані (ідеальний індуктивний елемент) буде мати місце картинка, що відповідає рис. 2.9 а також

$$U_m = \omega L I_m = X_L I_m;$$

Рисунок 2.9-Графіки u, i Рисунок 2.10-Графік $X_L = f(\omega)$

$$U = \omega L I = X_L I.$$

Уведений параметр $X_L = \omega L$ називають **реактивним індуктивним опором котушки**; його розмірність – Ом. Як і в ємнісного елемента цей параметр є функцією частоти. Однак у абл. н випадку ця залежність має лінійний характер, що ілюструє рис.2. 10. З рис.2. 10 випливає, що при $f = 0$ котушка індуктивності не робить опору струму, а при $f = \infty, X_L \rightarrow \infty$.

Переходячи від синусоїдних функцій напруги і струму до відповідних комплексів:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j(\Psi + \frac{\pi}{2})}}{I e^{j\Psi}} = \frac{U e^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}}{I e^{j\Psi}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = j X_L = \underline{Z}_L,$$

чи

$$\dot{U} = j X_L \dot{I} = \underline{Z}_L \dot{I}$$

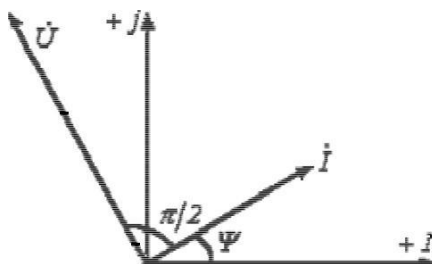


Рисунок 2.11-Векторна діаграма

В отриманому співвідношенні $\underline{Z}_L = jX_L$ – комплексний опір котушки індуктивності. Множення на $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ відповідає повороту вектора на кут $\pi/2$ абл. стрілки. Отже, рівнянню відповідає векторна діаграма, представлена на рис.2. 11

3. СПОСОБИ З'ЄДНАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

Послідовне з'єднання резистивного й індуктивного елементів

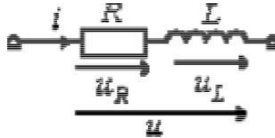


Рисунок 3.1-Послідовне з'єднання R, L елементів

Нехай у вітці на рис.3.1 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Тоді

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L = RI_m \sin(\omega t + \varphi) + \omega LI_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \varphi + \Psi), \end{aligned}$$

$$U_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m = Z I_m; \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \Psi = \arctg \frac{\omega L}{R},$$

причому межі зміни Ψ : $0 < \Psi < \frac{\pi}{2}$.

Рівнянню можна поставити у відповідність співвідношення

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{I} + jX_L\dot{I} = (R + jX_L)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I},$$

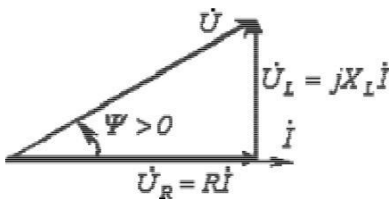


Рисунок 3.2-Трикутник напруг

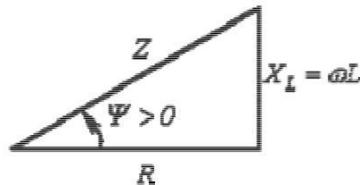


Рисунок 3.3-Трикутник опорів

якому, у свою чергу, відповідає векторна діаграма на рис.3.2 Вектори на рис.3.2 утворюють фігуру, названу **трикутником напруг**.

Аналогічний вираз:

$$\underline{Z} = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} e^{j\Psi} = Z e^{j\Psi}$$

графічно може бути представлено **трикутником опорів** (див. рис.3.3), що подібний трикутнику напруг.

Послідовне з'єднання резистивного і ємнісного елементів

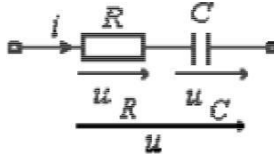


Рисунок 3.4- Послідовне з'єднання R, C елементів

Опускаючи проміжні викладання, для вітки на рис.3.4 можна записати

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = R\dot{I} - jX_C\dot{I} = (R - jX_C)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I},$$

де

$$\underline{Z} = R - jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\Psi} = \underline{Z} e^{j\Psi};$$

$$\Psi = -\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega CR}, \text{ причому межі зміни}$$

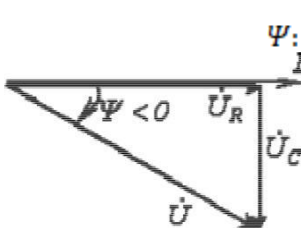


Рисунок 3.5-Трикутник напруг

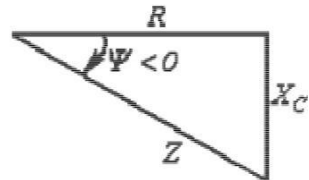


Рисунок 3.6-Трикутник опорів

На підставі рівняння можуть бути побудовані трикутники напруг (див. рис.3.5) і опорів (див. рис.3.6), що є подібними.

Паралельне з'єднання резистивного і ємнісного елементів

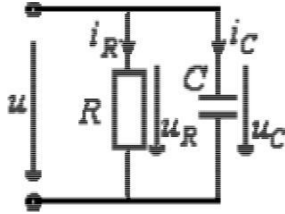


Рисунок 3.7- R, C з'єднання

Для кола на рис. 3.7 мають місце співвідношення:

$$U = U_R = U_C;$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU, \text{ де } g = \frac{1}{R} [\text{См}] - \text{активна провідність};$$

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = b_C U, \text{ де } b_C = \frac{1}{X_C} [\text{См}] - \text{реактивна провідність конденсатора.}$$

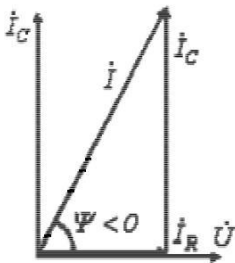


Рисунок 3.8-Трикутник струмів

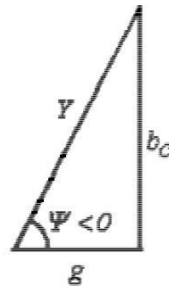


Рисунок 3.9-Трикутник провідностей

Векторна діаграма струмів для даного кола, названа **трикутником струмів**, приведена на рис.3.8. Їй відповідає рівняння в комплексній формі

$$\underline{i} = \underline{i}_R + \underline{i}_C = g\dot{U} + jb_C\dot{U} = (g + jb_C)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\psi},$$

де

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2};$$

$\underline{Y} = g + jb_c = \frac{I}{U} + j\omega C = Ye^{-j\psi}$ - комплексна провідність;

Трикутник провідностей, подібний до трикутника струмів, приведений на рис.3.9.

Для комплексного опору кола на рис. 3.7 можна записати

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g + jb_c} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_c}} = \frac{R(-jX_c)}{R - jX_c}.$$

Необхідно відзначити, що отриманий результат аналогічний відомому з курсу фізики вираженню для еквівалентного опору двох паралельно з'єднаних резисторів.

Паралельне з'єднання резистивного й індуктивного елементів

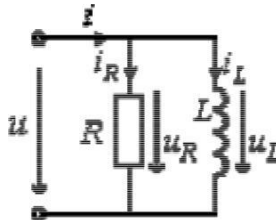


Рисунок 3.10- R, L з'єднання

Для кола на рис.3.10 можна записати

$$U = U_R = U_L;$$

$I_R = \frac{U_R}{R} = gU$, де $g = \frac{1}{R}$ [См] – активна провідність;

$I_L = \frac{U_L}{X_L} = b_L U$, де $b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$ [См] – реактивна провідність котушки індуктивності.

Векторній діаграмі струмів (рис.3.11) кола відповідає рівняння в комплексній формі

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = g\dot{U} - jb_L\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi},$$

де

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2};$$

$$\underline{Y} = g - jb_L = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = Ye^{-j\Psi} \text{ - комплексна провідність;}$$

$$\Psi = \arctg \frac{b_L}{g} = \arctg \frac{R}{\omega L}.$$

Трикутник провідностей, подібний до трикутника струмів, приведений на рис.3.12.

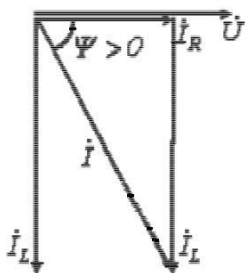


Рисунок 3.11-Трикутник струмів

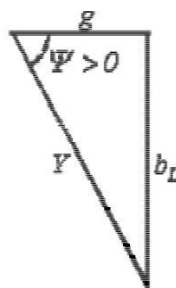


Рисунок 3.12-Трикутник провідностей

4. ОСНОВИ СИМВОЛІЧНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Закон Ома для ділянки кола з джерелом ЕРС



Рисунок: 4.1-Ділянки кола з ЕРС

Візьмемо дві ділянки кола $a-b$ і $c-d$ (див. рис.4.1) і складемо для них рівняння в комплексній формі з обліком зазначених на рис.4. 1 позитивних напрямків напруг і струмів:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a &= \dot{\phi}_b + \dot{E}_1 - \dot{i}_1 \underline{Z}_1; \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = \dot{E}_1 - \dot{i}_1 \underline{Z}_1; \\ \dot{i}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_1}, \\ \dot{\phi}_c &= \dot{\phi}_d + \dot{E}_2 + \dot{i}_2 \underline{Z}_2; \\ \dot{U}_{cd} &= \dot{\phi}_c - \dot{\phi}_d = \dot{E}_2 + \dot{i}_2 \underline{Z}_2; \\ \dot{i}_2 &= \frac{-\dot{E}_2 - \dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_2}.\end{aligned}$$

Поєднуючи обидва випадки, одержимо:

$$\dot{i} = \frac{\pm \dot{E} \mp \dot{U}}{\underline{Z}},$$

чи для постійного струму

$$\dot{i} = \frac{\pm E \mp U}{R}.$$

Формули є **аналітичним виразом закону Ома** для ділянки **кола джерелом ЕРС**, відповідно до якого струм на ділянці кола з джерелом ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі напруги на затисках ділянки кола й ЕРС, діленої на опір ділянки. У випадку змінного струму всі зазначені величини суть комплекси. При цьому ЕРС і напругу беруть зі знаком “+”, якщо їхній напрямок збігається з обраним напрямком струму, і зі знаком “-”, якщо їхній напрямок протилежно напрямку струму.

Розрахунок кіл змінного синусоїдного струму може вироблятися не тільки шляхом побудови векторних діаграм, але й аналітично – шляхом операцій з комплексами, що **символічно зображують** синусоїдні ЕРС, напруги і струми. Достоїнством векторних діаграм є їхня наочність, недоліком – мала точність графічних побудов. Застосування символічного методу дозволяє робити розрахунки кіл з великим ступенем точності.

Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму заснований на законах Кірхгофа і законі Ома в комплексній формі. Рівняння, що виражають закони Кірхгофа у комплексній формі, мають такий же вид, як і відповідні рівняння для кіл постійного струму. Тільки струми, ЕРС, напруги й опори входять у рівняння у виді комплексних величин.

1. Перший закон Кірхгофа у комплексній формі:

$$\sum i = 0.$$

2. Другий закон Кірхгофа у комплексній формі:

$$\sum U = 0,$$

чи стосовно до схем заміщення з джерелами ЕРС

$$\sum \underline{Z}i = \sum \underline{E}.$$

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ. МИТТЄВА, АКТИВНА, РЕАКТИВНА І ПОВНА ПОТУЖНОСТІ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Передача енергії W по електричному колу (наприклад по лінії електропередачі), перетворення енергії, тобто перехід електромагнітної енергії в теплову, а також в інші види енергії характеризуються інтенсивністю, з якою протікають процеси, тобто тим, скільки енергії передається по лінії в одиницю часу і скільки енергії перетворюється в одиницю часу. Інтенсивність передачі чи перетворення енергії називається потужністю p . Сказаному відповідає математичне визначення:

$$p = \frac{dw}{dt}.$$

Вираз для миттєвого значення потужності в електричних колах має вигляд: $p = ui$.

Прийнявши початкову фазу напруги за нуль, а зсув фаз між напругою і струмом за $-\varphi$, одержимо:

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

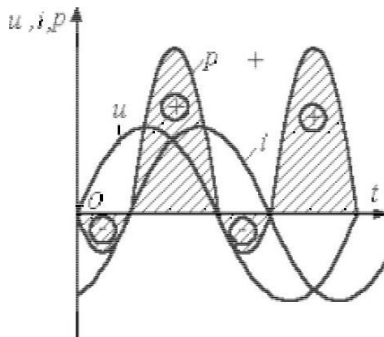


Рисунок 5.1-Графіки u , i , p

Отже, миттєва потужність має постійну складову і гармонійну складову, кутова частота якої в 2 рази більше кутової частоти напруги і струму.

Коли миттєва потужність негативна, а це має місце (див. рис.5.1), коли u і i різних знаків, тобто коли напрямки напруги і струму в двополюснику протилежні, енергія повертається з двополюсника джерелу.

Таке повернення енергії джерелу відбувається за рахунок того, що енергія періодично запасається в магнітних і електричних полях відповідно індуктивних і ємнісних елементів, що входять до складу двополюсника. Енергія, що віддається джерелом двополюснику протягом часу t дорівнює $\int_0^t p dt$.

Середнє за період значення миттєвої потужності називається **активною потужністю**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt (Bm).$$

Приймаючи в увагу, що

$$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0,$$

одержимо:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Активна потужність, споживана пасивним двополюсником, не може бути негативною (інакше двополюсник буде генерувати енергію), тому $\cos \varphi \geq 0$, тобто на вході абл. ного двополюсника $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Випадок $P=0$, $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} \right|$ теоретично можливий для двополюсника, що не має активних опорів, а має тільки ідеальні індуктивні і ємнісні елементи.

Тут напруга і струм (див. Рис.5.2) збігаються по фазі ($\varphi = 0$), тому потужність $p = ui$ завжди позитивна, тобто резистор споживає активну потужність

$$P = UI \cos \varphi = |\cos 0 = 1| = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Резистор (ідеальний активний опір)

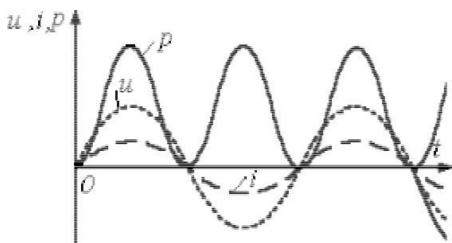


Рисунок 5.2- Графіки u , i , p

Котушка індуктивності (ідеальна індуктивність)

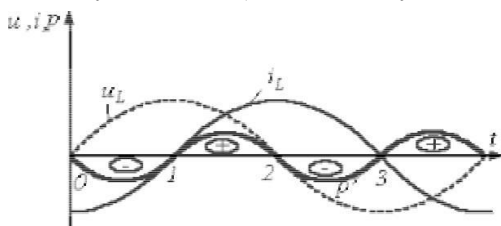


Рисунок 5.3-Графіки u , i , p

При ідеальній індуктивності струм відстає від напруги по фазі на $\frac{\pi}{2}$.

Тому можна записати:

$$p = U_L I_L \cos \frac{\pi}{2} - U_L I_L \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_L I_L \sin 2\omega t.$$

Ділянка 1-2: енергія $\frac{Li^2}{2}$, що запасється в магнітному полі котушки, наростає.

Ділянка 2-3: енергія магнітного поля убаває, повертаючи в джерело.

Конденсатор (ідеальна ємність).

Аналогічний характер мають процеси і для ідеальної ємності. Тут $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Тому випливає, що $p = U_C I_C \sin 2\omega t$. Таким чином, у котушці індуктивності і конденсаторі активна потужність не споживається ($P=0$), тому що в них не відбувається необоротного перетворення енергії в інші види енергії. Тут відбувається тільки циркуляція енергії: електрична енергія запасається в магнітному полі котушки чи електричному полі конденсатора протягом чверті періоду, а протягом наступної чверті періоду енергія знову повертається в мережу. У силу цього котушку індуктивності і конденсатор називають реактивними елементами, а опори X_L і X_C , на відміну від активного опору R резистора – реактивними.

Інтенсивність обміну енергії прийнято характеризувати найбільшим значенням швидкості надходження енергії в магнітне поле котушки чи електричне поле конденсатора, що називається **реактивною потужністю**.

У загальному випадку вираз для реактивної потужності має вигляд:

$$Q = UI \sin \varphi$$

Вона позитивна при відстаючому струмі (індуктивне навантаження - $\varphi > 0$) і негативна при випереджальному струмі (ємнісне навантаження - $\varphi < 0$). Одиницю потужності в застосуванні до виміру реактивної потужності називають **вольт-ампер реактивний** (Var).

Зокрема для котушки індуктивності маємо:

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI, \text{ тому що } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$Q_L = UI = \omega L I_m^2 = \omega L \frac{I_m^2}{2} = \omega \left[\frac{L I_m^2}{2} \right].$$

З останнього видно, що реактивна потужність для ідеальної котушки індуктивності пропорційна частоті і максимальному запасу енергії в котушці. Аналогічно можна одержати для ідеального конденсатора:

$$|Q_C| = \omega \left[\frac{CI_m^2}{2} \right].$$

Повна потужність.

Крім понять активної і реактивної потужностей в електротехніці широко використовується поняття **повної потужності**:

$$S = UI \text{ (ВА)}.$$

Активна, реактивна і повна потужності зв'язані наступним співвідношенням:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Відношення активної потужності до повної називають **коефіцієнтом потужності**. З приведених вище співвідношень видно, що коефіцієнт потужності **$\cos\varphi$** дорівнює косинусу кута зсуву між струмом і напругою. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}.$$

Комплексна потужність

Активну, реактивну і повну потужності можна визначити, користуючись комплексними зображеннями напруги і струму. Нехай $\underline{\dot{U}} = Ue^{j\psi_u}$, а $\underline{\dot{I}} = Ie^{j\psi_i}$. Тоді комплекс повної потужності:

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}}\underline{\dot{I}}$$

де $\underline{\dot{I}}$ - комплекс, сполучений з комплексом $\underline{\dot{U}}$.

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}}^* \underline{\dot{I}} = Ue^{j\psi_{21}} \cdot Ie^{-j\psi_2} = UIe^{j\varphi} = |\varphi = \psi_{21} - \psi_2| = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

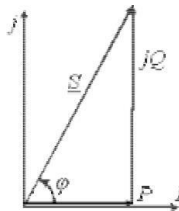


Рисунок 5.4-Трикутник потужностей

Комплексної потужності можна поставити у відповідність трикутник потужностей (див. рис.5.4) . Рис. 5.4 відповідає $\cos\varphi > 0$ (активно-індуктивне навантаження).

Застосування статичних конденсаторів для підвищення $\cos\varphi$

Як уже вказувалося, реактивна потужність

$\underline{Z} = R + jX$; $\dot{U} = \underline{Z}I$; $\underline{S} = \dot{U}I = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2$ циркулює між джерелом і споживачем. Реактивний струм, не роблячи корисної роботи, приводить до додаткових втрат у силовому устаткуванні і, отже, до завищення його встановленої потужності. У цьому зв'язку зрозуміле прагнення до збільшення $\cos\varphi$ в силових електричних колах.

Варто вказати, що переважна більшість споживачів (електродвигуни, електричні печі, інші різні пристрої і прилади) мають активно-індуктивний характер.

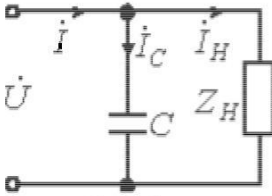


Рисунок 5.5-Принцип компенсації

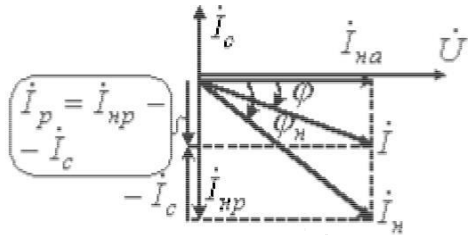


Рисунок 5.6 – Векторні діаграми струмів

Якщо паралельно такому навантаженню Z_N (див. рис.5.5), включити конденсатор C , то загальний струм $\dot{I}$, як видно з векторної діаграми (рис.5.6), наближається по фазі до напруги, тобто $\cos\varphi$ збільшується, а загальна величина струму (а отже, утрати) зменшується при сталості активної потужності $P = UI\cos\varphi$. На цьому засноване застосування конденсаторів для підвищення $\cos\varphi$.

Яку ємність C потрібно взяти, щоб підвищити коефіцієнт потужності від значення $\cos\varphi_N$ до значення $\cos\varphi > \cos\varphi_N$.

Розкладаємо $\dot{I}_N$ на активну $I_{Na} = I_N \cos\varphi_N$ і реактивну $I_{Np} = I_N \sin\varphi_N$ складові. Струм через конденсатор $\dot{I}_C$ компенсує частина реактивної складової струму навантаження $\dot{I}_N$:

$$\begin{aligned}
 I_p &= I_{np} - I_c; \\
 I_{np} &= I_{na} \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi_n; \\
 I_p &= I_{na} \operatorname{tg} \varphi = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi.
 \end{aligned}$$

Маємо, що

$$I_c = \frac{P_n}{U} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi),$$

але, $I_c = \omega C U$, відкіля необхідна для підвищення $\cos \varphi$ ємність:

$$C = \frac{P_n}{U^2 \omega} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi).$$

Баланс потужностей

Баланс потужностей є наслідком закону збереження енергії і може бути критерієм вірності розрахунку електричного кола.

а) Постійний струм

Для будь-якого кола постійного струму виконується співвідношення:

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k$$

Варто вказати, що в лівій частині рівняння доданки мають знак “+”, оскільки активна потужність розсіюється на резисторах. У правій частині сума більше нуля, але окремі члени тут можуть мати знак “-”, що говорить про те, що відповідні джерела працюють у режимі споживачів енергії (наприклад, заряд акумулятора).

б) Змінний струм.

З закону збереження енергії випливає, що сума всіх активних потужностей, що віддаються, дорівнює сумі всіх споживаних активних потужностей, тобто

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \cos \varphi_{k\Gamma(\text{генератора})}$$

Можливо довести, що баланс дотримується і для реактивних потужностей:

$$\sum_{k=1}^n \pm X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \sin \varphi_{k\Gamma}$$

де знак “+” відноситься до індуктивних елементів ($X = \omega L$), “-” – до ємнісного ($X_c = 1/(\omega C)$).

Аналітичний вираз балансу потужностей у колах синусоїдного струму (без обліку взаємної індуктивності):

$$\sum_{k=1}^n (R_k \pm jX_k) I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k (\cos \varphi_{k\Gamma} + j \sin \varphi_{k\Gamma}) = \sum_{k=1}^n E_k I_k e^{j\varphi_{k\Gamma}},$$

6. РЕЗОНАНСИ В КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Резонансом називається такий режим роботи кола, що включає в себе індуктивні і ємнісні елементи, при якому її вхідний опір (вхідна провідність) дійсний. Наслідком цього є збіг по фазі струму на вході кола з вхідною напругою.

Резонанс в колах з послідовно з'єднаними елементами (резонанс напруг)

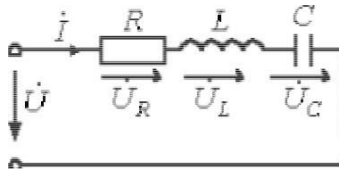


Рисунок 6.1-Послідовне коло

Для кола на рис.6.1 має місце

$$\tilde{U} = \tilde{U}_R + \tilde{U}_L + \tilde{U}_C = I \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = I \underline{Z}$$

де

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j\varphi};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

У залежності від співвідношення величин ωL і $1/(\omega C)$ можливі три різних випадки.

1. У колі переважає індуктивність, тобто $\omega L > 1/(\omega C)$, а отже, $\tilde{U}_L > \tilde{U}_C$. Цьому режиму відповідає векторна діаграма на рис.6. 2,а.

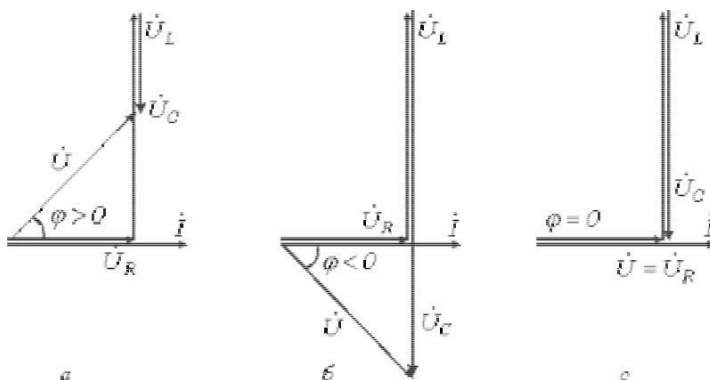


Рисунок 6.2-Векторні діаграми

2. У колі переважає ємність, тобто $\omega L < 1/(\omega C)$, виходить, $\dot{U}_L > \dot{U}_C$. Цей випадок відбиває векторна діаграма на рис.6. 2,б.

3. $\dot{U}_L = \dot{U}_C$ - випадок резонансу напруг (рис.6. 2,в).

Умова резонансу напруг

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

При цьому $\underline{Z} = R$; $\varphi = 0$.

При резонансі напруг чи режимах, близьких до нього, струм у колі різко зростає. У теоретичному випадку при $R=0$ його величина прагне до нескінченності. Відповідно зростанню струму збільшуються напруги на індуктивному і ємнісному елементах, що можуть у багато разів перевищити величину напруги джерела харчування.

Нехай, наприклад, у колі на рис.1 $U = 10 \text{ В}$; $R = 1 \text{ Ом}$; $X_L = X_C = 1000 \text{ Ом}$. Тоді $I = U/Z = U/R = 10 \text{ А}$, і, відповідно, $U_L = U_C = IX_L = IX_C = 10^4 \text{ В}$

Явище резонансу знаходить корисне застосування на практиці, зокрема в радіотехніці. Однак, якщо він виникає стихійно, те може привести до аварійних режимів унаслідок появи великих перенапруг і надструмів.

Фізична сутність резонансу полягає в періодичному обміні енергією між магнітним полем котушки індуктивності й електричним

полем конденсатора, причому сума енергій полів залишається постійною.

Суть справи не міняється, якщо в колі є кілька індуктивних і ємнісних елементів. Дійсно, у цьому випадку,

$$L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n L_k; \quad 1/C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/C_k,$$

і співвідношення виконується для еквівалентних значень L_{Σ} і C_{Σ} .

Як показує аналіз рівняння, режиму резонансу можна домогтися шляхом зміни параметрів L і C , а також частоти. Для резонансної частоти можна записати

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Резонансними кривими називаються залежності струму і напруги від частоти. У якості приклада на рис.6. 3 приведені типові криві $I(f)$; $U_L(f)$ і $U_C(f)$ для кола на рис. 6.1 при $U=\text{const}$.

Важливою характеристикою резонансного контуру є **добротність** Q , обумовлена відношенням напруги на індуктивному (ємнісному) елементі до вхідної напруги:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R},$$

і характеризує “виборчі” властивості резонансного контуру, зокрема його **смугу пропущення** $\Delta\omega = \omega_p/Q$.

Іншим параметром резонансного контуру є **характеристичний опір**, зв’язаний з добротністю співвідношенням

$$\rho = QR.$$

Для ρ можна записати:

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

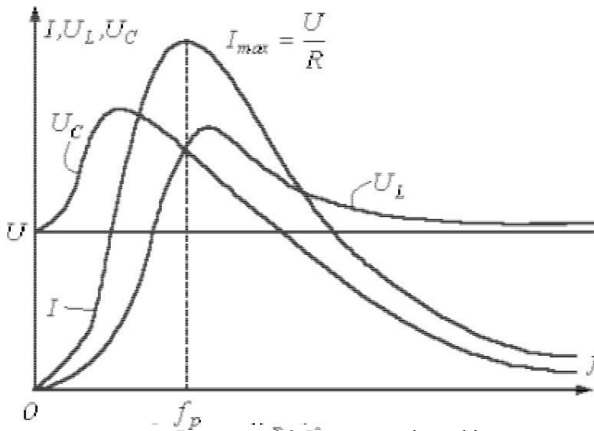


Рисунок 6.3-Резонансні графіки

Резонанс у колі з паралельно з'єднаними елементами (резонанс струмів)

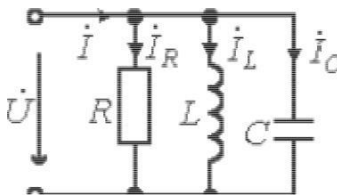


Рисунок 6.4 – Паралельне з'єднання R, L, C елементів

Для кола рис.6.4 маємо

$$I = I_R + I_L + I_C = \dot{U} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U} [g + j(b_C - b_L)] = \dot{U} \underline{Y},$$

де

$$\underline{Y} = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} e^{-j\varphi};$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g}.$$

У залежності від співвідношення величин b_L і b_C , як і в розглянутому вище випадку послідовного з'єднання елементів, можливі три різних випадки.

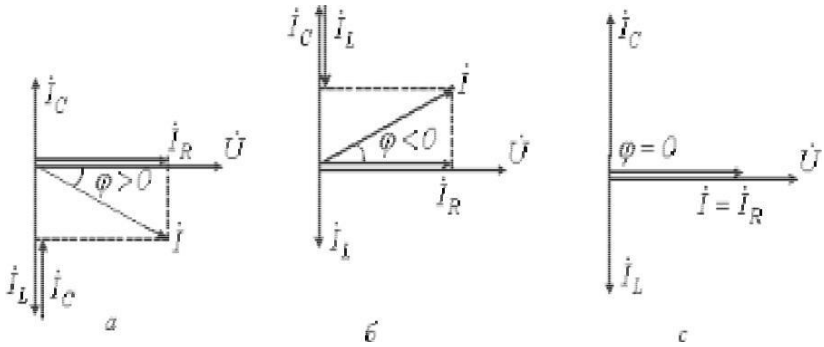


Рисунок 6.5-Векторні діаграми

У колі переважає індуктивність, тобто $b_L > b_C$, отже, $I_L > I_C$. Цьому режиму відповідає векторна діаграма на рис.6. 5,а.

У колі переважає ємність, тобто $b_L < b_C$, виходить, $I_L < I_C$. Цей випадок ілюструє векторна діаграма на рис.6. 5,б.

$I_L = I_C$ - випадок резонансу струмів (рис.6. 5,в). Умова резонансу $b_L = b_C$ струмів, чи

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

При цьому, $\underline{Y} = g = 1/R; \varphi = 0$. Таким чином, при резонансі струмів вхідна провідність кола мінімальна, а вхідний опір, навпаки, максимальний. Зокрема при відсутності в колі на рис.6.4 резистора R його вхідний опір у режимі резонансу прагне до нескінченності, тобто при резонансі струмів, струм на вході кола мінімальний.

При визначенні резонансної частоти в колі довільної конфігурації, у загальному випадку, співвідношенням параметрів схеми в режимі резонансу, варто виходити з умови дійсного вхідного опору (вхідної провідності) кола.

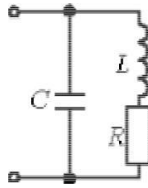


Рисунок 6.6-Реальний паралельний контур

Наприклад, для кола на рис.6 б маємо

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right).$$

Оскільки в режимі резонансу мнима частина $\underline{Y}$ повинна бути рівна нулю, то умова резонансу має вид відкілья, зокрема, знаходиться резонансна частота.

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega_p^2 L^2}.$$

Резонанс у складному колі

Умова резонансу для складного кола зі змішаним з'єднанням декількох індуктивних і ємнісних елементів, що полягає в рівності нулю мнимої частини вхідного ($X(\omega) = 0$) опору чи вхідної провідності ($b(\omega) = 0$), визначає наявність у відповідних цій умові рівнянь щодо декількох дійсних коренів, тобто таким колам відповідає кілька резонансних частот.

При визначенні резонансних частот для реактивного $X(\omega)$ двополюсника аналітичний вираз його вхідного реактивного опору чи вхідної реактивної провідності $b(\omega)$ варто представити у виді відношення двох поліномів по ступенях ω , тобто $X(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$ чи $b(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$. Тоді корені рівняння $P(\omega) = 0$ дадуть значення частот, що відповідають резонансам напруг, а корені рівняння - $Q(\omega) = 0$ значення частот, при яких виникають резонанси струмів. Загальна кількість резонансних частот у колі на одиницю менше кількості індуктивних і ємнісних елементів у схемі, одержуваної з вхідної шляхом її зведення до кола (за допомогою еквівалентних перетворень) з мінімальним числом цих елементів.

Характерним при цьому є той факт, що режими резонансів напруг і струмів чергуються.

Як приклад визначимо резонансні частоти для кола рис.6 7. Вираз вхідного опору даного кола має вигляд

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_3}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_3} = \frac{1 - \omega^2 (L_2 C_3 + L_2 C_1)}{j\omega C_1 (1 - \omega^2 L_2 C_3)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

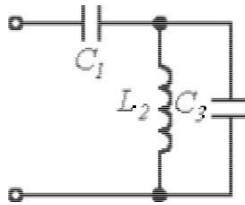


Рисунок 6.7-Складний контур

З рішення рівняння $P(\omega) = 0$ одержуємо частоту $\omega_1 = 1/\sqrt{L_2(C_1 + C_3)}$, що відповідає резонансу напруг, а з рішення рівняння $Q(\omega) = 0$ – частоту $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_3}$, що відповідає резонансу струмів.

7. ВЕКТОРНІ І ТОПОГРАФІЧНІ ДІАГРАМИ

Сукупність радіусів-векторів, що зображують синусоїдально змінні ЕРС, напруги, струми і т.д., називається **векторною діаграмою**.

Векторні діаграми наочно ілюструють хід рішення задачі. При точній побудові векторів можна безпосередньо з діаграми визначити амплітуди і фази шуканих величин. Наближене (якісне) побудова діаграм при аналітичному рішенні служить надійним контролем коректності ходу рішення і дозволяє легко визначити квадрант, у якому знаходяться обумовлені вектори.

При побудові векторних діаграм для кіл з послідовним з'єднанням елементів за базовий (відправний) вектор варто приймати вектор струму, а до нього під відповідними кутами підбудовувати вектори напруг на окремих елементах. Для кіл з паралельним з'єднанням елементів за базовий (відправний) вектор варто прийняти вектор напруги, орієнтуючи щодо нього вектори струмів у паралельних вітках.

Для наочного визначення величини і фази напруги між різними крапками електричного кола зручно використовувати **топографічні діаграми**. Вони являють собою з'єднані відповідно схеми електричного кола крапки на комплексній площині, що відображають їхні потенціали. На топографічній діаграмі, що представляє собою в принципі векторну діаграму, порядок розташування векторів напруг строго відповідає порядку розташування елементів у схемі, а вектор спадання напруги на кожному наступному елементі примикає до кінця вектора напруги на кожному попередньому елементі.

Як приклад побудуємо векторну діаграму струмів, а також топографічну діаграму потенціалів для схеми рис.7. 1.

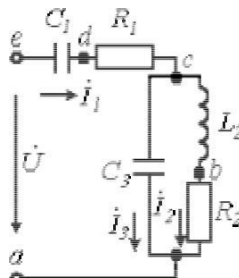


Рисунок 7.1-Контур зі змішаним з'єднанням

Параметри схеми: $X_{c1} = 100 \text{ Ом}$; $X_{L2} = X_{c3} = 50 \text{ Ом}$;
 $R_1 = 23 \hat{\Omega}$, $R_2 = 20 \hat{\Omega}$

При даних параметрах і заданій напрузі на вході схеми
 $\dot{U} = 120e^{j0} \text{ В}$ знайдені значення струмів рівні:

$$\dot{I}_1 = 0,4 + j0,4(\text{А}); \dot{I}_2 = 1 - j(\text{А}); \dot{I}_3 = -0,6 + j1,4(\text{А}).$$

При побудові векторної діаграми задамося масштабами струмів і напруг (див. рис .7. 2). Векторну діаграму можна будувати, маючи запис комплексу в показовій формі, тобто за значеннями модуля і фази. Однак на практиці зручніше проводити побудови, використовуючи алгебраїчну форму запису, оскільки при цьому дійсна і мніма складові комплексної величини безпосередньо відкладаються на відповідних осях комплексної площини, визначаючи положення вузлів на ній.

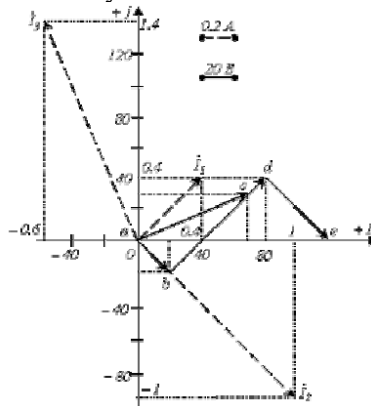


Рисунок 7.2-Векторна діаграма

Побудова векторної діаграми струмів здійснюється безпосередньо на підставі відомих значень їхніх комплексів. Для побудови топографічної діаграми попередньо здійснимо розрахунок комплексних потенціалів (інший варіант побудови топографічної діаграми припускає розрахунок комплексів напруг на елементах кола

з наступним підсумовуванням векторів напруг уздовж контуру безпосередньо на комплексній площині).

При побудові топографічної діаграми обхід контурів можна робити по напрямку струму чи проти. Частіше використовують другий варіант.

У цьому випадку з обліком того, що в електротехніці прийнято, що струм тече від більшого потенціалу до меншого, потенціал шуканої крапки дорівнює потенціалу попередньої плюс спадання напруги на елементі між цими крапками. Якщо на шляху обходу зустрічається джерело ЕРС, то потенціал шуканої крапки буде дорівнює потенціалу попередньої плюс величина цієї ЕРС, якщо напрямом обходу збігається з напрямком ЕРС, і мінус величина ЕРС, якщо не збігається. Це впливає з того, що напруга на джерелі ЕРС має напрямом, протилежний ЕРС.

Позначивши на схемі по рис. 7.1 крапки між елементами кола і прийнявши потенціал крапки а за нуль ($\varphi_a = 0$), визначимо потенціали цих крапок:

$$\begin{aligned}\varphi_b &= \varphi_a + \dot{I}_2 R_2 = 0 + (1 - j) \cdot 20 = 20 - j20(B); \\ \varphi_c &= \varphi_b + jX_{L2} \dot{I}_2 = 20 - j20 + (1 - j) \cdot j50 = 70 + j30(B)\end{aligned}$$

чи

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \varphi_a - jX_{C3} \dot{I}_3 = 0 - j50(-0,6 + j1,4) = 70 + j30(B); \\ \varphi_d &= \varphi_c + \dot{I}_1 R_1 = 70 + j30 + (0,4 + j0,4) \cdot 25 = 80 + j40(B); \\ \varphi_e &= \varphi_d - jX_{C1} \dot{I}_1 = 80 + j40 - j40(0,4 + j0,4) = 120(B).\end{aligned}$$

Таким чином, у результаті проведених обчислень отримано, що $\varphi_e - \varphi_a = 120 \text{ В}$. Різниця потенціалів крапок е і а дорівнює напрузі U , прикладеному до кола, а воно дорівнює 120 В. Таким чином, другий закон Кірхгофа виконується, а отже, обчислення виконані вірно. Відповідно до отриманих результатів будується топографічна діаграма на рис.7.2. Варто звернути увагу на орієнтацію векторів, що складають топографічну діаграму, щодо векторів струму: для резистивних елементів відповідні вектори паралельні, для індуктивного і ємнісних – ортогональні.

На закінчення помітимо, що вектори напруг орієнтовані щодо крапок топографічної діаграми протилежно позитивним напрямкам напруг щодо відповідних крапок електричного кола. У цьому зв'язку допускається не вказувати на топографічній діаграмі напрямку векторів напруг.

8. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Згідно із номером варіанту треба виконати:

1. Визначити всі струми і напруги на окремих ділянках кола комплексним методом;
2. Скласти рівняння енергетичного балансу електричного кола, перевірити баланс потужності;
3. Визначити показання вольтметра і ватметра;
4. Побудувати векторну діаграму струмів і потенційну діаграму для зовнішнього контуру ;
2. Розглянути можливі резонанси /резонанс напруг і струмів/. Визначити резонансні частоти;
3. Визначити коефіцієнт потужності схеми, зробити висновки та пропозиції до його підвищення.

Значення вхідних даних і відповідні схеми електричного кола обрати в табл. 8.1, рис. 1-30.

Викладач може для окремих груп додавати кут зсуву напруги та коефіцієнти щодо зміни параметрів R , L , C елементів кіл.

Таблица 8.1

Номер		$E, В$	$f, Гц$	$C_1, мкФ$	$C_2, мкФ$	$C_3, мкФ$	$L_1, мГн$	$L_2, мГн$	$L_3, мГн$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$
Вар.	Рис.											
1	1	50	50	-	318	-	15,9	-	31,8	5	10	80
2	2	220	50	318	-	159	-	31,8	31,8	35	20	80
3	3	200	50	318	318	159	-	-	31,8	35	20	80
4	4	100	50	500	-	-	-	15,9	31,8	35	-	40
5	5	120	50	500	-	-	-	15,9	95	4	-	4
6	6	100	50	-	318	200	9,55	-	-	4	40	4
7	7	50	50	637	-	200	-	31,8	95	4	40	40
8	8	50	50	-	318	-	19,5	-	31,8	8	10	4
9	9	200	50	318	-	300	-	15,9	-	10	10	40
10	10	100	50	318	-	300	-	-	31,8	-	10	10
11	11	220	50	637	-	637	-	9	-	6	-	20
12	12	200	50	-	159	-	25	-	95	6	-	20
13	13	100	50	637	159	-	-	-	95	6	-	20
14	14	150	50	-	159	-	25	-	95	6	10	20
15	15	200	50	637	-	200	-	31,8	-	15	-	20
16	16	100	50	-	159	200	15,9	-	-	15	-	10
17	17	50	50	-	159	-	31,8	-	95	15	10	10
18	18	220	50	-	160	-	31,8	-	95	10	8	-
19	19	200	50	637	-	200	-	31,8	-	-	8	10
20	20	100	50	-	160	200	31,8	-	-	-	8	10
21	21	150	50	100	-	200	-	15,9	-	10	2	10
22	22	220	50	637	-	200	-	15,9	-	5	10	8
23	23	120	50	-	300	100	31,8	-	-	5	-	8
24	24	100	50	637	-	100	-	15,9	-	-	10	8
25	25	50	50	-	637	-	15,9	-	6,37	5	-	8
26	26	200	50	-	159	-	-	-	115	10	4	10
27	27	100	50	100	300	-	15,9	-	115	10	-	10
28	28	120	50	637	318	-	-	-	15,9	8	3	4
29	29	100	50	-	-	100	15,9	9	15,9	8	3	4
30	30	150	50	637	-	-	-	31,8	15,9	2	3	4

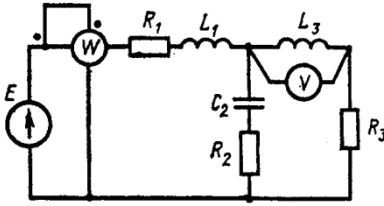


Рисунок 8.1- Схема до варіанту 1

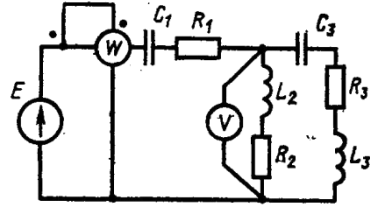


Рисунок 8.2 - Схема до варіанту 2

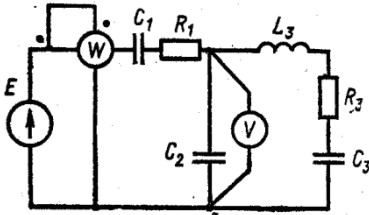


Рисунок 8.3- Схема до варіанту 3

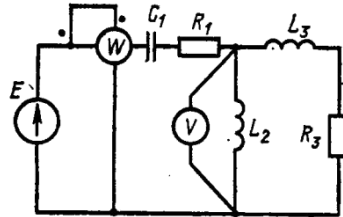


Рисунок 8.34 Схема до варіанту 4

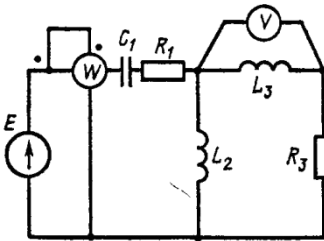


Рисунок 8.5 - Схема до варіанту 5

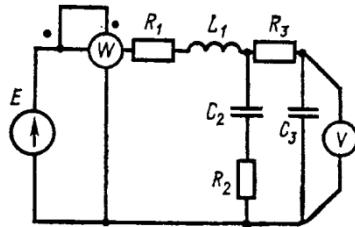


Рисунок 8.6 - Схема до варіанту 6

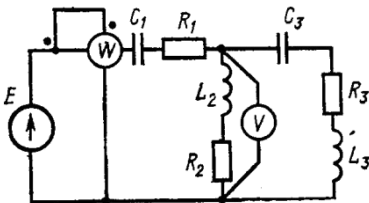


Рисунок 8.7 – Схема до варіанту 7

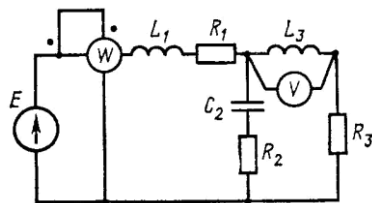


Рисунок 8.8– Схема до варіанту 8

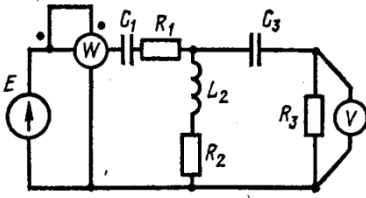


Рисунок 8.9 – Схема до варіанту 9

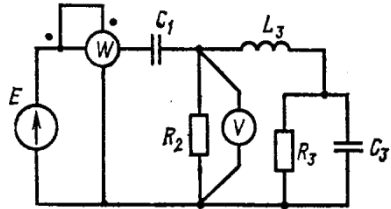


Рисунок 8.10 – Схема до варіанту 10

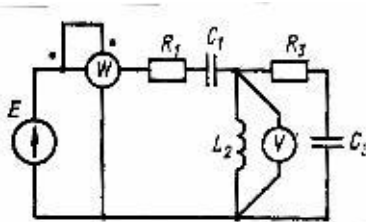


Рисунок 8. 11- Схема до варіанту 11

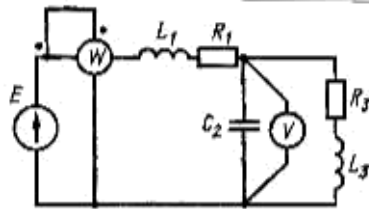


Рисунок 8. 12 – Схема до варіанту 12

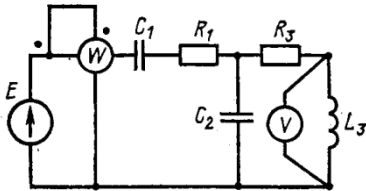


Рисунок 8. 13- Схема до варіанту 13

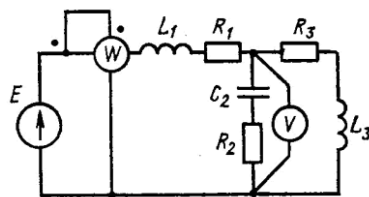


Рисунок 8.14- Схема до варіанту 14

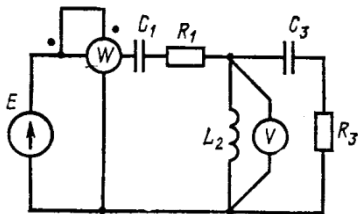


Рисунок 8. 15- Схема до варіанту 15

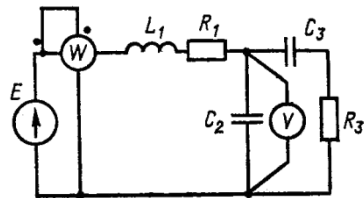


Рисунок 8. 16- Схема до варіанту 16

ЛІТЕРАТУРА

1. Пантюшин В.С. Электротехника. – М.: – Высш. шк., 1976. – 560 с.
2. Электротехника под ред. В.Г. Герасимова , – 3-е изд., – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника.– М.: Высш. шк., 1984.- 375 с.
4. Иванов И.И., Равдоник В.С. Электротехника. – М.: Высш. шк., 1984.- 377 с.
5. Сборник задач по электротехнике и основам электроники / Под. ред. В.С. Пантюшина. – М.: Высш. шк., 1979. – 253 с.
6. Липатов Д.Н. Вопросы и задачи по электротехнике для программированного обучения. – М.: Энергия, 1977. – 304 с.
7. Борисов Ю.М. и др. Электротехника. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 552 с.
8. Паначевський Б.І.,Свергун Ю.Ф.Загальна електротехніка: Теорія і практикум.-К.:Каравела,2003.- 440с.
9. Малинівський С.М.Загальна електротехніка: Підручник.- Львів:Видавництво "Бескид Біт",2003.-640 с.