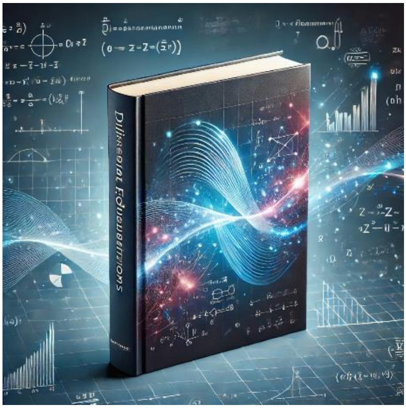
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

А.В. Савранська
О.О. Подковаліхіна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ



Навчальний посібник
для студентів спеціальності
F4 Системний аналіз та
наука про дані
вищих навчальних закладів

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2025

УДК 517.9
С13

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного університету «Запорізька політехніка»
(протокол № 10 від 27.05.2025)

Р е ц е н з е н т и:

Гребенюк С.М. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету;

Коряшкіна Л.С. – доктор технічних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету "Дніпровська політехніка"

С13 **Савранська А.В., Подковаліхіна О.О.**
Диференціальні рівняння: навчальний посібник / А.В. Савранська, О.О. Подковаліхіна. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. - 122 с.

ISBN 978-617-529-512-0

У навчальному посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, систем диференціальних рівнянь, основи теорії стійкості розв'язків цих рівнянь. Для кращого сприйняття та засвоєння матеріалу посібника сформульовані задачі, що призводять до диференціальних рівнянь, наведені приклади знаходження розв'язків цих рівнянь. Кожна тема супроводжується контрольними питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих навчальний закладів спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані. Може бути корисним для студентів природничих та інженерно-технічних напрямів підготовки.

УДК 517.9

ISBN 978-617-529-512-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Цей навчальний посібник присвячений викладенню теорії, методів розв'язування та дослідження звичайних диференціальних рівнянь. Мета посібника – допомогти студентам у засвоєнні теорії та придбанні практичних навичок розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності F4 «Системний аналіз та наука про дані» при вивченні ними дисципліни «Математичні методи системного аналізу».

Для засвоєння матеріалу курсу «Математичні методи системного аналізу» студент має знати базові поняття курсу «Математичні основи системного аналізу», а саме диференціальне та інтегральне числення, а також основні поняття курсу «Алгебра та геометрія».

З розвитком науки вузькоспеціальні знання мають тенденцію до швидкого старіння. Тому для вирішення нових задач спеціалісти різних галузей повинні мати достатню підготовку з математики, за допомогою якої описується багато процесів і явищ оточуючого середовища, суспільства, економіці, техніки та ін.. Така підготовка є базою для швидкого засвоєння та оволодіння новими перспективними науковими напрямками.

У сучасному світі диференціальні рівняння є важливим інструментом для моделювання складних систем у різних галузях: біологія (динаміка популяцій, поширення хвороб), економіка (керування ризиками), штучний інтелект (оптимізація нейронних мереж) тощо. Для фахівців з системного аналізу потрібно володіти методами розв'язування диференціальних рівнянь для того, вміти формалізувати причинно-наслідкові зв'язки, будувати математичні моделі, розробляти алгоритми розвязання задач на основі математичних моделей, аналізувати отриманні та приймати обґрунтовані рішення, прогнозувати поведінку складних систем.

Одним із важливих розділів математики, який в обов'язковому порядку вивчають студенти молодших курсів є диференціальні рівняння. Особливістю диференціальних рівнянь є їх безпосередній зв'язок із додатками. Щоб вивчити будь-яке явище, попередньо розглядають всілякі зв'язки між величинами, що їх характеризують. Потім ці зв'язки виражають математично – функціями та їх похідними. В результаті одержують диференціальне рівняння, а найчастіше, і систему диференціальних рівнянь. Аналізуючи розв'язки цих рівнянь, можна робити висновки про те, як надалі розвиватиметься явище, що вивчається, які умови треба задати, щоб досягти необхідних результатів.

Як відомо, теорія звичайних диференціальних рівнянь почала розвиватися XVII столітті одночасно з виникненням диференціального та інтегрального числення. Можна сказати, що необхідність розв'язувати диференціальні рівняння для потреб механіки, то є шукати траєкторії рухів, стала поштовхом до створення Ньютоном його законів, які дозволяють будувати математичну модель механічного руху, яка зазвичай є диференціальним рівнянням.

В даний час теорія диференціальних рівнянь є одним із найбільших розділів сучасної математики. Її розробкою займалися найбільші вчені XVIII століття, такі як Ж. Даламбер, Ж. Л. Лагранж, А. Клеро та ін. Найбільшу роль у розвитку цієї теорії зіграли праці Л. Ейлера

Зауважимо, що вивчення звичайних диференціальних рівнянь на молодших курсах зазвичай залишається на рівні відкриттів XVIII століття і полягає в освоєнні прийомів інтегрування лише добре вивчених типів рівнянь, оскільки рівняння, що інтегруються це виняткова рідкість. Переходячи до реальних об'єктів науковці стикаються з більш складними моделями, та їх математичною реалізацією. Диференціальні рівняння, що описують такі процеси розв’язуються за допомогою чисельних методів.

Посібник містить п’ять глав: «Загальні відомості про диференціальні рівняння», «Диференціальні рівняння першого порядку», «Диференціальні рівняння вищих порядків. Зниження порядку рівняння», «Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи диференціальних рівнянь». Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами. Кожна глава супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми.

Для аналітичного та чисельного розв’язання складних рівнянь можна застосовувати наступне програмне забезпечення та мови програмування: спеціалізовані математичні пакети (Maple, MATLAB, Mathcad); мови програмування (Python, Julia, C++); спеціалізовані програми для моделювання (COMSOL Multiphysics, ANSYS). Проте важливо мати розуміння теоретичних основ для коректного застосування програмного забезпечення та аналізу результати моделювання. Цей посібник допоможе студентам опанувати класичні методи і підготуватися до використання сучасних програмних засобів.

ГЛАВА 1
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1.1 Основні поняття

При розгляді фізичних явищ часто не вдається безпосередньо знайти залежність між величинами, які характеризують процес, що змінюється в часі. У багатьох випадках можна встановити зв'язок між характеристиками (функціями) досліджуваного явища і швидкостями їх зміни щодо інших величин, тобто знайти рівняння, в які входять похідні невідомих функцій. Такі рівняння називають ***диференціальними.***

Якщо невідомі функції залежать від одного незалежного змінного, то говорять про звичайні диференціальні рівняння (ЗДР), інакше про диференціальні рівняння з частинними похідними.

Нехай t - незалежна змінна, x - шукана функція. Запишемо звичайне диференціальне рівняння у вигляді:

$$\mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}, \cdots, \frac{\mathrm{d^n x}}{\mathrm{dt^n}}) = 0 \qquad (1.1)$$

Порядок n старшої похідної називається ***порядком*** звичайного диференціального рівняння.

Означення 1*. Розв’язком звичайного диференціального рівняння (1.1) в деякому проміжку $T \subseteq R$ числової прямої $\boldsymbol{R}$ називають $\boldsymbol{n}$ - разів неперервно диференційовану функцію $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$, що задовольняє при будь-якому $\boldsymbol{T}$ цьому рівнянню.*

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x, t \in R. \qquad (1.2)$$

Це звичайне диференціальне рівняння розв’язане відносно похідної.

Процес знаходження розв’язку звичайного диференціального рівняння зазвичай називають ***інтегруванням диференціального рівняння***. Якщо розв’язок звичайного диференціального рівняння можна отримати за допомогою скінченного числа операцій інтегрування і диференціювання та виразити через елементарні функції, тоді кажуть, що розв'язок виражено (або отримано) в квадратурах.

Звичайні диференціальні рівняння у загальному випадку мають безліч розв'язків. Щоб виділити з нього один розв'язок, необхідно задати початкове значення функції.

Задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку (1.2) формулюємо наступним чином: знайти розв'язок $\boldsymbol{x(t)}$ рівняння (1.2), такий що

$$x(t_0) = x_0 \qquad (1.3)$$

де $\boldsymbol{x_0, t_0}$ - задані числа. Умову (1.3) називають ***початковою умовою або умовою Коші,*** а функцію $\boldsymbol{x(t)}$**,** що задовольняє рівнянню (1.2) та умові (1.3) - ***розв'язком задачі Коші***.

Означення 2*. Функція* $\boldsymbol{f(t,x)}$*, визначена в області* $\boldsymbol{G}$*, задовольняє умові Ліпшиця в* $\boldsymbol{G}$ *відносно* $\boldsymbol{x}$*, якщо існує таке число* $\boldsymbol{L > 0}$*, яке називається* ***постійною Ліпшиця****, що для будь-яких двох точок* $(\boldsymbol{t, x})$ *та* $(\boldsymbol{t, y})$ *з* $\boldsymbol{G}$ *виконана нерівність:*

$$\boldsymbol{|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|.}$$

Функція $\boldsymbol{f(t,x)}$**,** яка має в замкнутій обмеженій області $\boldsymbol{G}$ неперервну частинну похідну $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$**,** задовольняє умові Ліпшиця в $\boldsymbol{G}$ відносно $\boldsymbol{x}$**.**

Теорема Коші*: Нехай функція* $\boldsymbol{f(t,x)}$ *визначена та неперервна в прямокутній замкненій області*

$$\boldsymbol{D = \{(t,x): |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}} \qquad (1.4)$$

і задовольняє в цій області умови Ліпшиця відносно $\boldsymbol{x}$*. Тоді існує єдиний розв'язок звичайного диференціального рівняння першого порядку (1.2) з початковою умовою (1.3). Цей розв'язок визначений при* $\boldsymbol{|t - t_0| \leq h}$*, де* $\boldsymbol{h = min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\},\ M = \max_{(x,t)\in D}\{|f(t,x)|\}.}$

Виконання умов теореми Коші гарантує існування і єдиність розв'язку задачі Коші (1.2), (1.3), який називається частинним розв'язком звичайного диференціального рівняння першого порядку, що задовольняє початковій умові (1.3). Зафіксуємо $\boldsymbol{t_0}$ і будемо вважати початкове значення $\boldsymbol{x_0}$ змінним параметром, який приймає різні числові значення, що не виходять з області $\boldsymbol{G}$, в якій виконані умови теореми Коші. Позначимо $\boldsymbol{x_0 = C}$, де $\boldsymbol{C}$ - деяка стала. Так як початкову умову $\boldsymbol{x(t_0) = x_0}$ можна вибирати довільно, то сукупність всіх розв’язків диференціального рівняння (1.2) буде залежати від довільної сталої.

Розв'язок, який залежить від довільної сталої називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння.

Якщо загальний розв'язок не розв'язаний явно відносно $\boldsymbol{x}$, тобто має вигляд співвідношення $\Phi(t, x, C) = 0$, то таке співвідношення називають ***загальним інтегралом*** рівняння.

Питання та задачі

1. Які рівняння називаються *диференціальними*?
2. Які рівняння називаються *звичайними диференціальними рівняннями*?
3. Сформулюйте означення *розв’язку* звичайного диференціального рівняння.
4. Що називається *порядком* звичайного диференціального рівняння?
5. Сформулюйте *задачу Коші* для звичайного диференціального рівняння першого порядку.
6. Сформулюйте *теорему про існування та єдиність* розв’язків звичайного диференціального рівняння першого порядку.
7. Що називається *загальним розв’язком* та *загальним інтегралом* диференціального рівняння?
8. Визначте, чи є наступні рівняння а) диференціальними рівняннями; б) звичайними диференціальними рівняннями:

    1) $y' + 2y = e^x$;
    2) $\frac{d^2y}{dx^2} + sin(x) \cdot y = 0$;
    3) $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$;
    4) $x^2 + y^2 = 1$;
    5) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

9. Визначте порядок звичайних диференціальних рівнянь:

    1) $y' = 3x^2$;

2) $y'' + 4y = cos(x)$;
3) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{\partial y}{\partial x} = x$;
4) $(y')^2 + y = 0$;
5) $y^{(4)} + 2y'' + y = e^{-x}$.

§ 1.2. Ізокліни та їх використання для наближеної побудови інтегральних кривих

Звичайне диференціальне рівняння (1.2) першого порядку кожній точці $(t, x) \epsilon D$ прямокутної області D (1.4) ставить у відповідність певне значення $\frac{dx}{dt} = f(t, x) = tg\alpha$, де α – кут між дотичною до інтегральної кривої та координатною віссю $0t$. Таким чином, в кожній точці області D визначено деякій напрямок, тобто маємо поле напрямків, яке можна зобразити на площині $t0x$, розмістивши у відповідних точках області D відрізки, які утворюють з координатною віссю $0t$ кути $arctg(t, x)$. Це поле напрямків можна представити також за допомогою *плоских кривих,* які описуються рівнянням $f(t, x) = k$ $(k = const)$ та називаються ***ізоклинами*** . Для кривої з деяким фіксованим значенням k в кожній її точці дотична до *інтегральної кривої*, що проходить через цю точку, має однаковий напрямок, що задається кутом $\alpha = arctg\ k$.

Для того, щоб наближено побудувати інтегральну криву, необхідно накреслити достатню кількість ізоклін, а потім зобразити криву, яка в точках перетину з ізоклінами, що описуються рівняннями $f(t, x) = k_1$, $f(t, x) = k_2$, …, має дотичні з кутовими коефіцієнтами відповідно k_1, k_2,…

Нульова ізокліна $f(x, y) = 0$ дає рівняння ліній, на яких можуть знаходитися точки максимуму та мінімуму інтегральних кривих.

Приклад 1.1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}. \tag{1.5}$$

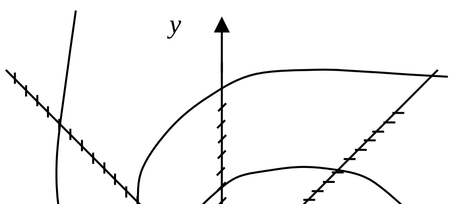


Рис. 1.1

Розв'язок: Покладемо $x' = k$, отримаємо рівняння сімейства ізоклін $\frac{x-t}{x+t} = k.$

Таким чином, ізоклінами є прямі, які проходять через початок координат. При $k = -1$ отримаємо ізокліну $x = 0$, при $k = 0$ - ізокліну $x = t$, при $k = 1$ = ізокліну $x = 0$. Розглядаючи перевернуте рівняння $\frac{dt}{dx} = \frac{x+t}{x-t}$ знайдемо ізокліну $y = -x$, у всіх точках якої інтегральні криві мають вертикальні дотичні. За допомогою отриманих ізоклін будуємо інтегральні криві.

Приклад 1.2. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві рівняння

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2. \tag{1.6}$$

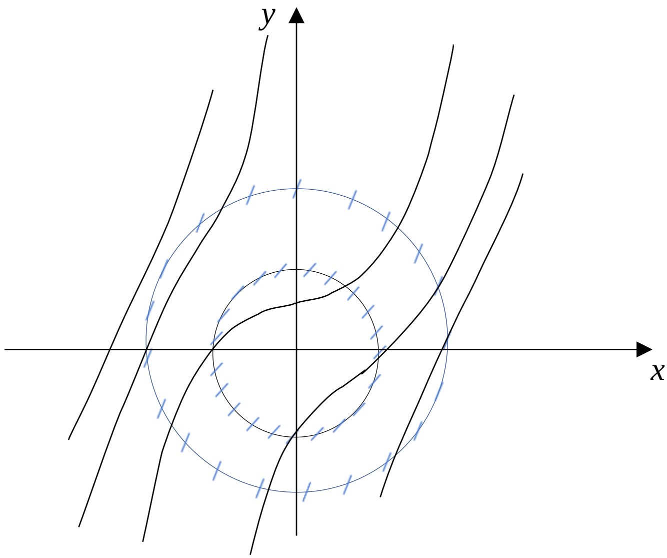


Рис. 1.2

Розв'язок: Покладемо $x' = k$, отримаємо рівняння сімейства ізоклін $t^2 + x^2 = k$.

Побудуємо окремі ізокліни.

При $k = 1$: $t^2 + x^2 = 1$, маємо коло з центром в точці $(0; 0)$ та радіусом 1.

При $k = 4$: $t^2 + x^2 = 4$, маємо коло з центром в точці $(0; 0)$ та радіусом 2.

В загальному випадку маємо сімейство концентричних кіл радіуса $\sqrt{k}, k \geq 0$.

Побудуємо поле напрямків для кожної ізокліни.

При $k = 1$, $tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = arctg\, 1 = {}^{\pi}/_{4}$. При $k = 4$, $tg\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = arctg\, 4$, і т. д.

Питання та задачі

1. Які криві називаються ізоклінами?

2. Як за допомогою ізоклін побудувати наближений розв'язок диференціального рівняння?

3. За допомогою методу ізоклін побудуйте поле напрямів диференціального рівняння та наближено зобразіть декілька інтегральних кривих:

1) $\frac{dx}{dt} = t(1 - x)$;

2) $(t - x)\frac{dx}{dt} = t + x$;

3) $t\frac{dx}{dt} = x$;

4) $\frac{dx}{dt} = t(1 - x)$;

5) $\frac{dx}{dt} = t + x^2$;

6) $(t + x)^2\frac{dx}{dt} = 1$;

7) $\frac{dx}{dt} = t^2 - x^2$;

8) $\frac{dx}{dt} = \frac{x - t^2}{t}$.

ГЛАВА 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§2.1 Диференціальне рівняння зі змінними, що розділюються

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t)f_2(x) \tag{2.1}$$

називається ***звичайним диференціальним рівнянням зі змінними, що розділюються***. Будемо припускати, що функції $f_1(t)$, $f_2(x)$ неперервні в інтервалах (t_1, t_2) і (a, b) відповідно, і нехай $f_2(x) \neq 0$ при будь-яких $x \in (a, b)$. За таких припущень для звичайного диференціального рівняння (2.1) в області

$$D = \{(t, x)\colon\ t_1 < t < t_2,\ a < x < b\}$$

виконані умови теореми Коші.

Помноживши звичайне диференціальне рівняння на $\frac{dt}{f_2(x)}$, отримаємо рівняння

$$\frac{dx}{f_2(x)} = f_1(t)dt \tag{2.2}$$

в якому ліва і права частина залежать від різних змінних. Перетворення (2.1) до вигляду (2.2) називається ***розділенням змінних***.

Проінтегруємо рівняння (2.2)

$$\int \frac{dx}{f_2(x)} = \int f_1(t)dt. \tag{2.3}$$

Обчислення невизначених інтегралів в (2.3) приводить до рівності:

$$J(x) - G_1(t) = C,$$

яка є загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння (2.1) в області D.

Ділення на $f_2(x)$ може привести до втрати частинних розв’язків, які обертають в нуль $f_2(x)$. Тому слід окремо розв’язати рівняння $f_2(x) = 0$ і знайти розв’язки диференціального рівняння, які не можуть бути отримані із загального розв'язку - *особливі розв’язки*.

Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c) \tag{2.4}$$

де a, b, c - постійні, заміною змінних

$$z = at + bx + c \tag{2.5}$$

перетворюється в рівняння зі змінними, що розділюються.

Приклад 2.1. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$t^2 x^2 \frac{dx}{dt} + 1 = x \tag{2.6}$$

Зробимо розділення змінних

$$t^2 x^2 \frac{dx}{dt} = x - 1,$$
$$t^2 x^2 dx = (x - 1)dt,$$
$$\frac{x^2 dx}{x-1} = \frac{dt}{t^2} \tag{2.7}$$

Проінтегруємо рівняння (2.7)

$$\int \frac{x^2 dx}{x-1} = \int \frac{dt}{t^2} dt,$$
$$\int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\frac{1}{t} + C,$$
$$\frac{x^2}{2} + x + ln|x - 1| = -\frac{1}{t} + C. \tag{2.8}$$

(2.8) – загальний розв'язок диференціального рівняння (2.6). Цей розв'язок визначений на всій числовій прямій R, крім точки $t = 0$.

Звичайному диференціальному рівнянню (2.6) задовольняє також розв'язок $x(t) \equiv 1$, яке обертає в нуль функцію $f_2(x)$. Цей розв'язок було “втрачено” при розділенні змінних в силу припущення, що $f_2(x) \neq 0$. Для отримання всіх розв'язків рівняння (2.6), необхідно до розв'язків, що описуються за допомогою (2.8), приєднати розв'язок $x(t) \equiv 1$.

Приклад 2.2. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = e^{t-x} \tag{2.9}$$

Перетворимо (2.9) до вигляду (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = e^{t}e^{x}. \tag{2.10}$$

Тобто, $f_1(t) = e^t$, $f_2(x) = e^x$.

В даному випадку $\boldsymbol{f_2(x)} \neq 0$, для будь-якого $x \in R$. Тому, розділюючи змінні

$$e^x dx = e^t dt,$$

та інтегруючі

$$\int e^x dx = \int e^t dt,$$

знайдемо всі розв'язки рівняння (2.10):

$$e^x = e^t + \mathrm{C},\ \ x(t) = ln(e^t + \mathrm{C}).$$

Приклад 2.3. Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$(1 + e^x)yy' = e^x, \tag{2.11}$$

з початковою умовою

$$y(0) = 1. \tag{2.12}$$

В рівнянні (2.11) розділимо змінні

$$(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x,$$

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx. \quad (2.13)$$

Проінтегруємо (2.13)

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx. \quad (2.14)$$

Знайдемо інтеграл в правій частині рівняння (2.14). Зробимо заміну змінних

$$e^x = t \ \Rightarrow x = \ln t,$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{tdt}{(1+t)t} = \int \frac{dt}{1+t} = ln(1+t) + lnC = ln(1+e^x) + C.$$

Підставимо отримане значення інтегралу в (2.14), отримаємо

$$\frac{y^2}{2} = ln(1+e^x) + C. \quad (2.15)$$

Підставляючи початкову умову в загальний розв'язок (2.15), визначимо сталу C:

$$x_0 = 0, \ y_0 = 1.$$

$$\frac{1}{2} = ln(2) + C, \quad C = \frac{1}{2} - ln\,2.$$

Підставимо визначену сталу C в рівняння (2.15), отримаємо частинний розв'язок

$$\frac{y^2}{2} = ln(1+e^x) + \frac{1}{2} - ln\,2,$$

$$y^2 = 2ln(1+e^x) + 1 - 2\,ln\,2,$$

$$y^2 = ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)^2 + 1,$$

$$y = \sqrt{ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)^2 + 1}. \quad (2.16)$$

Формула (2.16) це частинний розв'язок рівняння (2.11), що задовольняє початковій умові (2.12).

Приклад 2.4. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x + 2y - 1}. \tag{2.16}$$

Щоб перетворити (2.16) в рівняння зі змінними, що розділюються, зробимо заміну змінних

$$4x + 2y - 1 = z,$$
$$y = \frac{1}{2}(z - 4x + 1), \tag{2.17}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 4\right). \tag{2.18}$$

Підставимо (2.17), (2.18) у вихідне рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 4\right) = \sqrt{z}$$
$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2\sqrt{z}.$$

Розділимо змінні

$$\frac{dz}{1+2\sqrt{z}} = dx. \tag{2.19}$$

Проінтегруємо інтеграл з лівої частини (2.19)

$$\int \frac{dz}{1 + 2\sqrt{z}} = \left\|\sqrt{z} = t, dz = 2tdt, z = t^2\right\| = \int \frac{2t\ dt}{1 + 2t}$$
$$= \int \left(1 - \frac{1}{1 + 2t}\right) dt =$$
$$= t - \frac{1}{2}\int \frac{d(1 + 2t)}{1 + 2t} = \ t - \frac{1}{2} ln|1 + 2t| = \sqrt{z} - \frac{1}{2} ln\left|1 + 2\sqrt{z}\right| =$$
$$= \sqrt{4x + 2y - 1} - \frac{1}{2} ln\left|1 + 2\sqrt{4x + 2y - 1}\right|.$$

Підставимо в (2.19), отримоємо загальний розв'язок рівняння (2.16).

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - \frac{1}{2} ln\left|1 + 2\sqrt{4x + 2y - 1}\right| = x + C.$$

Питання та задачі

1. Яке рівняння називається звичайним диференціальним *рівнянням зі змінними, що розділюються*?

2. В яких випадках можна "втратити" розв'язки при розділенні змінних та як цього уникнути?

3. За допомогою якої підстановки рівняння $\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c)$ можна звести до рівняння зі змінними, що розділюються?

4. Розв'язати наступні диференціальні рівняння:

1) $\frac{dx}{dt} = 2\frac{\sqrt{x}}{t}$,
2) 2) $\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x^2-4}$,
3) 3) $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{x(1+e^{2t})}$,
4) $2x^2 y\frac{dy}{dx} + y^2 = 2$,
5) $\frac{dz}{dx} = 10^{x+z}$, $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$,
6) $\frac{dy}{dx} - y = 2x - 3$,
7) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціальні рівняння при заданих початкових умовах:

1) $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.
2) $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 0$.
3) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$.
4) $(x + 2y)\frac{dy}{dx} = 1$, $y(0) = -1$.

§2.2. Однорідні та квазіоднорідні рівняння.

Функція $\phi(t,x)$ є ***однорідною функції ступеня k,*** якщо для будь-якого $\lambda > 0$ виконана рівність $\phi(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k \phi(t,x)$. При $k = 0$ маємо $\phi(\lambda t, \lambda x) = \phi(t,x)$, тобто отримуємо однорідну функцію нульового ступеня.

Наприклад, $t^2 + x^2 - tx$ є однорідною функцією другого ступеня, $t^{k-1}x + x^k$ є однорідною функцією k -го ступеня.

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{2.20}$$

називається ***однорідним***, якщо $f(t,x)$ - однорідна функція нульового ступеня ($k = 0$), тобто $f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x)$. Якщо в цій рівності покласти $\lambda = \frac{1}{t}$, отримаємо тотожність $f(t,x) \equiv f\left(1, \frac{x}{t}\right)$. Таким чином, якщо звичайне диференціальне рівняння (2.20) – однорідне, то його права частина - функція лише одного аргументу $\frac{x}{t}$. Позначивши цю функцію через ϕ, запишемо (2.20) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Зробимо заміну шуканої функції

$$x = ty. \tag{2.21}$$

Диференціюючи (2.21) і підставляючи результат в (2.20), отримуємо звичайне диференціальне рівняння із змінними, що розділюються

$$t\frac{dy}{dt} = \phi(y) - y. \tag{2.22}$$

Розділимо змінні і про інтегруємо, знайдемо

$$\int \frac{dy}{\phi(y) - y} = ln|t|. \tag{2.23}$$

Крім розв'язків (2.23) звичайне диференціальне рівняння (2.22) може мати розв'язки вигляду $y = y_0$, де корені рівняння $\phi(y) - y$. Розв'язку $y = y_0$ рівняння (2.22) відповідає розв'язок $x = y_0 t$ звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \phi(\frac{x}{t}).$$

Приклад 2.5. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx + x^2 e^{-\frac{t}{x}}}{t^2}. \tag{2.24}$$

Перевіримо, чи є права частина рівняння (2.24) однорідною функцією нульового ступеня:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda t \lambda x + \lambda^2 x^2 e^{-\frac{t\lambda}{\lambda x}}}{\lambda^2 t^2} = \frac{tx + x^2 e^{-\frac{t}{x}}}{t^2} = f(t, x).$$

Оскільки виконується умова $f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x),$ права частина рівняння (2.24) є однорідною функцією нульового порядку, а рівняння (2.24) - однорідне. Зробимо заміну змінних

$$x = ty, \frac{dx}{dt} = y + t\frac{dy}{dt},$$

яка перетворює (2.24) до вигляду рівняння зі змінними, що розділюються

$$y + t\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 y + t^2 y^2 e^{-\frac{t}{ty}}}{t^2},$$

$$y + t\frac{dy}{dt} = y + y^2 e^{-\frac{1}{y}},$$

$$t\frac{dy}{dt} = y^2 e^{-\frac{1}{y}}$$

Розділимо змінні

$$\frac{dy}{y^2 e^{-\frac{1}{y}}} = \frac{dt}{t}.$$

Проінтегруємо

$$\int \frac{dy}{y^2 e^{-\frac{1}{y}}} = \int \frac{dt}{t},$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{y}}dy}{y^2} = ln|t| + C,$$
$$\int e^{\frac{1}{y}}d\left(\frac{1}{y}\right) = ln|t| + C,$$
$$-e^{\frac{1}{y}} = ln|t| + C,$$
$$ln|t| + e^{\frac{1}{y}} = C. \qquad (2.25)$$

Повернемося до старої змінної

$$ln|t| + e^{\frac{t}{x}} = C. \qquad (2.26)$$

При розділенні змінних було втрачено розв'язок: $y^2e^{-\frac{1}{y}} = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$**.** Для отримання всіх розв'язків рівняння (2.24), необхідно до розв'язків, що описуються за допомогою (2.26), приєднати розв'язок $x(t) \equiv 0$.

Приклад 2.6. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y, \qquad (2.27)$$

Поділимо ліву і праву частин рівняння на $\boldsymbol{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}, \qquad (2.28)$$

Права частина (2.28) залежить від однієї змінної $\boldsymbol{\frac{y}{x}}$, тому (2.28) є однорідним диференціальним рівнянням. Зробимо заміну змінних

$$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{zx},$$
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{z} + \mathrm{x}\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}.$$

Підставимо нову функцію у рівняння (2.28)

$$\mathrm{z} + \mathrm{x}\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = \sqrt{1 - \mathrm{z}^2} + \mathrm{z},$$
$$\mathrm{x}\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = \sqrt{1 - \mathrm{z}^2},$$

Розділимо змінні

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{dx}$$

та проінтегруємо

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{dx}$$
$$arcsin\, z = ln|x| + ln\, C_1,$$
$$arcsin\, z = ln|C_1 x|.$$

Оскільки $C_1|x| = \pm C_1 x$, позначимо $\pm C_1 = C$. Отримаємо

$$arcsin\, z = ln\, C\, x.$$

Повернемось до старої змінної

$$arcsin\ \frac{y}{x} = ln\, C\, x,$$
$$\frac{y}{x} = sin\big(ln(Cx)\big),$$
$$y = xsin\big(ln(Cx)\big). \qquad (2.29)$$

При розв'язуванні рівняння ми ділили обидві частина на $x\sqrt{1-z^2}$ та могли втратити розв'язок. Перевіримо це, підставивши корені рівняння $x\sqrt{1-z^2} = 0$ у вихідне рівняння. Знайдемо ці корені:

$$x\sqrt{1-z^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-z^2} = 0 \Rightarrow 1 - z^2 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{y^2}{x^2} = 0.$$
$$y^2 = x^2, \Rightarrow \quad y = \pm x$$

$y = x$: $\quad x = \sqrt{x^2 - x^2} + x$ - є розв'язком.

$y = -x$: $\quad -x = \sqrt{x^2 - x^2} - x$ - є розв'язком.

Для отримання всіх розв'язків рівняння (2.28), необхідно до розв'язків, що описуються за допомогою (2.29), приєднати розв'язки $y(t) = \pm x$.

До однорідних рівнянь замінами $x = y + v, \quad t = \tau + u$ можна привести звичайні диференціальні рівняння вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{ax+bt+c}{a_1x+b_1t+c_1}\right).$$

Сенс цих замін полягає в позбавленні від постійних доданків у чисельнику та знаменнику аргументу функції f. Постійні $u,\ v$ є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$ax + bt + c = 0$$
$$a_1x + b_1t + c_1 = 0$$

При $ab_1 - a_1b = 0$, тобто коли система лінійних алгебраїчних рівнянь не має єдиного розв'язку, слід застосувати підстановку $y = ax + bt$.

Приклад 2.7. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{x+1}{x+t-2}\right)^2 \tag{2.30}$$

Знайдемо постійні $u,\ v$ з системи

$$\begin{cases} v+1=0 \\ v+u-2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} v=-1 \\ -1+u-2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} v=-1 \\ u=3 \end{cases}.$$

Зробимо заміну змінних

$$x = y - 1, \quad t = \tau + 3.$$
$$dx = dy, dt = d\tau.$$

Підставимо нові змінні в рівняння (2.30), отримаємо

$$\frac{dy}{d\tau} = 2\left(\frac{y-1+1}{y-1+\tau+3-2}\right)^2$$
$$\frac{dy}{d\tau} = 2\,\frac{y^2}{(y+\tau)^2}. \tag{2.31}$$

Рівняння (2.31) - однорідне рівняння, оскільки його права частина є однорідною функцією нульового ступеня**.** Поділимо ліву і праву частини (2.31) на τ

$$\frac{dy}{d\tau} = 2\frac{\left(\frac{y}{\tau}\right)^2}{\left(\frac{y}{\tau}+1\right)^2}, \tag{2.32}$$

та перейдемо до нової шуканої функції

$$z = \frac{y}{\tau}, \quad y = \tau z, \quad \frac{dy}{d\tau} = z + \tau\frac{dz}{d\tau}.$$

Підставимо нову функцію та її похідну в (2.32):

$$z + \tau\frac{dz}{d\tau} = 2\frac{z^2}{(z+1)^2},$$
$$\tau\frac{dz}{d\tau} = \frac{2z^2}{(z+1)^2} - z,$$
$$\tau\frac{dz}{d\tau} = -\frac{z^3+z}{(z+1)^2}.$$

Розділимо змінні

$$\frac{(z+1)^2}{z^3+z}dz = -\frac{d\tau}{\tau},$$

та проінтегруємо

$$\int\frac{(z+1)^2}{z(z^2+1)} = -\int\frac{d\tau}{\tau},$$
$$\int\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1}\right)dz = -\ln\tau + \ln C,$$
$$\ln|z| + 2arctg\ z = -\ln|\tau| + \ln C,$$
$$z\tau e^{2arctg\ z} = C.$$

Повернемось до шуканої функції y та до старих змінних $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{t}$

$$\frac{y}{\tau}\tau e^{2arctg\left(\frac{y}{\tau}\right)} = C,$$
$$(x+1)e^{2arctg\left(\frac{x+1}{t-3}\right)} = C.$$

При розділенні змінних ми втратили розв'язок $z(\tau) \equiv 0$, або, у вихідних змінних $x(t) \equiv -1$. Дійсно, нескладно переконатися, що постійна функція $x(t) \equiv -1$ є частинним розв'язком вихідного рівняння (2.30) і в загальному розв'язку відповідає константі $C = 0$.

Звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

називається ***квазіоднорідним***, якщо для будь-якого $\lambda > 0$ справедлива рівність

$$f\left(\lambda^{\alpha} t, \lambda^{\beta} x\right) = \lambda^{\beta-\alpha} f(t, x)$$

де $\alpha, \beta \in R$. Заміною $x = y t^{\frac{\beta}{\alpha}}$ квазіоднорідне звичайне диференціальне рівняння можна перетворити до звичайного диференціального рівняння зі змінними, що розділюються.

Деякі звичайні диференціальні рівняння першого порядку можна привести до однорідних заміною $x = y^m$, де m - число, яке підлягає визначенню.

Приклад 2.8. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$2t^4 x \frac{dx}{dt} + x^4 = 4t^6, \tag{2.33}$$

Зробимо заміну змінних

$$x = y^m,$$
$$\frac{dx}{dt} = m y^{m-1} \frac{dy}{dt}.$$

Підставимо x та $\frac{dx}{dt}$ у вихідне рівняння (2.33)

$$2t^4 y^m m y^{m-1} \frac{dy}{dt} + y^{4m} = 4t^6. \tag{2.34}$$

Воно буде однорідним у випадку рівності ступенів всіх його членів. Прирівняємо ступені всіх доданків рівняння (2.34):

$$4 + 2m - 1 = 4m = 6,$$
$$2m + 3 = 4m = 6.$$

Всі доданки (2.34) будуть мати однаковий ступінь при $m = \frac{3}{2}$.

Отже, зробимо заміну змінних для рівняння (2.33)

$$x = y^{\frac{3}{2}},$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt}.$$

Підставимо x та $\frac{dx}{dt}$ у (2.33), отримаємо

$$2t^4 y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} + y^{4 \cdot \frac{3}{2}} = 4t^6,$$
$$3t^4 y^2 \frac{dy}{dt} + y^6 = 4t^6. \tag{2.35}$$

(2.35) - однорідне рівняння. Розділимо ліву і праву частини цього рівняння на t^6:

$$3\left(\frac{y}{t}\right)^2 \frac{dy}{dt} + \left(\frac{y}{t}\right)^6 = 4. \tag{2.36}$$

Для знаходження розв'язку однорідного рівняння зробимо ще одну заміну змінних:

$$z = \frac{y}{t} \quad \Rightarrow \quad y = zt,$$
$$\frac{dy}{dt} = t\frac{dz}{dt} + z.$$

Підставимо y та $\frac{dy}{dt}$ у рівняння (2.36) та зробимо перетворення

$$3z^2\left(t\frac{dz}{dt} + z\right) + z^6 = 4, \tag{2.37}$$
$$3z^2 t\frac{dz}{dt} = 4 - 3z^3 - z^6.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо

$$\frac{3z^2 dz}{4 - 3z^3 - z^6} = \frac{dt}{t},$$
$$3\int \frac{z^2 dz}{z^6 + 3z^3 - 4} = -\int \frac{dt}{t}. \tag{2.38}$$

Знайдемо інтеграл з правої частини (2.38)

$$\int \frac{d(z^3)}{z^6+3z^3-4} = \|z^3 = u\| = \int \frac{du}{u^2+3u-4} = \int \frac{du}{u^2+3\cdot\frac{3}{2}u+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4} =$$

$$= \int \frac{du}{\left(u+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\,ln\frac{u+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{u+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\,ln\frac{u-1}{u+4} = \frac{1}{2}\,ln\frac{z^3-1}{z^3+4}.$$

Підставимо отримане значення у (2.38):

$$\frac{1}{2}\,ln\frac{z^3-1}{z^3+4} = -\,ln\,t + ln\,C_1,$$

$$t\cdot\sqrt{\frac{z^3-1}{z^3+4}} = C_1,$$

$$t^2\cdot\frac{z^3-1}{z^3+4} = C.$$

Повернемося до старої змінної y

$$t^2\,\frac{\left(\frac{y}{t}\right)^3-1}{\left(\frac{y}{t}\right)^3+4} = C, \text{ або } \; t^2\,\frac{y^3-t^3}{y^3+4t^3} = C.$$

Після цього повернемось до змінної x. Отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$t^2\,\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3-t^3}{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3+4t^3} = C, \text{ або } \; t^2\,\frac{x^2-t^3}{x^2+4t^3} = C.$$

Питання та задачі

1. Яка функція називається *однорідною функції ступеня* k?

2. Яке звичайне диференціальне рівняння першого порядку називається *однорідним?*

3. За допомогою якої заміни змінних однорідне рівняння зводиться до рівняння зі змінними, що розділюються?

4. За допомогою якої заміни змінних рівняння $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{ax+bt+c}{a_1x+b_1t+c_1}\right)$ зводиться до однорідного рівняння?

5. Яке диференціальне рівняння називається *квазіоднорідним*, та за допомогою яких підстановок воно зводиться до однорідного рівняння?

6. Знайти розв'язки однорідних диференціальних рівнянь:

1) $(x + 2y)dx - xdy = 0$,
2) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$,
3) $2x^3 \frac{dy}{dx} = y(2x^2 - y^2)$,
4) $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$,
5) $x\frac{dy}{dx} - y = xtg\frac{y}{x}$,
6) $x\frac{dy}{dx} = y - xe^{y/x}$,
7) $\frac{dy}{dx} - y = (x + y)ln\frac{x+y}{x}$,
8) $x\frac{dy}{dx} = ycosln\frac{y}{x}$.

7. Звести наступні рівняння до однорідних та розв'язати їх:

1)$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$,
2)$x - y - 1 + (y - x + 2)\frac{dy}{dx} = 0$,
3)$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$,
4)$\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$.

8. Розв'язати квазіоднорідні диференціальні рівняння:

1)$x^3\left(\frac{dy}{dx} - x\right) = y^2$,
2)$2\frac{dy}{dx} + x = 4\sqrt{x}$,
3)$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$,
4)$2x\frac{dy}{dx} + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$.

§2.3 Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{2.39}$$

іноді буває зручно записати у формі:

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0. \tag{2.40}$$

У випадку виконання рівності

$$\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \tag{2.41}$$

тотожно, рівняння (2.40) називається рівнянням в ***повних диференціалах***.

Якщо функції $M(t,x)$ і $N(t,x)$ є неперервно диференційованими в області D**,** то умова (2.41) забезпечує для будь-якої точки $(t_0, x_0) \in D$ в деякому околі існування такої функції $W(t,x)$, повний диференціал якої є лівою частиною (2.40), тобто

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = dW(t,x) \tag{2.42}$$

Тоді (2.40) набирає вигляду $dW(t,x) = 0 \;\Rightarrow\; W(t,x) = C$.

Функцію $W(t,x)$ можна представити наступним чином:

$$W(t,x) = \int_{t_0}^{t} M(\tau, x_0)\, d\tau + \int_{x_0}^{x} N(\tau, \xi)\, d\xi. \tag{2.43}$$

Дійсно, використовуючи правило диференціювання за параметром і умову (2.41), отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= M(t,x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,\xi)}{\partial t} d\xi = M(t,x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,\xi)}{\partial \xi} d\xi = \\ &= M(t,x_0) + M(t,x) - M(t,x_0) = M(t,x) \end{aligned} \tag{2.44}$$

і $\frac{\partial W}{\partial x} = N(t,x)$, тобто $W(t,x)$ задовольняє умові (2.42).

Таким чином, розв'язок (2.40) можна задати у вигляді загального інтеграла:

$$W(t,x) = C.$$

Приклад 2.9. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$(3x^2 + 2xt + 2t)dt + (6xt + t^2 + 3)dx = 0. \qquad (2.45)$$

Рівняння (2.45) є рівнянням в повних диференціалах, оскільки в даному випадку

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 6x + 2t,$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = 6x + 2t,$$

тобто виконується умова (2.41).

Покладемо $t_0 = 0$ і $x_0 = 0$, обчислимо за формулою (2.43):

$$W(t,x) = \int_0^t 2\tau\, d\tau + \int_0^x (6\xi t + t^2 + 3)\, d\xi =$$
$$= \tau^2|_0^t + \left(6t\frac{\xi^2}{2} + t^2\xi + 3\xi\right)\Bigg|_0^x =$$
$$= t^2 + 3tx^2 + t^2x + 3x.$$

Загальним інтегралом буде:

$$3tx^2 + t^2x + t^2 + 3x = C.$$

Приклад 2.10. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left(\frac{x}{siny} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)cosy}{cos2y-1}dy = 0 \qquad (2.46)$$

Перевіримо, чи виконується умова: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$M(x,y) = \frac{x}{\sin y} + 2, \qquad N(x,y) = \frac{(x^2+1)cosy}{\cos 2y-1}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xcosy}{sin^2y},$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xcosy}{sin^2y}.$$

Рівняння (2.46) є рівнянням в повних диференціалах.

Покладемо $x_0 = -2$ і $y_0 = \frac{\pi}{2}$, обчислимо за формулою (2.43):

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\, dy =$$

$$= \int_{-2}^{x} M\left(x, \frac{\pi}{2}\right) dx + \int_{\pi/2}^{y} N(x,y)\, dy =$$

$$= \int_{-2}^{x} (x+2)\, dx + \int_{\pi/2}^{y} \frac{(x^2+1)cosy}{\cos 2y - 1}\, dy =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2}\bigg|_{-2}^{x} - (x^2+1) \int_{\pi/2}^{y} \frac{cosy}{2sin^2 y}\, dy =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(x^2+1)}{2\sin y}\bigg|_{\pi/2}^{y} = \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{x^2+1}{2\sin y} - \frac{x^2+1}{2} =$$

$$= \frac{4x+3}{2} + \frac{x^2+1}{2\sin y}$$

Загальним інтегралом буде:

$$\frac{4x+3}{2} + \frac{x^2+1}{2\sin y} = C.$$

Якщо звичайне диференціальне рівняння вигляду (2.40) не задовольняє умові (2.41), іноді його вдається привести до звичайного диференціального рівняння в повних диференціалах множенням на деяку функцію $\mu(t,x)$, яка не дорівнює нулю та називається ***інтегруючим множником.*** При цьому замість (2.41) отримуємо

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

або

$$N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

Знайти функцію $\mu(t,x)$ з цього диференціального рівняння з частинними похідними у загальному випадку не вдається. В окремих випадків вона спрощується, наприклад, у випадку, коли інтегруючий множник μ залежить тільки від одного зі змінних.

Таким чином, якщо $\mu = \mu(t)$, то маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\, ln|\mu|}{dt} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

Для існування інтегруючого множника μ, що не залежить від x, необхідно і достатньо, щоб права частина цього рівняння була функцією, що залежить тільки від t.

Приклад 2.11. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$(x^2+y^2+x)\ dx+ydy=0. \tag{2.47}$$

Тут $M(x,y)=x^2+y^2+x,\ N(x,y)=y$. Оскільки $\frac{\partial M}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=0$, умова (2.41) не виконується: $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Спробуємо звести (2.47) до рівняння в повних диференціалах шляхом введення інтегруючого множника $\mu(x,y)$. Складемо рівняння:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

$$y\frac{\partial\mu}{\partial x}-(x^2+y^2+x)\frac{\partial\mu}{\partial y}=2y\mu. \tag{2.48}$$

Будемо шукати інтегруючий множник у вигляді: $\mu=\mu(x)$. Тоді (2.48) набуде вигляду

$$\frac{d\mu}{dx}=2\mu.$$

Звідси

$$\mu=e^{2x}.$$

Помножимо обидві частини (2.47) на інтегруючий множник $\mu=e^{2x}$. Отримаємо:

$$(x^2+y^2+x)\ e^{2x}dx+ye^{2x}dy=0. \tag{2.49}$$

Для цього рівняння $M(x,y)=(x^2+y^2+x)\ e^{2x},\ N(x,y)=ye^{2x}$. Перевіримо виконання умови (2.41). Для цього знайдемо часткові похідні: $\frac{\partial M}{\partial y}=2ye^{2x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2ye^{2x}$, умова (2.41) виконується. Інтегруванням знаходимо функцію $W(x,y)$ при $x_0=0$ та $y_0=0$:

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy =$$
$$= \int_0^x (x^2 + x)\ e^{2x}\,dx + \int_0^y ye^{2x}\,dy =$$
$$= \frac{x^2}{2} e^{2x} + \frac{y^2}{2} e^{2x}.$$

Значить, повним інтегралом рівняння (2.47) буде:

$$\frac{e^{2x}}{2}(x^2 + y^2) = \text{C}.$$

Приклад 2.11. Знайдемо розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2} \qquad (2.50)$$

Зробимо перетворення (2.50) до вигляду:

$$y\sqrt{1+y^2}dx + \left(x\sqrt{1+y^2} - y\right)dy = 0. \qquad (2.51)$$

Тут $M(x,y) = y\sqrt{1+y^2}$, $N(x,y) = x\sqrt{1+y^2} - y$. Оскільки $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1+2y^2}{\sqrt{1+y^2}}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \sqrt{1+y^2}$, умова (2.41) не виконується: $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Спробуємо звести (2.50) до рівняння в повних диференціалах шляхом введення інтегруючого множника $\mu(t,x)$. Складемо рівняння:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$
$$\left(x\sqrt{1+y^2} - y\right)\frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(y\sqrt{1+y^2}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\mu\frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}}. \qquad (2.48)$$

Оскільки права частина (2.48) не залежить від x, будемо шукати інтегруючий множник у вигляді: $\mu = \mu(y)$. Тоді рівняння (2.48) набуде вигляду:

$$\sqrt{1+y^2}\frac{d\mu}{dy} = \mu\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$
$$\frac{d\mu}{dy} = \mu\frac{y}{1+y^2}.$$

Звідси:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Помножимо обидві частини (2.50) на інтегруючий множник $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Отримаємо

$$ydx + \left(x - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy = 0. \qquad (2.51)$$

Для цього рівняння $M(x,y) = y$, $N(x,y) = x - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$. Перевіримо виконання умови (2.41). Для цього знайдемо часткові похідні: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, умова (2.41) виконується. Інтегруванням знаходимо функцію $W(x,y)$ при $x_0 = 0$ та $y_0 = 1$:

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\, dy =$$
$$= \int_0^x dx + \int_1^y \left(x - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) dy =$$
$$= xy - \sqrt{1+y^2} + \sqrt{2}.$$

Значить, повним інтегралом рівняння (2.47) буде:

$$xy - \sqrt{1+y^2} = \mathrm{C}.$$

Для розв'язання деяких рівнянь можна застосовувати метод виділення повних диференціалів, використовуючи відомі формули. Наприклад:

$$d(xy) = ydx + xdy,$$
$$d(y^2) = 2ydy,$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$
$$d(\ln y) = \frac{dy}{y}.$$

Приклад 2.12. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0 \tag{2.52}$$

Спочатку виділимо групу членів, яка є повним диференціалом. Поділимо (2.52) на $-x^2$:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - 4ydy = 0. \tag{2.53}$$

Оскільки $\frac{ydx-xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ та $4ydy = d(2y^2)$, рівняння (2.53) набуде вигляду:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0 \tag{2.54}$$

Рівняння (2.54) це рівняння в повних диференціалах. Інтегруючи його, отримаємо розв'язок звичайного диференціального рівняння (2.52)

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$

Приклад 2.13. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 \tag{2.55}$$

Оскільки $d(xe^{-y}) = e^{-y}dx - xe^{-y}dy$ і $d(y^2) = 2ydy$, рівняння (2.55) набуде вигляду:

$$d(xe^{-y}) - d(y^2) = 0. \tag{2.56}$$

Інтегруючи (2.56), отримаємо загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння (2.55):

$$xe^{-y} - 2y = C.$$

Питання та задачі

1. Яке рівняння називається *рівнянням в повних диференціалах*?
2. Як заходиться загальний розв'язок *рівняння в повних диференціалах?*
3. Що називається *інтегрувальним множником?*
4. В завжди можна підібрати інтегрувальний множник для зведення будь-якого диференціального рівняння до рівняння в повних диференціалах?

5. Переконатися, що наступні рівняння є рівняннями в повних диференціалах та знайти їх розв'язки:

1) $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$,
2) $\frac{y}{x}dx+(y^3+ln\,x)dy=0$,
3) $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$,
4) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$,
5) $(1+y^2\sin 2x)dx-2ycos^2xdy=0$,
6) $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$.

6. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння шляхом зведення його до рівняння в повних диференціалах за допомогою інтегруючого множника:

1) $\left(4xy-\frac{y^2}{x^2}+3\right)xdx+\left(x^2-\frac{2y}{x}\right)dy=0$,
2) $(3x^2-1)dx+\frac{x^3-2x+3y}{y}dy=0$,
3) $(3xy-2x^2y^2)dx=(x^3y-x)dy$,
4) $y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0$.

§2.4 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі і Рикати

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку вигляду

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t), \tag{2.56}$$

де права частина є лінійною функцією x, а $a(t)$, $b(t)$ - неперервні в деякому інтервалі зміни t, називається лінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку.

При $b(t)\equiv 0$, (2.56) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x. \tag{2.57}$$

Це рівняння називається ***однорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку,*** що відповідає рівнянню (2.56). Рівняння (2.56) називається ***неоднорідним***.

Методи розв'язку звичайного диференціального рівняння (2.56)**.**

1.Метод Бернуллі

Будемо розв'язувати звичайне диференціальне рівняння (2.56) у вигляді $x(t) = u(t)v(t)$. Підставляючи $x(t)$ в (2.56), отримуємо

$$v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt} = auv + b,$$
$$\left(\frac{dv}{dt} - av\right)u + v\frac{du}{dt} = b.$$

В якості $v(t)$ візьмемо один з розв'язків звичайного диференціального рівняння $\frac{dv}{dt} - av = 0$**.** Це звичайне диференціальне рівняння зі змінними, що розділюються. Розв'язуючи його знаходимо

$$v = e^{A(t)}$$

де $A(t)$ - одна з первісних функції $a(t)$. Тоді $u(t)$ повинна задовольняти звичайному диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt} = be^{-A(t)},$$

після інтегрування якого маємо

$$u(t) = C_0 + B(t),$$

де $B(t)$ - первісна функції $b(t)\ e^{-A(t)}$, а C_0 - довільна стала. В результаті розв'язок звичайного диференціального рівняння (2.56) набуває вигляду

$$x(t) = C_0\ e^{A(t)} + B(t)\ e^{A(t)}. \qquad (2.58)$$

Приклад 2.14. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x + e^t. \qquad (2.59)$$

Будемо розв'язувати звичайне диференціальне рівняння (2.59) у вигляді

$$x(t) = u(t)v(t). \qquad (2.60)$$

Підставимо $x(t)$ в рівняння (2.59). Для стислості опустимо залежність від t.

$$v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt} = uv + e^t,$$
$$u\left(\frac{dv}{dt} - v\right) + v\frac{du}{dt} = e^t. \qquad (2.61)$$

Знайдемо один з розв'язків v з рівняння $\frac{dv}{dt} - v = 0$:

$$v = e^t. \qquad (2.62)$$

Підставимо знайдену функцію v в рівняння (2.61), отримаємо

$$e^t\ \frac{du}{dt} = e^t, \qquad (2.63)$$

Знайдемо функцію u з рівняння (2.63)

$$u = t + C.$$

Підставляючи знайдені функції u і v в (2.60), отримаємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (2.58)

$$x(t) = (t + C)\ e^t.$$

2.Метод Лагранжа

Однорідне звичайне диференціальне рівняння (2.57), що відповідає неоднорідному лінійному диференціальному рівнянню є рівнянням зі змінними, що розділюються і має загальний розв'язок

$$x(t) = \ C\ e^{A(t)} \qquad (2.63)$$

Розв’язок звичайного диференціального рівняння (2.56) будемо шукати у вигляді

$$x(t) = C(t)\ e^{A(t)} \tag{2.64}$$

де $C(t)$ - функція, що підлягає визначенню. Диференціюючи (2.64) і підставляючи результат в (2.56), отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dC(t)}{dt} = b(t)e^{-A(t)}.$$

Звідси

$$C(t) = C_1 + B(t) \tag{2.65}$$

підставляючи в (2.64), отримуємо

$$x(t) = C_1\ e^{A(t)} + B(t)\ e^{A(t)}. \tag{2.66}$$

Приклад 2.15. Знайдемо розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x\cos t = e^{-\sin t}. \tag{2.67}$$

Рівняння (2.67) це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Запишемо однорідне рівняння, що відповідає даному однорідному, відкинувши функцію $e^{-\sin t}$.

$$\frac{dx}{dt} = x\cos t. \tag{2.68}$$

Розділимо змінні та знайдемо розв’язок однорідного диференціального рівняння (2.68)

$$\frac{dx}{x} = -\cos t\ \ dt,$$

$$x(t) = Ce^{-\sin t}. \tag{2.69}$$

Розв’язок рівняння (2.67) будемо шукати у вигляді:

$$x(t) = C(t)e^{-\sin t}. \tag{2.70}$$

Диференціюємо (2.70)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} e^{-\sin t} - C(t) e^{-\sin t} \cos t,$$

та підставляємо $x(t)$ та $\frac{dx}{dt}$ в рівняння (2.67), отримаємо:

$$\frac{dC(t)}{dt} e^{-\sin t} - C(t) e^{-\sin t} \cos t + C(t) e^{-\sin t} \cos t = e^{-\sin t},$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = 1,$$

$$C(t) = t + C_1. \qquad (2.71)$$

Підставимо (2.71) в (2.70), отримаємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку (2.67):

$$x(t) = (t + C_1)\ e^{-\sin t}.$$

Приклад 2.16. Знайдемо частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x, \qquad (2.72)$$

що задовольняє початковій умові

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \qquad (2.73)$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння (2.72) за допомогою методу Бернуллі. Отже, будемо розшукувати розв'язок (2.72) у вигляді $y(x) = u(x)v(x)$. Продиференціюємо $y(t)$ та підставимо у (2.72), отримаємо

$$x \frac{du(x)}{dx} v(x) + u(x)\left(x \frac{dv(x)}{dx} - v(x)\right) = x^2 \sin x, \qquad (2.74)$$

Оберемо в якості $v(t)$ один з відмінних від тотожного нуля розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$x \frac{dv(x)}{dx} - v(x) = 0,$$

а саме

$$v(x) = x. \tag{2.75}$$

Підставимо (2.75) в (2.74), отримаємо:

$$\frac{du(x)}{dx} = \sin x,$$

звідки

$$u(x) = -\cos x + C.$$

Підставляючи $u(x)$ і $v(x)$ в $y(x) = u(x)v(x)$, знайдем загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (2.72), а саме:

$$y(x) = (-\cos x + C)x. \tag{2.76}$$

Знайдемо константу C, використовуючи початкову умову (2.73):

$$\pi = \left(-\cos\frac{\pi}{2} + C\right)\frac{\pi}{2},$$
$$C = 2.$$

Таким чином, частинним розв'язком лінійного диференціального рівняння (2.72) з початковою умовою (2.73) буде

$$y(x) = (-\cos x + 2)x.$$

В деяких випадках звичайне диференціальне рівняння, в якому незалежною змінною є t, а шуканої функцією - $x(t)$, можна перетворити в лінійне, якщо навпаки вважати x аргументом, а t - шуканою функцією. Наприклад, рівняння

$$\big(b(x)t + c(x)\big)\frac{dx}{dt} = a(x)$$

можна переписати у формі:

$$\frac{dt}{dx} - \frac{b(x)}{a(x)}t = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

Останнє рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням, в якому x - незалежна змінна, а $t(x)$ – шукана функція.

Приклад 2.17. Знайдемо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x-y^2}, \tag{2.77}$$

Перетворимо (2.77) до вигляду

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x-y^2}{y},$$

або

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x - y. \tag{2.78}$$

Рівняння (2.78) є лінійним неоднорідним рівнянням, в якому y - незалежна змінна, а $x(y)$ – шукана функція. Розв'яжемо це рівняння за допомогою методу Лагранжа, для цього в (2.78) відкинемо неоднорідність та отримаємо однорідне рівняння, що відповідає даному неоднорідному, а саме

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x. \tag{2.79}$$

Розділимо змінні та отримаємо розв'язок цього рівняння:

$$x = Cy^3.$$

Розв'язок рівняння (2.78) будемо шукати у вигляді

$$x(y) \ = C(y)y^3. \tag{2.80}$$

Диференціюємо (2.80):

$$\frac{dx(y)}{dy} \ = \frac{dC(y)}{dy}y^3 + 3C(y)y^2,$$

та підставляємо $x(y)$ та $\frac{dx}{dy}$ в рівняння (2.78), отримаємо:

$$\frac{dC(y)}{dy} = -y^{-2},$$
$$C(y) = \frac{1}{y} + C_1.$$

Підставимо $C(y)$ у (2.80), отримаємо загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння (2.78):

$$x(y) = C_1 y^3 + y^2,$$

а значить і загальний інтеграл рівняння (2.77).

Рівнянням Бернуллі називаються звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\ x + b(t)\ x^{\alpha}, \tag{2.81}$$

де $\alpha \in R,\ \alpha \neq 0,\ 1$. Підстановка $y = x^{1-\alpha}$ приводить (2.81) до лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t). \tag{2.82}$$

Інший варіант - відшукання розв’язку звичайного диференціального рівняння у вигляді $x(t) = u(t)v(t)$.

Приклад 2.18. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \frac{x^2}{t} \ln t. \tag{2.83}$$

Рівняння (2.83) це рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$. Розв’яжемо його двома способами.

І спосіб. Зробимо заміну шуканої функції

$$y = \frac{1}{x}, \; x \neq 0.$$

Звідси

$$x = \frac{1}{y},$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}.$$

Підставимо x та $\frac{dx}{dt}$ в (2.83), отримаємо:

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{y \cdot t} = \frac{1}{y^2 \cdot t} ln\, t,$$

або

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = \frac{ln\, t}{t} \qquad (2.84)$$

Рівняння (2.84) - це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо його методом Лагранжа. Для цього запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає даному неоднорідному

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = 0,$$

та знайдемо його розв'язок: $y = Ct.$

Розв'язок неоднорідного рівняння (2.84) будемо шукати у вигляді

$$y = C(t) \qquad (2.85)$$

Знайдемо $\frac{dy}{dt}$ та підставимо в (2.84), отримаємо:

$$\frac{dC}{dt} t = \frac{ln\, t}{t}.$$

Звідки

$$C = \frac{ln\, t}{t} + \frac{1}{t} + C_1. \qquad (2.86)$$

Підставимо (2.86) в (2.85):

$$y(t) = C_1 t + \ln t + 1.$$

Повертаючись до функції $x(t)$, отримаємо розв'язок вихідного рівняння (2.83):

$$y(t) = \frac{1}{C_1 t + \ln t + 1}.$$

II спосіб. В рівнянні (2.83) зробимо заміну змінних:

$$x(t) = u(t)v(t). \tag{2.87}$$

Підставимо (2.87) в (2.83), отримаємо:

$$v\frac{du}{dt} + u\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{t}\right) = \frac{u^2 v^2}{t}\ln t. \tag{2.88}$$

Оберемо в якості $v(t)$ один з відмінних від тотожного нуля розв'язків звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{t} = 0,$$

а саме

$$v = \frac{1}{t}. \tag{2.89}$$

Підставивши знайдене v в (2.88), отримаємо рівняння

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{t^2}\ln t.$$

Розв'язком цього рівняння буде:

$$u(t) = \frac{t}{1 + Ct + \ln t}.$$

До цього розв'язку треба додати розв'язок $u(t) = 0$, який було втрачено при розділенні змінних.

Підставляючи знайдені $u(t)$ і $v(t)$ в (2.87), отримаємо розв'язок вихідного рівняння (2.83):

$$x(t) = u(t)v(t) = \frac{1}{1+Ct+\ln t},$$
$$x(t) = 0.$$

Приклад 2.19. Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$2\,\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}. \tag{2.90}$$

Це рівняння Бернуллі, $\alpha = -1$. Зробимо заміну шуканої функції:

$$z = y^2.$$

Звідси

$$y = \sqrt{z},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{dz}{dx}.$$

Підставимо y та $\frac{dy}{dx}$ в (2.90), отримаємо:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{xz}{x^2-1} = x, \tag{2.91}$$

Рівняння (2.91) - це лінійне неоднорідне рівняння. Загальним інтегралом цього рівняння буде:

$$z = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2-1|}.$$

Повертаючись до старої змінної отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння (2.90):

$$y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2-1|}.$$

Рівняння Ріккаті має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = c(t) + b(t)x + a(t)x^2, \tag{2.92}$$

де $a(t)$, $b(t), c(t)$ - функції, неперервні в деякому інтервалі зміни t. Це звичайне диференціальне рівняння містить в собі окремі випадки розглянутих вище рівнянь:

якщо $a(t) \equiv 0$, то (2.92) - лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння,

якщо $c(t) \equiv 0$ - рівняння Бернуллі при $\alpha \equiv 0$.

Рівняння Ріккаті не вдається в загальному випадку звести до операції інтегрування. Однак якщо відомий один частинній розв'язок, то загальний розв'язок можна знайти за допомогою двох послідовних операцій інтегрування. Дійсно, нехай частинній розв'язок $x = \tilde{x}(t)$ - частинній розв'язок (2.92). Виконавши підстановку $y = x(t) - \tilde{x}(t)$, отримаємо:

$$x(t) = y + \tilde{x}(t),$$
$$\frac{dy}{dt} + \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = c(t) + b(t)y + b(t)\tilde{x}(t) + a(t)y^2 + 2a(t)y\tilde{x} + a(t)\tilde{x}^2$$

так як $\tilde{x}(t)$ - частинній розв'язок, отримаємо:

$$\frac{dy}{dt} = b(t)y + a(t)y^2 + 2a(t)y\tilde{x}(t),$$
$$\frac{dy}{dt} = \big(b(t) + 2a(t)\tilde{x}(t)\big)\, y + a(t)y^2.$$

Це рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$. Заміною $y = \frac{1}{z}$ його можна звести до неоднорідного лінійного звичайного диференціального рівняння.

Приклад 2.20. Розв'яжемо звичайне диференціальне рівняння Риккаті

$$x^2\ \frac{dy}{dx} + \ xy + x^2y^2 = 4 \qquad (2.93)$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння (2.93) (методом підбору):

$$\tilde{y} = -\ \frac{2}{x}. \qquad (2.94)$$

Виконавши підстановку $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$, отримаємо

$$y(x) = z(x) + \ \frac{2}{x}, \qquad (2.95)$$
$$\frac{dz}{dx} + \ \frac{5z}{x} + z^2 = 0 \qquad (2.96)$$

Це рівняння Бернуллі, $\alpha = 2$. Заміною

$$z = \frac{1}{u}$$

зведемо його до неоднорідного лінійного звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{du}{dx} - \frac{5u}{x} - 1 = 0 \qquad (2.97)$$

Розв'язком цього рівняння буде

$$u = Cx^2 - \frac{x}{4}.$$

Повертаючись до змінної z, отримаємо розв'язок рівняння (2.96)

$$\frac{1}{z} = Cx^5 - \frac{x}{4},$$
$$z = \frac{4}{4Cx^5 - x}. \qquad (2.98)$$

Підставимо (2.98) у (2.95):

$$y(x) = \frac{4}{4Cx^5 - x} + \frac{2}{x}. \qquad (2.99)$$

Функція (2.99) - це загальний розв'язок диференціального рівняння Риккаті (2.93).

Питання та задачі

1. Яке рівняння називається *лінійним рівняння першого порядка*?
2. Чім відрізняється лінійне однорідне рівняння від лінійного неоднорідного?
3. В чому полягає метод *Бернуллі* знаходження розв'язків лінійного однорідного рівняння?
4. Описати метод *Лагранжа* знаходження розв'язків лінійного однорідного рівняння.
5. Знайдіть загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку:

1) $x^2 \frac{dy}{dx} + xy + 1 = 0,$

2) $y = x\left(\frac{dy}{dx} - xcosx\right),$

3) $x \frac{dy}{dx} + (x+1)y = 3x^2e^{-x},$

4) $\left(x \frac{dy}{dx} - 1\right)\ln x = 2y.$

6. Знайдіть частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку:

1) $\frac{dy}{dx} + 3y = xe^{-3x},\ y(0) = 0;$

2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{xlnx} = xlnx,\ y(e^2) = e^4;$

3) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 sinx,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

7. Яке рівняння називається диференціальним *рівнянням Бернуллі*?

8. Опишіть методи, за допомогою яких знаходяться розв'язки рівнянь Бернуллі.

9. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі:

1) $xy^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^3,$

2) $x\frac{dy}{dx} - 2x^2\sqrt{y} = 4y,$

3) $\frac{dy}{dx} = y^4 \cos x + ytgx,$

4) $x\frac{dy}{dx} + 2y + x^5y^3e^x = 0.$

10. Яке рівняння називається диференціальним *рівнянням Ріккаті*?

11. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння Ріккаті:

1) $\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 = -x^2,$

2) $\frac{dy}{dx} - 2xy + y^2 = 5 - x^2,$

3) $\frac{dy}{dx} + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$

§2.5 Рівняння, нерозв'язані відносно похідної

Якщо в звичайному диференціальному рівнянні першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

права частина неперервна в D і задовольняє умові Ліпшиця по x, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ цієї області проходить єдина інтегральна крива. Таку точку називають *звичайною*. *Особливою точкою* називають точку, яка не є звичайною. Через неї не проходить жодна інтегральна крива або проходить принаймні дві інтегральні криві.

Особливим розв'язком звичайного диференціального рівняння називається такий розв'язок звичайного диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$**,** який у всіх своїх точках не задовольняє умові єдиності, тобто в околі кожної точки (t, x) особливого розв'язку існує принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку. Теорема Коші дає достатні умови для того, щоб в деякій області не існували особливі розв'язки. Таким чином для існування останніх необхідно, щоб умови цієї теореми були порушені.

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку нерозв'язане відносно похідної має вигляд

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \qquad (2.100)$$

Припустимо, звичайне диференціальне рівняння (2.100) можна розв'язати відносно $\frac{dx}{dt}$ тобто отримати r рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \qquad i = 1,2, \dots r \qquad (2.101)$$

Тоді кожне з r звичайних диференціальних рівнянь можна про інтегрувати та знайти загальні розв'язки рівняння (2.100).

Приклад 2.21. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння, нероз'вязане відносно похідної

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0 \qquad (2.102)$$

Розв'яжемо це рівняння відносно y', вважаючи його квадратним відносно y':

$$D = (-2y)^2 - 4 \cdot x \cdot 4x = 4y^2 - 16x^2 = 4(y^2 - 4x^2),$$

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}. \tag{2.102}$$

Отримали два однорідних рівняння, кожне з яких легко інтегрується заміною змінних $\frac{y}{x} = u$. Підставимо $y = xu$, та її похідну $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ в (2.102):

$$x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{u^2 - 4}.$$

Розділимо змінні

$$\frac{du}{\pm\sqrt{u^2-4}} = \frac{dx}{x},$$

та проінтегруємо

$$\int \frac{du}{\pm\sqrt{u^2-4}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln\left(u \pm \sqrt{u^2 - 4}\right) = \ln x - \ln C,$$

$$u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{C}.$$

Зробимо перетворення, щоб звільнитися від кореня. Отримаємо

$$2u = \frac{x}{C} + \frac{4C}{x},$$

або, повертаючись до початкової змінної, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$x^2 = 2C(y - 2C).$$

Зведення звичайного диференціального рівняння (2.100) до вигляду (2.101) не завжди можливе. Тому розв'язок (2.100) часто шукають використовуючи параметр $p = \frac{dx}{dt}$.

Нехай (2.100) можна розв'язати відносно x, тобто записати у вигляді $x = f(t, p)$. Обчислимо повний диференціал

$$dx = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial p}dp.$$

Так як $dx = pdt$**,** то його можна записати в вигляді

$$M(t,p)dt + N(t,p)dp = 0,$$

інтегруючи це рівняння, знайдемо загальний розв’язок $t = t(p,C)$, $C = const$**.** Тоді загальний розв’язок звичайного диференціального рівняння в параметричній формі матиме вигляд

$$\begin{cases} t = t(p,C), \\ x = f(t,C). \end{cases}$$

Приклад 2.21. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння нероз’вязане відносно похідної

$$ln\frac{dx}{dt} + sin\frac{dx}{dt} = t \qquad (2.102)$$

Введемо параметр $p = \frac{dx}{dt}$. Рівняння (2.102) набуде вигляду

$$ln\, p + sin\, p = t \qquad (2.103)$$

Так як $dx = pdt$**.** то обчисливши повний диференціал (2.103)**,** отримаємо

$$\left(\frac{1}{p} + cos\, p\right)dp = dt.$$

Розділимо змінні:

$$\left(\frac{1}{p} + cos\, p\right)dp = \frac{dx}{p},$$
$$dx = p\left(\frac{1}{p} + cos\, p\right)dp.$$

Інтегруючи, отримаємо загальний розв’язок в параметричної формі

$$\begin{cases} x = p + p\, sin\, p + cos\, p + C, p > 0,\ C = const \\ t = ln\, p + sin\, p \end{cases}$$

Методом введення параметру розв’язують рівняння ***Лагранжа і Клеро***.

Рівнянням Лагранжа *називають звичайне диференціальне рівняння вигляду*

$$x = t\phi(p) + \psi(p), \qquad p = \frac{dx}{dt} \tag{2.104}$$

де $\phi(p)$ *і* $\psi(p)$ *- неперервно диференційовані функції, причому* $\phi(p) \neq p$.

Оскільки $dx = pdt$ і $dx = \phi(p)dt + t\phi'(p)dp + \psi'(p)dp$, то можна записати

$$pdt = \phi(p)dt + t\phi'(p)dp + \psi'(p)dp,$$
$$\big(p - \phi(p)\big)dt = \big(t\phi'(p) + \psi'(p)\big)dp,$$
$$\frac{dt}{dp} = \frac{\phi'(p)}{p-\phi(p)}t + \frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)}. \tag{2.105}$$

Оскільки звичайне диференціальне рівняння (2.105) лінійне відносно $t(p)$ то його можна проінтегрувати по p. Отримаємо $t = t(p, C)$, $C = const$. Підставивши $t = t(p, C)$ в (2.104), запишемо загальний розв’язок рівняння Лагранжа в параметричної формі

$$t = t(p, C);$$
$$x = t(p, C)\phi(p) + \psi(p).$$

Приклад 2.22. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння Лагранжа

$$\frac{dx}{dt} + x - t\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0, \tag{2.106}$$

Введемо параметр $p = \frac{dx}{dt}$, (2.106) перепишеться у вигляді

$$p + x - tp^2 = 0, \tag{2.107}$$

або

$$x = tp^2 - p. \tag{2.108}$$

Візьмемо повний диференціал від обох частин (2.108):

$$dx = p^2 dt + 2tpdp - dp.$$

Перетворимо (2.107) до вигляду лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dt}{dp} = \frac{2p}{p(1-p)} t - \frac{1}{p(1-p)},$$

в якому $t(p)$ – шукана функція. Загальним розв'язком цього рівняння буде

$$t = \frac{p - ln\, p + C_1}{(1-p)^2}.$$

Додавши до цього розв'язку (2.107), отримаємо загальний розв'язок рівняння Лагранжа (2.106) в параметричної формі:

$$\begin{cases} t = \dfrac{p - ln\, p + C_1}{(1-p)^2}, \\ p + x - tp^2 = 0. \end{cases}$$

Частковим випадком рівняння Лагранжа є ***рівняння Клеро***

$$x = tp + \psi(p). \tag{2.109}$$

Вводимо параметр $p = \frac{dx}{dt}$ та розв'язуємо його аналогічно рівнянню Лагранжа

$$dx = tdp + pdt + \psi'(p)dp,$$
$$pdt - pdt = \big(t + \psi'(p)\big)dp,$$
$$\big(t + \psi'(p)\big)dp = 0.$$

Тобто, або $p = C = const$, або $t = -\psi'(p)$.

В першому випадку маємо загальний розв'язок рівняння Клеро у вигляді

$$x = Ct + \psi(C),$$

в другому особливий розв'язок в параметричній формі

$$\begin{cases} t = -\psi'(p), \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Приклад 2.23. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння Клеро

$$y = xy' - \sqrt{1 + y'^2} \qquad (2.110)$$

Введемо параметр $p = \frac{dy}{dx}$ та перепишемо (2.110) у вигляді

$$y = xp - \sqrt{1 + p^2} \qquad (2.111)$$

Візьмемо повний диференціал від обох частин (2.111):

$$dy = pdx + \left(x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) dp.$$

Враховуючи, що $y = pdx$, останнє рівняння набуде вигляду

$$\left(x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) dp = 0.$$

Тобто, або $p = C = const$, або $x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

В першому випадку маємо загальний розв'язок рівняння Клеро у вигляді

$$y = Cx - \frac{C}{\sqrt{1+C^2}},$$

в другому особливий розв'язок в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ y = xp - \sqrt{1 + p^2}. \end{cases}$$

Питання та задачі

1. Який загальний вигляд має диференціальне *рівняння першого порядку нероз'язане відносно похідної*?

2. Який роз'язок звичайного диференціального рівняння першого порядку називається *особливим*?

3. Опишіть метод введення параметру для знаходження роз'язків *рівняння першого порядку, яке нероз'язане відносно похідної* .

4. Знайдіть роз'язки диференціального рівняння, роз'язуючи його відносно похідної або вводячи параметр:

1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} = 8x^2$,

2) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (x+2)e^y = 0$,

3) $\frac{dy}{dx}\left(2y - \frac{dy}{dx}\right) = y^2 \sin^2 x$,

4) $\left(x\frac{dy}{dx} + 3y\right)^2 = 7x$,

5) $x = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx}$,

6) $x = \frac{dy}{dx}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$,

7) $y = \ln\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right)$,

8) $5y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\left(x + \frac{dy}{dx}\right)$.

5. Яке диференціальне рівняння називається *рівнянням Лагранжа*?

6. Яке диференціальне рівняння називається *рівнянням Клеро*?

7. Знайдіть роз'язки диференціальних рівнянь Лагранжа:

1) $y = x(y')^2 - 2(y')^3$,

2) $2xy' - y = ln(y')$,

3) $y = xy' - (y')^2$,

4) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$,

5) $y = x \cdot sin(y') + e^{y'}$,

6) $y = x \cdot tg(y') + \frac{1}{y'}$,

7) $y = x(y')^3 + cos(y')$,

8) $y = x \cdot \frac{y'}{1+y'} + y'$,

9) $y = x \cdot arctg(y') + (y')^2$.

8. Знайдіть роз’язки диференціальних рівнянь Клеро:

1) $y = xy' + (y')^2$,
2) $y = xy' + ln(y')$,
3) $y = xy' + \frac{1}{y'}$,
4) $y = xy' + sin(y')$,
5) $y = xy' + e^{y'}$,
6) $y = xy' + \frac{y'}{1+y'}$,
7) $y = xy' + arctg(y')$.

ГЛАВА 3
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ РІВНЯННЯ.

Диференціальне рівняння n -го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'' \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.1}$$

або

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'' \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{3.2}$$

Теорема. *Якщо в рівнянні (3.2) функція* f**:**
а) неперервна за $x, y, y', y'' \dots, y^{(n-1)}$ *в деякій області* D;
б) має неперервні в D *частинні похідні* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$**;**
то існує єдиний розв'язок $y = \phi(x)$ *рівняння (3.2), що задовольняє умовам*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3.3}$$

Задача знаходження розв'язку $y = \phi(x)$ *рівняння (3.2), що задовольняють умові (3.3), називається* ***задачею Коші****.*

Загальним розв'язком *рівняння (3.2) називається нескінчена множина всіх його розв'язків, що визначаються формулою* $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$**,** *що містить* n *довільних сталих* $C_1, C_2, \dots, C_n$**.**

Будь-який розв'язок, що отримується із загального розв'язку за конкретних значень довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ *називається* ***частинним розв'язком*** *диференціального рівняння.*

Рівняння вигляду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

яке визначає неявно загальний розв'язок називається ***загальним інтегралом рівняння***.

Рівняння, що допускають зниження порядку.

1) ***Рівняння, що не містить шуканої функції та послідовних перших похідних***

$$y^{(n)} = f(x) \tag{3.4}$$

Загальний розв'язок отримується n -кратним інтегруванням (3.4).

Приклад 3.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' = sin\,x + cos\,x. \tag{3.5}$$

Рівняння (3.5) є рівнянням третього порядку, розв'язане відносно старшої похідної та не має інших похідних і шуканої функції y, тобто є рівняння типу (3.4). Тричі проінтегруємо (3.5) та отримаємо загальний розв'язок

$$y'' = \int(sin\,x + cos\,x)dx,$$
$$y'' = -\,cos\,x + sin\,x + C_1,$$
$$y' = -\,sin\,x - cos\,x + C_1x + C_2,$$
$$y = cos\,x - sin\,x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

2) Рівняння, що не містять шуканої функції та її похідних до порядку $\boldsymbol{k-1}$ включно:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.6}$$

Порядок знижується заміною

$$y^{(k)}(x) = p(x) \tag{3.7}$$

Тоді (3.6) набуде вигляду

$$F\left(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}\right) = 0 \tag{3.8}$$

З (3.8), якщо можливо, визначимо

$$p = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

а потім знайдемо y з рівняння

$$y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

k - кратним інтегруванням.

Приклад 3.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy^{V} - y^{IV} = 0, \qquad (3.9)$$

Рівняння (3.9) є рівнянням п'ятого порядку, що не містить шуканої функції та її похідних до третього порядку включно. Порядок рівняння знижується підстановкою

$$y^{IV} = p. \qquad (3.10)$$

Підставляючи (3.10) в (3.9), отримаємо диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що розділюються, в якому p – шукана функція, x – незалежна змінна

$$x\frac{dp}{dx} - p = 0, \qquad (3.11)$$

В (3.11) розділимо змінні та проінтегруємо, отримаємо

$$p = C_1 x, \qquad (3.12)$$

Оскільки

$$p = y^{IV},$$

рівняння (3.12) набуде вигляду

$$y^{IV} = C_1 x, \qquad (3.14)$$

Рівняння (3.14) є рівнянням вигляду (3.4). Проінтегруємо його чотири рази та отримаємо загальний розв'язок рівняння (3.9)

$$y''' = \frac{C_1x^2}{2} + C_2,$$
$$y'' = \frac{C_1x^3}{6} + C_2x + C_3,$$
$$y' = \frac{C_1x^4}{24} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4,$$
$$y = \frac{C_1x^5}{120} + \frac{C_2x^3}{6} + \frac{C_3x^2}{2} + C_4x + C_5.$$

3) Рівняння, що не містять незалежного змінного

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (3.15)$$

Підстановка $y' = p$ дозволяє знизити порядок рівняння на одиницю. При цьому p розглядається як нова невідома функція від y: $p = p(y)$**.** Виразімо все похідні $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ через похідні від нової невідомої функції p по y**:**

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \qquad (3.16)$$
$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}, \qquad (3.17)$$
$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} =$$
$$=\left(\frac{dp}{dy} \cdot \frac{dp}{dy} + p\frac{d^2p}{dy^2}\right)p = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2} \qquad (3.18)$$

і так далі.

Підставивши ці вирази замість $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ в рівняння (3.15) отримаємо диференціальне рівняння $(n-1)$ - порядку.

Приклад 3.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y'^2 = 2e^{-y}. \qquad (3.19)$$

Рівняння (3.18) є рівнянням, що не містить незалежного змінного. Зробимо заміну змінних

$$y' = p, \qquad (3.20)$$

де $p = p(y)$.

Підставимо y' та y'' в (3.19). Отримаємо рівняння Бернуллі

$$p\frac{dp}{dx} + p^2 = 2e^{-y} \qquad (3.21)$$

Розв'яжемо його за допомогою заміни змінних:

$$z = p^2,$$

яка зводить рівняння Бернуллі (3.21) до лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}, \qquad (3.22)$$

розв'язуючи яке, отримаємо загальний розв'язок

$$z(y) = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}.$$

Повертаємось до змінної p, отримаємо

$$p^2 = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y} \qquad (3.23)$$

Оскільки

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

рівняння (3.23) перепишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}, \qquad (3.24)$$

Розділимо змінні та проінтегруємо, отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння (3.19)

$$e^y + \frac{C_1}{4} = (x + C_2)^2.$$

4) *Рівняння*

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (3.25)$$

однорідне відносно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, тобто

$$F\left(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^k F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) \tag{3.26}$$

Порядок такого рівняння може бути знижений на одиницю підстановкою

$$y = e^{\int z dx},$$

де z - нова невідома функція від x: $z = z(x)$**.**

Приклад 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 yy'' = (y - xy')^2 \tag{3.27}$$

Рівняння однорідне відносно y, y', y''. Зробимо заміну змінних

$$y = e^{\int z dx}. \tag{3.28}$$

Знайдем y', y'':

$$y' = ze^{\int z dx},$$
$$y'' = e^{\int z dx} z' + z^2 e^{\int z dx} = e^{\int z dx}(z' + z^2).$$

Підставимо y, y', y'' в рівняння (3.27)

$$x^2 e^{2\int z dx}(z' + z^2) = e^{2\int z dx}(1 - xz)^2.$$

Скоротивши останнє рівняння на $e^{2\int z dx}$ та зробивши інші перетворення, отримаємо лінійне неоднорідне рівняння

$$x^2 z' + 2xz = 1. \tag{3.29}$$

Загальним розв'язок цього рівняння є функція

$$z = \frac{x + C_1}{x^2}.$$

Обчислимо невизначений інтеграл

$$\int zdx = ln|x| - \frac{C_1}{x} + ln\,C_2. \tag{3.30}$$

Підставивши (3.30) в (3.8) отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = e^{\left(ln|x| - \frac{C_1}{x} + ln\,C_2\right)},$$
$$y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$$

5) ***Рівняння, записане в диференціалах***

$$F(x, y, dx, dy, d^2y \ldots, d^ny) = 0 \tag{3.31}$$

в якому функція F є однорідною відносно $x, y, dx, dy, d^2y \ldots, d^ny$**,** якщо вважати x і dx **-** першого вимірювання, а $y, dy, d^2y \ldots, d^ny$ - вимірювання m**.** Тоді $\frac{dy}{dx}$ матимемо вимірювання $m-1$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ - вимірювання $m-2$ і так далі.

Для зниження порядку застосовуємо підстановку

$$x = e^t,$$
$$y = ue^{mt}. \tag{3.32}$$

Звідси отримаємо диференціальне рівняння між u і t**,** що не містять явно t, тобто допускає зниження порядку на одиницю (випадок 3).

Приклад 3.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^3y'' = (y - xy')^2 \tag{3.33}$$

Покажемо, що це рівняння – узагальнене однорідне.

Вважаючи x, y, y', y'' величинами $1, m,\ (m-1)\ i\ (m-2)$ вимірювань відповідно і прирівнюючи вимірювання всіх членів, отримаємо

$$3 + m - 2 = 2m,$$
$$m = 1.$$

У (3.33) зробимо заміну змінних

$$x = e^t,$$
$$y = ue^t, \tag{3.34}$$

Знайдемо $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{du}{dt}e^t + ue^t}{e^t} = \frac{du}{dt} + u,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{de^t}\left(\frac{d(ue^t)}{d(e^t)}\right) = \frac{d}{e^t dt}\left(\frac{e^t du + ue^t dt}{e^t dt}\right) =$$
$$= \frac{1}{e^t}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt} + u\right) = \frac{1}{e^t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right).$$

Підставимо $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ у вихідне рівняння, отримаємо

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)^2. \tag{3.35}$$

Диференціальне рівняння (3.35) це рівняння**,** що не містить явно t, тобто допускає зниження порядку на одиницю (випадок 3).

Покладемо $\frac{du}{dt} = p(u)$, обчислимо $\frac{d^2u}{dt^2}$ та підставимо їх в (3.35), отримаємо

$$\frac{dp}{du} = p - 1. \tag{3.36}$$

Загальним розв’язком цього рівняння буде:

$$p = C_1 e^u + 1.$$

Оскільки $\frac{du}{dt} = p$,

$$\frac{du}{dt} = C_1 e^u + 1. \tag{3.37}$$

Проінтегруємо (3.37) та використовуючи (3.34), отримаємо загальний розв’язок рівняння (3.33) в параметричній формі

$$x = e^t,$$
$$y = ln\frac{e^t}{\tilde{C}_2+\tilde{C}_1 e^t}e^t,$$

або, виключивши параметр e^t, запишимо загальний розв'язок рівняння (3.33)

$$y = ln\frac{x^2}{\tilde{C}_2+\tilde{C}_1 x}.$$

Питання та задачі

1) Який загальний вигляд має диференціальне *рівняння* n *-го порядку*?

2) Що називається *загальним розв'язком* диференціального *рівняння* n *-го порядку*?

3) Що називається *частинним розв'язком* диференціального *рівняння* n *-го порядку*?

4) Як знайти розв'язок рівняння, що не містить шуканої функції та послідовних перших похідних?

5) Як знайти розв'язок рівняння, що не містить шуканої функції та її похідних до порядку $k-1$ включно?

6) Як знайти розв'язок рівняння**,** що не містять незалежного змінного?

7) Як знайти розв'язок диференціального рівняння однорідного відносно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$?

8) Знайдіть розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $xy'' = \sin x$,
2) $xy^{IV} = 1$,
3) $y''(e^x+1) + y' = 0$,
4) $y''' = 2(y''-1)ctgx$,
5) $y''^3 + xy'' = 2y'$,
6) $xyy'' - xy'^2 = yy'$,
7) $(x^2+1)\left(y'^2 - yy''\right) = xyy'$.

9) Знайдіть розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють заданим початковим умовам:

1) Рівняння: $yy'' = 2xy'^2$;
Початкові умови:
$y(2) = 2;\ y'(2) = 0{,}5$.

2) Рівняння: $2y''' - 3y'^2 = 0$;
Початкові умови:
$y(0) = -3;\ y'(0) = 1;\ y''(0) = -1$.

3) Рівняння: $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y$;
Початкові умови:
$y(1) = 1;\ y'(1) = 4$.

ГЛАВА 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

§4.1. Означення та загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь n - го порядку

Лінійне звичайне диференціальне рівняння n ***- го порядку*** має вигляд

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=g(x), \qquad (4.1)$$

де функції $a_0(x)$, $a_1(x),\dots,a_n(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні в деякому проміжку $X\subseteq R$ числової прямої R**.**

Рівняння (4.1) є лінійним ***неоднорідним*** диференціальним рівнянням n - го порядку**.** Якщо в (4.1) покласти $g(x)=0$, отримаємо лінійним ***однорідне*** диференціальне рівняння n - го порядку

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=0, \qquad (4.2)$$

Означення 4.1*: Систему функцій $y_1(x),\dots,y_n(x)$ називають* ***лінійно залежною*** *в деякому проміжку $X\subseteq R$*, *якщо існує така система чисел*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n,\quad \sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2\neq 0,$$

що для будь-якого $x\in X$ має місце тотожність

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\cdots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0. \qquad \textit{(4.3)}$$

Якщо ця тотожність виконується тільки при $\alpha_1=\ \alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$**,** то система функцій називається ***лінійно незалежною***.

Розглянемо n функцій від x, які мають неперервні похідні до $(n-1)$ – порядку:

$$y_1(x),\dots,y_n(x).$$

Визначник

$$W[y_1(x),\dots,y_n(x)] = W[x] = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \dots & {y_n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

називається ***визначником Вронського (вронскіаном)*** системи функцій $y_1(x),\dots,y_n(x)$.

Теорема 4.1. *Якщо функції $y_1(x),\dots,y_n(x)$ лінійно залежні, тоді визначник Вронського дорівнює нулю.*

Теорема 4.2. *Якщо функції $y_1(x),\dots,y_n(x)$ лінійно незалежні в деякому інтервалі числової прямої R, тоді визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці цього інтервалу.*

Приклад 4.1. Знайти вронскіан та дослідити систему функцій не лінійну незалежність

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = xe^x, y_3(x) = e^{-2x}.$$

Продиференціюємо ці функції двічі

$$y_1'(x) = e^x, y_2'(x) = (x+1)e^x, y_2'(x) = -2e^{-2x};$$
$$y_1''(x) = e^x, y_2''(x) = (x+2)e^x, y_2''(x) = -4e^{-2x}.$$

Сформуємо визначник Вронського та обчислимо його

$$W[x] = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-2x} \\ e^x & (x+1)e^x & -2e^{-2x} \\ e^x & (x+2)e^x & -4e^{-2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-2x} \\ 0 & -e^x & 3e^{-2x} \\ 0 & -2e^x & 5e^{-2x} \end{vmatrix} =$$
$$= e^x \begin{vmatrix} -e^x & 3e^{-2x} \\ -2e^x & 5e^{-2x} \end{vmatrix} = e^x(-5e^x e^{-2x} + 6e^x e^{-2x}) = e^x e^x e^{-2x} = 1.$$

Визначник Вронського не дорівнює нулю при будь-яких x, а значить система функцій $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$, $y_3(x) = e^{-2x}$ є лінійно незалежною.

Означення 4.2: *Лінійно незалежну в проміжку $X \subseteq R$ систему з n функцій, кожна з яких є в ньому розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння **n - го порядку** (4.2), називається*

фундаментальною системою розв'язків *цього рівняння в зазначеному проміжку.*

Теорема 4.3*. Для будь-якого лінійного однорідного диференціальне рівняння* n *- го порядку існує фундаментальна система розв'язків.*

Теорема 4.4*. Якщо* $y_1(x), \dots, y_n(x)$*- фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння (4.1) в проміжку* X**,** *то будь-який розв'язок* $y(x)$ *в ньому цього звичайного диференціального рівняння має вигляд*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \qquad (4.5)$$

Ця теорема встановлює структуру загального розв'язку лінійного однорідного звичайного диференціального рівняння n -го порядку у вигляді (4.2).

Питання та задачі

1) Який загальний вигляд має лінійне звичайне диференціальне рівняння n - го порядку?

2) Які системи функцій називають *лінійно залежними* та *лінійно незалежними*?

3) Дайте означення *визначника Вронського*?

4) Яка система функцій називається *фундаментальною системою розв'язків* лінійного однорідного диференціального рівняння n *- го порядку*?

5) Яка теорема встановлює структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння n -го порядку?

6) Знайти вронскіан та дослідити систему функцій не лінійну незалежність:

1) $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-2x}$*;*
2) $y_1(x) = e^{2x}cosx,\ y_2(x) = e^{2x}sinx$*;*
3) $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x, y_3(x) = x^2$*;*
4) $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = \cos 2x, y_3(x) = x\cos 2x$*;*
5) $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x}, y_3(x) = \cos x,\ y_3(x) = sinx$.

§4.2 Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку. Метод Лагранжа варіації сталих

Наступна теорема встановлює структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння n -го порядку (4.1).

Теорема 4.5. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння n -го порядку є сумою загального розв'язку відповідного однорідного звичайного диференціального рівняння n -го порядку і частинного розв'язку рівняння (4.1):*

$$y(x) = y_*(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \tag{4.6}$$

Тут $y_*(x)$ - частинний розв'язок неоднорідного звичайного диференціального рівняння (4.1), визначений в деякому проміжку $X \subseteq R$; $y_k(x)$ - фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного звичайного диференціального рівняння, визначеного в тому ж проміжку; C_k - деякі постійні коефіцієнти $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

Загальним методом знаходження розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку є ***метод варіації довільних сталих (метод Лагаранжа).***

Якщо в проміжку X відома фундаментальна систем розв'язків $y_k(x)$ однорідного звичайного диференціального рівняння (4.2), тоді розв'язок неоднорідного звичайного диференціального рівняння (4.1) можна представити у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) \tag{4.7}$$

де функції $C_k(x)$ повинні задовольняти неоднорідні системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Диференціюючи (4.7), отримаємо

$$\begin{aligned} y'(x) = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n' + \\ +C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x). \end{aligned} \tag{4.8}$$

В (4.8) покладемо

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0. \tag{4.9}$$

Тоді рівняння (4.8) набуде вигляду

$$y'(x) = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n' \tag{4.10}$$

Диференціюємо (4.10), одержимо

$$\begin{gathered} y''(x) = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \cdots + C_n(x)y_n'' + \\ +C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n'. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Нехай $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$, тоді

$$y''(x) = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \cdots + C_n(x)y_n''. \tag{4.12}$$

Продовжуємо диференціювати та вибираємо функції $C_1(x), C_2(x), \dots C_n(x)$ таким чином, щоб сума всіх доданків, що містять похідні функції $C_1(x), C_2(x), \dots C_n(x)$ дорівнювала нулю.

Нарешті отримаємо

$$\begin{gathered} y^{(n)}(x) = C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)} + \\ +C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Підставимо $y, y', \dots, y^{(n)}$ у рівняння (4.1) та згрупуємо доданки відносно $C_1(x), C_2(x), \dots C_n(x)$. Одержимо

$$\begin{gathered} C_1\left(a_0(x)\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y_1\right) + \\ +C_2\left(a_0(x)\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y_2\right) + \cdots \\ \dots +C_n\left(a_0(x)\frac{d^n y_n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y_{n2}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y_n\right) + \\ +C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x). \end{gathered}$$

Вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю, оскільки функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$ є розв’язками однорідного рівняння (4.2). Таким чином, останнє рівняння набуде вигляду

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x). \tag{4.14}$$

Запишемо систему n лінійних неоднорідних рівнянь з n невідомими $C_1'(x), C_2'(x), \dots C_n'(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases}.$$

Інтегруючі знайдені з системи алгебраїчних рівнянь $C_1'(x), C_2'(x), \dots C_n'(x)$, отримаємо функції $C_1(x), C_2(x), \dots C_n(x)$. Підстановка цих функцій в (4.7) дає розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку (4.1).

Приклад 4.2. Знайдемо розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{3}{t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{6}{t^2} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{6}{t^3} y = \frac{t}{1+\sqrt{t}} \tag{4.15}$$

зі змінними коефіцієнтами, визначеними і неперервними при $t \in R\backslash\{0\}$, методом Лагранжа, якщо функції:

$$y_1(t) = t, y_2(t) = t^2, y_3(t) = t^3 \tag{4.16}$$

є розв’язками лінійного однорідного диференціального рівняння, що відповідає рівнянню (4.15).

Переконаємось, що функції (4.16) утворюють фундаментальну систему розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння. Дійсно, визначник Вронського

$$W[t] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1{}' & y_2{}' & y_n{}' \\ y_1{}'' & y_2{}'' & y_n{}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 2t^3 \tag{4.17}$$

не дорівнює нулю при будь-яких $t \in R\backslash\{0\}$, а значить функції (4.16) утворюють фундаментальну систему розв’язків лінійного однорідного рівняння.

Частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (4.15) будемо шукати у вигляді

$$y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(xt) + C_3(t)y_3(t) =$$
$$= C_1(t) \cdot t + C_2(t) \cdot t^2 + C_3(t) \cdot t^3, \qquad (4.18)$$

де функції $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ підлягають визначенню. Диференціюючи (4.18), одержимо

$$y'(t) = C_1(t) + 2C_2(t) \cdot t + 3C_3(t) \cdot t^2 +$$
$$+C_1'(t) \cdot t + C_2'(t) \cdot t^2 + C_3'(t) \cdot t^3.$$

Покладемо $C_1'(t) \cdot t + C_2'(t) \cdot t^2 + C_3'(t) \cdot t^3 = 0$, отримаємо

$$y'(t) = C_1(t) + 2C_2(t) \cdot t + 3C_3(t) \cdot t^2.$$

Знайдемо $y''(t)$

$$y''(t) = 2C_2(t) + 6C_3(t) \cdot t +$$
$$+C_1'(t) + 2C_2'(t) \cdot t + 3C_3'(t) \cdot t^2.$$

Покладемо $C_1'(t) + 2C_2'(t) \cdot t + 3C_3'(t) \cdot t^2 = 0$, та знайдемо $y'''(t)$:

$$y'''(t) = 6C_3(t) + 2C_2'(t) + 6C_3'(t).$$

Підставимо $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$ у рівняння (4.15)

$$6C_3 + 2C_2' + 6C_3' - \frac{3}{t} \cdot (2C_2 + 6C_3 \cdot t) +$$
$$+\frac{6}{t^2} \cdot (C_1 + 2C_2 \cdot t + 3C_3 \cdot t^2) - \frac{6}{t^3}(C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3) = \frac{t}{1+\sqrt{t}}.$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні, одержимо

$$2C_2' + 6C_3' = \frac{t}{1+\sqrt{t}}.$$

Складемо систему алгебраїчних рівнянь відносно $C_1'(t), C_2'(t), C_3'(t)$

$$\begin{cases} C_1' \cdot t + C_2' \cdot t^2 + C_3' \cdot t^3 = 0, \\ C_1' + 2C_2' \cdot t + 3C_3' \cdot t^2 = 0, \\ 2C_2' + 6C_3' = \dfrac{t}{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$C_1'(t) = \frac{t^2}{2(1+\sqrt{t})}; \;\; C_2'(t) = -\frac{t}{1+\sqrt{t}}; \;\; ; \;\; C_3'(t) = \frac{1}{2(1+\sqrt{t})}.$$

Інтегруючи $C_1'(t), C_2'(t), C_3'(t)$, одержимо:

$$C_1(t) = \frac{t^{5/2}}{5} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^{3/2}}{3} - \frac{t}{2} + t^{1/2} - ln\left(1 + t^{1/2}\right) + C_1^0;$$
$$C_2(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} + t - 2t^{1/2} + 2ln\left(1 + t^{1/2}\right) + C_2^0;$$
$$C_3(t) = t^{1/2} - ln\left(1 + t^{1/2}\right) + C_3^0.$$

Підставимо $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ у (4.18), отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.18).

$$y(t) = t^{3/2}\left(\frac{14}{15}t^2 + \frac{3}{4}t^{3/2} - \frac{5}{3}t + \frac{1}{2}t^{1/2} + 1\right) -$$
$$-t(t-1)^2 ln\left(1 + t^{1/2}\right) + C_1^0 \cdot t + C_2^0 \cdot t^2 + C_3^0 \cdot t^3.$$

Питання та задачі

1) Яка теорема встановлює структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння n -го порядку?

2) В чому полягає метод *варіації довільних сталих (метод Лагранжа)?*

3) Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо відомий розв'язок відповідного однорідного рівняння:

1) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}tgt - x = \frac{1+t}{cost}$,
$x(t) = C_1 \sin t + C_2(\cos t + tsint)$;
2) $t^2\frac{d^3x}{dt^3} - 4t\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} = t^3$,
$x(t) = C_1 + C_2t^3 + C_3t^4$;
3) $t^2\frac{d^3x}{dt^3} + t\frac{d^2x}{dt^2} - x = tlnt$,
$x(t) = C_1t + C_2tlnt + C_3(lnt)^2$.

§4.3 Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку однорідного рівняння

Якщо в лінійному неоднорідному звичайному диференціальному рівнянні n -го порядку всі функції $a_k(x) = const$**,** то звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = g(x), \qquad (4.19)$$

називається ***лінійним неоднорідним звичайним диференціальним рівнянням*** $\boldsymbol{n}$ ***-го порядку з постійними коефіцієнтами***.

Йому відповідає однорідне звичайне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0. \qquad (4.20)$$

Частинний розв'язок звичайного диференціального рівняння (4.20) може бути знайдений у вигляді $y(x) = e^{\lambda x}$. Підставляючи його в (4.20), отримаємо

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Скорочуючи на $e^{\lambda x}$, маємо

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (4.21)$$

Рівняння (4.21) називається ***характеристичним рівнянням***. Воно має n коренів (характеристичних чисел).

Структура фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами, а отже, і загального розв'язку цього рівняння залежить від характеристичних чисел. Розглянемо чотири випадки знаходження фундаментальної системи розв'язків в залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

1) Якщо всі корені $\lambda_1,\ \lambda_1, \ldots \lambda_n$ - дійсні та різні, то система розв'язків

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots e^{\lambda_n x}$$

буде лінійно незалежною і загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{4.22}$$

Приклад 4.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \tag{4.23}$$

Розв'язок рівняння (4.23) будемо шукати у вигляді $y(x) = e^{\lambda x}$. Знайдемо похідні та підставимо у (4.23). Отримаємо

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0,$$

Скорочуючи на $e^{\lambda x}$, маємо

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \tag{4.24}$$

Рівняння (4.24) є характеристичним рівнянням для (4.23). Коренями цього рівняння є: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$. Ці корені дійсні та різні. Їм відповідають розв'язки:

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x},$$

які утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тоді загальний розв'язок рівняння (4.23) запишеться у вигляді:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Приклад 4.4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^V - 10y''' + 9y' = 0, \tag{4.25}$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (4.25).

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0, \tag{4.26}$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$\lambda(\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9) = 0,$$
$$\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = 1,$$
$$\lambda_3 = -1,$$
$$\lambda_4 = 3,$$
$$\lambda_5 = -3.$$

Цим кореням відповідає система розв'язків:

$$
\begin{gathered}
y_1(x) = 1,\\
y_2(x) = e^{x},\\
y_3(x) = e^{-x},\\
y_4(x) = e^{3x},\\
y_5(x) = e^{-3x}.
\end{gathered}
\tag{4.27}
$$

Покажемо, що ця система є фундаментальною системою розв'язків. Для цього складемо вронскіан системи:

$$
W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' & y_5'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' & y_5''' \\ y_1^{IV} & y_2^{IV} & y_3^{IV} & y_4^{IV} & y_5^{IV} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & e^{x} & e^{-x} & e^{3x} & e^{-3x} \\ 0 & e^{x} & -e^{-x} & 3e^{3x} & -3e^{-3x} \\ 0 & e^{x} & e^{-x} & 9e^{3x} & 9e^{-3x} \\ 0 & e^{x} & -e^{-x} & 27e^{3x} & -27e^{-3x} \\ 0 & e^{x} & e^{-x} & 81e^{3x} & 81e^{-3x} \end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & 3e^{3x} & -3e^{-3x} \\ e^{x} & -e^{-x} & 9e^{3x} & 9e^{-3x} \\ e^{x} & e^{-x} & 27e^{3x} & -27e^{-3x} \\ e^{x} & -e^{-x} & 81e^{3x} & 81e^{-3x} \end{vmatrix} =
$$

$$
= e^{x} \begin{vmatrix} 2e^{-x} & -6e^{3x} & 12e^{-3x} \\ 0 & -24e^{3x} & 24e^{-3x} \\ 2e^{-x} & -78e^{3x} & -84e^{-3x} \end{vmatrix} =
$$

$$
= e^{x} \cdot 2e^{-x} \begin{vmatrix} -24e^{3x} & 24e^{-3x} \\ 72e^{3x} & 96e^{-3x} \end{vmatrix} = -8064.
$$

Отже, визначник Вронського не дорівнює нулю при будь-яких значеннях x. Значить, система розв'язків (4.25) є фундаментальною. Запишемо загальний розв'язок рівняння (4.25)

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}.$$

2) Якщо серед коренів характеристичного рівняння є комплексні, наприклад, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$**,** то розв'язок, що відповідає цьому комплексному кореню має вигляд

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta\, x + i \sin\beta\, x) \qquad (4.28)$$

Якщо алгебричне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь, то воно також має і спряжений з ним корінь. Отже, характеристичне рівняння (4.21) у цьому випадку, має також корінь $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, який комплексно-спряженим до λ_1.

Якщо (4.28) є розв'язком лінійного однорідного рівняння (4.21), тоді

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cos\beta\, x, \\ y_2 &= e^{\alpha x} \sin\beta\, x \end{aligned} \qquad (4.29)$$

також є розв'язками (4.21).

Для комплексної комплексно спряженого кореня $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ маємо розв'язок

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta\, x - i \sin\beta\, x). \qquad (4.30)$$

Характеристичне число $\alpha - \beta i$ породжує ті самі розв'язки рівняння (4.21), що і число $\alpha + \beta i$. Отже функції (4.29) є розв'язками лінійного однорідного рівняння, вони лінійно незалежні при будь-якому x. Переконатися у останньому твердженні можна склавши вронскиан для функцій (4.29) та з'ясувавши, що він є відмінним від нуля.

Отже, парі комплексно спряжених коренів $\alpha \pm \beta i$ характеристичного рівняння (4.21) відповідає два дійсних розв'язки.

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cos\beta\, x, \\ &e^{\alpha x} \sin\beta\, x. \end{aligned}$$

Приклад 4.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = 0 \qquad (4.31)$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (4.31):

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Розв'язком цього рівняння буде пара комплексно спряжених коренів $\alpha \pm \beta i$, якій відповідає два дійсних розв'язки: $cos\, 2x$, $sin\, 2x$, які є лінійно незалежними функціями. Щоб довести це, складемо вронскиан і переконаємось, що він є відмінним від нуля

$$W[x] = \begin{vmatrix} cos\, 2x & sin\, 2x \\ -sin\, 2x & cos\, 2x \end{vmatrix} = cos^2\, 2x + sin^2\, 2x = 1.$$

Отже, функції $cos\, 2x$, $sin\, 2x$ є лінійно незалежними, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.28). Враховуючи вищесказане, запишемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.31):

$$y(x) = C_1 cos\, 2x + C_2\, sin\, 2x.$$

Приклад 4.6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV} - y = 0, \qquad (4.32)$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (4.32):

$$\lambda^4 - 1 = 0.$$
$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$\lambda_1 = 1,$$
$$\lambda_2 = -1,$$
$$\lambda_3 = i,$$
$$\lambda_4 = -i.$$

Маємо два дійсних та різних кореня і пару комплексно спряжених коренів $\pm i$. Цім кореням відповідає система розв'язків:

$$y_1(x) = e^x,$$
$$y_2(x) = e^{-x},$$
$$y_3(x) = cos\, x,$$
$$y_4(x) = sin\, x.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.32) буде мати вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\, cos\, x + C_3\, sin\, x.$$

3) Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і серед них є кратні, наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \tilde{\lambda}$**,** фундаментальною системою розв'язків буде

$$e^{\tilde{\lambda}x},\ xe^{\tilde{\lambda}x}, \ldots,\ x^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x},\ e^{\lambda_{k+1}x}, \ldots,\ e^{\lambda_n x}.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння у цьому випадку матиме вигляд

$$y = C_1 e^{\tilde{\lambda}x} + C_2 x e^{\tilde{\lambda}x} + \cdots + C_k\, x^{k-1} e^{\tilde{\lambda}x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1}x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад 4.7. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \qquad (4.33)$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (4.33):

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) - 3\lambda(\lambda - 1) = 0,$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)=0,$$
$$(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Отже, коренем характеристичного рівняння буде $\lambda = 1$ кратності 3. Цьому кореню відповідає лінійно незалежна система розв'язків:

$$e^x, xe^x, x^2e^x.$$

Значить, загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння (4.33) буде

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

Приклад 4.8. Розв'яжемо лінійне однорідного рівняння

$$y''' - y'' - y' + y = 0. \qquad (4.34)$$

Характеристичним рівнянням для рівняння (4.34) буде:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Коренями цього рівняння є: $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$. Цім кореням відповідає система розв'язків: e^x, xe^x, e^{-x}. Отже, загальним розв'язком (4.34) буде

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{-x}.$$

4) Якщо $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ є k - кратним коренем, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ також буде k - кратним коренем і фундаментальна система розв'язків, що відповідає цій парі коренів матиме вигляд:

$$\begin{gathered} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ xe^{\alpha x} \cos \beta x, \\ xe^{\alpha x} \sin \beta x, \\ \dots, \\ x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ e^{\lambda_{2k+1}x}, \dots, e^{\lambda_n x}. \end{gathered}$$

Приклад 4.9. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y^V - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0 \qquad (4.35)$$

Запишемо характеристичне рівняння для (4.35):

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Розв'яжемо це алгебраїчне рівняння п'ятого ступеню:

$$\lambda^4(\lambda - 2) + 2\lambda^2(\lambda - 2) + (\lambda - 2) = 0,$$
$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0,$$
$$\lambda_1 = 2,$$
$$\lambda_{2,3} = i,$$
$$\lambda_{4,5} = -i.$$

Отже, характеристичне рівняння має один дійсний корінь і пару комплексно спряжених коренів $\pm i$ кратності 2. Тому загальним розв'язком лінійног однорідного рівняння (4.35) буде:

$$y = C_1 e^{2x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x,$$

або

$$y = C_1 e^{2x} + (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x.$$

Питання та задачі

1) Який вигляд має *лінійне неоднорідне звичайне диференціальним рівнянням* n *-го порядку з постійними коефіцієнтами*?

2) Який вигляд має *лінійне однорідне звичайне диференціальним рівнянням* n *-го порядку з постійними коефіцієнтами*?

3) Що називається *характеристичним рівнянням* для лінійного однорідного диференціального рівняння?

4) Як виглядає структура фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння у випадку, коли всі корені характеристичного рівняння є дійсними та різними?

5) Як виглядає структура фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння у випадку, коли корені характеристичного рівняння є комплексними?

6) Як виглядає структура фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння у випадку, коли корені характеристичного рівняння є дійсними, але серед них є кратні?

7) Як виглядає структура фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння у випадку, коли серед комплексних коренів характеристичного рівняння є кратні?

8) Знайдіть загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

1) $y'' + 4y' + 3y = 0$;
2) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 5y = 0$;
4) $y'' + 2y' + 10y = 0$;
5) $4y'' + 4y' + y = 0$;
6) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$;
7) $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$;
8) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

§4.3. Структура частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.

В загальному випадку розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з постійними коефіцієнтами (4.19) може бути знайдений методом Лагранжа варіації постійних.

Для правих частин спеціального вигляду розв'язок знаходиться простіше методом підбору. Загальний вигляд правої частини $g(x)$ рівняння (4.19), при якому можливо застосувати ***метод підбору*** (***метод невизначених коефіцієнтів***), наступний:

$$g(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - многочлени ступені n і m відповідно. В цьому випадку частинний розв'язок $y_{чн}$ рівняння (4.19) розшукується у вигляді

$$y_{чн} = x^s e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right] \tag{4.36}$$

де $k = max(m,n)$, $\tilde{P}_k(x)$ і $\tilde{Q}_k(x)$ - багаточлени від x k -го ступеня загального вигляду з невизначеними коефіцієнтами, а s - кратність кореня $\lambda = \alpha \pm \beta i$ характеристичного рівняння.

Розглянемо окремі випадки відшукання частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (4.19) в залежності від вигляду правої частини цього рівняння. Це випадки зведені в спеціальну таблицю.

Зведена таблиця типів частинних розв'язків для різних типів правих частин

Права частина	Корені характеристичного рівняння	Тип частинного розв'язку
$\boldsymbol{P_n(x)}$	1.Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$\boldsymbol{\widetilde{P}_n(x)}$
	2.Число 0 є коренем характеристичного рівняння кратності s.	$\boldsymbol{x^s\widetilde{P}_n(x)}$
$\boldsymbol{P_n(x)e^{\alpha x}}$, ($\alpha$ - дійсне число)	1.Число α не є коренем характеристичного рівняння	$\boldsymbol{\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}}$
	2.Число α є коренем характеристичного рівняння кратності s.	$\boldsymbol{x^s\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}}$
$\boldsymbol{P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x}$	1.Число $\pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$\boldsymbol{\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x}$
	2.Число $\pm i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності s.	$\boldsymbol{x^s[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x]}$
$\boldsymbol{e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]}$	1.Число $\alpha \pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$\boldsymbol{[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}}$
	2.Число $\alpha \pm i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності s.	$\boldsymbol{x^s[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}}$

Розглянемо приклади знаходження загальних розв'язків рівняння (4.19) зі спеціальною правою частиною, що відповідають різним випадкам знаходження частинних розв'язків цього рівняння в залежності від цієї правої частини.

Приклад 4.10. Знайдемо загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' - y = x^2 \tag{4.37}$$

Запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає даному неоднорідному

$$y'' - y = 0.$$

Сформуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Коренями цього рівняння є: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. А отже, загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння запишеться у вигляді

$$y_{зо}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Права частина рівняння (4.37) є багаточленом другого порядку, тобто функцією вигляду $P_n(x)$. Оскільки нуль не є коренем характеристичного рівняння, частинній розв’язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{чн}(x) = Ax^2 + Bx + C, \tag{4.38}$$

де A, B, C – числа, що підлягають визначенню.

Продиференціюємо (4.38) двічі

$$y'(x) = 2Ax + \text{B},$$
$$y''(x) = 2\text{A}$$

та підставимо $y_{чн}(x)$ та її похідні у неоднорідне рівняння (4.37).

$$-Ax^2 - Bx - C + 2A = x^2.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових ступенях x:

$$x^2: \quad -A = 1,$$

$$x\ :\qquad -B=0,$$
$$x^0:\qquad -\ C+2A=0.$$

З цих рівнянь знаходимо: $A=-1,\ B=0,\ C=-2$. Отже,

$$y_{\text{чн}}(x)=-x^2-2.$$

Запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.37).

$$y(x)=y_{\text{зо}}(x)+y_{\text{чн}}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2-2.$$

Приклад 4.11. Знайдемо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'''-y''=x^2+x \tag{4.39}$$

Загальним розв'язком однорідного рівнянням, що відповідає (4.39) буде

$$y_{\text{зо}}(x)=C_1+xC_2+C_3e^x.$$

Права частина рівняння (4.39) є багаточленом другого порядку, тобто функцією вигляду $P_n(x)$. Оскільки нуль є коренем характеристичного рівняння кратності 2, частинній розв'язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{\text{чн}}(x)=x^2(Ax^2+Bx+C), \tag{4.40}$$

де A, B, C – числа, що підлягають визначенню.

Підставляючи $y_{\text{чн}}(x)$ та її похідні у рівняння (4.39) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x, одержимо:

$$A=-\frac{1}{12}, B=-\frac{1}{12},\ C=-\frac{3}{2}.$$

Отже,

$$y_{\text{чн}}(x)=x^2\left(-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{12}x-\frac{3}{2}\right).$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.39) запишеться у вигляді

$$y(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) = C_1 + xC_2 + C_3e^x - x^2\left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{3}{2}\right).$$

Приклад 4.12. Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x} \qquad (4.41)$$

Запишемо характеристичне рівняння для лінійного однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (4.41):

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Знаходимо корені цього рівняння та сформуємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y_{зо}(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

Права частина рівняння (4.41) має вигляд $P_n(x)e^{\alpha x}$ В нашому випадку $P_n(x)$ - багаточлен ступеню 2, $\alpha = 4$. Оскільки число 4 не є коренем характеристичного рівняння, частинній розв'язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{чн}(x) = e^{4x}(Ax^2 + Bx + C), \qquad (4.42)$$

де A, B, C – числа, що підлягають визначенню.

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, підставляючи $y_{чн}(x)$ та її похідні у (4.41) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x

$$A = B = 0, \quad C = \frac{1}{5}.$$

Таким чином,

$$y_{чн}(x) = \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.41) буде дорівнювати

$$y(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + -\frac{1}{5} e^{4x}.$$

Приклад 4.13. Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x \qquad (4.43)$$

Загальним розв'язком однорідного рівнянням, що відповідає (4.43) буде

$$y_{зо}(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x}.$$

Права частина рівняння (4.41) має вигляд $P_n(x)e^{\alpha x}$ В нашому випадку $P_n(x)$ - багаточлен першого ступеню, а $\alpha = 1$. Оскільки число 1 є коренем характеристичного рівняння, частинній розв'язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{чн}(x) = e^x x(Ax + B), \qquad (4.44)$$

де A, B – числа, що підлягають визначенню.

Підставляючи $y_{чн}(x)$ і її похідну у рівняння (4.43) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x, одержимо: $A = 1,\ B = -1$. Отже,

$$y_{чн}(x) = e^x x(x - 1).$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.43) запишеться у вигляді

$$y(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x} + e^x x(x - 1).$$

Приклад 4.14. Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \qquad (4.45)$$

Запишемо характеристичне рівняння для лінійного однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (4.45):

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Коренями цього рівняння є: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. А отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння запишеться у вигляді

$$y_{зо}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Права частина рівняння (4.45) має вигляд $P_n(x) \cos\beta\, x + \ Q_m(x) \sin\beta\, x$. В нашому випадку $Q_m(x)$ - багаточлен нульового ступеню, $P_n(x) = 0$, $\beta = 1$. Оскільки числа $\pm i$ не є коренями характеристичного рівняння, частинній розв'язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{чн}(x) = Acosx + Bsinx, \qquad (4.46)$$

де A, B – числа, що підлягають визначенню.

Знайдемо коефіцієнти A, B, підставляючи $y_{чн}(x)$ та її похідні у (4.45) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x

$$A = 0{,}3\ ;\ \ B = 0{,}1.$$

Таким чином,

$$y_{чн}(x) = 0{,}3cosx + 0{,}1sinx.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.43) запишеться у вигляді

$$y(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 0{,}3cosx + 0{,}1sinx.$$

Приклад 4.15. Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' + y = 4\sin x \qquad (4.47)$$

Загальним розв'язком однорідного рівнянням, що відповідає (4.47) буде

$$y_{зо}(x) = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Права частина рівняння (4.41) вигляд $P_n(x)\cos\beta x + \ Q_m(x)\sin\beta x$. В нашому випадку $Q_m(x)$ - багаточлен нульового ступеню, $P_n(x) = 0$, $\beta = 1$. Оскільки числа $\pm i$ є коренями характеристичного рівняння, частинній розв'язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{\text{чн}}(x) = x(A\cos x + B\sin x), \tag{4.48}$$

де A, B – числа, що підлягають визначенню.

Підставляючи $y_{\text{чн}}(x)$ і її похідні у рівняння (4.47) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x, одержимо: $A = -2,\ B = 0$. Отже,

$$y_{\text{чн}}(x) = -2x\cos x.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.47) запишеться у вигляді

$$y(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x.$$

Приклад 4.16. Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' - 9y = e^{3x}\cos x \tag{4.49}$$

Запишемо характеристичне рівняння для лінійного однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (4.49):

$$\lambda^2 - 9 = 0.$$

Коренями цього рівняння є:

$$\lambda_1 = 3,$$
$$\lambda_2 = -3.$$

А отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння запишеться у вигляді

$$y_{\text{зо}}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Права частина рівняння (4.49) має вигляд $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + +Q_m(x)\sin\beta x]$. В нашому випадку $P_n(x)$ - багаточлен нульового ступеню, $Q_m(x) = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Оскільки числа $3 \pm i$ не є коренями характеристичного рівняння, частинній розв'язок неоднорідного рівняння будемо формувати у вигляді:

$$y_{\text{чн}}(x) = e^{3x}(Acosx + Bsinx), \qquad (4.50)$$

де A, B – числа, що підлягають визначенню.

Знайдемо коефіцієнти A, B, підставляючи $y_{\text{чн}}(x)$ та її похідні у (4.49) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x

$$A = -\frac{1}{37}; \;\; B = \frac{6}{37}.$$

Таким чином,

$$y_{\text{чн}}(x) = e^{3x}\left(-\frac{1}{37}cosx + \frac{6}{37}sinx\right).$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.49) запишеться у вигляді

$$y(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}\left(-\frac{1}{37}cosx + \frac{6}{37}sinx\right).$$

Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.19) $g(x)$ є сумою

$$g(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \, g_i(x)$$

то частинний розв'язок $y_{\text{чн}}$ рівняння розшукується у вигляді

$$y_{\text{чн}} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \, y_{i\text{чн}}.$$

Приклад 4.17. Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \qquad (4.51)$$

Запишемо лінійне неоднорідне рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню (4.51)

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \qquad (4.52)$$

Складемо характеристичне рівняння для (4.52) та знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$
$$\lambda_1 = 1,$$
$$\lambda_1 = -4.$$

А отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.52) запишеться у вигляді

$$y_{зо}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

Оскільки права частина (4.51) складається з суми двох функцій, то частинний розв'язок $y_{чн}$ будемо розшукувати у вигляді

$$y_{чн} = xAe^{-4x} + (Bx + C)e^{-x}, \qquad (4.53)$$

де A, B, C – числа, що підлягають визначенню.

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, підставляючи $y_{чн}(x)$ та її похідні у (4.52) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x

$$A = -\frac{1}{5}; \;\; B = -\frac{1}{6}, \;\; ; \;\; C = -\frac{1}{36}.$$

Таким чином,

$$y_{чн}(x) = -\frac{x}{5}e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.51) запишеться у вигляді

$$y(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x}.$$

Питання та задачі

1) Запишіть загальний вигляд правої частини $g(x)$ рівняння (4.19), при якому можливо застосувати *метод підбору* (*метод невизначених коефіцієнтів*)?

2) Сформулюйте окремі випадки відшукання частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (4.19) в залежності від вигляду правої частини цього рівняння.

3) Як знаходиться частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо права частина цього рівняння є сумою функцій?

4) Знайдіть загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

1) $y'' + 2y' + 3y = x^2 e^x$,
2) $y'' - 3y' + 2y = x cos x$,
3) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$,
4) $y'' - y = 2e^x - x^2$.

5) Для кожного з даних рівнянь написати його частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами:

1) $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$,
2) $y'' - 2y' + 2y = e^x + x cos x$,
3) $y''' + y' = sin\, x + x cos\, x$,
4) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} sin\, 2x + 2x^2$.

ГЛАВА 5 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§5.1 Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)

Співвідношення вигляду

$$F_i(x_1, \dots x_n, x_1', \dots x_n', t) = 0, \qquad i = \overline{1,n} \qquad \textit{(5.1)}$$

де $x_1, \dots x_n$ – шукані функції незалежної змінної t, називається ***системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.***

Якщо можна розв'язати систему (5.1) відносно $x_1', \dots x_n'$, то отримаємо систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots x_n, t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (5.2)$$

яка називається нормальною.

Якщо в системі (5.2) функції f_i - неперервні, обмежені і мають обмежені частинні похідні по x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ в замкненій області змінних $t, x_1, \dots x_n$**,** то система (5.2) має єдиний розв'язок $x_1(t), \dots x_n(t)$**,** що задовольняє умовам:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \dots, \; x_n(t_0) = x_{n0}. \qquad (5.3)$$

Співвідношення (5.3) називають ***початковими даними*** *для нормальної системи диференціальних рівнянь (5.2), а задача знаходження розв'язків системи (5.2), що задовольняють початковим умовам (5.3) називається* ***задачею Коши.***

Сукупність функцій $x_i(t) = \varphi(t, C_1, C_2, \cdots C_n)$, $i = \overline{1,n}$, які визначені в деякій області G і мають неперервніі частинніі похідні за змінною t, називають ***загальним розв'язком системи*** *(5.2) в області G, якщо:*

1) при будь-якому виборі констант $C_1, C_2, \cdots C_n$ функція $\varphi(t, C_1, C_2, \cdots C_n)$ є розв'язком системи (5.2);

2) по будь-яким початковим умовам (5.3), може бути знайдений єдиний набір констант $C_{10}, C_{20}, \cdots C_{n0}$ таких що, $x_i(t) =$

$\varphi(t, C_{10}, C_{20}, \cdots C_{n0})$, $i = \overline{1, n}$ *є розв'язком системи (5.2), який задовольняє початковим умовам.*

Будь-який розв'язок системи диференціальних рівнянь, який одержується з його загального розв'язку при конкретних значеннях $C_1, C_2, \cdots C_n$, називається ***частинним розв'язком системи***.

Якщо функції f_i залежать явно від t, то система (5.1) називається ***динамічною***, а простір з координатами $x_1, \dots x_n$ називається ***фазовим***.

Основний метод інтегрування систем диференціальним рівнянь – це зведення її до одного рівняння більш високого порядку.

Припустимо, що функції $f_i(x_1, \dots x_n, t)$ мають неперервні похідні за всіма аргументами. Виключаючи з системи $x_2(t), \dots x_n(t)$ зведемо систему до одного диференціального рівняння відносно $x_1(t)$.

Нехай $x_1, \dots x_n$ є розв'язком системи; при його підстановці в рівняння системи (5.2) отримується тотожна рівність, яку можна диференціювати.

Продиференціюємо по t перше рівняння системи $\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots x_n, t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \cdot f_k(x_1, \dots x_n, t).$$

Позначимо праву частину отриманої рівності через $F_2(x_1, \dots x_n, t)$, тоді

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(x_1, \dots x_n, t).$$

Цю рівність знов продиференціюємо по t:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \cdot f_k(x_1, \dots x_n, t) \equiv F_3(x_1, \dots x_n, t).$$

Продовжуючи диференціювання, прийдемо до виразу:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_k} \cdot f_k(x_1, \dots x_n, t) \equiv F_n(x_1, \dots x_n, t).$$

Перепозначивши $f_1(x_1, \dots x_n, t) \equiv F_1(x_1, \dots x_n, t)$, одержимо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, \dots x_n, t), \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(x_1, \dots x_n, t) \\ \qquad \dots\dots\dots \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} = F_2(x_1, \dots x_n, t) \end{cases} \tag{5.4}$$

Якщо з перших $(n-1)$ рівнянь системи (5.4) можна виразити функції $x_2(t), \dots x_n(t)$ через $t, x_1(t), x_1', \dots, x_1^{(n-1)}$, то підставивши їх вирази в останнє рівняння, отримаємо диференціальне рівняння n – го порядку відносно однієї невідомої функції $x_1(t)$, всі інші функції мають бути виключені.

Дане виключення можливе тільки в тому випадку коли є відмінним від нуля визначник

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \dots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Приклад 5.1. Розв’язати систему шляхом зведення її до одного рівняння

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \tag{5.5}$$

Продиференцюємо друге рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}.$$

Виражаємо x і $\frac{dx}{dt}$ через y і $\frac{dy}{dt}$. З другого рівняння виразимо x через y

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt} + y\right).$$

Продиференціюємо останню рівність

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\right)$$

і підставимо x і $\frac{dx}{dt}$ в перше рівняння. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dt} + y\right) - 2y,$$

або

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0. \qquad (5.6)$$

Рівняння (5.6) це лінійне однорідне рівняння другого порядку. Розв'язком цього рівняння буде:

$$y = e^t(C_1 + tC_2).$$

Підставляючи отриманий розв'язок в рівність $x = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt} + y\right)$, одержимо

$$x = \frac{1}{2}e^t(2C_1 + C_2 + 2C_2t).$$

Отже, загальним розв'язком системи (5.5) є система функцій:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}e^t(2C_1 + C_2 + 2C_2t), \\ y = e^t(C_1 + tC_2)\,. \end{cases}$$

Приклад 5.2. Розв'язати систему шляхом зведення її до одного рівняння

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y - 2z, \\ \frac{dz}{dt} = 5x + 2y + 7z. \end{cases} \qquad (5.7)$$

Диференціюємо по t перше рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - 4\frac{dz}{dt}.$$

Підставляючи $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ з системи (5.7) в останнє рівняння, одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2(-2x - 2y - 4z) - 2(-2x + y - 2z) - 4(5x + 2y + 7z),$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 6y - 16z. \qquad (5.8)$$

Продиференціюємо по t (5.8):

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -12\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} - 16\frac{dz}{dt},$$

або

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -44x - 14y - 52z.$$

Отже, маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y - 4z, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -12x - 6y - 16z, \\ \dfrac{d^3x}{dt^3} = -44x - 14y - 52z. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь знаходимо

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x\right),$$
$$z = -\frac{1}{4}\left(-\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 6x\right)$$

та підставляємо їх в третє рівняння:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -44x - \frac{14}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x\right) + \frac{52}{4}\left(-\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 6x\right),$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 6\frac{d^2x}{dt^2} - 11\frac{dx}{dt} + 6x.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами. Загальним розв'язком цього рівняння буде:

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

Обчислюючи першу та другу похідні функції $x(t)$ та підставляючи їх у вирази для $y(t)$ і $z(t)$ після перетворень, отримаємо:

$$y(t) = \frac{1}{2}(C_1e^t + C_3e^{3t}),$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}(2C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}).$$

Отже, загальним розв'язком системи (5.7) є система функцій:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \\ y(t) = \dfrac{1}{2}(C_1e^t + C_3e^{3t}), \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}(2C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}). \end{cases}$$

Питання та задачі

1) Що називають *системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку?*

2) Яка система диференціальних рівнянь першого порядку називається *нормальною?*

3) Сформулюйте *задачу Коші* для нормальної системи диференціальних рівнянь?

4) Яка сукупність функцій називається *загальним розв'язком* нормальної системи диференціальних рівнянь?

5) Що називається *частинним розв'язком* нормальної системи диференціальних рівнянь?

6) За допомогою методу зведення системи до одного рівняння більш високого порядку знайдіть розв'язки наступних систем:

1) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 3x_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -5x_1 - x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_3; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 - x_3; \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 + 4x_3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 - 4x_3; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3. \end{cases}$

§5.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \ a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = \ a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \ a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases} \qquad (5.9)$$

називається ***лінійною****.*

Якщо всі $f_i(t) \equiv 0$**,** *то система називається* ***лінійною однорідною*** *системою диференціальних рівнянь. При* $f_i(t) \not\equiv 0$, *то система (5.9) називається* ***лінійною неоднорідною*** *системою.*

Властивості лінійної системи:

1)Якщо $x_1^{(1)}(t), \dots, x_n^{(1)}(t)$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то $Cx_1^{(1)}(t), \dots, Cx_n^{(1)}(t)$, де C - довільна стала, також є розв'язком однорідної системи.

2) Якщо $x_1^{(1)}(t), \dots, x_n^{(1)}(t)$ і $x_1^{(2)}(t), \dots, x_n^{(2)}(t)$ - є двома розв'язками лінійної однорідної системи, то

$$x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t), \dots, x_n^{(1)}(t) + x_n^{(2)}(t)$$

також є розв'язком однорідної системи.

Із властивостей випливає, що лінійна комбінація розв'язків лінійної однорідної системи з довільними сталими також є розв'язком.

Якщо $X_1(t), \dots, X_n(t)$ є розв'язком неоднорідної лінійної системи рівнянь, а $x_1(t), \dots x_n(t)$ - розв'язок відповідної однорідної системи, то їх сума

$$x_1(t) + X_1(t), \dots, x_n(t) + X_n(t)$$

також є розв'язком неоднорідної системи.

Якщо відомо n - розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{gathered} x_1^{(1)}(t), \dots, x_n^{(1)}(t); \\ x_1^{(2)}(t), \dots, x_n^{(2)}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^{(n)}(t), \dots, x_n^{(n)}(t), \end{gathered} \tag{5.10}$$

причому визначник

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_2^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \dots & x_n^{(2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5.11}$$

тоді лінійна комбінація цих розв'язків з довільними сталими коефіцієнтами

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i \; x_1^{(i)}(t), \\
x_2(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i \; x_2^{(i)}(t) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_n(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i \; x_n^{(i)}(t)
\end{aligned}
\qquad (5.12)
$$

є загальним розв’язком системи (5.9).

Якщо відомий загальний розв’язок однорідної системи, то загальний розв’язок неоднорідної можна знайти методом варіації сталих.

Розглянемо лінійну однорідну систему, що відповідає неоднорідній системі (5.9)

$$
\begin{cases}
\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n
\end{cases}
\qquad (5.13)
$$

Нехай (5.12) загальний розв’язок цієї системи. Тут $C_i = const$. Розв’язок неоднорідної системи (5.9) будемо розшукувати у вигляді

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \; x_1^{(i)}(t), \\
x_2(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \; x_2^{(i)}(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i \; (t) \, x_n^{(i)}(t)
\end{aligned}
\qquad (5.14)
$$

де $C_i(t)$ – функції, що підлягають визначенню.

Підставивши (5.14) в неоднорідну систему (5.9), отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} \; x_1^{(i)}(t) = f_1(t), \\
&\sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} \; x_2^{(i)}(t) = f_2(t), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} \, x_n^{(i)}(t) \; = f_n(t)
\end{aligned}
\qquad (5.14)
$$

Розв’яжемо цю систему відносно $\frac{dC_1(t)}{dt}, \frac{dC_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dC_n(t)}{dt}$, інтегруючі ці похідні, отримаємо функції $C_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Підставивши $C_i(t)$ в (5.14), знайдемо загальний розв’язок неоднорідної системи (5.9).

Приклад 5.3. Знайти розв'язок лінійної неоднорідної системи методом варіації довільної сталої

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}. \end{cases} \qquad (5.15)$$

Відповідна однорідна система має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \qquad (5.16)$$

Зведемо систему (5.16) до одного рівняння другого порядку. Для цього продиференціюємо перше рівняння то t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}. \qquad (5.17)$$

Підставимо $\frac{dy}{dt}$ в (5.17) з другого рівняння, отримаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x. \qquad (5.18)$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Це рівняння має комплексно спряжені корені: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Отже, загальним розв'язком рівняння (5.18) буде: $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Підставляючи його в перше рівняння системи (5.16), одержимо $y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t$.

Загальний розв'язок неоднорідної системи (5.15) будемо шукати у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t, \end{cases} \qquad (5.19)$$

де $C_1(t)$ і $C_2(t)$ – функції, що підлягають визначенню.

Підставимо (5.19) в рівняння неоднорідної системи та після скорочень отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dC_1(t)}{dt} cos\, t + \frac{dC_2(t)}{dt} sin\, t = 0, \\ -\frac{dC_1(t)}{dt} sin\, t + \frac{dC_2(t)}{dt} cos\, t = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \quad (5.20)$$

Розв’яжемо систему відносно $\frac{dC_1(t)}{dt}$ та $\frac{dC_2(t)}{dt}$:

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \frac{dC_2(t)}{dt} = 1. \quad (5.21)$$

Проінтегруємо (5.21), отримаємо:

$$C_1(t) = \ln|cost| + \widetilde{C_1},\ C_2(t) = t + \widetilde{C_2}, \quad (5.22)$$

Підставимо (5.22) в систему (5.19):

$$x = \left(ln|cos\, t| + \tilde{C}_1\right) cos\, t + \left(t + \tilde{C}_2\right) sin\, t,$$
$$y = -\left(ln|cos\, t| + \tilde{C}_1\right) sin\, t + \left(t + \tilde{C}_2\right) cos\, t.$$

Отримали загальний розв’язок лінійної неоднорідної системи (5.15).

Приклад 5.4. Знайти розв’язок лінійної неоднорідної системи методом варіації довільної сталої

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Відповідна однорідна система має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x. \end{cases} \quad (5.24)$$

Зведемо систему (5.24) до одного рівняння другого порядку. Для цього продиференціюємо перше рівняння то t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0. \tag{5.25}$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Це рівняння має два кореня: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Отже, загальним розв'язком рівняння (5.25) буде: $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Підставляючи його в перше рівняння системи (5.24), одержимо $y = C_1(t)e^t + \frac{3}{2}C_2(t)e^{2t}$.

Загальний розв'язок неоднорідної системи (5.23) будемо шукати у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{2t}, \\ y = C_1(t)e^t + \frac{3}{2}C_2(t)e^{2t}, \end{cases} \tag{5.26}$$

де $C_1(t)$ і $C_2(t)$ – функції, що підлягають визначенню.

Підставимо (5.26) в рівняння неоднорідної системи та після скорочень отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dC_1(t)}{dt}e^t + \frac{dC_2(t)}{dt}e^{2t} = 0, \\ \frac{dC_1(t)}{dt}e^t + \frac{3}{2}\frac{dC_2(t)}{dt}e^{2t} = \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases} \tag{5.27}$$

Розв'яжемо систему відносно $\frac{dC_1(t)}{dt}$ та $\frac{dC_2(t)}{dt}$:

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = \frac{2e^t}{e^{2t}+1}, \qquad \frac{dC_2(t)}{dt} = -\frac{2}{e^{2t}+1}. \tag{5.28}$$

Проінтегруємо (5.28), отримаємо:

$$C_1(t) = -\ln(e^{2t}+1) + \widetilde{C_1}, \quad C_2(t) = 2arctge^t + 2\widetilde{C_2}, \tag{5.29}$$

Підставивши (5.29) в систему (5.26), отримаємо загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (5.23).

$$x = \widetilde{C_1}e^t + 2\widetilde{C_2}e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}arctge^t,$$
$$y = \widetilde{C_1}e^t + 3\widetilde{C_2}e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}arctge^t.$$

Питання та задачі

1) Яка система диференціальних рівнянь називається *лінійною неоднорідною*?

2) Яка система диференціальних рівнянь називається *лінійною однорідною*?

3) Сформулюйте основні властивості лінійних систем.

4) В чому полягає *метод варіації довільних сталих* для знаходження розв'язків лінійних диференціальних систем?

5) Знайти розв'язки систем лінійних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих:

$$1)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y+tg^2t-1,\\ \frac{dy}{dt}=-x+tgt,\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-4x-2y+\frac{2}{e^t-1},\\ \frac{dy}{dt}=6x+3y-\frac{3}{e^t-1},\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y+\frac{1}{\cos t},\\ \frac{dy}{dt}=2x-y,\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-2y,\\ \frac{dy}{dt}=2x-y+15e^t\sqrt{t}.\end{cases}$$

§5.3. Системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n,\end{cases} \tag{5.30}$$

Розв'язок системи (5.30) будемо шукати у вигляді

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{kt},\ x_2(t) = \alpha_2 e^{kt}, \dots,\ x_n(t) = \alpha_n e^{kt} \qquad (5.31)$$

Підставимо (5.31) в рівняння системи (5.30), отримаємо

$$\begin{gathered}\alpha_1 k e^{kt} = a_{11}\alpha_1 e^{kt} + \dots + a_{1n}\alpha_n e^{kt},\\ \alpha_2 k e^{kt} = a_{21}\alpha_1 e^{kt} + \dots + a_{2n}\alpha_n e^{kt},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n k e^{kt} = a_{n1}\alpha_1 e^{kt} + \dots + a_{nn}\alpha_n e^{kt},\end{gathered}$$

Скорочуючи на e^{kt}, отримаємо

$$\begin{cases}(a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0,\\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0,\end{cases} \qquad (5.32)$$

Якщо визначник системи (5.32) не дорівнює нулю, то система має тільки нульові розв'язки. Для отримання ненульових розв'язків необхідно k вибрати так, щоб визначник системи (5.32) був рівним нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k\end{vmatrix} = 0 \qquad (5.33)$$

Рівняння (5.33) називають ***характеристичним***. Воно має k - коренів: $k_1, k_2, \dots, k_n$. Кожному кореню відповідає розв'язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами (5.30)

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{k_1 t},\ x_2(t) = \alpha_2 e^{k_1 t}, \dots,\ x_n(t) = \alpha_n e^{k_1 t}, \qquad (5.34)$$

де $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ визначаються з системи (5.32).

Оскільки запис (5.34) є справедливим для кожного з коренів $k_i,\ i = \overline{1, n}$ характеристичного рівняння (5.33), то (5.34) слід розглядати як сукупність з n розв'язків системи (5.30). Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків. В цьому посібнику ми розглянемо два випадки, коли серед розв'язків характеристичного рівняння (5.33) нема кратних коренів.

1) Всі корені $k_1, k_2, \dots, k_n$ характеристичного рівняння (5.33) дійсні і різні. Підставивши $k_i,\ i = \overline{1,n}$ в (5.33), отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь з визначником, що дорівнює нулю. Серед розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь є ненульове, що є власним вектором $a_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

системи (5.30), що відповідає власному значенню k_i цієї матриці. Таким чином, розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами (5.30), що відповідає кореню k_i можна записати у вигляді

$$x_j(t) = \alpha_j e^{k_j t} \tag{5.36}$$

Таким чином, загальний розв'язок системи (5.30) запишеться у вигляді

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_j e^{k_j t} \tag{5.37}$$

де C_j - довільні сталі , або в координатної формі

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_{1j} e^{k_j t}, \dots\ , x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_{nj} e^{k_j t}. \tag{5.38}$$

Приклад 5.5. Знайти розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases} \tag{5.39}$$

Складемо характеристичне рівняння системи (5.39)

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0, \tag{5.40}$$

Розкриваючи визначник, знаходимо

$$k^2 - 2k - 3 = 0. \tag{5.41}$$

Рівняння (5.41) має два різних розв'язка

$$k_1 = 3, \quad k_2 = -1, \tag{5.42}$$

які є власними значеннями матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають власним значенням (5.42).

При $k_1 = 3$, система $(A - kE)\ \alpha = 0$ має єдиний розв'язок,

$$\begin{cases} (1-k_1)\alpha_{11} + \quad 2\alpha_{21} = 0, \\ \quad 2\alpha_{11} + (1-k_1)\alpha_{21} = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0, \\ \ \ 2\alpha_{11} - 2\alpha_{21} = 0. \end{cases} \tag{5.43}$$

Покладемо α_{11}=1, тоді власний вектор, що відповідає k_1, дорівнює

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

Аналогічно, при $k_2 = -1$, отримаємо

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.45}$$

Вектор –функції

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{5.46}$$

утворюють фундаментальну систему розв’язків. Загальний розв’язок має вигляд

$$x(t) = \mathrm{C}_1 x_1(t) + \mathrm{C}_2 x_2(t)$$

або

$$x_1(t) = \mathrm{C}_1 e^{3t} + \mathrm{C}_2 e^{-t},$$
$$x_2(t) = \mathrm{C}_1 e^{3t} - \mathrm{C}_2 e^{-t}.$$

Приклад 5.6. Знайти розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \quad x_1 - x_2 + x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \quad x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \tag{5.47}$$

Запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

та складемо характеристичне рівняння

$$\det A = \begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix}. \tag{5.48}$$

Рівняння (5.48) має три дійсних та різних розв’язка

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = -2, \tag{5.49}$$

які є власними значеннями матриці A.

Знайдемо власні вектори, що відповідають розв’язкам характеристичного рівняння (5.48).

При $k_1 = -1$, система $(A - kE)\ \alpha = 0$ має вигляд

$$\begin{cases}(-1-k_1)\alpha_{11} + \ \alpha_{21} + \ \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11} + (-1-k_1)\alpha_{21} + \ \alpha_{31} = 0 \\ \ \alpha_{11} + \alpha_{21} + (1-k_1)\alpha_{31} = 0,\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\alpha_{21} + \ \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11} + \ \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0,\end{cases} \tag{5.50}$$

Нехай $\alpha_{31} = -1$, тоді з системи (5.50) знаходимо

$$\alpha_{11} = 1, \ \alpha_{21}=1.$$

Таким чином, власний вектор α_1, що відповідає власному значенню k_1, дорівнює

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}\alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix}.$$

Запишемо систему для знаходження власного вектору α_2, при $k_2 = 2$

$$\begin{cases}-3\alpha_{12} + \ \alpha_{22} + \ \alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{12} - 3\ \alpha_{22} + \ \alpha_{32} = 0 \\ \ \alpha_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{32} = 0,\end{cases} \tag{5.51}$$

Покладем $\alpha_{12} = 1$. Підставивши це значення в систему (5.51), знайдемо

$$\alpha_{22} = 1, \ \alpha_{32}=2.$$

Власний вектор α_2 дорівнює

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix}\alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 2\end{pmatrix}.$$

Аналогічним чином знайдемо власний вектор α_3, що відповідає кореню $k_3 = -2$.

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор –функції

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}, x_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} \qquad (5.52)$$

утворюють фундаментальну систему розв’язків. Загальний розв’язок має вигляд

$$x(t) = \mathrm{C}_1 x_1(t) + \mathrm{C}_2 x_2(t) + \mathrm{C}_3 x_3(t)$$

або

$$\begin{gathered} x_1(t) = \mathrm{C}_1 e^{-t} + \mathrm{C}_2 e^{2t} + \mathrm{C}_3 e^{-2t}, \\ x_2(t) = \mathrm{C}_1 e^{-t} + \mathrm{C}_2 e^{2t} + \mathrm{C}_3 e^{-2t}, \\ x_3(t) = -\mathrm{C}_1 e^{-t} + 2\mathrm{C}_2 e^{2t}. \end{gathered}$$

2)Серед простих коренів є комплексні

Комплексні корені розділюються на пари комплексно-спряжених коренів

$$\begin{gathered} k = a + ib, \\ \bar{k} = a - ib. \end{gathered}$$

Кожному комплексному кореню $k = a + ib$, відповідає комплексний розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду $\alpha = p + iq$. Розглянемо комплекснозначну функцію

$$\begin{gathered} x(t) = \alpha e^{kt} = (p + iq)e^{(a+ib)t} = (p + iq)e^{at}(\cos b\,t + i \sin b\,t) = \\ = e^{at}(p \cos b\,t - q \sin b\,t) + ie^{at}(q \cos b\,t - p \sin b\,t) \end{gathered}$$

або $x(t) = u(t) + iv(t)$, де.

$$u(t) = e^{at}(p \cos b\,t - q \sin b\,t),$$

$$v(t) = e^{at}(q \cos b\, t + p \sin b\, t).$$

Комплексно-спряженому кореню $\bar{k} = a - ib$ буде відповідати розв'язок

$$\bar{x}(t) = \bar{\alpha} e^{\bar{k}t},$$

де $\bar{\alpha} = p - iq$.

В силу лінійності системи (5.30) їй будуть задовільнять і вектор-функції

$$u(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + \bar{x}(t)\big),$$
$$v(t) = \frac{1}{2}\big(\bar{x}(t) - x(t)\big). \tag{5.53}$$

Таким чином, функції $u(t)$ і $v(t)$, які є дійсною та уявною частиною комплекснозначної функції $x(t) = \alpha e^{kt}$, є розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь (5.30)

$$x(t) = \mathrm{C}_1 u(t) + \mathrm{C}_2 v(t).$$

Приклад 5.7. Знайти розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{5.54}$$

Випишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

та характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4 - k & -1 \\ 5 & 2 - k \end{vmatrix} = 0,$$

розв'язуючи яке, знаходимо

$$k_{1,2} = 3 \pm 2i,$$

$k_{1,2}$ - власні значення матриці A. Знайдемо власні вектори.

При $k_1 = 3 + 2i$, система $(A - kE)\ \alpha_1 = 0$ має єдиний розв'язок. Запишемо її у вигляді

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) = 0,$$

або

$$\begin{cases} (4 - k_1)\alpha_{11} - \qquad \alpha_{21} = 0, \\ \qquad 5\alpha_{11} + (2 - k_1)\alpha_{21} = 0. \end{cases} \tag{5.55}$$

Покладемо $k_1 = 3 + 2i$ в системі (5.55), отримаємо систему

$$\begin{cases} (4 - 3 - 2i)\alpha_{11} - \quad \alpha_{21} = 0, \\ \qquad 5\alpha_{11} + (1 - 2i)\alpha_{21} = 0. \end{cases} \tag{5.56}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо

$$\alpha_{11} = 1,$$
$$\alpha_{21} = 1 - 2i.$$

Тоді власний вектор α_1, що відповідає власному значенню k_1 дорівнюватиме

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, при $k_2 = 3 + 2i$, маємо власний вектор

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}.$$

В розв'язку системи (5.48)

$$x(t) = \alpha_1 e^{k_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t}, \tag{5.57}$$

виділимо дійсну та уявну частини

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3t}(cos\,2\,t + i\,sin\,2\,t)$$
$$= \begin{pmatrix} e^{3t}(cos\,2\,t + i\,sin\,2\,t) \\ (1-2i)e^{3t}(cos\,2\,t + i\,sin\,2\,t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{3t}\,cos\,2\,t \\ e^{3t}(cos\,2\,t + 2\,sin\,2\,t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{3t}\,sin\,2\,t \\ e^{3t}(sin\,2\,t - 2\,cos\,2\,t) \end{pmatrix}.$$

З формул (5.53) знаходимо

$$u(t) = \begin{pmatrix} cos\,2\,t \\ cos\,2\,t + 2\,sin\,2t \end{pmatrix} e^{3t},$$
$$v(t) = \begin{pmatrix} sin\,2\,t \\ sin\,2\,t - 2\,cos\,2\,t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Загальний розв'язок системи (5.48) буде мати вигляд

$$x(t) = \mathrm{C}_1 u(t) + \mathrm{C}_2 v(t)$$

або

$$x_1(t) = e^{3t}(\mathrm{C}_1 \cos 2t + \mathrm{C}_2\,sin\,2\,t),$$
$$x_2(t) = e^{3t}\big((\mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2)\cos 2t + (2\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2)\,sin\,2\,t\big).$$

Приклад 5.8. Знайти розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \quad -x_1, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \quad x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \tag{5.58}$$

Характеристичне рівняння системи (5.58) має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 & -2 \\ -1 & -k & 0 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0, \tag{5.59}$$

розв'язуючи яке, знаходимо

$$k_1 = 1,\ k_{2,3} = \pm i.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають розв'язкам характеристичного рівняння (5.59).

При $k_1 = 1$, система $(A - kE)\ \alpha = 0$ має вигляд

$$\begin{cases} (2-k_1)\alpha_{11} + \ \alpha_{21} - 2\,\alpha_{31} = 0, \\ -\alpha_{11} - k_1\alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + (-1-k_1)\alpha_{31} = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \ \alpha_{21} - 2\,\alpha_{31} = 0, \\ -\alpha_{11} - \alpha_{21} = 0, \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} - 2\alpha_{31} = 0. \end{cases} \tag{5.60}$$

Нехай $\alpha_{11} = 1$, тоді з системи (5.60) знаходимо

$$\alpha_{21} = -1, \quad \alpha_{31} = 0.$$

Тоді власний вектор α_1, що відповідає власному значенню k_1 дорівнюватиме

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему для знаходження власного вектору α_2, при $k_2 = i$

$$\begin{cases} (2-i)\alpha_{12} + \ \alpha_{22} - 2\,\alpha_{32} = 0, \\ -\alpha_{11} - i\,\alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} + (-1-i)\alpha_{32} = 0. \end{cases} \tag{5.51}$$

Покладемо $\alpha_{12} = 1$. Підставляючи це значення в (5.51), знайдемо

$$\alpha_{22} = i, \ \ \alpha_{32} = 1.$$

Власний вектор α_2 буде мати вигляд

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знайдемо власний вектор α_3, що відповідає власному значенню $k_3 = -i$.

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Комплексному кореню $k_2 = i$, відповідає комплексний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь α_2**.** Розглянемо комплекснозначну функцію

$$\alpha_2 e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i.$$

або $\alpha_2 e^{it} = u(t) + iv(t)$, де

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$
$$v(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (5.58) можна записати у вигляді

$$x(t) = C_1 \alpha_1 e^t + C_2\, u(t) + C_3\, v(t) =$$
$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

або

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2\, \cos t + C_3 \sin t,$$
$$x_2(t) = -C_1 e^t - C_2\, \sin t + C_3 \cos t,$$

$$x_3(t) = C_2\ \cos t + C_3 \sin t.$$

Питання та задачі

1) Який вигляд має *система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами*?

2)Який вигляд має *характеристичне рівняння* системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами?

3) Як знайти *фундаментальну систему розв'язків* для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами у випадку, коли корені характеристичного рівняння *дійсні та різні*?

4) Як знайти *фундаментальну систему розв'язків* для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами у випадку, коли серед *простих коренів* характеристичного рівняння є *комплексні*?

5) Знайти розв'язки систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

1) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 4x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \quad 3x_1 + x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \quad 3\,x_1 + x_2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 8x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \quad -2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \quad 2\,x_1 + 8x_2 - 2x_3. \end{cases}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. / Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. – К.: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с. – ISBN 978-966-2331-05-9.

2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: Ігнатекс – Україна, 2011. - 648 с. – 500 пр. – ISBN 978-966-97049-3-1.

3. Івасишен С.Д. Диференціальні рівняння: методи та застосування: навч. посіб. / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, П.П. Настасієв, І.І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац.. ун-т, 2010. – 288 с. – 300 пр. – ISBN 978-966- 423-135-7.

4. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К.: Вища шк., 1994. – 454 с.

Навчальне видання

САВРАНСЬКА Алла Володимирівна
ПОДКОВАЛІХІНА Олена Олександрівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності
F4 Системний аналіз та наука про дані
вищих навчальних закладів

Підписано до друку 10.06.2025. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,1.
Тираж 100 прим. Зам. № 513.

Видавець і виготовлювач
Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Університетська, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.