

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи
з теорії ймовірностей та математичної статистики
для студентів заочної форми навчання
транспортного факультету

Частина 1 (теоретичний матеріал)

2019

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів заочної форми навчання транспортного факультету. Частина 1 (теоретичний матеріал). /Укл.: Килимник І.М., Полякова Т.Г., Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. 110 с.

Укладачі: Килимник І.М , доцент, к. т. н.
Полякова Т.Г., асистент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., професор, д. ф.-м. н.

Відповідальний за випуск: Килимник І.М , доцент, к. т. н.

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 6 від 20.02.2019 р.

Рекомендовано до видання
НМК Транспортного факультету
Протокол № 73 від 20.03.2019.

ЗМІСТ

	Стор.
Вступ	5
1 Теорія ймовірностей	6
1.1 Елементи комбінаторики	6
1.2 Події. Алгебра подій	11
1.3 Ймовірність випадкових подій	15
1.3.1 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій	19
1.3.2 Теорема множення ймовірностей	20
1.3.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій	22
1.3.4 Формула повної ймовірності. Формула Байєса	23
1.3.5 Незалежні випробування. Формула Бернуллі	25
1.3.6 Локальна теорема Лапласа	28
1.3.7 Теорема Пуассона	29
1.3.8 Інтегральна теорема Лапласа	31
1.4 Випадкові величини	33
1.4.1 Дискретні випадкові величини	34
1.4.1.1 Числові характеристики дискретних випадкових величин	35
1.4.1.2 Закони розподілу дискретних випадкових величин	42
1.4.2 Неперервні випадкові величини	44
1.4.2.1 Числові характеристики неперервних випадкових величин	45
1.4.2.2 Закони розподілу неперервних випадкових величин	49
1.5 Закон великих чисел	58
1.6. Система випадкових величин	60
1.6.1 Система дискретних випадкових величин	61
1.6.2 Система неперервних випадкових величин	63
1.6.3 Числові характеристики двовимірних випадкових величин	64

1.6.4	Умовні закони розподілу	66
1.6.4.1	Числові характеристики умовних розподілів	67
1.7	Лінійна регресія. Прямі лінії середньоквадратичної регресії	75
2	Елементи математичної статистики	80
2.1.	Статистичне оброблення результатів спостережень	80
2.2	Числові характеристики статистичного розподілу вибірки	84
2.3	Інтервальні оцінки параметрів. Довірчі інтервали	89
2.4	Перевірка статистичних гіпотез	94
2.5	Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності за допомогою критерію Пірсона	97

ВСТУП

Усі події, що відбуваються як у природі, так і в суспільстві, взаємопов'язані між собою найтіснішим чином: одні з них є наслідком інших і, у свою чергу, можуть бути причиною третіх. Ці події можна розділити на два класи - події детерміновані і випадкові.

Детерміновані події характеризуються тим, що при певному комплексі умов вони або відбуваються завжди, або ніколи. Наприклад, комплексом умов, за яких вода перетворюється на пару, є атмосферний тиск у 760 мм і температура вища за 100 ° за Цельсієм. З іншого боку, при цьому ж комплексі умов вода не може перетворитися на лід.

Інший клас подій характеризується тим, що при певному комплексі умов вони можуть як відбутися, так і не відбутися. Передбачити це заздалегідь неможливо. Наприклад, при одноразовому підкиданні монети поява герба на верхній стороні – подія випадкова; кількість сонячних днів у наступному році теж заздалегідь передбачити неможливо; чи пропрацює орбітальна станція без пошкоджень протягом гарантійного терміну теж заздалегідь невідомо. Це все випадкові події, вивченням яких і займається теорія ймовірностей.

Проте в теорії ймовірностей інтерес викликають не самі по собі випадкові події, а закономірності, що виникають при багаторазовому повторенні дослідів з випадковими результатами. Теорія ймовірностей вивчає закономірності в масових випадкових подіях.

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Нехай задана множина Ω , що містить скінченну кількість елементів (студенти в групі, яблука в кошику, набір доміно і т.д.). Такі множини будемо називати скінченними. Наприклад, якщо множина складається з чотирьох елементів, то можна позначати її $\{a, b, c, d\}$.

Множина, для якої зазначений порядок розташування елементів, називається впорядкованою. Сполуками називають різні групи, складені з будь-яких елементів. Розрізняють такі три види сполук: перестановки, розміщення, комбінації.

Перестановками з n елементів називають сполуки, що містять всі n елементів і відрізняються між собою лише їх порядком.

Кількість перестановок з n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = n!, \quad (1.1)$$

де $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Прийнято, що $0! = 1$. Корисна рекурентна формула $P_n = n \cdot P_{n-1}$. Простий і комбінаторний сенс числа перестановок: $n!$ означає скількома способами можна впорядкувати кінцеву n -елементну множину.

Нехай є n однакових елементів першого типу, k однакових елементів другого типу і s однакових елементів третього типу, всього $(n + k + s)$ елементів. Скількома способами можна розділити ці елементи на три групи так, щоб в одній групі було n предметів, в іншій k предметів, у третій – s предметів? Це завдання на перестановки з повторенням.

Число перестановок з повтореннями знаходиться за формулою:

$$\bar{P}_{(n+k+s)} = P_{(n+k+s)(з\ повт)} = \frac{(n + k + s)!}{n! \cdot k! \cdot s!}. \quad (1.2)$$

Розміщеннями з n елементів по m в кожному називають такі сполуки, в кожному з яких входять m елементів, узятих з даних n

елементів і які відрізняються одна від одної або самими елементами, або порядком їх розташування. Число розміщень з n елементів по m знаходять за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{або} \quad A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1). \quad (1.3)$$

За змістом визначення ясно, що $m \leq n$.

Розміщення з повтореннями з n елементів по m елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно разів від 1 до m включно або не містити його зовсім. Тобто кожне розміщення з повторенням з n елементів по m елементів може складатися не лише з різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів.

Число розміщень з повтореннями обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = A_{n(\text{з повт})}^m = n^m. \quad (1.4)$$

Комбінаціями з n елементів по m називають сполуки, в кожену з яких входять m елементів, взятих з даних n елементів і які відрізняються одна від одної, принаймні, одним елементом (порядок не враховуємо).

Число комбінацій з n елементів по m знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \quad \text{або} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.5)$$

На практиці часто використовують першу формулу для обчислення C_n^m .

Деякі властивості комбінацій, що застосовуються при розв'язуванні задач:

$$\begin{aligned} C_n^0 &= C_0^0 = 1; & C_n^1 &= n; & C_n^m &= C_n^{n-m}; \\ C_n^m + C_n^{m+1} &= C_{n+1}^{m+1}; \end{aligned}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots C_n^n = 2^n.$$

Комбінації з повтореннями з n елементів по m елементів ($m \leq n$) можуть містити будь-який елемент скільки завгодно разів від 1 до m включно або не містити його зовсім. Тобто кожна комбінація з повторенням з n елементів по m елементів може складатися не лише з m різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів. Слід зазначити, що якщо, наприклад, два з'єднання по m елементів відрізняються один від одного лише порядком розташування елементів, то вони не вважаються різними комбінаціями.

Число комбінацій з повтореннями обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n(\text{з повт})}^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!}. \quad (1.6)$$

Зауваження: m може бути більше за n .

Часто використовуються два основні правила комбінаторики: правило суми і правило добутку.

Правило суми. Якщо елемент A_1 може бути вибраний n_1 способами, елемент A_2 – іншими n_2 способами і т. д., елемент A_m – n_m способами, відмінних від перших $(m-1)$, то вибір одного з елементів - або A_1 , або A_2 , ..., або A_m – може бути здійснений $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ способами.

Правило добутку. Якщо елемент A_1 може бути вибраний n_1 способами, після кожного такого вибору елемент A_2 може бути вибраний n_2 способами і т. д., після кожного $(m-1)$ вибору елемент A_m може бути вибраний n_m способами, то вибір усіх елементів $A_1 A_2 \dots A_m$ у зазначеному порядку може бути здійснений $n_1 n_2 \dots n_m$ способами.

Приклад 1. Одночасно кидають два гральних кубика. Визначити кількість результатів, у яких сумарна кількість очок, що випали, буде не менше 4.

Розв'язування. Число сприятливих випадків знайдемо простим їх перерахуванням: $1+1$, $1+2$, $1+3$, $2+1$, $2+2$, $3+1$, тобто всього 6.

Приклад 2. Слово АБРАКАДАБРА розрізається на букви, які потім перемішуються. Одна за одною витягуються 5 букв і прикладаються одна до одної зліва направо. Знайти число випадків, що сприяють появі слів РАДАР та БАРКА.

Розв'язування. У вихідному слові АБРАКАДАБРА міститься 2 букви «Р», 5 букв «А», 1 буква «Д». Тому в слові РАДАР першу букву «Р» можна вибрати двома способами, а другу – всього лише одним (одна «Р» уже взята). Першу букву «А» можна вибрати 5 способами, другу – 4 способами. Букву «Д» – в один спосіб. За правилом добутку число сприятливих випадків дорівнює $m = 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 40$. Аналогічно число випадків, що сприяють появі слова БАРКА, дорівнює: $m = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 80$.

Приклад 3. Менеджер щоденно переглядає 6 видань економічного змісту. Якщо порядок перегляду видань випадковий, то скільки існує способів його здійснення?

Розв'язування. Способи перегляду видань розрізняються лише порядком, склад видань при кожному способі незмінний. Отже, при розв'язанні цієї задачі необхідно розрахувати число перестановок:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Приклад 4. Правління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів 3 людини на різні посади. Всі 10 кандидатів мають рівні шанси. Скільки різних груп по 3 людини можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язування. Оскільки групи по 3 людини можуть відрізнятися і складом претендентів, і заповнюваними ними вакансіями, тобто порядком, то необхідно розрахувати число розміщень з 10 елементів по 3.

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Приклад 5. Хай дано п'ять цифр: 1, 2, 3, 4, 5. Визначимо, скільки тризначних чисел можна скласти з цих цифр.

Розв'язування. Якщо цифри в тризначному числі можуть повторюватися, то кількість тризначних чисел буде n^m , де $n=5$ (кількість цифр), $m=3$ (число тризначне). Всього 5^3 чисел, тобто 125. Якщо цифри в тризначному числі не повторюються, то отримаємо $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

Приклад 6. Правління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів 3 людини на однакові посади, всі 10 кандидатів мають рівні шанси. Скільки різних груп по 3 людини можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язування. Склад різних груп повинен відрізнятися, принаймні, хоча б одним кандидатом і порядок вибору не має значення, отже, цей вид з'єднань є комбінаціями.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Приклад 7. П'ятьох чоловіків і десятих жінок випадковим чином розсаджують по троє за 5 столів. Визначити кількість способів посадки, щоб за кожним столом сидів один чоловік.

Розв'язування. Одного чоловіка і двох жінок можна посадити за перший стіл $m_1 = 5 \cdot C_{10}^2$ способами, за другий, третій, четвертий, п'ятий столи – відповідно: $m_2 = 4 \cdot C_8^2$, $m_3 = 3 \cdot C_6^2$, $m_4 = 2 \cdot C_4^2$, $m_5 = 1$ способами. Отже, кількість сприяючих результатів дорівнює:

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_5 = 5! \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \frac{5! \cdot 10!}{2^5}.$$

Приклад 8. П'ять книг ставлять на полицю. Визначити кількість способів розташування книг, щоб дві певні книги виявилися поруч.

Розв'язування. Підрахуємо число сприятливих випадків. Дві певні книги можна поставити поруч $2!=2$ способами. Книги, що залишилися, можна розташувати на полиці $4 \cdot 3!$ способами. Тому кількість способів розташування книг дорівнює $2 \cdot 4 \cdot 3! = 48$.

1.2 ПОДІЇ. АЛГЕБРА ПОДІЙ

Подією називатимемо будь-який факт, який може статися або не статися при певному комплексі умов. Події позначатимемо великими латинськими буквами $A, B, C, \dots$. При кожному здійсненні певного комплексу умов обов'язково відбувається деяка подія.

Назвемо довільну множину Ω простором елементарних подій $\omega \in \Omega$, якщо останнім відповідають всі взаємовиключні результати деякого досліду. Множину взаємовиключних результатів можна або перенумерувати, тоді вона злічена, або в силу якихось причин не можна, тоді вона незліченна. Приклади злічених просторів елементарних подій:

Приклад 9. Підкидають гральний кубик один раз. У цьому досліді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Тут ω_k – результат досліду, що полягає у випаданні k очок, $k=1, 2, \dots, 6$. Маємо шість результатів, що виключають один одного.

Приклад 10. Підкидають монету двічі. У цьому досліді $\Omega = \{\omega_1(\text{гг}), \omega_2(\text{гц}), \omega_3(\text{цг}), \omega_4(\text{цц})\}$, де г означає "герб", ц – "цифра".

Кожну випадкову подію A , що може відбутися в результаті досліду, можна зіставити з групою відповідних їй елементарних подій з Ω . Ці події називаються сприятливими. В умовах **Прикладу 9** для події $A = \{\text{випадання не більше чотирьох очок}\}$ сприятливими будуть елементарні події $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Прийнято позначати через $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots$ події, протилежні подіям $A, B, C, \dots$. У **Прикладі 10**: при підкиданні монети подія A – випадас

“герб” і $\overline{A}$ – випадає “цифра”.

Серед всіх подій виділимо дві крайні:

а). подія U називається вірогідною або достовірною, якщо вона настає при кожній реалізації комплексу умов. Наприклад, при підкиданні двох гральних кісток сума очок, що випали, завжди не менша двох;

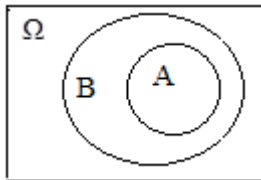
б) подія $\emptyset$ називається неможливою, якщо вона не настає при жодній реалізації комплексу умов. Наприклад, при киданні двох гральних кісток сума очок, що випали, не може бути більше дванадцяти;

Подія A , яка в результаті певного комплексу умов може відбутися або не відбутися, називається випадковою.

Сукупність операцій, що виконуються над подіями, утворює алгебру подій.

1. Слідування подій.

Кажуть, що подія A тягне за собою подію B (позначається $A \subset B$), якщо при настанні події A обов'язково настає і подія B . Подія B називається наслідком події A : $A \subset B$, якщо з A слідує B .

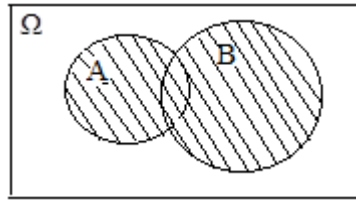


Якщо подія A полягає в тому, що навмання кинута точка потрапила в область A , а подія B – в область B , то співвідношення $A \subset B$ виконується тоді, коли область A цілком міститься в області B .

Якщо $A \subset B$ і одночасно $B \subset A$, то події A і B називаються еквівалентними (рівносильними) або рівними $A = B$. Якщо $A = B$, то події A і B складаються з одних і тих же подій. Очевидно, що для будь-якої події A має місце включення вигляду $\emptyset \subset A \subset U$.

2. Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називається така подія C , яка полягає в здійсненні або події A , або події B , або подій A і B разом:

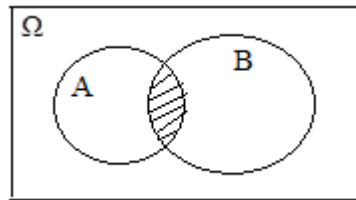
$$C = A + B \text{ або } C = A \cup B.$$



3. Сумою будь-якого числа подій $A_1, A_2, \dots, A_m$ називають таку подію C , яка полягає в здійсненні хоча б однієї з цих подій.

4. Добутком (перетином) двох подій A і B називається така подія C , яка полягає в здійсненні і події A , і події B :

$$C = A \cdot B \text{ або } C = A \cap B.$$



5. Добутком будь-якого числа подій $A_1, A_2, \dots, A_m$ називається така подія C , яка полягає в тому, що події $A_1, A_2, \dots, A_m$ відбудуться одночасно.

Сума і добуток подій мають такі властивості:

а) $A + B = B + A$;

б) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$;

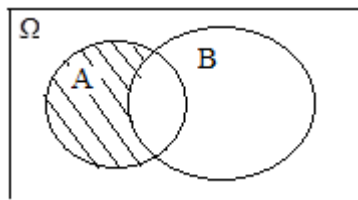
в) $A \cdot B = B \cdot A$;

г) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$;

д) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

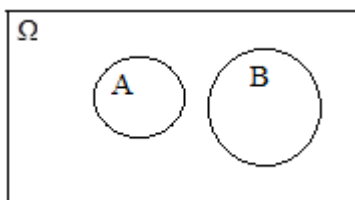
6. Різницею подій A і B називається подія C , яка настає лише тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B :

$$C = A \setminus B.$$



Події A і B називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу іншої:

$$A \cap B = \emptyset.$$



Події $A_i, (i = \overline{1, n})$ називаються попарно несумісними, якщо для будь-якої пари i та j

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Кожна алгебра подій включає в себе такі поняття як «нуль» і «одиниця». В алгебрі подій умовно за «нуль» беруть неможливу подію, а за «одиницю» – вірогідну.

Події $A_i, (i = \overline{1, n})$ утворюють повну групу подій, якщо

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = U; \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

Приклад 11. Стрілець стріляє два рази по мішені. Чи утворюють повну групу подій наступні події: а) A – «хоча б одне влучання» і B – «хоча б один промах»; б) C_0 – «жодного влучання», C_1 – «рівно одне влучання» та C_2 – «жодного промаху».

Розв’язування. Введемо події:

A_i – «влучання при i -му пострілі», $\overline{A_i}$ – «промах при i -му пострілі».

а) Для подій A і B відповідно маємо:

$$A = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2 + A_1 A_2, \quad B = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2 + \overline{A_1} \overline{A_2}.$$

Отже, події A і B сумісні. Незважаючи на те, що $A + B = U$, події A і B не утворюють повної групи подій.

б) У цьому випадку маємо:

$$C_0 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}, \quad C_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2, \quad C_2 = A_1 \cdot A_2.$$

Тут $C_0 + C_1 + C_2 = \Omega$ і для всіх $i = j$: $C_i \cdot C_j = \emptyset$. Це означає, що події C_0, C_1, C_2 утворюють повну групу подій.

1.3 ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Основною характеристикою випадкової події є її ймовірність. Можливі результати одного випробування, що виключають одне одного, називаються елементарними наслідками випробування. Результат випробування називається сприятливим для певної події, якщо внаслідок цього випробування з'являється вказана подія. Події називаються рівноможливими, якщо немає підстав вважати одну з них більш-менш можливою, ніж іншу. Наприклад, при підкиданні монети, якщо вона симетрична і однорідна, падіння цифрою чи гербом уверх рівноможливі.

Класичне означення ймовірності.

Ймовірністю $P(A)$ події A називають відношення числа m випадків, що сприяють появі цієї події, до загального числа n всіх можливих елементарних результатів випробування, що утворюють повну групу. При цьому обов'язковою умовою є рівна можливість результатів досліду.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.7)$$

Властивості ймовірності:

- а) ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці;
- б) ймовірність неможливої події дорівнює нулю;

в) імовірність випадкової події $0 \leq P(A) \leq 1$.

Приклад 12. З 50 питань, що входять до екзаменаційних білетів, студент підготував 40. Яка вірогідність того, що 2 питання, які випадковим чином дісталися студенту, виявляться підготовленими?

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що обидва питання підготовлені. Вибір двох питань з 50 питань можна здійснити

$$n = C_{50}^2 = \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} = 1225$$

способами, а обрати два підготовлених питання з 40 питань можна

$$m = C_{40}^2 = \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$$

способами. Тоді ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{780}{1225} \approx 0,64$.

Приклад 13. На 7 картках написані літери: О, М, П, Ч, І, Е, Н. Картки перемішують і виймають по одній, прикладаючи одна до другої. Знайти ймовірність того, що буде складено слово ЧЕМПІОН.

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що буде складено слово ЧЕМПІОН. Число сприятливих результатів $m=1$, а число всіх можливих результатів в цьому досліді $n = P_7 = 7! = 5040$. Тоді ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{5040}$.

Приклад 14. На 7 картках написані літери: О, А, П, С, І, Т, К. Картки перемішують і виймають чотири по одній, прикладаючи одна до другої. Знайти ймовірність того, що буде складено слово СКАТ.

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що буде складено слово СКАТ. Число сприятливих результатів $m=1$, а число всіх можливих результатів в цьому досліді $n = A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Тоді ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{840}$.

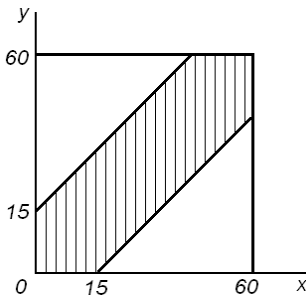
Геометричне означення ймовірності.

Поняття геометрична ймовірність виникає в тому випадку, коли ймовірність потрапляння випадкової точки в будь-яку частину області пропорційна мірі цієї області і не залежить від її розташування і форми. В таких задачах множина елементарних випадків не є дискретною. Якщо геометрична міра всієї області $\text{mes}(\Omega)$ (довжина, площа, об'єм і т.д.), а геометрична міра частини цієї області $\text{mes}(w)$, попадання в яку сприяє даній події, то ймовірність такої події

$$P(A) = \frac{\text{mes}(w)}{\text{mes}(\Omega)}, \quad (1.8)$$

де mes означає міру області, яка може бути довжиною, якщо Ω – одномірна множина; площею, якщо Ω – двовимірна множина і об'ємом, якщо Ω – тривимірна множина.

Приклад 15. Дві особи A і B умовилися зустрітися в певному місці між 17 і 18 годинами. Той, хто прийшов першим, чекає другого протягом 15 хвилин, після чого йде. Визначити ймовірність зустрічі, якщо час приходу кожного незалежний і рівно можливий протягом зазначеної години.



Розв'язування. Нехай x – момент приходу A і y – момент приходу B . Подія C – «зустріч двох людей у певному місці». Областю можливих значень (простір елементарних подій Ω) є квадрат площею $S = 60^2 = 3600$ (одна година – 60 хвилин). Зустріч відбудеться, якщо

$|x - y| \leq 15$. Отже, множина елементарних подій w , що сприяють зустрічі, лежить між прямими $x - y = 15$ і $x - y = -15$. Площа утвореної фігури $S_\phi = 60^2 - (60 - 15)^2 = 1575$. На підставі наведеної вище формули, ймовірність події C дорівнює відношенню площі S_ϕ до площі всього квадрата S , тобто

$$P(C) = \frac{S_{\phi}}{S} = \frac{1575}{3600} = 0,4375.$$

Відносна частота і статистична ймовірність.

Основні труднощі класичного і геометричного означення ймовірності – це виділення рівноможливих подій, що утворюють простір Ω . У реальних ситуаціях таке виділення, засноване на властивості симетрії досліджуваного явища, не завжди можливе. Класичне означення ймовірності при переході від найпростіших прикладів до складних завдань наштовхується на труднощі принципового характеру. По-перше, число елементарних результатів випробування не завжди скінченно, по-друге, дуже часто неможливо подати результат у вигляді сукупності елементарних результатів, по-третє, важко вказати підстави, що дозволяють вважати елементарні результати рівноможливими. Тому використовують також статистичне означення ймовірності. В основі статистичного означення ймовірностей лежить спробний факт – так звана стійкість частот.

Відносною частотою $W(A)$ події A називають відношення числа випробувань m , в яких подія A з'явилася, до загального числа n фактично проведених випробувань, тобто

$$W(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.9)$$

При однотипних масових випробуваннях у багатьох випадках спостерігається стійкість відносної частоти події, яка полягає в тому, що в різних дослідах відносна частота змінюється мало (тим менше, чим більше виконано випробувань), коливаючись близько деякого постійного числа. При статистичному визначенні ймовірності події приймають її відносну частоту.

Для здійснення статистичної ймовірності події A потрібно:

а) можливість хоча б принципово проводити необмежену кількість випробувань, в кожному з яких подія A настає або не настає;

б) стійкість відносної частоти події A в різних серіях великої кількості випробувань.

1.3.1 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \quad (1.10)$$

Висновок 1. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Висновок 2. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (1.11)$$

Висновок 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \quad (1.12)$$

Приклад 16. На стелажі в бібліотеці стоять 15 підручників, причому 5 із них у твердій палітурці. Бібліотекар бере три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із взятих підручників буде у твердій палітурці.

Розв'язування. Перший спосіб. Нехай подія A – «хоча б один підручник у твердій палітурці»; подія B – «один з взятих підручників в палітурці, а два без палітурки»; подія C – «два підручника в палітурці, а один без палітурки»; подія D – «всі три підручника в палітурці». Очевидно, $A=B+C+D$. Події B, C, D – несумісні. Тоді $P(A)=P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)$. Знайдемо ймовірності подій B, C, D :

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

$$\text{Отже, } P(A) = \frac{67}{91}.$$

Другий спосіб. Нехай подія A – «хоча б один підручник у твердій палітурці»; подія $\bar{A}$ – «жоден із взятих підручників не має твердої палітурки». Оскільки події A і $\bar{A}$ протилежні, то

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

Подія A називається незалежною від події B , якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B чи ні.

Кілька подій називаються незалежними в сукупності, якщо будь-яка з них не залежить від будь-якої сукупності інших.

Подія A називається залежною від події B , якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того, відбулася чи ні подія B .

Ймовірність події A , яка обчислюється за умови, що подія B сталася, називається умовною ймовірністю події A і позначається $P_B(A)$ або $P(A/B)$. Умовна ймовірність задовольняє всім властивостям ймовірності.

1.3.2 Теорема множення ймовірностей

Ймовірність добутку двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша з них відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.13)$$

Висновок 1. Якщо подія A не залежить від події B , то і подія B не залежить від події A .

Висновок 2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.14)$$

Для обчислення ймовірності спільної появи більшої кількості подій, наприклад, чотирьох, використовують формулу:

$$P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC).$$

Для кількох незалежних в сукупності подій ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Висновок 3. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює різниці одиниці і добутку ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}). \quad (1.15)$$

Приклад 17. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни підряд виймаються дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі білі.

Розв'язування. Позначимо через A подію, що полягає в тому, що обидві вийняті кулі білі. Ця подія являє собою добуток двох подій: B – «поява білої кулі при першому вийманні» і C – «поява білої кулі при другому вийманні». Події B і C залежні. Тому

$$P(A) = P(B) \cdot P(C/B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1.$$

Приклад 18. Ті ж умови, що й у прикладі 17, але після першого виймання куля повертається в урну, і кулі в урні перемішуються.

Розв'язування. У цьому випадку події B і C незалежні і тому

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0,16.$$

Приклад 19. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому і третьому довідниках відповідно рівні 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти

ймовірності того, що формула міститься: а) тільки в одному довіднику; б) тільки у двох довідниках; в) у всіх трьох довідниках; г) хоча б в одному довіднику.

Розв'язування. Розглянемо події: A – «формула міститься в першому довіднику»; B – «формула міститься в другому довіднику»; C – «формула міститься в третьому довіднику». За умовою задачі $P(A)=0,6$; $P(B)=0,7$; $P(C)=0,8$. Позначимо події: через D – «формула міститься тільки в одному довіднику», через E – «формула міститься тільки в двох довідниках», через F – «формула міститься в усіх трьох довідниках», через G – «формула міститься хоча б в одному довіднику», а через $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ події протилежні подіям A, B, C . Їх ймовірності відповідно рівні $P(\bar{A})=0,4$; $P(\bar{B})=0,3$; $P(\bar{C})=0,2$. Скористаємося теоремами додавання та множення ймовірностей. Тоді:

$$\text{а) } P(D) = P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188;$$

$$\text{б) } P(E) = P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C) = P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) + P(\bar{A} \cdot B \cdot C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452;$$

$$\text{в) } P(F) = P(A \cdot B \cdot C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336;$$

$$\text{г) } P(G) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976.$$

1.3.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Дві події називаються сумісними, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (1.16)$$

Приклад 20. Ймовірність влучання в ціль у першого стрілка 0,8, у другого – 0,9. Стрілки роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність: а) подвійного влучання; б) подвійного промаху; в) хоча б одного влучання; г) тільки одного влучання.

Розв'язування. Нехай подія A – «влучання першого стрілка». Тоді $P(A)=0,8$. Подія B – «влучання другого стрілка» і $P(B)=0,9$. Подія $\bar{A}$ – «промах першого стрілка» і $P(\bar{A})=1-0,8=0,2$. Подія $\bar{B}$ – «промах другого стрілка» і $P(\bar{B})=1-0,9=0,1$. Знайдемо шукані ймовірності:

а) подія $A \cdot B$ – подвійне влучання,

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72 ;$$

б) подія $\bar{A} \cdot \bar{B}$ – подвійний промах,

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 ;$$

в) подія $A + B$ – хоча б одне влучання

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98 ;$$

г) подія $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$ – одне влучання,

$$P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,26 .$$

1.3.4 Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай подія A може відбутися або ні після здійснення однієї з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу подій (вони називаються гіпотезами). Тоді ймовірність $P(A)$ появи події A визначається за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i), \quad (1.17)$$

причому $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Формулою повної ймовірності зазвичай користуються, коли щодо події A , яка нас цікавить, відомо, про умови, за яких вона настає, можна висунути деякі попарно несумісні гіпотези $H_1, H_2, \dots, H_n$. Відомі ймовірності цих гіпотез $P(H_i)$ і умовні ймовірності настання події A , якщо правильна та чи інша гіпотеза $P(A/H_i)$. Формула повної ймовірності дає можливість знайти ймовірність настання події A з урахуванням можливості настання будь-якої з гіпотез.

Іншою найважливішою формулою є формула Байєса. Нехай у результаті випробування відбулася подія A , яка могла наступити тільки разом з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу подій. Необхідно знайти умовну ймовірність $P(H_i / A)$ настання гіпотези H_i за умови, що подія A відбулася. Для знаходження цієї ймовірності використовують формулу Байєса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.18)$$

Зауваження:

1. Ймовірності $P(H_i / A)$ називаються післядослідними (апостеріорними) ймовірностями гіпотез H_i , а ймовірності $P(H_i)$ – додослідними (апріорними) ймовірностями гіпотез H_i . Ці ймовірності розрізняються.

2. Знаменник у правій частині формули дорівнює $P(A)$ – ймовірності, що обчислюється за формулою повної ймовірності.

Формула Байєса саме дозволяє знайти ці апостеріорні ймовірності і тим самим отримати інформацію про умови настання події A .

Приклад 21. На орбітальному комплексі встановлено 6 міні-ЕОМ вітчизняного виробництва та 4 зарубіжні міні-ЕОМ. Ймовірність того, що під час виконання обчислювальних робіт вітчизняна міні-ЕОМ не вийде з ладу, дорівнює 0,85, для закордонної міні-ЕОМ ця ймовірність дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що взята на вивчення міні-ЕОМ не вийде з ладу до закінчення обчислювальних робіт.

Розв’язування. Нехай A – подія, що полягає в тому, що міні-ЕОМ не вийде з ладу. Ця подія може відбутися з однією з гіпотез: H_1 – «взята вітчизняна міні-ЕОМ», H_2 – «взята зарубіжна міні-ЕОМ». Тоді $P(H_1) = 0,6$, $P(H_2) = 0,4$ і за умовою завдання $P(A / H_1) = 0,85$, $P(A / H_2) = 0,95$. За формулою повної ймовірності знайдемо ймовірність:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \\ = 0,6 \cdot 0,85 + 0,4 \cdot 0,95 = 0,89.$$

Приклад 22. У канцелярії працюють 4 секретарки, які відправляють 40%, 10%, 30% і 20% вихідних документів. Ймовірності неправильної адресації документів секретарками відповідно рівні 0,01; 0,04; 0,06; 0,01. Знайти ймовірність того, що неправильно адресований документ відправлений третьою секретаркою.

Розв'язування. Введемо гіпотези H_i – «документ відправила i -а секретарка», $i=1,2,3,4$. Тоді за умовою задачі ймовірності $P(H_1)=0,4$; $P(H_2)=0,1$; $P(H_3)=0,3$; $P(H_4)=0,2$. Позначимо через A подію, що полягає в тому, що документ адресований неправильно. Тоді за умовою завдання умовні ймовірності $P(A/H_1)=0,01$; $P(A/H_2)=0,04$; $P(A/H_3)=0,06$; $P(A/H_4)=0,01$. Знайдемо за формулою Байєса ймовірність $P(H_3/A)$ того, що неправильно адресований документ відправлений третьою секретаркою

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,06}{0,4 \cdot 0,01 + 0,1 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,06 + 0,2 \cdot 0,01} = \\ = \frac{0,018}{0,028} = \frac{9}{14} \approx 0,64.$$

1.3.5 Незалежні випробування. Формула Бернуллі

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись, так і не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються **незалежними щодо події A** . Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них ймовірність настання події A однакова, тобто дорівнює тому самому числу. Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися (з однаковою ймовірністю p) або не відбутися (також з однаковою ймовірністю $q=1-p$). Припускаємо, що ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна, тобто не залежить ні від номера випробування, ні від результатів попередніх випробувань.

Послідовність випробувань, що задовольняють зазначеній умові, називається схемою Бернуллі. Ймовірність $P_n(m)$ того, що в n випробуваннях, що відповідають указаній схемі, подія A з'явиться рівно m раз, визначається за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \quad (1.19)$$

Зауваження. Формула Бернуллі застосовується, якщо $n < 20$. Для $n \geq 20$ обчислювати ймовірності за формулою Бернуллі важко через громіздкість обчислень. При великих n з достатньою точністю формулу (1.19) можна замінити наближеними, а саме: локальною формулою Лапласа або формулою Пуассона.

Приклад 23. Система автоматичного управління (САУ) космічного літального апарата складається з шести основних вузлів, ймовірність виходу з ладу кожного з яких при динамічних перевантаженнях дорівнює 0,3. При виході з ладу трьох або меншої кількості вузлів система автоматичного управління з ладу не виходить. При виході з ладу чотирьох вузлів ймовірність виходу САУ з ладу дорівнює 0,3, при виході з ладу п'яти вузлів – 0,7, при виході з ладу шести вузлів – 1,0. Визначити ймовірність виходу САУ з ладу при динамічних перевантаженнях (подія A).

Розв'язування. Ймовірність виходу з ладу чотирьох, п'яти і шести вузлів обчислимо за формулою Бернуллі ($p=0,3$; $q=1-p=0,7$):

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (0,3)^4 \cdot (0,7)^2 = 15 \cdot 0,0081 \cdot 0,49 \approx 0,0595;$$

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot (0,3)^5 \cdot (0,7)^1 = 6 \cdot 0,00243 \cdot 0,7 \approx 0,0102 ;$$

$$P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \cdot (0,3)^6 \cdot (0,7)^0 = 1 \cdot 0,000729 \cdot 1 \approx 0,0007 .$$

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність виходу з ладу САУ:

$$P(A) = 0,0595 \cdot 0,3 + 0,0102 \cdot 0,7 + 0,0007 \cdot 1 = 0,0257 .$$

Приклад 24. Електронний пристрій змонтовано на 8 напівпровідниках, ймовірність виходу з ладу кожного дорівнює 0,1. Пристрій виходить з ладу, якщо виходять з ладу хоча б будь-які два з 8 напівпровідників. Знайти ймовірність виходу з ладу всього пристрою.

Розв'язування. Припустимо, що вихід з ладу кожного з напівпровідників не залежить від стану працездатності інших. Тоді тут має місце типова схема Бернуллі, причому, ймовірність, що цікавить нас (вихід з ладу будь-якого напівпровідника) дорівнює $p=0,1$. Введемо події: A_i – «вихід з ладу i напівпровідників серед 8 наявних», $i=0,1,2,\dots,8$; B – «вихід з ладу пристрою», $\bar{B}$ – «пристрій працездатний». $B = A_0 + A_1$. Звідси ймовірність події B можна підрахувати таким чином:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A_0) - P(A_1).$$

Ймовірності $P(A_0)$ і $P(A_1)$ подій A_0 , A_1 знаходимо за формулою Бернуллі. Тоді

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(A_0) - P(A_1) = 1 - P_8(0) - P_8(1) = 1 - (1-p)^8 - 8 \cdot p \cdot (1-p)^7 = \\ &= 1 - (0,9)^8 - 8 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^7 = 1 - 0,4305 - 8 \cdot 0,1 \cdot 0,4783 = 0,1869 . \end{aligned}$$

Найімовірніша кількість. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається **найімовірнішим числом** або **найімовірнішою кількістю** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Число m_0 задовольняє нерівностям $P_n(m_0 - 1) \leq P_n(m_0) \leq P_n(m_0 + 1)$ і визначається за формулою:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Якщо $np - q$ неціле, то є одне значення m_0 , якщо $np - q$ ціле, то таких значень є два, які відрізняються між собою на 1.

Приклад 25. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язання. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число: $np - q \leq m_0 \leq np + p$. Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0,6n - 0,4 \leq 40 \leq 0,6n + 0,6; \quad -0,4 - 40 \leq -0,6n \leq 0,6 - 40;$$

$$\frac{39,4}{0,6} \leq n \leq \frac{40,4}{0,6}; \quad 65,7 \leq n \leq 67,3.$$

Задача має два розв'язки: $n=66$ і $n=67$.

1.3.6 Локальна теорема Лапласа

Формулу Бернуллі стає важко застосувати при великих n . Це пов'язано з обчисленням $n!$ У цьому випадку в схемі Бернуллі застосовують локальну теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p , причому $0 < p < 1$. Ймовірність того, що подія A не з'явиться у випробуванні $q=1-p$. Тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі в n незалежних випробуваннях подія A настане рівно m раз, наближено виражається рівністю

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (1.20)$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ і } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\varphi(x)$ – локальна функція Лапласа, значення якої знаходять за Таблицею А1 (див. Додаток А, Частина 2), що складена для $x \geq 0$, так як $\varphi(x)$ – парна функція, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для $x \geq 4$ значення $\varphi(x) = 0$. Формула дає тим більш точний результат, чим більше n . Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n \geq 20$ і $p > 0,1$.

Приклад 26. За даними ВТК заводу, 0,8 всього обсягу мікросхем, що випускаються, не має дефектів. Знайти ймовірність того, що серед узятих навмання 400 мікросхем дефекти будуть мати 80 мікросхем.

Розв’язування. В умові прикладу $n=400$, $m=80$, $p=0,2$, $q=0,8$. Згідно з формулою локальної теореми Лапласа маємо:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

За Таблицею А1 (див. Додаток А, Частина 2) знаходимо, що $\varphi(0) = 0,3989$. Тоді шукана ймовірність

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

1.3.7 Теорема Пуассона

Розглянемо схему Бернуллі з малою ймовірністю p появи події A в одному випробуванні та з великою кількістю n випробувань. Нехай при великому n ймовірність p мала така, що $p \cdot n = \lambda$, де λ – деяке число.

Теорема Пуассона. Нехай $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причому так, що $p \cdot n \rightarrow \lambda$, де $\lambda > 0$. Тоді для будь-якого $m=1, 2, \dots$

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}. \quad (1.21)$$

Через малість значень p розподіл Пуассона називають також законом розподілу рідкісних подій.

Зауваження. Заміна формули Бернуллі на формулу Пуассона при великих n обґрунтована, якщо $p \leq 0,1$ і $n p q \leq 9$. У випадку, коли $p > 0,1$ і $n p q > 9$, застосовують локальну теорему Лапласа.

Приклад 27. Сервісний автоцентр одночасно може обслуговувати 100 автомобілів. Ймовірність того, що протягом однієї хвилини автомобіліст звернеться до автоцентру, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини. звернуться до автоцентру: а) три автомобілісти; б) менше трьох автомобілістів; в) більше трьох автомобілістів; г) хоча б один автомобіліст.

Розв'язування. Оскільки звернення до автоцентру автомобілістів є незалежними подіями, число $n=100$ велике, а ймовірність $p=0,01$ мала ($n p q = 100 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 0,99 \leq 9$ і $p \leq 0,1$), скористаємося формулою Пуассона. Знайдемо $\lambda = p \cdot n = 100 \cdot 0,01 = 1$.

Ймовірність того, що протягом однієї хвилини. звернуться до автоцентру:

а) три автомобілісти (подія A)

$$P(A) = P_{100}(3) = \frac{1 \cdot e^{-1}}{3!} \approx 0,0613;$$

б) менше трьох автомобілістів (подія B)

$$P(B) = P_{100}(m < 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} \approx 0,9197;$$

в) більше трьох автомобілістів (подія C). Події A , B , C утворюють повну групу подій, тому

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,0613 - 0,9197 = 0,0019;$$

г) хоча б один автомобіліст (подія D). Події "до автоцентру звернувся хоча б один автомобіліст" і "до автоцентру ніхто не звернувся" – протилежні, тому

$$P(D) = 1 - P_{100}(0) = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

Приклад 28. Верстат виготовляє за зміну 100000 деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі $p=0,0001$. Знайти ймовірність того, що за зміну буде виготовлено 5 бракованих деталей.

Розв'язування. За умовою $n=100000$, $p=0,0001$, $m=5$. Появи бракованих деталей – події незалежні, n велике, а ймовірність p мала ($q=0,9999$). Знайдемо значення:

$$npq = 100000 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999 = 9,999 > 9.$$

Застосуємо локальну теорему Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5 - 10}{\sqrt{9,999}} \approx -1,58$. За Таблицею А1 (див. Додаток А,

Частина 2) знаходимо, що $\varphi(-1,58) = 0,4429$ Тоді ймовірність

$$P_{100000}(5) = \frac{1}{3,1621} \cdot 0,4429 \approx 0,14.$$

1.3.8 Інтегральна теорема Лапласа

У багатьох задачах потрібно обчислити ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що в серії з n випробувань подія A відбудеться не менше m_1 і не більше m_2 раз. Для обчислення цієї ймовірності застосовують інтегральну теорему Лапласа.

Інтегральна теорема Лапласа. Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p , причому $0 < p < 1$. Ймовірність того, що подія A не з'явиться у випробуванні $q = 1 - p$. Тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться від m_1 до m_2 раз ($m_2 > m_1$), наближено виражається рівністю:

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (1.22)$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \text{ і } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Інтегральна функція Лапласа $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Її значення знаходять з Таблиці А2 (див. Додаток А,

Частина 2), складеної лише для $x \geq 0$. Для $x > 5$ значення функції $\Phi(x) = 0,5$.

Приклад 29. Фабрика випускає 70% продукції першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число виробів першого сорту буде знаходитись між 652 і 760?

Розв'язування. За умовою задачі $n=1000$, $p=0,7$, $q=0,3$, $m_1=652$, $m_2=760$. Шукану ймовірність обчислюємо за формулою $P_{1000}(652, 760) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де

$$x_1 = \frac{652 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \approx -3,31, \quad x_2 = \frac{760 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \approx 4,14$$

За Таблицю А2 (див. Додаток А, Частина 2) знаходимо значення інтегральної функції Лапласа: $\Phi(4,14) = 0,49998$, $\Phi(-3,31) = -0,49981$. Отже, шукана ймовірність $P_{1000}(652, 760) = 0,99979$.

Відхилення відносної частоти від імовірності Якщо в деякій серії з n випробувань подія A настає m раз, то відносна частота її появи $W(A) = \frac{m}{n}$. Тоді нерівність $|W(A) - p| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям: $n \cdot p - n \cdot \varepsilon \leq m \leq n \cdot p + n \cdot \varepsilon$, а з інтегральної теореми Лапласа слідує:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad (1.23)$$

де p – ймовірність появи події A в одному випробуванні; $\varepsilon > 0$ – будь-яке дійсне число.

Приклад 30. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи

нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A – «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A) = p = 0,1$.

Скористаємося формулою: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. З умови

задачі маємо $2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9973$, а $\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,49865$.

Тоді з Таблиці А2 (див. Додаток А, Частина 2) знаходимо

$$\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} = 3 \Rightarrow n = \frac{9pq}{\varepsilon^2} = 900.$$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900} - 0,1\right| < 0,03 \Rightarrow -0,03 < \frac{m}{900} - 0,1 < 0,03 \Rightarrow 0,07 < \frac{m}{900} < 0,13.$$

Маємо $63 < m < 117$. Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

1.4 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Другим важливим об'єктом, який вивчає теорія ймовірностей, є випадкова величина (ВВ). Зупинимося на понятті випадкової величини. Часто результатом досліду є не подія, а величина – число. Багаторазово повторюючи досліди, ми отримуємо різні значення цієї величини, що цікавить нас, незважаючи на незмінний комплекс умов проведення досліду. Прикладами випадкової величини є: кількість дзвінків, що надійшли від абонентів на телефонну станцію протягом деякого інтервалу часу; сума очок, що випали на верхніх гранях при підкиданні двох гральних кісток; дальність польоту снаряда при пострілі з гармати, час безвідмовної роботи електроприладу і т. д. Всі ці значення заздалегідь передбачити неможливо, і в одних і тих же умовах вони будуть різними, тобто вони будуть величинами випадковими.

Таким чином, під випадковою величиною будемо розуміти таку величину, яка в результаті досліду приймає невідоме заздалегідь значення, причому воно від досліду до досліду може змінюватися.

Випадкові величини прийнято позначати великими латинськими буквами $X, Y, Z, U, W, \dots$

Важливою характеристикою будь-якої випадкової величини X є її функція розподілу $F(x)$. Розглянемо подію $A = (X < x)$, де x – будь-яке дійсне число. Імовірнісна міра P будь-якій події A ставить у відповідність число $P(A)$, що визначає ймовірність цієї події. Це число залежить від x і є основною характеристикою випадкової величини.

Функція розподілу $F(x)$ визначається як ймовірність події A : $F(x) = P(X < x)$, тобто $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше деякого x .

Найважливіші властивості функції розподілу такі:

а) $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;

б) $0 \leq F(x) \leq 1$;

в) $F(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$;

г) $F(x \rightarrow \infty) \rightarrow 1$;

д) функція розподілу неперервна зліва: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$.

Функція розподілу $F(x)$ є найбільш повною характеристикою випадкової величини; описати, задати випадкову величину X – означає задати її функцію розподілу $F(x)$.

Якщо відома функція розподілу $F(x)$, то ймовірність потрапляння випадкової величини X в напіввідкритий проміжок $[a, b)$ знаходиться за формулою: $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

1.4.1 Дискретні випадкові величини

Випадкова величина називається дискретною (ДВВ), якщо всі її можливі значення ізольовані одне від одного і їх можна занумерувати.

Можливі значення випадкових величин, наприклад, X, Y , позначають відповідними малими буквами $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots$

y_m . Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, рівне x_i , позначають $P(X=x_i)=p_i$.

Законом розподілу (рядом розподілу) дискретної випадкової величини X називається взаємно однозначна відповідність між можливими її значеннями x_i і ймовірностями $p_i=P(X=x_i)$, з якими ці значення приймаються. Найчастіше закон або ряд розподілу зображують таблицею:

X	x_1	x_2		x_n
p	p_1	p_2		p_n

Тут $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, а $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Для дискретної випадкової величини функція розподілу знаходиться за формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \quad (1.24)$$

Якщо можливі значення ВВ X належать кінцевому відріzkу $[a; b]$, то $F(x)=0$ при $x \leq a$ і $F(x)=1$ при $x > b$. Величина $b-a$ називається розмахом ВВ X .

Для того, щоб надати закону більш наочний вигляд, вдаються до його графічного зображення: по осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини X , а по осі ординат – їх ймовірності. Точки (x_i, p_i) , $i=1, 2, \dots, n$ з'єднують відрізками прямих. Отриману фігуру називають багатокутником розподілу.

1.4.1.1 Числові характеристики дискретних випадкових величин

1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків можливих значень випадкової величини на їх ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (1.25)$$

Відзначимо, що при великому числі дослідів середнє арифметичне значень випадкової величини, що спостерігалися, наближається до її математичного сподівання.

Зауваження. Математичне сподівання випадкової величини є величина не випадкова. Математичне сподівання зберігає розмірність випадкової величини. Математичне сподівання ВВ є аналог центру мас системи матеріальних точок.

Основні властивості математичного сподівання:

а) математичне сподівання постійної величини дорівнює постійній, тобто, якщо $C = \text{const}$, то $M(C) = C$;

б) постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

в) математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин, тобто $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

г) математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X та Y – незалежні випадкові величини;

д) якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і дорівнює p , тоді математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях: $M(X) = n \cdot p$.

Для будь-якої ВВ X випадкова величина $X^0 = X - M(X)$ називається центрованою ВВ або відхиленням.

2. Дисперсія дискретної випадкової величини

Нехай X – випадкова величина. Очевидно, що математичне сподівання відхилення $X - M(X)$ дорівнює нулю: $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсією (розсіюванням) $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = M(X^2) - (M(X))^2 \quad (1.26)$$

Для дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2 \quad (1.27)$$

Основні властивості дисперсії:

а) $D(X) \geq 0$;

б) дисперсія постійної величини дорівнює нулю, тобто $D(C) = 0$;

в) постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату, тобто $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

г) дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;

д) якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і дорівнює p , тоді дисперсія $D(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях: $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

Наслідок: $D(C + X) = D(X)$, де $C = \text{const}$.

Зауваження. Дисперсія $D(X)$ випадкової величини має розмірність квадрата одиниці розмірності випадкової величини X .

3. Середнє квадратичне відхилення.

Вводять показник розсіювання випадкової величини, що має ту ж розмірність, що і випадкова величина. Для цього добувають квадратний корінь з дисперсії. Отриману величину називають середнім квадратичним відхиленням (стандартом) і позначають:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (1.28)$$

Відзначимо, що середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

Якщо математичне сподівання ВВ X є характеристикою її положення, середнім значенням, біля якого групуються значення ВВ, то дисперсія ВВ X і її середнє квадратичне відхилення є характеристиками розсіювання ВВ біля її математичного сподівання.

Якщо декілька випадкових величин мають однакові розподіли, то їх числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія і т. д.) однакові.

4. Мододою M_0 дискретної ВВ X називається її найбільш ймовірне значення, тобто те значення, для якого ймовірність p_i максимальна.

5. Медіаною M_e ВВ X називається таке значення випадкової величини, для якого $P(X < M_e) = P(X \geq M_e) = 0,5$.

У разі симетричного розподілу ВВ мода і медіана співпадають з її математичним сподіванням.

6. Початковим моментом v_k порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k :

$$v_k = M(X^k), \quad \text{зокрема, } v_1 = M(X), \quad v_2 = M(X^2).$$

Користуючись цими позначеннями формулу для обчислення дисперсії можна записати так: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = v_2 - (v_1)^2$.

7. Центральним моментом μ_k порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\left((X - M(X))^k\right),$$

зокрема, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$.

Неважко вивести співвідношення:

$$\mu_2 = v_2 - (v_1)^2, \quad \mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2(v_1)^3,$$

$$\mu_4 = v_4 - 4 v_3 v_1 + 6 v_2 (v_1)^2 - 3 (v_1)^4.$$

Приклад 31. Знайти закон розподілу дискретної ВВ X , яка приймає тільки два значення: x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$). Ймовірність значення x_1 дорівнює $p_1 = 0,1$, математичне сподівання $M(X) = 3,9$ і дисперсія $D(X) = 0,09$.

Розв'язування. За означенням:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 \text{ і } D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M(X))^2,$$

де $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,1 = 0,9$.

Звідси

$$\begin{cases} 0,1 \cdot x_1 + 0,9 \cdot x_2 = 3,9 \\ 0,1 \cdot x_1^2 + 0,9 \cdot x_2^2 = 15,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 9 \cdot x_2 = 39 \\ x_1^2 + 9 \cdot x_2^2 = 153 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 39 - 9 \cdot x_2 \\ (39 - 9 \cdot x_2)^2 + 9 \cdot x_2^2 = 153 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_2^2 - 39x_2 + 76 = 0 \\ x_2^{(1)} = 4; \quad x_2^{(2)} = 3,8 \end{cases}$$

і $x_1^{(1)} = 3$; $x_1^{(2)} = 4,8$. За умовою $x_1 < x_2$, тому $x_1 = 3$; $x_2 = 4$. Закон розподілу дискретної ВВ X буде таким:

X	3	4
p	0,1	0,9

Приклад 32. Баскетболіст кидає м'яч в кошик до першого влучання, але робить не більше 4-х кидків. Побудувати ряд розподілу ДВВ X – числа кидків по цілі, якщо ймовірність влучання при одному кидку дорівнює 0,6. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік. Знайти математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що кількість кидків буде не менше трьох.

Розв'язування. Дискретна випадкова величина X може приймати наступні значення: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. Введемо події:

$A_i = \{\text{Влучання в корзину при } i - \text{му кидку}\},$

$\overline{A_i} = \{\text{Проміх при } i - \text{му кидку}\}, (i = 1, 2, 3, 4).$

Ймовірності цих подій: $P(A_i)=0,6$, $P(\overline{A_i})=0,4$. Знайдемо ймовірності, з якими ВВ X набуває своїх значень:

$X = x_1 = 1$ – влучання при першому кидку.

Тоді $P(X=1) = P(A_1) = 0,6$.

$X = x_2 = 2$ – влучання при другому кидку.

Тоді $P(X=2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0,24$.

$X = x_3 = 3$ – влучання при третьому кидку.

Тоді $P(X=3) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = 0,096$.

$X = x_4 = 4$ – промахнувся три рази, незалежно від того, влучив він чи ні в четвертий раз.

Тоді $P(X=4) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,064$.

Отже, ряд розподілу випадкової величини X буде:

X	1	2	3	4
p	0,6	0,24	0,096	0,064

Функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,6, & 1 < x \leq 2 \\ 0,84, & 2 < x \leq 3 \\ 0,936, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Графік функції розподілу:

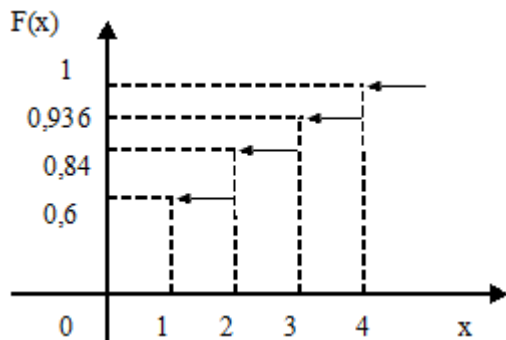


Рисунок 1.1

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію за формулами для ДВВ:

$$M(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,096 + 4 \cdot 0,064 = 1,624.$$

$$D(X) = 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,096 + 16 \cdot 0,064 - (1,624)^2 = 0,8106.$$

Ймовірність того, що кількість кидків буде не менше трьох, дорівнює

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,096 + 0,064 = 0,16.$$

Приклад 33. Зроблено два високо ризикові внески: 10 тис. грн. у компанію А і 15 тис. грн. – у компанію В. Компанія А обіцяє 50% річних, але може «збанкрутувати» з ймовірністю 0,2. Компанія В обіцяє 40% річних, але може «збанкрутувати» з ймовірністю 0,15. Скласти закон розподілу випадкової величини – загальної суми прибутку (збитку), отриманого від двох компаній через рік і знайти математичне сподівання.

Розв’язування. Нехай випадкова величина X – загальна сума прибутку (збитку) від двох компаній через рік. Випадкова величина X може приймати значення: $x_1 = -25, x_2 = -10, x_3 = -4, x_4 = 11$. Тоді $X = x_1 = -25$ – обидві компанії «збанкрутували»; $X = x_2 = -10$ – компанія А виплатила 5 тис. грн. (50% річних), компанія В «збанкрутувала»; $X = x_3 = -4$ – компанія А «збанкрутувала», компанія В виплатила 6 тис. грн. (40% річних); $X = x_4 = 11$ –

компанія А виплатила 5 тис. грн. (50% річних) і компанія В – 6 тис. грн. (40% річних)).

Знайдемо ймовірності, з якими ВВ X набуває своїх значень:

$$P(X = -25) = 0,2 \cdot 0,15 = 0,03, \quad P(X = -10) = 0,8 \cdot 0,15 = 0,12,$$

$$P(X = -4) = 0,2 \cdot 0,85 = 0,17, \quad P(X = 11) = 0,8 \cdot 0,85 = 0,68.$$

Закон розподілу випадкової величини X :

X	-25	-10	-4	11
p	0,03	0,12	0,17	0,68

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 0,03 + 0,12 + 0,17 + 0,68 = 1.$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(X) = -25 \cdot 0,03 + (-10) \cdot 0,12 + (-4) \cdot 0,17 + 11 \cdot 0,68 = 4,85 \text{ (тис.грн.)}$$

1.4.1.2 Закони розподілу дискретних випадкових величин

1. Біноміальний закон розподілу. Нехай у кожному з n незалежних випробувань подія A з'являється з ймовірністю p . Тоді випадкова величина X , що означає число появ події A в n незалежних випробуваннях (схема Бернуллі), може приймати значення $0, 1, 2, \dots, n$ з ймовірностями

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (1.29)$$

Такий розподіл ВВ X називається біноміальним. Числові характеристики розподілу: $M(X) = n \cdot p$, а $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

2. Розподіл Пуассона. Якщо число випробувань n велике, а ймовірність p появи події A мала, то використовують наближену формулу

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad (1.30)$$

де m – число появ події A в n незалежних випробуваннях; $\lambda = n \cdot p$.
Такий розподіл ВВ називається *розподілом Пуассона*. Числові характеристики розподілу: $M(X) = \lambda$ і $D(X) = \lambda$.

3. Потоком подій називається послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу. Потоки можуть мати властивості: стаціонарності (в цьому випадку ймовірність появи m подій за проміжок часу тривалості t є функція, що залежить тільки від m і t), відсутність післядії, ординарності. Найпростішим (пуассонівським) потоком подій називають потік подій, що має перераховані вище властивості. Інтенсивністю потоку λ називають середнє число подій, які з'являються в одиницю часу. Ймовірність настання m подій за час t визначається формулою Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}. \quad (1.31)$$

4. Геометричний розподіл. Позначимо через X дискретну ВВ – число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A . Нехай у перших $m-1$ випробуваннях подія A не відбулася, а в m -му випробуванні сталася. Подія A з'являється у випробуванні з ймовірністю p . Імовірність того, що подія A у випробуванні не з'явиться – q . Цей розподіл ВВ називають *геометричним*. Ймовірність цієї події за теоремою множення ймовірностей незалежних подій розраховують за формулою:

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p. \quad (1.32)$$

Числові характеристики розподілу: $M(X) = \frac{1}{p}$ і $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

5. Гіпергеометричний розподіл. Нехай у партії з N виробів є M стандартних ($M < N$). З партії випадково відбирають n виробів. Знайдемо ймовірність того, що серед n виробів рівно m стандартних

$$P(X=m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \quad (1.33)$$

Такий розподіл ймовірностей називають *гіпергеометричним*. Числові характеристики розподілу:

$$M(X) = \frac{M \cdot n}{N} \quad \text{і} \quad D(X) = \frac{n \cdot M \cdot (N-M) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}.$$

Приклад 34. Стрілець робить чотири постріли по мішені. Випадкова величина X – кількість влучань. Вважаючи, що ймовірність влучання при одному пострілі дорівнює 0,7, знайти ряд розподілу і ймовірність того, що влучань буде більше, ніж промахів.

Розв’язування. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. Вона може набувати значень: 0, 1, 2, 3, 4.

Знайдемо ймовірності, з якими вона набуває цих значень:

$$p_1 = P_4(X=0) = C_4^0 (0,7)^0 (0,3)^4 = 0,0081,$$

$$p_2 = P_4(X=1) = C_4^1 (0,7)^1 (0,3)^3 = 0,0756,$$

$$p_3 = P_4(X=2) = C_4^2 (0,7)^2 (0,3)^2 = 0,2646,$$

$$p_4 = P_4(X=3) = C_4^3 (0,7)^3 (0,3)^1 = 0,4116,$$

$$p_5 = P_4(X=4) = C_4^4 (0,7)^4 (0,3)^0 = 0,2401.$$

Ряд розподілу:

X	0	1	2	3	4
p	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Ймовірність того, що влучань буде більше, ніж промахів (подія A):

$$P(A) = P_4(X \geq 3) = P_4(X=3) + P_4(X=4) = 0,4116 + 0,2401 = 0,6517.$$

1.4.2 Неперервні випадкові величини

Випадкову величину називають неперервною (НВВ), якщо вона може приймати будь-які значення з деякого проміжку (скінченного

або нескінченного). Для неперервної випадкової величини X функція розподілу $F(x) = P(X < x)$ неперервна.

Область визначення функції розподілу – множина всіх дійсних чисел, а область значень – відрізок $[0; 1]$.

$F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 \geq x_1$.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Якщо можливі значення НВВ X належать інтервалу $[a; b]$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ і $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Якщо можливі значення НВВ X розташовані на всій числовій осі, то справедливі граничні співвідношення:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Для неперервних випадкових величин щільність розподілу ймовірностей є основною характеристикою. Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X називають похідну від її функції розподілу: $f(x) = F'(x)$.

Розглянемо основні властивості щільності розподілу ймовірностей:

а) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

б) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$;

в) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$;

г) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$.

1.4.2.1 Числові характеристики неперервних випадкових величин

1. Математичним сподіванням $M(X)$ неперервної випадкової величини X із щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ називається величина

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (1.34)$$

2. Дисперсією $D(X)$ неперервної випадкової величини X називається $M\left((X - M(X))^2\right)$, де різниця $X - M(X)$ називається відхиленням ВВ X від її математичного сподівання. Дисперсія обчислюється за формулою

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \quad (1.35)$$

Зауваження. Властивості $M(X)$ і $D(X)$ для НВВ аналогічні відповідним властивостям для ДВВ.

3. Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ неперервної випадкової величини обчислюється як

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (1.36)$$

4. Мода M_0 неперервної випадкової величини X – це точка максимуму щільності розподілу $f(x)$. Розподіл називається унімодальним, якщо він має єдину моду (біноміальний, нормальний, показниковий тощо). Розподіл називається полімодальним, якщо він має більше однієї моди (рівномірний тощо). Модой неперервної випадкової величини є точка максимуму щільності розподілу.

5. Медіаною M_e ВВ X називається таке значення випадкової величини, для якого $P(X < M_e) = P(X \geq M_e) = 0,5$. Геометрично медіана – це точка на осі Ox , для якої площі під графіком щільності розподілу, що лежать ліворуч і праворуч від неї, однакові і дорівнюють 0,5.

Зауваження. Якщо щільність розподілу симетрична щодо прямої $x = a$ і розподіл одномодальний, то математичне сподівання, медіана і мода збігаються між собою.

6. Початковим моментом порядку k неперервної випадкової величини X називається число v_k , яке дорівнює математичному сподіванню випадкової величини X^k і обчислюється за формулою

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx. \quad (1.37)$$

Якщо $k=1$, то $v_1 = M(X)$.

7. Центральним моментом порядку k неперервної випадкової величини називається число μ_k , яке обчислюється за формулою:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x) dx \quad (1.38)$$

Якщо $k=1$, то $\mu_1 = 0$. Якщо $k=2$, то $\mu_2 = D(X)$.

Приклад 35. Випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4,5x - 6, & x \in [2; 4], \\ 0, & x \notin [2; 4] \end{cases}.$$

Знайти параметр a , моду, медіану і математичне сподівання.

Розв'язування. Для знаходження параметра a використовуємо властивість щільності розподілу ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Обчислюємо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_2^4 (ax^2 + 4,5x - 6) dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{9x^2}{4} - 6x \right) \Big|_2^4 = \frac{56a}{3} + 15.$$

Тоді, застосовуючи наведену формулу, отримаємо $\frac{56a}{3} + 15 = 1$, звідки $a = -0,75$. Для знаходження моди M_0 знайдемо точки максимуму $f(x)$. Маємо для $x \in [2; 4]$ $f'(x) = 2ax + 4,5 = -1,5x + 4,5$. Похідна

$f'(x)=0$ лише при $x=3$. Так як знак $f'(x)$ змінюється з "+" на "-" при переході через точку $x=3$, то $x=3$ – точка максимуму. Тому мода $M_0=3$. Щоб знайти медіану M_e , розв'яжемо рівняння $P(X < t)=0,5$. Для цього попередньо обчислимо ймовірність $P(X < t)$:

$$\begin{aligned} P(X < t) &= \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_2^t (-0,75x^2 + 4,5x - 6) dx = \\ &= (-0,25x^3 + 2,25x^2 - 6x) \Big|_2^t = -0,25t^3 + 2,25t^2 - 6t + 5. \end{aligned}$$

Отримаємо рівняння для визначення t :

$$-0,25t^3 + 2,25t^2 - 6t + 5 = 0,5 \Rightarrow t^3 - 9t^2 + 24t - 18 = 0.$$

Методом підбору знайдемо корінь рівняння $t=3$. Тоді рівняння можна представити у вигляді $(t-3) \cdot (t^2 - 6t + 6) = 0$. Квадратний тричлен $t^2 - 6t + 6$ не має коренів у проміжку $[2; 4]$, тому вихідне рівняння має єдиний корінь $t=3$ на цьому проміжку. Тому медіана $M_e=3$. Математичне сподівання знаходимо за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_2^4 x (-0,75x^2 + 4,5x - 6) dx = \left(-\frac{3x^4}{16} + 1,5x^3 - 3x^2 \right) \Big|_2^4 = 3$$

Приклад 36. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 8}{19}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Знайти: а) $f(x)$, б) $P(2,5 < X < 3)$, в) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язування. Знайдемо щільність розподілу ймовірностей $f(x)$.

а) $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{3x^2}{19}, & 2 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx;$$

$$P(2,5 < X < 3) = \int_{2,5}^3 \frac{3x^2}{19} dx = \frac{3}{19} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_{2,5}^3 = \frac{1}{19} (3^3 - 2,5^3) = 0,599;$$

$$\text{в) } M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - [M(X)]^2;$$

$$M(X) = \int_2^3 x \cdot \frac{3x^2}{19} dx = \frac{3}{19} \frac{x^4}{4} \bigg|_2^3 = \frac{3}{76} (3^4 - 2^4) = \frac{3}{76} (81 - 16) = 2,566;$$

$$D(X) = \int_2^3 x^2 \cdot \frac{3x^2}{19} dx - 2,566^2 = \frac{3}{19} \frac{x^5}{5} \bigg|_2^3 - 2,566^2 = 0,079;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,079} = 0,28.$$

1.4.2.2 Закони розподілу неперервних випадкових величин

1. Рівномірний розподіл. Розподіл ймовірностей називається рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення неперервної випадкової величини, щільність розподілу ймовірностей зберігає постійне значення, а поза цим інтервалом вона дорівнює нулю. Для рівномірно розподіленої випадкової величини X , можливі значення якої належать відріzk $[a; b]$, щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, \quad x > b \end{cases}. \quad (1.39)$$

Функція розподілу $F(x)$ рівномірно розподіленої НВВ X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}. \quad (1.40)$$

Числові характеристики: $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$,

$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$. Ймовірність попадання випадкової величини X на

будь-який інтервал, наприклад, інтервал $(\alpha; \beta) \subset [a; b]$ обчислюється

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Приклад 37. Інтервал руху автобуса дорівнює 15 хвилинам. Яка ймовірність того, що пасажир на зупинці буде чекати автобус не більше 5 хвилин?

Розв'язування. Випадкова величина X – це час очікування автобуса, має рівномірний розподіл на відрізку $[0; 15]$. Її функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{15}, & 0 \leq x \leq 15 \\ 1, & x > 15 \end{cases}.$$

Ймовірність того, що пасажир на зупинці буде чекати автобус не більше 5 хвилин:

$$P(0 < X < 5) = F(5) - F(0) = \frac{5}{15} - \frac{0}{15} = \frac{1}{3} \text{ або } P(0 < X < 5) = \frac{5-0}{15-0} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 38. Неперервна ВВ X має рівномірний розподіл і задана щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\gamma; 2,4] \\ 0, & x \notin [\gamma; 2,4] \end{cases}.$$

Знайти: а) параметр γ , б) функцію розподілу $F(x)$, в) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$, г) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$, д) визначити $P(1,5 < X < 2)$.

Розв'язування. а) визначимо параметр γ . Відомо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{\gamma}^{2,4} 1 \cdot dx = 1, \quad x \Big|_{\gamma}^{2,4} = 2 \Rightarrow 2,4 - \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1,4.$$

$$\text{Тоді } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,4; 2,4] \\ 0, & x \notin [1,4; 2,4] \end{cases};$$

б) функція розподілу $F(x)$ визначається формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{Якщо } x < 1,4, \text{ то } f(x) = 0 \text{ і } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{Якщо } 1,4 \leq x \leq 2,4, \text{ то } F(x) = \int_{-\infty}^{1,4} 0 dx + \int_{1,4}^x 1 dx = 0 + x \Big|_{1,4}^x = x - 1,4.$$

Якщо $x > 2,4$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1,4} 0 dx + \int_{1,4}^{2,4} 1 dx + \int_{2,4}^x 0 dx = 0 + x \Big|_{1,4}^{2,4} + 0 = 2,4 - 1,4 = 1.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1,4 \\ x - 1,4, & 1,4 \leq x \leq 2,4 \\ 1, & x > 2,4 \end{cases};$$

в) числові характеристики:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{1,4}^{2,4} x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{1,4}^{2,4} = (2,4^2 - 1,4^2) / 2 = 3,8 / 2 = 1,9$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_{1,4}^{2,4} x^2 dx - (1,9)^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_{1,4}^{2,4} - 3,61 =$$

$$= (2,4^3 - 1,4^3) / 3 - 3,61 \approx 3,6933 - 3,61 = 0,0833,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,0833} \approx 0,2886;$$

г) графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ мають вигляд:

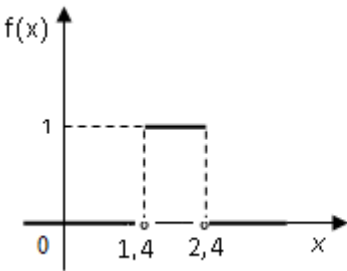


Рисунок 1.2

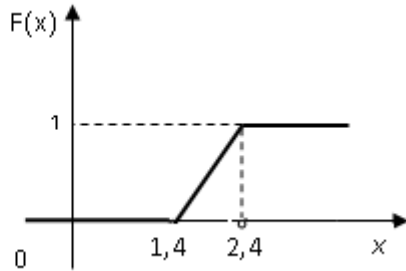


Рисунок 1.3

2. Експоненціальний розподіл. Неперервна випадкова величина X має експоненціальний закон розподілу, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (1.41)$$

де $\lambda > 0$ називається параметром розподілу.

Функція розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (1.42)$$

Числові характеристики: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(a; b)$ розраховують за формулою: $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Якщо T – час безвідмовної роботи механізму, то $F(t) = P(T < t)$ виражає ймовірність виходу з ладу механізму за час t . Тоді $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ – це ймовірність безвідмовної роботи механізму за час t . Функція $R(t)$ називається функцією надійності. Так як при експоненціальному законі розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, то $R(t) = e^{-\lambda t}$, де λ – інтенсивність відмов (число відмов в одиницю часу).

Приклад 39. Встановлено, що час T горіння електричної лампочки є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом. Вважаючи, що середнє значення цієї величини дорівнює 6 місяцям, знайти ймовірність того, що лампочка буде горіти протягом року.

Розв'язування. $M(X) = \frac{1}{\lambda} = 6$, $\lambda = \frac{1}{6}$.

Тому, $P(T > 12) = P(12 < T < \infty) = e^{-\frac{12}{6}} - e^{-\infty} = e^{-2} = 0,1353$.

3. Нормальний розподіл (розподіл Гауса). Неперервна випадкова величина X має нормальний закон розподілу, якщо її функція щільності розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.43)$$

де $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$ – параметри розподілу. Графік функції $f(x)$ називають нормальною кривою або кривою Гауса. Вона має такі

властивості: а) $f(x) > 0$; б) крива симетрична щодо прямої $x=a$; максимум досягається при $x=a$ і рівний $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; в) при $x \rightarrow \pm\infty$ крива наближається до осі Ox ; г) крива опукла вгору при $x \in (a-\sigma; a+\sigma)$ і опукла униз при $x \in (-\infty; a-\sigma) \cup (a+\sigma; +\infty)$; д) зростання математичного сподівання a приводить до зсуву нормальної кривої вздовж осі Ox вправо, спадання – до зсуву вліво без змін форми. З зростанням σ нормальна крива стає більш пологою, тобто максимум функції спадає, а при зменшенні σ нормальна крива стає більш гостровершинною, тобто максимум функції зростає.

Побудуємо графік $f(x)$ при $a=0$ і трьох можливих значеннях середнього квадратичного відхилення $\sigma=1$, $\sigma=2$ і $\sigma=7$. Як видно, при збільшенні значення середнього квадратичного відхилення графік стає більш пологим, а максимальне значення зменшується.

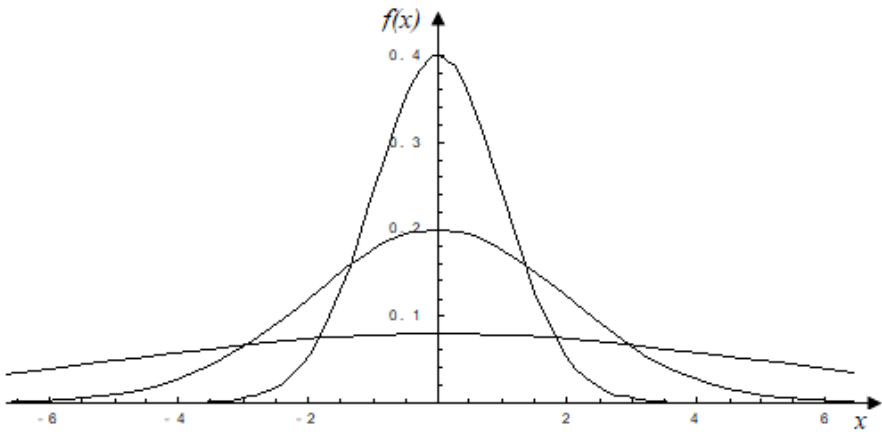


Рисунок 1.4

Функція нормального розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1.44)$$

Числові характеристики: математичне сподівання $M(X)=a$; дисперсія $D(X)=\sigma^2$; σ – середнє квадратичне відхилення. Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X на відрізок $[\alpha; \beta]$ визначається за формулою:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \quad (1.45)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа. Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал, симетричний щодо математичного сподівання, визначається формулою:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (1.46)$$

Якщо, зокрема, $\delta = 3\sigma$, то $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973$, тобто нормально розподілена ВВ X відхиляється від свого математичного сподівання a , як правило, менш ніж на 3σ (правило «трьох сигм»). (Слова «як правило» означають, що лише в 0,27% випадках відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання може перевищити 3σ).

Нормованим називають нормальний розподіл з параметрами: $a=0$ і $\sigma=1$. Для нормованого нормального розподілу функція щільності розподілу ймовірностей і функція розподілу відповідно рівні:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ і } F_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (1.47)$$

де $F_o(x) = 0,5 + \Phi(x)$, $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа, значення якої знаходять за Таблицею А2 (див. Додаток А, Частина 2).

Приклад 40. Довжина деталі є нормально розподіленою випадковою величиною X з математичним сподіванням 40 мм і середнім квадратичним відхиленням 3 мм. Знайти: а) ймовірність того, що довжина довільно взятої деталі буде більше 34 мм і менше 43 мм; б) ймовірність того, що довжина деталі відхилиться від її математичного сподівання не більше ніж на 1,5 мм.

Розв'язування. а) нехай випадкова величина X – довжина деталі. За умовою задачі вона рівномірно розподілена. Якщо її функція щільності розподілу ймовірностей $f(x)$, то ймовірність того, що X прийме значення, які належать $[\alpha; \beta]$, визначається за формулою:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Ймовірність виконання строгих нерівностей $\alpha < X < \beta$ визначається тією ж формулою. Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

За умовою задачі $a = 40$, $\sigma = 3$, $\alpha = 34$, $\beta = 43$. Тоді

$$P(34 < X < 43) = \Phi\left(\frac{43 - 40}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34 - 40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2)$$

За Таблицею А2 (див. Додаток А, Частина 2) знаходимо: $\Phi(2) = 0,4772$, $\Phi(1) = 0,3413$. $P(34 < X < 43) = 0,8185$.

б) За умовою задачі $a - \delta < X < a + \delta$, де $a = 40$; $\delta = 1,5$.

Підставимо $\alpha = a - \delta$ та $\beta = a + \delta$. Маємо

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

а саме, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Тому

$$P(|X - 40| < 1,5) = 2\Phi\left(\frac{1,5}{3}\right) = 2\Phi(0,5).$$

За Таблицею А2 (див. Додаток А, Частина 2) знаходимо: $\Phi(0,5) = 0,1915$.

Тоді $P(|X - 40| < 1,5) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383$.

Приклад 41. Функція щільності розподілу ймовірностей $f(x)$

нормально розподіленої ВВ X має вигляд: $f(x) = \gamma e^{-3x^2 - 3x + 2}$.
Визначити: а) числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;
б) параметр γ ; в) функцію розподілу $F(x)$; г) записати функцію щільності розподілу ймовірностей в стандартному вигляді і побудувати її графік; д) знайти $P(-0,5 < X < 1,5)$.

Розв'язування. а) НВВ X розподілена нормально, якщо функція щільності розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де $a = M(X)$ – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення. Виділимо повний квадрат у квадратному тричленні:

$$\begin{aligned} -3x^2 - 3x + 2 &= -\left(3x^2 + 3x - 2\right) = -3\left(x^2 + x - \frac{2}{3}\right) = -3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right] = \\ &= -3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}\right] = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Записуємо $f(x)$ у вигляді:

$$f(x) = \gamma e^{-3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \gamma e^{-3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \cdot e^{\frac{11}{4}} = \gamma e^{\frac{11}{4}} \cdot e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{1/3}}.$$

Отже, $M(X) = a = -\frac{1}{2}$, а $2\sigma^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{6}$, $\sigma = 0,4082$.

б) Знайдемо параметр γ :

$$\gamma \cdot e^{\frac{11}{4}} = \frac{1}{0,4082 \cdot \sqrt{2\pi}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{e^{\frac{11}{4}} \cdot 0,4082 \cdot \sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{16,0056} \approx 0,0625.$$

в) Функція розподілу $F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x+1/2}{0,4082}\right)$,

де функція щільності розподілу ймовірностей в стандартному вигляді:

$$f(x) = 0,978 \cdot e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{0,33}}.$$

Графік функції щільності розподілу ймовірностей цієї випадкової величини

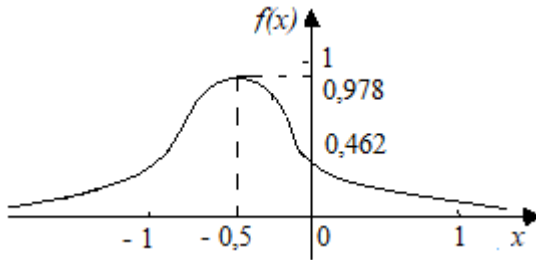


Рисунок 1.5

$$\begin{aligned} \text{д) } P(-0,5 < X < 1,5) &= \Phi\left(\frac{1,5 + 0,5}{0,4082}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5 + 0,5}{0,4082}\right) = \\ &= \Phi(4,8996) - \Phi(0) = 0,499997 - 0 = 0,499997. \end{aligned}$$

1.5 ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

На практиці часто розглядають ВВ, які є, в свою чергу, сумами великої кількості випадкових величин. Обчислення безпосередньо ймовірностей розподілу має певні труднощі. Однак при дуже великій кількості випадкових явищ середній їх результат практично не є випадковим і може бути передбачений з великим ступенем певності. Наприклад, якщо в кожному досліді ВВ X приймає деяке значення, то при зростанні $n \rightarrow \infty$ середнє арифметичне спостережених значень ВВ X стає стійким (збігається) до математичного сподівання ВВ X .

Розглянемо послідовність ВВ $X_1, X_2, \dots, X_n$, яка збігається за ймовірністю до ВВ X , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ ймовірність нерівності $|X_n - X| < \varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$ прямує до одиниці.

Умови, за яких сукупний результат впливу випадкових факторів практично перестає бути випадковим, описуються в декількох

теоремах, які носять загальну назву закону великих чисел. Якщо ВВ X має скінчену дисперсію $D(X)$ і математичне сподівання $M(X)$, то за будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливі:

Лема. Якщо випадкова величина X невід'ємна ($X \geq 0$) і $M(X) < \infty$, то

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}. \quad (1.48)$$

Нерівність Чебишова. Імовірність того, що відхилення ВВ X від її математичного сподівання (середнього значення) за абсолютною величиною менше додатного числа ε , не менше, ніж $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (1.49)$$

Зауваження. Імовірність того, що відхилення ВВ X від її математичного сподівання за абсолютною величиною не менше додатного числа ε , не більше, ніж $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (1.50)$$

Нерівність Чебишова корисна лише при відносно великих ε , оскільки при малих ε дає грубі оцінки або тривіальний результат.

Теорема Чебишова. Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – послідовність попарно незалежних ВВ з математичними сподіваннями $M(X_i)$ і дисперсіями $D(X_i)$, які обмежені однією і тією ж постійною: $D(X_i) \leq C$, то для достатньо великого n і для довільного малого $\varepsilon > 0$, справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad (1.51)$$

Середнє арифметичне достатньо великої кількості незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, дисперсії яких рівномірно обмежені, втрачає характер випадкової величини.

Приклад 42. Для визначення середньої врожайності поля в 5000 га запропоновано взяти на вибір по 1 м^2 з кожного гектара площі і точно підрахувати їх урожайність. Оцінити ймовірність того, що середня вибіркова врожайність відрізняється від середньої врожайності загальної площі не більше, ніж на 0,2 ц, якщо припустити, що середнє квадратичне відхилення врожайності на кожному га не перевищує 5 ц.

Розв'язування. Використовуємо нерівність Чебишова:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ де за умовою завдання } \varepsilon = 0,2. X -$$

середня врожайність загальної площі; $M(X) = a$ – вибіркова середня врожайність. Обчислимо середнє квадратичне відхилення σ для загальної площі. Враховуємо, що середнє арифметичне n взаємно незалежних і однаково розподілених випадкових величин має:
а) середнє значення – те ж саме, що й кожна зі складових величин;
б) середнє квадратичне відхилення – у $\sqrt{n}$ разів менше, ніж кожна зі складових величин.

$$\text{Маємо: } \sigma = \frac{5}{\sqrt{5000}} = \frac{1}{10\sqrt{2}}; \quad D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{200} = 0,005. \quad \text{Тоді}$$

отримаємо

$$P(|X - a| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,005}{(0,2)^2} = 1 - \frac{0,005}{0,04} = 1 - 0,125 = 0,875.$$

1.6. СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Спільний розгляд декількох ВВ приводить до системи випадкових величин. Умовно систему випадкових величин $X, Y, \dots, W$ записують у вигляді точки $(X, Y, \dots, W)$ простору відповідної вимірності. Наприклад, складається модель витрат випадково вибраної сім'ї на одяг, взуття, харчування, транспорт і т.д. Ці витрати є випадковими величинами на одному просторі елементарних подій.

Сукупність двох випадкових величин (X, Y) , що розглядаються разом, називається системою двох випадкових величин або двовірним випадковим вектором. Систему двох випадкових величин можна розглядати як випадкову точку $M(X, Y)$ на площині xOy .

Функцією спільного розподілу $F(x, y)$ системи двох випадкових величин (X, Y) називається ймовірність одночасного виконання двох нерівностей: $X < x, Y < y$, тобто $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$. Це ймовірність того, що ВВ (X, Y) потрапить у нескінченний квадрат з вершиною (x, y) , розташований лівіше і нижче цієї вершини. Властивості функції $F(x, y)$:

а) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;

б) $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ для $x_1 \leq x_2$ і $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ для $y_1 \leq y_2$;

в) $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(\infty, \infty) = 1$;

г) $F(\infty, y) = F_2(y)$ і $F(x, \infty) = F_1(x)$, де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ функції розподілу одномірних випадкових величин, тобто по багатомірному розподілу можна відновити одномірний розподіл.

Ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник $ABCD$: $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, y_2)$, $C(x_2, y_2)$, $D(x_2, y_1)$ обчислюється за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Випадкові величини X і Y називаються незалежними, якщо їх спільна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу одномірних ВВ X і Y : $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

1.6.1 Система дискретних випадкових величин (X, Y)

Системою дискретних випадкових величин (ВВ) (X, Y) називають систему випадкових величин, складові X і Y якої дискретні. Ймовірність того, що ВВ X набуде значення x_i , а ВВ Y – значення y_j , називають законом розподілу двовірної дискретної

випадкової величини, тобто $p_{ij} = p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$. p_{ij} – спільна ймовірність. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) може бути заданий наступною таблицею:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{n2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}		p_{nm}

Справедливо, що

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} p_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^m p_{ij} = P(X = x_i) = P(x_i); \quad \sum_{i=1}^n p_{ij} = P(Y = y_j) = P(y_j).$$

Дискретні ВВ X і Y незалежні тоді і тільки тоді, коли $p_{ij} = P(x_i) \cdot P(y_j)$, де $P(x_i) = P(X = x_i)$ і $P(y_j) = P(Y = y_j)$.

Приклад 43. Задано дискретну двовимірну випадкову величину:

$Y \setminus X$	1	3	5	Σ
0	0,1	0,1	0,1	0,3
2	0	0,3	0,1	0,4
4	0,1	0,1	0,1	0,3
Σ	0,2	0,5	0,3	1

Знайти закони розподілу компонент X і Y .

Розв’язування. Додаючи стовпчики і рядки таблиці ймовірностей, отримують відповідні закони розподілу випадкових величин

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Y	0	2	4
P	0,3	0,4	0,3

1.6.2 Система неперервних випадкових величин (X, Y)

Системою неперервних випадкових величин (BB) (X, Y)

називають систему випадкових величин, складові X і Y якої неперервні.

Якщо функція спільного розподілу $F(x, y)$ неперервна і має другу мішану похідну по x і y , то цю похідну називають щільністю спільного розподілу і позначають $f(x, y)$. Таким чином,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (1.52)$$

Щільність спільного розподілу $f(x, y)$ має такі властивості:

$$\text{а) } f(x, y) \geq 0; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Знаючи щільність розподілу, можна знайти інтегральну функцію розподілу за формулою:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (1.53)$$

Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в довільну область D знаходиться за формулою:

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.54)$$

Щільності розподілу компонент X і Y , що входять в систему (X, Y) , виражаються через щільність спільного розподілу системи формулами:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (1.55)$$

Випадкові величини X і Y називаються незалежними, тоді і тільки тоді, коли: $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Приклад 44. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) задано функцією розподілу:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, y \leq 0 \\ 1 - e^{-x} - e^{-2y} + e^{-x-2y}, & x > 0, y > 0 \end{cases}.$$

Знайти $f(x, y)$ і $P(0 < X < 1, 0 < Y < 2)$.

Розв'язування. Знайдемо щільність розподілу системи (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \text{ Тоді } \frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x} - e^{-x-2y} \text{ і } f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2 \cdot e^{-x-2y}.$$

Шукану ймовірність знайдемо за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Матимемо $P(0 < X < 1, 0 < Y < 2) = F(1, 2) - F(0, 2) - F(1, 0) + F(0, 0) = 1 - e^{-1} - e^{-4} + e^{-5} - 1 + e^0 + e^{-4} - e^{-2} - 1 + e^{-1} + e^0 - e^{-1} + 1 - e^0 - e^0 + e^0 = 1 - e^{-1} - e^{-2} + e^{-5}.$

1.6.3 Числові характеристики двовірних випадкових величин

1. Математичним сподіванням двовірної ВВ (X, Y) називається впорядкована пара чисел $(M(X), M(Y))$.

Для дискретної ВВ (X, Y) :

$$M(X) = m_X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij}, \quad M(Y) = m_Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij}. \quad (1.56)$$

Для неперервної ВВ (X, Y) :

$$\begin{aligned} M(X) &= m_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy \\ M(Y) &= m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (1.57)$$

Математичне сподівання (m_X, m_Y) – координати середньої точки, щодо якої розкидані випадкові точки (X, Y) . (m_X, m_Y) іноді називають центром розсіювання.

2. Дисперсією двовірної ВВ (X, Y) називається впорядкована пара чисел $(D(X), D(Y))$.

Для дискретної ВВ (X, Y) :

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_X)^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j - m_Y)^2 p_{ij}. \quad (1.58)$$

Для неперервної ВВ (X, Y) :

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x, y) dx dy \\ D(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (1.59)$$

Дисперсія $(D(X), D(Y))$ показує наскільки хмара точок (X, Y) розкидана в напрямку осей Ox і Oy .

3. Середнє квадратичне відхилення двовірної ВВ (X, Y) обчислюють за формулами:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_Y = \sqrt{D(Y)}. \quad (1.60)$$

4. Початковим моментом $v_{k,s}$ порядку $k + s$ системи ВВ (X, Y) називають математичне сподівання добутку $X^k \cdot Y^s$:

$$v_{k,s} = M[X^k \cdot Y^s]. \quad (1.61)$$

Зокрема, $v_{1,0} = M(X)$, $v_{0,1} = M(Y)$.

5. Центральним моментом $\mu_{k,s}$ порядку $k + s$ системи ВВ (X, Y) називають математичне сподівання добутку відхилень відповідно до k -го і s -го ступенів:

$$\mu_{k,s} = M((X - M(X))^k \cdot (Y - M(Y))^s). \quad (1.62)$$

Зокрема, $\mu_{1,0} = 0$, $\mu_{0,1} = 0$, $\mu_{2,0} = D(X)$, $\mu_{0,2} = D(Y)$.

1.6.4 Умовні закони розподілу

Якщо ВВ X і Y , що утворюють двовірну ВВ (X, Y) , залежні,

то для характеристики цієї залежності вводять поняття умовного розподілу.

Умовним законом розподілу випадкової величини, що входить до системи, називається її закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина прийняла певне значення. Наприклад, умовним законом розподілу ВВ X , що входить у систему ВВ (X, Y) , називається її закон розподілу, знайдений за умови, що друга ВВ Y прийняла певне значення (або потрапила в певний інтервал).

Для залежних ДВВ X і Y умовні ймовірності обчислюються за формулами:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \text{ або } P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(y_j)}, \quad (1.63)$$

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(X = x_i)} \text{ або } P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(x_i)}, \quad (1.64)$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i / y_j) = 1, \quad \sum_{j=1}^m P(y_j / x_i) = 1.$$

Властивість умовних розподілів використовують для контролю обчислень. Якщо безумовні і умовні ймовірності $P(x_i)$ і $P(x_i / y_j)$, $P(y_j)$ і $P(y_j / x_i)$ відрізняються, то величини X і Y залежні, а якщо збігаються – незалежні.

Для залежних НВВ X і Y умовні щільності розподілу (або щільності ймовірності умовного розподілу) випадкових величин X і Y , що входять у систему, позначаються: $\varphi(x/y)$ – умовна щільність розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина $Y = y$; $\psi(y/x)$ – умовна щільність розподілу випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X = x$ і визначається як:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, f_2(y) \neq 0 \text{ і } \psi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, f_1(x) \neq 0. \quad (1.65)$$

Для незалежних випадкових величин $\varphi(x/y) = f_1(x)$ і $\psi(y/x) = f_2(y)$, тому $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

1.6.4.1 Числові характеристики умовних розподілів

1. Умовним математичним сподіванням ВВ X при $Y = y_j$, де y_j – одне з можливих значень ВВ Y , називається:

для дискретної ВВ
$$M(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i / Y = y_j), \quad (1.66)$$

для неперервної ВВ
$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x/y) dx. \quad (1.67)$$

Умовним математичним сподіванням ВВ Y при $X = x_i$, де x_i – одне з можливих значень ВВ X , називається:

для дискретної ВВ
$$M(Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j / X = x_i), \quad (1.68)$$

для неперервної ВВ
$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \psi(y/x) dy. \quad (1.69)$$

Умовне математичне сподівання $M(X/y)$ є функцією y , яку називають функцією регресії X на Y , а умовне математичне сподівання $M(Y/x)$ є функцією x і називається функцією регресії Y на X .

2. Умовна дисперсія для дискретної ВВ

$$D(X/Y = y_j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} - M^2(X/Y = y_j), \quad (1.70)$$

$$D(Y / X = x_i) = \frac{\sum_{j=1}^m y_j^2 P(Y = y_j; X = x_i)}{P(X = x_i)} - M^2(Y / X = x_i). \quad (1.71)$$

Умовна дисперсія для неперервної ВВ

$$D(X / y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x / y) dx - M^2(X / y), \quad (1.72)$$

$$D(Y / x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \psi(y / x) dy - M^2(Y / x). \quad (1.73)$$

3. Кореляційний момент K_{XY} (коваріація) системи ВВ (X, Y) називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин:

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = M((X - m_X) \cdot (Y - m_Y)) \quad (1.74)$$

або $K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$.

Для дискретної ВВ (X, Y)

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_X)(y_j - m_Y) p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} - m_X m_Y.$$

Для неперервної ВВ (X, Y)

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) \cdot f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - m_X m_Y$$

Якщо $f(x, y)$ набуває значення в деякій області D площини xOy , то

$$K_{XY} = \iint_D xy f(x, y) dx dy - \iint_D x f(x, y) dx dy \cdot \iint_D y f(x, y) dx dy. \quad (1.75)$$

Кореляційний момент служить для того, щоб охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами.

Кореляційний момент має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X і Y . Цей факт є недоліком цієї числової характеристики, тому що при різних одиницях виміру

виходять різні кореляційні моменти, що ускладнює порівняння кореляційних моментів різних випадкових величин.

Випадкові величини називаються *корельованими*, якщо їх кореляційний момент відмінний від нуля, і *некорельованими*, якщо їх кореляційний момент дорівнює нулю.

Якщо випадкові величини незалежні, то вони і некорельовані, але з некорельованості не можна зробити висновок про їх незалежність.

Якщо дві величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

Часто по заданій щільності розподілу системи випадкових величин можна визначити залежність або незалежність цих величин.

Властивості кореляційного моменту:

а) $K_{XY} = K_{YX}$;

б) $cov(X + a, Y) = cov(X, Y + b) = cov(X + a, Y + b) = cov(X, Y)$;

в) якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K_{XY} = 0$;
якщо $K_{XY} \neq 0$, то випадкові величини X і Y залежні;

г) $cov(cX, Y) = c \cdot cov(X, Y) = cov(X, cY)$;

д) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2 \cdot K_{XY}$;

е) $|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$.

3. Безрозмірною характеристикою зв'язку між ВВ X і Y є коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = cov\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}, \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (1.76)$$

Він характеризує ступінь тісноти лінійного зв'язку між випадковими величинами: якщо $|r_{XY}| \rightarrow 1$, то зв'язок сильніше; якщо $|r_{XY}| \rightarrow 0$, то зв'язок слабкіше. Властивості коефіцієнта кореляції:

а) $|r_{XY}| \leq 1$;

б) для незалежних ВВ $r_{XY} = 0$;

в) якщо ВВ X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю $Y = aX + b, a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$, причому $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ і $r_{XY} = -1$ при $a < 0$ і навпаки.

Приклад 45. Дана двовимірна ВВ (X, Y) .

$Y \setminus X$	$x_1 = 1,7$	$x_2 = 1,8$	$x_3 = 1,9$	$x_4 = 2,0$
$y_1 = 2,7$	0,01	0,02	0,04	0,04
$y_2 = 2,8$	0,01	0,22	0,13	0,4
$y_3 = 2,9$	0,05	0,125	0,12	0,105
$y_4 = 3,0$	0,015	0,035	0,025	0,015

Знайти: а) граничні закони ВВ X та Y ; б) умовні математичні сподівання $M(X/Y=2,9)$ і $M(Y/X=1,8)$; в) числові характеристики m_X , m_Y , σ_X , σ_Y , r_{XY} .

Розв'язування. а) запишемо граничні закони ВВ X та Y :

X	1,7	1,8	1,9	2,0
P	0,085	0,4	0,315	0,2

Y	2,7	2,8	2,9	3,0
P	0,11	0,4	0,4	0,09

б) умовне математичне сподівання $M(X/Y=2,9)$ знайдемо за формулою:

$$M(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i / Y = y_j).$$

З таблиці закону розподілу для ВВ Y маємо, що $P(Y=2,9)=0,4$.

Умовні ймовірності $P(X = x_i / Y = y_k)$ знайдемо за формулою:

$$P(X = x_i / Y = y_k) = \frac{P(X = x_i; Y = y_k)}{P(Y = y_k)}.$$

Тоді

$$P(X = x_1 / Y = 2,9) = 0,05 / 0,4 = 0,125,$$

$$P(X = x_2 / Y = 2,9) = 0,125 / 0,4 = 0,3125,$$

$$P(X = x_3 / Y = 2,9) = 0,12 / 0,4 = 0,3,$$

$$P(X = x_4 / Y = 2,9) = 0,105 / 0,4 = 0,2625.$$

Умовний закон ВВ X при $Y=2,9$:

X	1,7	1,8	1,9	2,0
$P(X/Y=2,9)$	0,125	0,3125	0,3	0,2625

Отже, $M(X / Y = 2,9) = \sum_{i=1}^4 x_i P(X = x_i / Y = 2,9) = 1,7 \cdot 0,125 +$
 $+ 1,8 \cdot 0,3125 + 1,9 \cdot 0,3 + 2,0 \cdot 0,2625 = 1,87.$

Знайдемо умовне математичне сподівання $M(Y / X = 1,8)$ знайдемо за формулою:

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j / X = x_i).$$

Умовні ймовірності $P(Y = y_j / X = x_k)$ знайдемо за формулою:

$$P(Y = y_j / X = x_k) = \frac{P(X = x_k; Y = y_j)}{P(X = x_k)}.$$

З таблиці закону розподілу для ВВ X маємо, що $P(X = 1,8) = 0,4.$

Тоді

$$P(Y = y_1 / X = 1,8) = 0,02 / 0,4 = 0,05,$$

$$P(Y = y_2 / X = 1,8) = 0,22 / 0,4 = 0,55,$$

$$P(Y = y_3 / X = 1,8) = 0,125 / 0,4 = 0,3125,$$

$$P(Y = y_4 / X = 1,8) = 0,035 / 0,4 = 0,0875.$$

Умовний закон ВВ Y при $X = 1,8$:

Y	2,7	2,8	2,9	3,0
$P(Y / X = 1,8)$	0,05	0,55	0,3125	0,0875

Отже, $M(Y / X = 1,8) = \sum_{j=1}^4 y_j P(Y = y_j / X = 1,8) = 2,7 \cdot 0,05 + 2,8 \cdot 0,55 +$
 $+ 2,9 \cdot 0,3125 + 3,0 \cdot 0,0875 = 1,9375.$

В) знайдемо числові характеристики m_X , m_Y , σ_X , σ_Y , r_{XY} .

Математичне сподівання ВВ X :

$$m_X = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1,7 \cdot 0,085 + 1,8 \cdot 0,4 + 1,9 \cdot 0,315 + 2 \cdot 0,2 = 1,863.$$

Математичне сподівання ВВ Y :

$$m_Y = \sum_{j=1}^4 y_j p_j = 2,7 \cdot 0,11 + 2,8 \cdot 0,4 + 2,9 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,09 = 2,847.$$

Дисперсія ВВ X :

$$D_X = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i - (m_X)^2 = 1,7^2 \cdot 0,085 + 1,8^2 \cdot 0,4 + 1,9^2 \cdot 0,315 + \\ + 2^2 \cdot 0,2 - (1,863)^2 = 0,009231.$$

Дисперсія ВВ Y :

$$D_Y = \sum_{j=1}^4 y_j^2 p_j - (m_Y)^2 = 2,7^2 \cdot 0,11 + 2,8^2 \cdot 0,4 + 2,9^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,09 - \\ - (2,847)^2 = 0,006591.$$

Середнє квадратичне відхилення ВВ X :

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0,009231} \approx 0,096.$$

Середнє квадратичне відхилення ВВ Y :

$$\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0,006591} \approx 0,0812.$$

Закон розподілу ВВ (X, Y) запишемо у вигляді таблиці, перший рядок якої є добуток значень ВВ X і Y , а другий – ймовірності p_{ij} , з якими набуваються ці значення:

(XY)	4,59	4,76	4,93	5,1	4,86	5,04	5,22	5,4
p	0,01	0,01	0,05	0,015	0,02	0,22	0,125	0,035

(XY)	5,13	5,32	5,51	5,7	5,4	5,6	5,8	6,0
p	0,04	0,13	0,12	0,025	0,04	0,04	0,105	0,015

Знайдемо математичне сподівання ВВ (X, Y) :

$$M(XY) = \sum_i (xy)_i p_i = 4,59 \cdot 0,01 + 4,76 \cdot 0,01 + 4,93 \cdot 0,05 + 5,1 \cdot 0,015 + \\ + 4,86 \cdot 0,02 + 5,04 \cdot 0,22 + 5,22 \cdot 0,125 + 5,4 \cdot 0,035 + 5,13 \cdot 0,04 + \\ + 5,32 \cdot 0,13 + 5,51 \cdot 0,12 + 5,7 \cdot 0,025 + 5,4 \cdot 0,04 + 5,6 \cdot 0,04 + \\ + 5,8 \cdot 0,105 + 6,0 \cdot 0,015 = 5,3035.$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції за формулою:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{5,3035 - 1,863 \cdot 2,847}{0,096 \cdot 0,0812} \approx -0,059.$$

Це означає, що випадкові величини X і Y незалежні.

Приклад 46. Задано щільність розподілу системи двох неперервних ВВ (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D: (0 < x < 2, 0 < y < x) \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Встановити, чи величини X і Y є залежними. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y .

Розв'язування. Обчислимо математичні сподівання компонент X і Y :

$$\begin{aligned} M(X) = m_X &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^x x \cdot \frac{1}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx \cdot \int_0^x dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x dx \cdot y \Big|_0^x = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(Y) = m_Y &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_y^2 y \cdot \frac{1}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \cdot \int_0^x y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Обчислимо щільність розподілу компонент X і Y :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \cdot y \Big|_0^x = \frac{x}{2} \text{ при } 0 < x < 2 \text{ і}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot x \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ при } 0 < y < x.$$

Для того, щоб з'ясувати залежність випадкових величини X і Y обчислимо умовні щільності ймовірностей компонент:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \text{ і } \psi(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot x} = \frac{1}{x}.$$

Так як $f_1(x) \neq \varphi(x/y)$ і $f_2(y) \neq \psi(y/x)$, то випадкові величини X і Y є залежними.

Знайдемо кореляційний момент:

$$\begin{aligned}
 K_{XY} &= \iint_D xy f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y) = \iint_D xy \frac{1}{2} dx dy - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x dx \int_0^x y dy - \frac{8}{9} = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^x - \frac{8}{9} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \frac{8}{9} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{8}{9} = \\
 &= \frac{16}{16} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсії компонент:

$$\begin{aligned}
 D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - M^2(X) = \int_0^2 \int_0^x x^2 \cdot \frac{1}{2} dx dy - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx \cdot \int_0^x dy - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx \cdot y \Big|_0^x - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \\
 &= 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy - M^2(Y) = \int_0^2 \int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{2} dx dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \cdot \int_0^x y^2 dy - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^x - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^3}{3} dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{4}{9} = \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції за формулою: $r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$, де

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ і } \sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \text{ Матимемо:}$$

$$r_{XY} = \frac{1}{9} : \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{1}{9} : \frac{2}{9} = \frac{1}{2}.$$

Це означає, що випадкові величини X і Y залежні.

1.7 ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ. ПРЯМІ ЛІНІЇ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ РЕГРЕСІЇ

Розглянемо систему двох випадкових величин (X, Y) , де X і Y – залежні випадкові величини. Лінійна регресія передбачає побудову такої прямої лінії, при якій значення показників, що лежать на ній будуть максимально наближені до фактичних, і продовжуючи цю пряму одержуємо значення прогнозу. Процес продовження прямої називається екстраполяцією. Відповідно до цього постає задача визначити цю пряму, тобто рівняння цієї прямої. Нехай X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю. У загальному вигляді рівняння прямої виглядає: $Y \cong g(X) = aX + b$, де a і b – коефіцієнти, що підлягають визначенню. Пряма регресії відтинає на осі Oy відрізок b і має кут нахилу до осі Ox , тангенс якого дорівнює a .

Частіше для знаходження a і b застосовують метод найменших квадратів. Для цього треба розв'язати систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (1.77)$$

Коефіцієнти a і b – коефіцієнти, які передбачають зменшення суми квадратів відхилень між фактичним значенням Y і вирівняним значенням $g(X)$.

Функція $g(X)$ називається найкращим наближенням випадкової величини Y в сенсі методу найменших квадратів, якщо математичне сподівання $M(Y - g(X))^2$ приймає найменше можливе значення. Також функція $g(X)$ називається середньоквадратичною регресією Y на X . Лінійна середня квадратична регресія Y на X обчислюється за формулою:

$$g(X) = m_Y + r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - m_X), \quad (1.78)$$

де $m_X = M(X)$, $m_Y = M(Y)$, $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)}$, $r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Пряма середньоквадратичної регресії Y на X :

$$y - m_Y = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - m_X), \quad (1.79)$$

а $r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ – коефіцієнт регресії Y на X .

Величина $\sigma_Y^2(1 - r_{XY}^2)$ називається **залишковою дисперсією** випадкової величини Y відносно випадкової величини X . Ця величина характеризує величину похибки, що утворюється при заміні випадкової величини Y лінійною функцією $g(X) = aX + b$. При $r_{XY} = \pm 1$ залишкова дисперсія рівна нулю, тому немає похибки при заміні Y на лінійну функцію від X . Якщо $r_{XY} = \pm 1$, то ВВ Y і X пов'язані лінійною функціональною залежністю.

Аналогічно, пряма середньоквадратичної регресії X на Y :

$$x - m_X = r_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - m_Y), \quad (1.80)$$

а $r_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ – коефіцієнт регресії X на Y і $\sigma_X^2(1 - r_{XY}^2)$ – залишкова дисперсія випадкової величини X відносно випадкової величини Y .

Якщо $r_{XY} = \pm 1$, обидві прямі регресії збігаються.

Обидві прямі регресії проходять через точку $(M(X), M(Y))$ – центр спільного розподілу величин X і Y .

Якщо обидві функції регресії Y на X і X на Y лінійні, то величини X і Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю. У цьому випадку графіки функцій регресії є прямі. Ці прямі збігаються з прямими середньоквадратичної регресії.

Якщо двовірсна випадкова величина (X, Y) розподілена нормально, то X і Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю.

Приклад 47. Задана щільність спільного розподілу ВВ (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} C \cdot x \cdot y, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} \text{ де } D: (y \geq 0, x + y \leq 2, x \geq 1).$$

Знайти: а) сталу C ; б) рівняння лінії регресії Y на X .

Розв'язування. а) сталу C знайдемо з властивості щільності спільного розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow C \int_1^2 x dx \int_0^{2-x} y dy = C \cdot \frac{5}{24} = 1 \Rightarrow C = 4,8.$$

Тоді $f(x, y) = \begin{cases} 4,8 \cdot x \cdot y, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$

б) знайдемо рівняння лінії регресії Y на X за формулою:

$$y - m_Y = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - m_X). \text{ Застосуємо формули: } r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y},$$

$$K_{XY} = \iint_D x y f(x, y) dx dy - m_X m_Y, \quad m_X = \iint_D x \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$m_Y = \iint_D y \cdot f(x, y) dx dy, \quad D(X) = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy - (m_X)^2,$$

$$D(Y) = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy - (m_Y)^2, \quad \sigma_X = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_Y = \sqrt{D(Y)}.$$

Тоді

$$m_X = \iint_D x \cdot 4,8 x y dx dy = 4,8 \int_1^2 x^2 dx \int_0^{2-x} y dy = 1,28,$$

$$m_Y = \iint_D y \cdot 4,8 x y dx dy = 4,8 \int_1^2 x dx \int_0^{2-x} y^2 dy = 0,48,$$

$$D(X) = \iint_D x^2 \cdot 4,8 x y dx dy - (1,28)^2 = 4,8 \int_1^2 x^3 dx \int_0^{2-x} y dy - 1,6384 = 0,0416,$$

$$D(Y) = \iint_D y^2 \cdot 4,8 x y dx dy - (0,48)^2 = 4,8 \int_1^2 x dx \int_0^{2-x} y^3 dy - 0,2304 = 54,0096,$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,0416} \approx 0,204, \quad \sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{54,0096} \approx 7,349.$$

$$K_{XY} = \iint_D xy \cdot 4,8 xy \, dx dy - 1,28 \cdot 0,48 = 4,8 \int_1^2 x^2 dx \int_0^{2-x} y^2 dy - 0,6144 = 0,0256$$

$$r_{XY} = \frac{0,0256}{0,204 \cdot 7,349} = 0,02.$$

Підставимо знайдені значення в рівняння лінії регресії:

$$y - 0,48 = 0,02 \frac{7349}{0204} (x - 1,28).$$

Рівняння регресії Y на X матиме вигляд: $072x - y - 0,4416 = 0$.

Приклад 48. За незгрупованими даними x_i і y_i ($i=1,2,\dots,10$) результатів досліджень ВВ X і Y :

x_i	-3,0	-0,7	0,9	1,3	2,0	2,8	3,6	4,5	4,8	5,9
y_i	-2,1	1,4	2,9	3,7	4,1	5,7	6,4	7,3	7,5	8,3

скласти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X . В системі координат xOy побудувати графік прямої лінії регресії та показати результати досліджень.

Розв'язування. Рівняння прямої лінії регресії $y = ax + b$, де коефіцієнти a і b знайдемо за методом найменших квадратів за допомогою системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}.$$

Знайдемо суми, що входять до системи:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = -3,0 + (-0,7) + 0,9 + 1,3 + 2,0 + 2,8 + 3,6 + 4,5 + 4,8 + 5,9 = 22,1,$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = -2,1 + 1,4 + 2,9 + 3,7 + 4,1 + 5,7 + 6,4 + 7,3 + 7,5 + 8,3 = 45,2,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = (-3,0)^2 + (-0,7)^2 + 0,9^2 + 1,3^2 + (2,0)^2 + 2,8^2 + 3,6^2 + 4,5^2 + \\ + 4,8^2 + 5,9^2 = 114,89,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = (-3,0) \cdot (-2,1) + (-0,7) \cdot 1,4 + 0,9 \cdot 2,9 + 1,3 \cdot 3,7 + 2,0 \cdot 4,1 + 2,8 \cdot 5,7 + \\ + 3,6 \cdot 6,4 + 4,5 \cdot 7,3 + 4,8 \cdot 7,5 + 5,9 \cdot 8,3 = 177,76.$$

Одержимо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 22,1 \cdot \alpha + 10 \cdot b = 45,2 \\ 114,89 \cdot \alpha + 22,1 \cdot b = 177,76 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 22,1 & 10 \\ 114,89 & 22,1 \end{vmatrix} = 22,1^2 - 10 \cdot 114,89 = -660,49 :$$

$$\Delta_{\alpha} = \begin{vmatrix} 45,2 & 10 \\ 177,76 & 22,1 \end{vmatrix} = 45,2 \cdot 22,1 - 10 \cdot 177,76 = -778,68 ;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 22,1 & 45,2 \\ 114,89 & 177,76 \end{vmatrix} = 22,1 \cdot 177,76 - 45,2 \cdot 114,89 = -1264,532 .$$

$$\alpha = \frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta} = \frac{-778,68}{-660,49} \approx 1,1789; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-1264,532}{-660,49} \approx 1,9145 .$$

Отже, вибіркове рівняння лінії регресії має вигляд:
 $y = 1,1789x + 1,9145$.

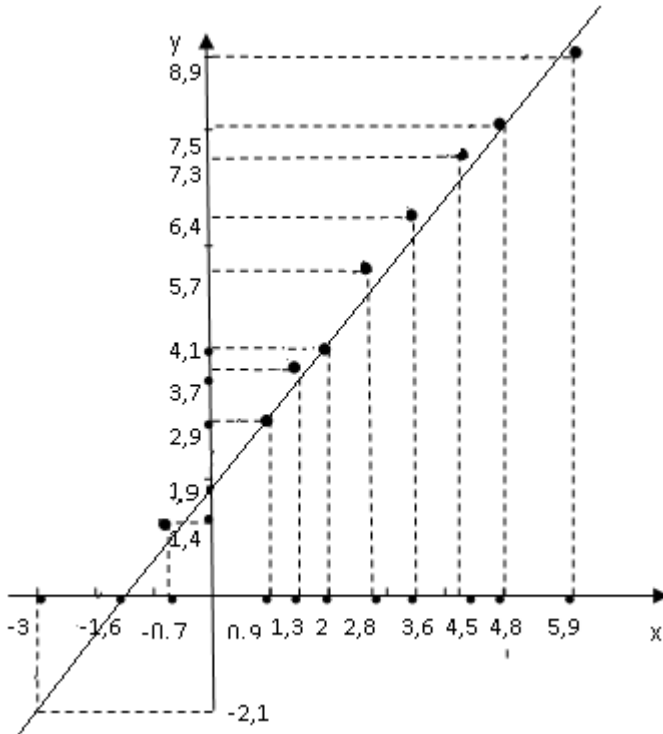


Рисунок 1.6

2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

2.1 СТАТИСТИЧНЕ ОБРОБЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Математичною статистикою називається наука, яка займається розробкою методів відбору, опису та аналізу дослідних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ.

У свою чергу, встановлення цих закономірностей ґрунтується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів дослідів або спостережень.

Отже, математична статистика вивчає методи, які дають змогу за результатами випробувань робити певні ймовірнісні висновки.

Основні задачі математичної статистики:

- 1) вказати способи збору та групування (якщо даних дуже багато) статистичної інформації;
- 2) визначити закон розподілу випадкової величини або системи випадкових величин за статистичними даними;
- 3) оцінити невідомі параметри розподілу;
- 4) перевірити правдоподібність припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення оцінюваного параметра.

Основна задача математичної статистики – розроблення методів аналізу статистичних даних залежно від мети дослідження.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково взятих об'єктів. **Генеральною** називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку. **Обсягом** (об'ємом) **сукупності** (вибіркової або генеральної) називають кількість об'єктів всієї сукупності.

Нехай з генеральної сукупності витягнута вибірка і проводяться спостереження за випадковою величиною X , причому значення x_1 спостерігалось n_1 раз, значення x_2 – n_2 раз, ..., значення x_k – n_k раз, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ – обсяг вибірки. Можливі значення випадкової величини X : $x_1, x_2, \dots, x_k$ прийнято називати **варіантами**. Різниця між максимальним і мінімальним елементами вибірки називають **розмахом вибірки**: $R = x_{\max} - x_{\min}$. Числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ називаються

частотами, а $w_i = \frac{n_i}{n}$ – **відносними частотами**, $\sum_{i=1}^k w_i = 1$.

Статистичний ряд розподілу – це ряд, який характеризує розподіл варіант сукупності по групах за будь-якою ознакою, різновидності якої розташовані у певному порядку. В статистиці ряди розподілу є найпростішим способом узагальнення статистичних даних.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант та відповідних частот або відносних частот. Статистичний закон розподілу зручно задавати таблицею, що встановлює зв'язок між значеннями випадкової величини та їх частотами (відносними частотами):

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k	або	x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k		w_i	w_1	w_2	$\dots$	w_k

Ряди розподілу варіант сукупності за ознаками, які мають кількісне вираження, називають **варіаційними рядами**. Варіаційні ряди дають можливість визначити характер розподілу варіант сукупності за тією чи іншою кількісною ознакою. Варіаційні ряди розподілу залежно від групувальної ознаки поділяють на **ранжовані, інтервальні та дискретні**.

Ранжований варіаційний ряд – це ряд впорядкованих варіант сукупності в порядку зростання чи спадання ознаки, що досліджується.

Дискретним варіаційним рядом (варіацією) називають упорядковану за зростанням значень x_i послідовність варіант із вказівкою їх відповідних частот або відносних частот і подану у вигляді таблиці.

Якщо число значень випадкової величини X велике або є підстави вважати, що випадкова величина є неперервною і може прийняти будь-яке значення з деякого проміжку, будують **інтервальний варіаційний ряд** у вигляді таблиці. Значення варіант групують за проміжкам (зазвичай однакової довжини), у першому рядку вказується проміжками, а у другому – число спостережень, що потрапили в даний проміжок.

За величиною розрізняють проміжки (інтервали) рівні і нерівні. Рівні інтервали застосовують тоді, коли зміни кількісної ознаки всередині сукупності відбуваються рівномірно. Для визначення оптимальної кількості рівних інтервалів можна використовувати формулу Стерджеса: $k = 1 + 3,332 \cdot \lg(n)$, де k – число інтервалів (береться найближче ціле до $1 + 3,332 \cdot \lg(n)$), n – обсяг вибірки.

Нехай значення випадкової величини X розташовуються на відрізку $[a, b]$, а обсяг вибірки – n . Тоді довжина часткового інтервалу $\Delta = \frac{b-a}{k}$ (береться найближче ціле).

Якщо в кожному інтервалі узяти середнє значення інтервалу: $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, ($i = \overline{1, k}$), то **інтервальний варіаційний ряд** можна умовно

подати *дискретним варіаційним* рядом. У цьому випадку в першому рядку таблиці указуються *середні* значення варіант для кожного інтервалу.

Для наочності часто використовують графічне зображення статистичних рядів: для дискретного ряду – полігон, для інтервального ряду – гістограму.

Полігон частот (відносних частот) являє собою ламану лінію, відрізки якої з'єднують точки (x_1, n_1) , (x_2, n_2) , ..., (x_k, n_k) або (x_1, w_1) , (x_2, w_2) , ..., (x_k, w_k) .

Гістограмою частот (відносних частот) називається сукупність прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ і висотами $h_i = \frac{n_i}{\Delta x_i}$ ($h_i = \frac{w_i}{\Delta x_i}$). Площа всієї

гістограми частот дорівнює n (обсягу вибірки), а площа всієї гістограми відносних частот дорівнює 1.

Гістограма і полігон можуть служити деяким наближенням графіка невідомої щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини X . Точність наближення зростає зі зростанням обсягу вибірки та кількості часткових інтервалів.

Статистичною або емпіричною функцією розподілу випадкової величини X за наявною вибіркою називається функція $F^*(x)$, що дорівнює відносній частоті події ($X < x$):

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (2.1)$$

де n_x – число варіант у вибірці, менших x , n – обсяг вибірки.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{n}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 1, & x > x_k \end{cases} \quad (2.2)$$

Властивості емпіричної функції розподілу аналогічні властивостям теоретичної функції розподілу дискретної випадкової величини X : $F^*(x)$ – неспадна функція, $0 \leq F^*(x) \leq 1$, $F^*(x)$ – неперервна зліва.

Функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають *теоретичною функцією розподілу*. Вона визначає ймовірність події $X < x$.

2.2 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ВИБІРКИ

1. **Вибіркове середнє** – середнє арифметичне значень вибірки:

$$\bar{x}_g = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^k w_i \cdot x_i \quad (2.3)$$

Використовують також позначення: $\bar{x}, M^*(X), m_x^*$.

2. **Вибіркова мода** M_o^* – найбільш ймовірне значення у вибірці (варіанта з найбільшою частотою).

3. **Вибіркова медіана** M_e^* – значення випадкової величини, що припадає на середину варіаційного ряду. Якщо обсяг вибірки парний ($n = 2m$), то $M_e^* = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$, якщо непарний ($n = 2m + 1$), то $M_e^* = x_{m+1}$.

4. **Вибіркова дисперсія** – середнє значення квадрата відхилення $x_i - \bar{x}_g$:

$$D_g = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{x}_g)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^2 - (\bar{x}_g)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \quad (2.4)$$

5. **Вибіркове середнє квадратичне відхилення:**

$$\sigma_g = \sqrt{D_g}. \quad (2.5)$$

6. **Виправлена вибіркова дисперсія:**

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_g. \quad (2.6)$$

7. **Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:**

$$s = \sqrt{s^2}. \quad (2.7)$$

8. **Початковий вибірковий момент порядку k :**

$$v_k^*[X] = \overline{x^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^k. \quad (2.8)$$

9. **Центральний вибіркового момент порядку k :**

$$\mu_k^*[X] = \overline{(x - \bar{x})^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k. \quad (2.9)$$

10. **Коефіцієнт варіації V^* .** Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_g$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою:

$$V^* = \frac{s}{\bar{x}_g} \cdot 100\% \quad (2.10)$$

Чим більший коефіцієнт варіації, тим менш однорідна сукупність і тим менш типова середня для даної сукупності. Встановлено, що сукупність кількісно однорідна, якщо коефіцієнт варіації не перевищує 33 %.

Приклад 49. Нехай 50 випадково обраних стрільців беруть участь у змаганнях. Кожен з них робить по 100 пострілів. У таблиці наведено кількість очок для кожного стрільця:

75	54	67	62	88	55	65	46	68	73
62	46	64	55	68	72	58	73	88	62
58	73	54	62	65	68	55	62	77	79
55	83	64	53	72	68	79	46	64	73
62	46	54	72	55	62	65	79	72	88

ВВ X – кількість вибитих очок. Треба: а) записати дискретний та інтервальний статистичні ряди; б) побудувати полігон частот і гістограму частот для дискретного та інтервального статистичних рядів; в) записати статистичну (емпіричну) функцію розподілу та побудувати її графік; г) знайти вибіркове середнє і вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Розв'язування. а) значення кількості очок у вибірці змінюється від 46 до 88, тобто ВВ X приймає 42 значення. Обсяг вибірки – $n = 50$ чоловік. Упорядкуємо дані вибірки за зростанням (ранжируємо вибірку). Маємо варіаційний ряд:

46	46	46	46	53	54	54	54	55	55
55	55	55	58	58	62	62	62	62	62
62	62	64	64	64	65	65	65	67	68
68	68	68	72	72	72	72	73	73	73
73	75	77	79	79	79	83	88	88	88

Записуємо статистичний ряд:

x_i	46	53	54	55	58	62	64	65	67
n_i	4	1	3	5	2	7	3	3	1
x_i	68	72	73	75	77	79	83	88	
n_i	4	4	4	1	1	3	1	3	

Побудуємо інтервальний статистичний ряд.

$$x_{\min} = 46, x_{\max} = 88, \Delta = \frac{88 - 46}{1 + 3,332 \cdot \lg 50} \approx \frac{42}{6,66} \approx 6,31, k \approx 6,66 \approx 7.$$

x_i	[46,52)	[52,58)	[58,64)	[64,70)	[70,76)	[76,82)	[82,88]
n_i	4	9	9	11	9	4	4
w_i	0,08	0,18	0,18	0,22	0,18	0,08	0,08

б) графік полігону частот має вигляд:

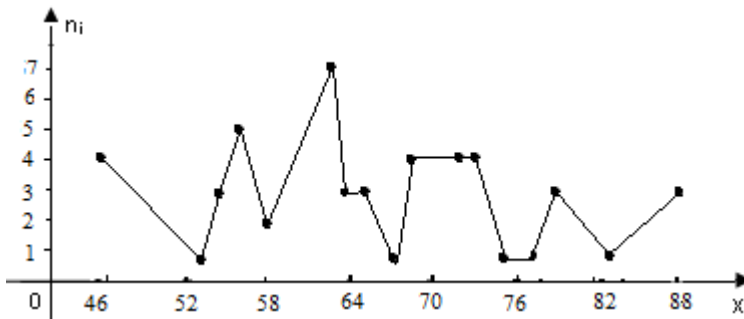


Рисунок 2.2

Графік гістограми частот має вигляд:

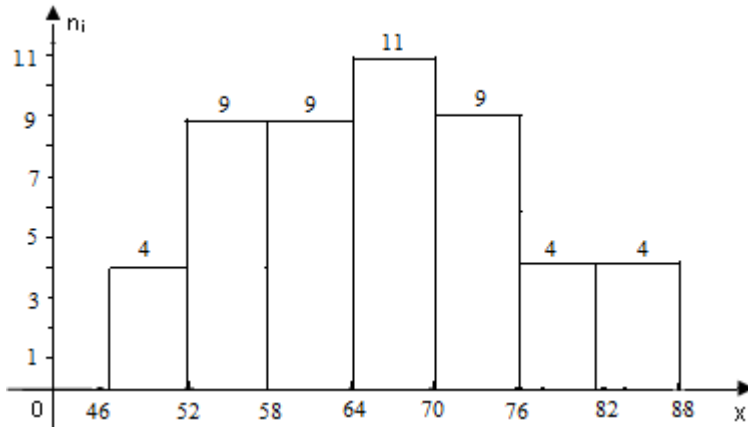


Рисунок 2.1

в) запишемо емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 46 \\ 0,08, & 46 < x \leq 52 \\ 0,26, & 52 < x \leq 58 \\ 0,44, & 58 < x \leq 64 \\ 0,66, & 64 < x \leq 70 \\ 0,84, & 70 < x \leq 76 \\ 0,92, & 76 < x \leq 82 \\ 1,0, & 82 < x \leq 88 \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу має вигляд:

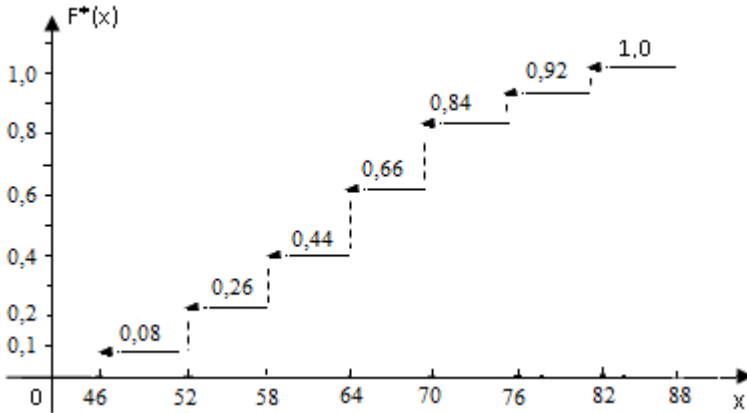


Рисунок 2.3

г) знайдемо вибіркове середнє:

$$\begin{aligned}\bar{x}_e &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i = \frac{1}{50} (4 \cdot 46 + 1 \cdot 53 + 3 \cdot 54 + 5 \cdot 55 + \\ &+ 2 \cdot 58 + 7 \cdot 62 + 3 \cdot 64 + 3 \cdot 65 + 1 \cdot 67 + 4 \cdot 68 + 4 \cdot 72 + 4 \cdot 73 + 1 \cdot 75 + \\ &+ 1 \cdot 77 + 3 \cdot 79 + 1 \cdot 83 + 3 \cdot 88) = 3266 / 50 = 65,32.\end{aligned}$$

Вибіркова дисперсія:

$$\begin{aligned}D_e &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^2 - (\bar{x}_e)^2 = \frac{1}{50} (4 \cdot 46^2 + 1 \cdot 53^2 + 3 \cdot 54^2 + 5 \cdot 55^2 + 2 \cdot 58^2 + \\ &+ 7 \cdot 62^2 + 3 \cdot 64^2 + 3 \cdot 65^2 + 1 \cdot 67^2 + 4 \cdot 68^2 + 4 \cdot 72^2 + 4 \cdot 73^2 + 1 \cdot 75^2 + \\ &+ 1 \cdot 77^2 + 3 \cdot 79^2 + 1 \cdot 83^2 + 3 \cdot 88^2) - (65,32)^2 = 219180 / 50 - \\ &- 4266,7024 = 4383,6 - 4266,7024 = 116,8976.\end{aligned}$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_e = \sqrt{D_e} = \sqrt{116,8976} \approx 10,81.$$

Виправлена вибіркова дисперсія:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{50}{49} \cdot 116,8976 \approx 119,2833.$$

Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{119,2833} \approx 10,922.$$

2.3 ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ. ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ

Існують два види оцінок параметрів розподілу (числових характеристик) досліджуваної ознаки генеральної сукупності за даними вибірки – точкові та інтервальні.

Точкова оцінка невідомого параметра Θ – випадкова функція $\Theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значення якої для будь-якої реалізації вибірки приймають за наближене значення параметра Θ , : $\Theta = \Theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Інтервальна оцінка невідомого параметра Θ – випадкова функція $\Theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ така, що інтервал $(\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$ включає в себе (покриває) невідомий параметр Θ з імовірністю γ . Сам інтервал носить назву довірчого інтервалу. Число $\gamma = 1 - \alpha$, $0 < \gamma < 1$ називається довірчою ймовірністю оцінки (надійністю, коефіцієнтом довіри), а α – рівнем значущості. Чим ближче γ до одиниці, тим надійніше оцінка (зазвичай вибирають $\gamma = 0,9; 0,95; 0,99$).

Величини $\underline{\alpha}$ та $\bar{\alpha}$ називаються довірчими межами. Вони є функціями вибірових значень $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і, отже, є випадковими величинами.

Приклади довірчих інтервалів.

1. Довірчий інтервал для математичного сподівання a нормальної випадкової величини при відомій дисперсії σ^2 має вигляд

$$\bar{x}_v - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_v + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.11)$$

де $t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки; n – обсяг вибірки; t_γ – значення

аргументу функції Лапласа $\Phi(t_\gamma)$, при якому $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$, t_γ

визначається по заданій довірчій імовірності γ за допомогою Таблиці А2 (див. Додаток А, Частина 2).

2. Довірчий інтервал для математичного сподівання a нормальної випадкової величини за невідомої дисперсії σ^2 має вигляд:

для $n < 30$

$$\bar{x}_e - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2.12)$$

де величина t_γ визначається за Таблицею А3 (див. Додаток А, Частина 2): $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (γ – задана довірна ймовірність, n – обсяг вибірки);

для $n \geq 30$

$$\bar{x}_e - u_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + u_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2.13)$$

де величина $u_{\alpha/2}$ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(u_{\alpha/2})$, при якому $\Phi(u_{\alpha/2}) = \gamma/2$, визначається за заданою довірчою ймовірністю за допомогою Таблиці А2 (див. Додаток А, Частина 2).

Оцінка s обчислюється за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_e)^2} \quad (2.14)$$

3. Довірчий інтервал для дисперсії σ^2 нормальної випадкової величини має вигляд:

для $n < 50$

якщо математичне сподівання a відоме, то $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ і

$$\frac{(n-1)s_0^2}{\chi_{\alpha/2; n}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_0^2}{\chi_{1-\alpha/2; n}^2}; \quad (2.15)$$

якщо математичне сподівання a невідоме, то

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_e)^2 \quad \text{і} \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2; n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}, \quad (2.16)$$

де n – обсяг вибірки; s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, $\chi_1^2 = \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2$ і $\chi_2^2 = \chi_{\alpha/2; n-1}^2$ визначаються при ступенях свободи $k = n-1$ з рівності: $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \alpha/2 = (1 + \gamma)/2$ і $P(\chi^2 > \chi_2^2) = \alpha/2 = (1 - \gamma)/2$ за допомогою Таблиці А6 (див. Додаток А, Частина 2).

Для знаходження довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилення σ можна користуватися формулою:

$$s \cdot \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}} < \sigma < s \cdot \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}}. \quad (2.17)$$

Позначимо через $\gamma_1 = \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}}$ і $\gamma_2 = \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}}$. Тоді за

Таблицею А7 (див. Додаток А, Частина 2) можна знайти γ_1 та γ_2 .

для $n \geq 50$

$$\frac{s}{1 + \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1 - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}, \quad (2.18)$$

де $u_{\alpha/2}$ – квантіль стандартного нормального розподілу, відповідний довірчий ймовірності $1 - \alpha$.

4. Нехай n – число незалежних випробувань, m – число настання події A , p – ймовірність настання події A в кожному

окремому випробуванні. Розглянемо випадок, коли n досить велике, а значення p не дуже близько до нуля або до одиниці так, що можна скористатися асимптотикою Муавра–Лапласа. При цьому довірчий інтервал для p має вигляд:

$$\frac{m}{n + (u_\gamma)^2} < p < \frac{m + (u_\gamma)^2}{n + (u_\gamma)^2}, \quad (2.19)$$

де u_γ визначається за заданою довірчою ймовірністю γ за допомогою Таблиці А8 (див. Додаток А, Частина 2).

Розглянемо окремо випадок $m = 0$. При цьому нижня довірча межа дорівнює нулю, а верхня $1 - \sqrt[n]{1 - \gamma}$. Аналогічно, при $m = n$ нижня і верхня довірчі межі рівні відповідно $\sqrt[n]{1 - \gamma}$ і одиниці.

Приклад 50. Випадкова величина ξ розподілена нормально з невідомим математичним сподіванням a і відомою дисперсією $\sigma^2 = 25$. За вибіркою $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ обсягу $n = 100$ обчислено вибіркове середнє $\bar{x}_e = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = 142,3$. Визначити довірчий інтервал для математичного сподівання a з довірчою ймовірністю $\gamma = 0,95$.

Розв’язування. За умовою прикладу дисперсія σ^2 відома. Скористаємося формулою (2.11), в яку підставимо наші дані: $\sigma = \sqrt{25} = 5$, $n = 100$ і $t_\gamma = t_{0,95} = 1,96$, отримане з Таблиці А2 (див. Додаток А, Частина 2). Матимемо

$$142,3 - 1,96 \frac{5}{\sqrt{100}} < a < 142,3 + 1,96 \frac{5}{\sqrt{100}}, \text{ тобто } 141,32 < a < 143,28.$$

Таким чином, з довірчою ймовірністю (надійністю) $\gamma = 0,95$ невідоме математичне сподівання a знаходиться в інтервалі $(141,32; 143,28)$.

Приклад 51. Нехай математичне сподівання a та дисперсія σ^2 нормальної випадкової величини ξ . Невідомі. За вибіркою

$(x_1, x_2, \dots, x_{20})$ знайдені оцінки: $\bar{x}_e = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 56,85$ і

$$s^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}_e)^2 = 26,1. \quad \text{Знайти довірчі інтервали для}$$

математичного сподівання a і дисперсії σ^2 при довірчій імовірності $\gamma = 0,95$.

Розв'язування. Оскільки a і σ^2 невідомі, знайдемо довірчий інтервал для a за формулою (2.12), в яку підставимо наші дані: $\bar{x}_e = 56,85$, $n = 20$, $s = \sqrt{26,1} = 5,109$ і знайдемо за Таблицею А3 (Частина 2) $t_\gamma = t_{0,95} = 2,086$:

$$56,85 - 2,086 \cdot \frac{5,109}{\sqrt{20}} < a < 56,85 + 2,086 \cdot \frac{5,109}{\sqrt{20}},$$

тобто $55,708 < a < 57,992$.

Довірчий інтервал для σ^2 знайдемо за формулою (2.16), підставивши в неї $n = 20$, $s^2 = 26,1$, а також знайдені з Таблиці А6 (див. Додаток А, Частина 2) значення χ_1^2 та χ_2^2 . Для χ_1^2 маємо $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$, $\alpha = (1 + \gamma) / 2 = (1 + 0,95) / 2 \approx 0,98$, отже, $\chi_1^2 = 8,57$. Для χ_2^2 маємо $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$, $\alpha = (1 - \gamma) / 2 = (1 - 0,95) / 2 \approx 0,02$, отже, $\chi_2^2 = 33,7$. Таким чином, маємо

$$\frac{20-1}{33,7} 26,1 < \sigma^2 < \frac{20-1}{8,57} 26,1, \text{ тобто } 14,715 < \sigma^2 < 57,845.$$

Приклад 52. Серед 35 новонароджених виявилося 18 хлопчиків. Знайти довірчий інтервал для ймовірності p народження хлопчика при довірчій імовірності $\gamma = 0,99$.

Розв'язування. Скористаємося формулою (2.19), в якій для нашого прикладу $n = 35$, $m = 18$, $\gamma = 0,99$, а з Таблиці А8 (див. Додаток А, Частина 2) матимемо $u_{0,99} = 2,576$. Отримаємо

$$\frac{18}{35 + 2,576^2} < p < \frac{18 + 2,576^2}{35 + 2,576^2}, \text{ тобто } 0,432 < p < 0,592.$$

Приклад 53. За результатами контролю $n = 9$ деталей обчислено вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 5$ мм. У припущенні, що помилка виготовлення деталей розподілена нормально, визначити з надійністю $\gamma = 0,95$ довірчий інтервал для параметра σ .

Розв'язування. Так як $n < 50$, використовується χ^2 – розподіл. За таблицею χ^2 – розподілу потрібно вибрати такі два значення χ_1^2 і χ_2^2 , щоб площа, укладена під диференціальною функцією розподілу χ^2 між χ_1^2 і χ_2^2 , дорівнювала $\gamma = 1 - \alpha$. Тоді матимемо ймовірності:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975 \quad \text{і} \quad P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025.$$

По таблиці χ^2 – розподілу для числа ступенів свободи $\nu = n - 1 = 8$ і знайдених ймовірностей 0,975 і 0,025 знаходимо, що $\chi_1^2 = 2,180$ і $\chi_2^2 = 17,535$. За формулою (2.16) знайдемо $\frac{(9-1)25}{17,535} < \sigma^2 < \frac{(9-1)25}{2,180}$.
Довірчий інтервал для σ матиме вигляд: $3,37 < \sigma < 9,55$ (мм).

2.4 ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Будь-яке твердження, висловлене щодо невідомого закону генеральної сукупності або щодо числових характеристик цього закону (якщо відомий закон розподілу), називається *гіпотезою*.

Основною (нульовою) гіпотезою називають висунуту гіпотезу H_0 , а **альтернативною (конкуруючою) гіпотезою** H_1 називають гіпотезу, яка суперечить висунутій.

Гіпотеза називається **простою**, якщо відповідь на неї однозначна («ознака розподілена нормально», «дисперсія розподілу дорівнює 3» і т. п.). Якщо відповідь неоднозначна, гіпотеза називається складною.

Перевірку справедливості гіпотез проводять статистичними методами, тому їх називають статистичними. У ході перевірки гіпотез можуть бути допущені помилки першого і другого роду.

Помилкою першого роду називають помилку, яка припускається у випадку, коли *відкинута правильна основна гіпотеза* (H_0 відкинута, хоча вона правильна).

Помилкою другого роду називають помилку, яка припускається в разі *прийняття неправильної основної гіпотези* (H_0 прийнята, хоча вона неправильна).

Випадкова величина X , що служить для перевірки гіпотези H_0 , називається **статистичним критерієм**, або просто критерієм K . Спостереженим значенням $K_{\text{спост}}$ називають значення критерію, обчислене за вибіркою.

Критичною областю S називається множина значень критерію, за яких основна гіпотеза H_0 відхиляється.

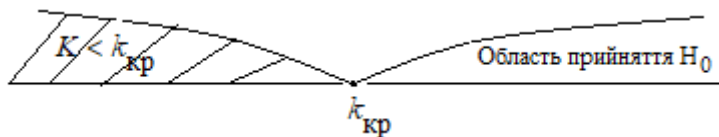
Областю прийняття гіпотези (допустимою областю) $\bar{S}$ називається множина значень критерію, за яких основна гіпотеза H_0 не відхиляється.

Критичні точки $k_{\text{кр}}$ поділяють критичну область і область прийняття гіпотези.

Існують три види критичних областей:
лівостороння критична область визначається з рівності:

$$P(K < k_{\text{кр}}) = \alpha, \quad (2.20)$$

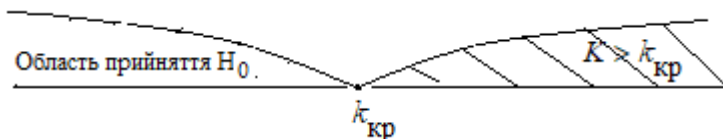
тобто, при $K < k_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза відхиляється:



правостороння критична область визначається з рівності:

$$P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha, \quad (2.21)$$

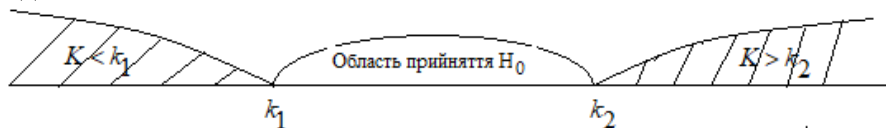
тобто, при $K > k_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза відхиляється:



двостороння критична область визначається з рівності:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha, \quad (2.22)$$

де α називається рівнем значущості; k_1 , k_2 – відповідно ліва і права критичні точки, тобто, при $K < k_1$ і $K > k_2$ нульова гіпотеза відхиляється:



Найчастіше двосторонню критичну область будують як симетричну, визначаючи k_1 і k_2 з рівнянь $P(K < k_1) = \alpha/2$ і $P(K > k_2) = \alpha/2$.

На практиці при перевірці гіпотез звичайно задається рівень значущості $\alpha = 0,05; 0,01; 0,001$.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез полягає в наступному: якщо $K_{\text{спост}}$ потрапляє в критичну область, то основну гіпотезу H_0 відхиляють і приймають альтернативну гіпотезу H_1 , якщо $K_{\text{спост}}$ належить області прийняття гіпотези, то гіпотезу H_0 приймають, а гіпотезу H_1 відхиляють.

У загальному випадку схема застосування критерію для перевірки статичної гіпотези H_0 складається з таких етапів:

1) вибір відповідного критерію K і обчислення за даними вибірки його значення, яке називається спостереженим значенням і позначається $K_{\text{спост}}$;

2) обрання за змістом гіпотези рівня значущості α ;

3) знаходження за таблицею, відповідною розподілу обраного критерію, критичної точки $k_{\text{кр}}$ для прийнятих рівня значущості α і об'єму вибірки n або кількості степенів свободи;

4) порівняння $K_{\text{спост}}$ і $k_{\text{кр}}$ та прийняття рішення, згідно з умовами (2.20)-(2.22), наприклад, для правосторонньої і двосторонньої симетричної областей виконання умови $K_{\text{спост}} \geq k_{\text{кр}}$ є підставою для відхилення гіпотези H_0 , а не виконання – для прийняття гіпотези.

Для кожного виду гіпотез, що перевіряються, розроблені відповідні критерії. Найчастіше використовуються величини, які мають нормальний розподіл: χ^2 – розподіл Пірсона, t – розподіл Стюдента, F – розподіл Фішера-Снедекора.

2.5 ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ КРИТЕРІЮ ПІРСОНА

Нехай закон розподілу генеральної сукупності невідомий, але є підстави припускати, що він має певний вигляд, зокрема те, що генеральний розподіл – нормальний. Це твердження носить характер гіпотези і має бути піддано статистичній перевірці.

Для перевірки гіпотези H_0 : закон розподілу має даний вигляд (наприклад, нормальний та ін.) використовується спеціально підібрана випадкова величина, яка називається критерієм згоди.

Критерій згоди є критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу. Є декілька критеріїв згоди: χ^2 (хі-квадрат) Пірсона, Колмогорова, Мізеса-Смирнова та ін.

Розглянемо критерій χ^2 Пірсона.

Нехай вибірка подається інтервальним статистичним рядом. Для вивчення випадкової величини X проведено n дослідів, діапазон значень величини X , що спостерігалися, розбитий на q інтервалів,

довжиною $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,332 \cdot \lg(n)}$. Складемо таблицю:

Інтервали	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	...	$[x_q, x_{q+1})$
Середина інтервалу $x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	x'_1	x'_2	...	x'_q
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_q
Відносна частота $w_i = \frac{n_i}{n}$	w_1	w_2	...	w_q

де n_i – кількість експериментальних даних у i -му інтервалі, $\sum_{i=1}^q n_i = n$,

а $\sum_{i=1}^q w_i = 1$. Емпірична функція розподілу $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – число

варіант, менших x ; n – обсяг вибірки, $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_{\min}$ і

$F^*(x) = 1$ при $x > x_{\max}$.

Числові характеристики вибірки знаходимо за формулами:

1) *Вибіркове середнє:*

$$\bar{x}_e = \sum_{i=1}^q x'_i \cdot w_i.$$

2) *Вибіркова дисперсія:*

$$D_e = \sum_{i=1}^q (x'_i)^2 \cdot w_i - (\bar{x}_e)^2.$$

3) *Вибіркове середнє квадратичне відхилення:*

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{D_{\theta}}.$$

4) *Виправлена статистична дисперсія:*

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\theta}.$$

5) *Коефіцієнт варіації:*

$$V^* = \frac{s}{x_{\theta}} \cdot 100\%.$$

Відповідно до гіпотези, щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{\theta} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x}_{\theta})^2}{2\sigma_{\theta}^2}}.$$

Графік цієї функції називається вирівнювальною кривою.

$$\text{Функція розподілу} - F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}_{\theta}}{\sigma}\right) + 0,5.$$

Перевіряємо узгодженість експериментальних даних з гіпотезою про нормальний розподіл ВВ X . Для цього знаходимо

$$\chi_{\text{спост}}^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (2.23)$$

де ймовірності потрапляння ВВ у відповідний інтервал обчислимо за формулою:

$$p_i = P(x_i \leq X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right), \quad (2.24)$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа.

Розглянемо величину $\chi^2 = \sum_{i=1}^q \frac{n}{p_i} (p_i^* - p_i)^2$, яка характеризує ступінь розбіжності теоретичних і емпіричних даних. Враховуючи, що $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, отримаємо

$$\chi_{\text{спост}}^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (2.25)$$

Можна показати, що при $n \rightarrow \infty$ розподіл цієї ВВ, незалежно від того, який закон розподілу генеральної сукупності, прагне до розподілу Пірсона χ^2 з числом ступенів свободи

$$v = q - 1 - k, \quad (2.26)$$

де k – число параметрів генерального розподілу, що оцінюються на основі спостережених даних. Якщо перевіряється згода вибіркового розподілу з розподілом Пуассона, єдиний параметр якого оцінюється за вибірковими даними, то $v = q - 2$, якщо перевіряється згода з нормальним розподілом, для якого за вибірковими даними оцінюються два параметри: вибіркве середнє – $\bar{x}_v$ і вибіркве середнє квадратичне відхилення – σ , то $v = q - 3$ і т. д.

При повному збігу теоретичного та експериментального розподілів $\chi^2 = 0$, інакше $\chi^2 > 0$. Обравши рівень значущості α , знаходимо табличне критичне значення $\chi_{\text{кр}}^2$.

При $\chi_{\text{спост}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$ приймаємо гіпотезу H_0 , а при $\chi_{\text{спост}}^2 \geq \chi_{\text{кр}}^2$ відхиляємо гіпотезу H_0 про вид розподілу.

У зв'язку з асимптотичним характером закону Пірсона χ^2 повинні виконуватися наступні умови:

а) вибірка повинна утворюватися в результаті випадкового відбору;

б) обсяг вибірки n повинен бути достатньо великим (практично не менше 50 одиниць);

в) чисельність кожної групи має бути не менше 5 (якщо ця умова не виконується, проводиться об'єднання малочисельних інтервалів).

Приклад 53. За даними вибірки для випадкової величини X :

200	209	192	205	197	191	207	165	183	200
185	169	214	165	185	209	185	202	215	172
193	214	176	217	188	191	224	190	167	189
201	208	192	186	170	191	201	192	214	189
168	179	202	192	173	180	200	189	181	172

Треба: а) записати статистичний та інтервальний статистичний ряди; б) записати статистичну (емпіричну) функцію розподілу; в) побудувати полігон та гістограму частот; г) знайти вибіркове середнє і вибіркове середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації V^* ; д) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричного розподілу і теоретичного (нормального) розподілу.

Розв'язування. Обсяг вибірки – 50. Упорядкуємо дані вибірки за зростанням (ранжируємо вибірку). Маємо варіаційний ряд:

165	165	165	168	168	170	170	170	173	176
180	181	184	185	185	185	186	186	189	189
189	190	190	191	191	191	193	194	194	197
197	197	200	200	200	202	202	204	205	205
205	207	208	209	211	214	214	215	217	224

Запишемо статистичний ряд, де x_i – можливі значення ВВ X , n_i – частота відповідних значень x_i :

x_i	165	168	170	173	176	180	181	184	185	186	189
n_i	3	2	3	1	1	1	1	1	3	2	3

x_i	190	191	193	194	197	200	202	204	205	207	208
n_i	2	3	1	2	3	3	2	1	3	1	1

x_i	209	211	214	215	217	224
n_i	1	1	2	1	1	1

Виберемо найбільше та найменше значення x_i : $x_{\max} = 224$, $x_{\min} = 165$. Визначимо довжину інтервалу:

$$\Delta = \frac{224 - 165}{1 + 3,332 \cdot \lg 50} \approx \frac{59}{6,66} \approx 8,86 \approx 9, \quad q \approx 6,66 \approx 7.$$

Побудуємо інтервальний статистичний ряд.

Інтервал	Середина інтервалу $x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	Частоти n_i	Відносні частоти $w_i = \frac{n_i}{n}$	Щільності відносних частот $H_i = \frac{w_i}{\Delta}$
[165,174)	169,5	9	0,18	0,02
[174,183)	178,5	3	0,06	0,007
[183,192)	187,5	14	0,28	0,031
[192,201)	196,5	9	0,18	0,02
[201,210)	205,5	9	0,18	0,02
[210,219)	214,5	5	0,1	0,01
[219,224]	221,5	1	0,02	0,002
$q = 7$		$\sum_i n_i = 50$	$\sum_i w_i = 1$	

Побудуємо полігон та гістограму відносних частот:

Графік гістограми частот має вигляд:

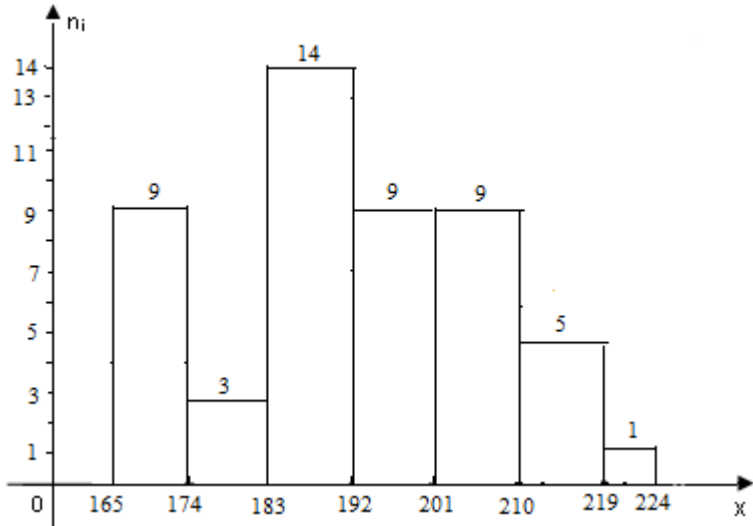


Рисунок 2.4

Графік полігона частот має вигляд:

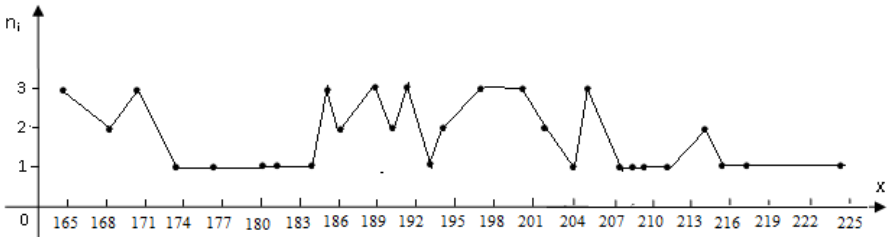


Рисунок 2.5

Запишемо емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 165 \\ 0,18, & 165 < x \leq 174 \\ 0,24, & 174 < x \leq 183 \\ 0,52, & 183 < x \leq 192 \\ 0,7, & 192 < x \leq 201 \\ 0,88, & 201 < x \leq 210 \\ 0,98, & 210 < x \leq 219 \\ 1, & 219 < x \leq 224 \end{cases}$$

Знайдемо числові характеристики.

1) Вибіркове середнє:

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= \sum_{i=1}^q x_i' \cdot w_i = 169,5 \cdot 0,18 + 178,5 \cdot 0,06 + 187,5 \cdot 0,28 + 196,5 \cdot 0,18 + \\ &+ 205,5 \cdot 0,18 + 214,5 \cdot 0,1 + 221,5 \cdot 0,02 = 191,96. \end{aligned}$$

2) Вибіркова дисперсія:

$$\begin{aligned} D_e &= \sum_{i=1}^q \left(x_i' \right)^2 \cdot w_i - (\bar{x}_e)^2 = (169,5)^2 \cdot 0,18 + (178,5)^2 \cdot 0,06 + \\ &+ (187,5)^2 \cdot 0,28 + (196,5)^2 \cdot 0,18 + (205,5)^2 \cdot 0,18 + (214,5)^2 \cdot 0,1 + \\ &+ (221,5)^2 \cdot 0,02 - (191,96)^2 = 212,2084. \end{aligned}$$

3) Виправлена вибіркова дисперсія:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{50}{49} \cdot 212,2084 \approx 216,5392.$$

4) Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{216,5392} \approx 14,7153.$$

Коефіцієнт варіації:

$$V^* = \frac{s}{x_g} \cdot 100\% = \frac{14,7153}{191,96} \cdot 100\% \approx 7,666\%.$$

Відповідно до гіпотези про нормальний закон розподілу, щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{14,7153\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-191,96)^2}{2(14,7153)^2}},$$

а функція розподілу –

$$F(x) = \frac{1}{14,7153\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-191,96)^2}{2 \cdot (14,7153)^2}} dz = \Phi\left(\frac{x-191,96}{14,7153}\right) + 0,5.$$

Перевіримо узгодженість експериментальних даних з гіпотезою про нормальний розподіл випадкової величини X , застосувавши критерій Пірсона:

$$\chi_{\text{спост}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

$$\text{де } p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_g}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_g}{s}\right).$$

Знайдемо ймовірності p_i . Значення функції $\Phi(x)$ знаходимо за Таблицею А2 (Частина 2). Маємо

$$\begin{aligned} p_1 &= \Phi\left(\frac{174 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{165 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(-1,22) - \Phi(-1,83) = -\Phi(1,22) + \\ &+ \Phi(1,83) = -0,3883 + 0,4664 = 0,0781, \end{aligned}$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{183 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{174 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(-0,61) - \Phi(-1,22) = -\Phi(0,61) + \\ + \Phi(1,22) = -0,2291 + 0,3883 = 0,1592,$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{192 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{183 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(0,003) - \Phi(-0,61) = \Phi(0,003) + \\ + \Phi(0,61) = 0 + 0,2291 = 0,2291,$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{201 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{192 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(0,61) - \Phi(0,003) = 0,2291 + \\ + 0 = 0,2291,$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{210 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{201 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(1,23) - \Phi(0,61) = 0,3907 - \\ - 0,2291 = 0,1616,$$

$$p_6 = \Phi\left(\frac{219 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{210 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(1,84) - \Phi(1,23) = 0,4671 - \\ - 0,3907 = 0,0764,$$

$$p_7 = \Phi\left(\frac{224 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{219 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(2,18) - \Phi(1,84) = 0,4854 - \\ - 0,4671 = 0,0183.$$

Обчислимо значення критерію $\chi^2_{\text{спост}}$, що спостерігається:

$$\begin{aligned}\chi_{\text{спост}}^2 &= \frac{(9-3,905)^2}{3,905} + \frac{(3-7,96)^2}{7,96} + \frac{(14-11,455)^2}{11,455} + \frac{(9-11,455)^2}{11,455} + \\ &+ \frac{(9-8,08)^2}{8,08} + \frac{(5-3,82)^2}{3,82} + \frac{(1-0,915)^2}{0,915} = 6,6476 + 3,0907 + \\ &+ 0,5654 + 0,5261 + 0,1048 + 0,3645 + 0,0079 = 11,307.\end{aligned}$$

При $\alpha = 0,05$ з числом ступенів свободи $\nu = q - 1 - k$, де k – число параметрів генерального розподілу (у нашому прикладі їх два: середнє вибіркве $\bar{x}_g$ і виправлене вибіркве середнє квадратичне відхилення s , тому $k = 2$; число інтервалів $q = 7$), що оцінюються на основі спостережених даних. Тоді $\nu = 7 - 1 - 2 = 4$.

Знаходимо за Таблицею А6 (Частина 2) $\chi_{\text{кр}}^2(0,05;4) = 9,5$.

Тому що $\chi_{\text{спост}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2$, гіпотеза про нормальний закон розподілу випадкової величини X не приймається (відкидається).

Приклад 54. Отримано наступний розподіл 100 робітників цеху по виробітку у звітному році (у відсотках до попереднього року):

Виробітки у звітному році (у % до попереднього року)	[94;104)	[104;114)	[114;124)	[124;134)	[134;144]	Σ
Кількість робітників	6	20	45	24	5	100

При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини X – виробітку робітників за допомогою критерію χ^2 Пірсона.

Розв'язування. Параметри теоретичного нормального закону розподілу a та σ^2 , що є відповідно математичним сподіванням і дисперсією ВВ X , невідомі. Замінюємо їх «найкращими» оцінками за вибіркою: вибірковою середньою $\bar{x}_e$ і виправленою вибірковою дисперсією s^2 . Записуємо інтервальний статистичний ряд у вигляді:

Інтервал $[x_i; x_{i+1}]$	[94;104)	[104;114)	[114;124)	[124;134)	[134;144]
Середина інтервалу $x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	99	109	119	129	139
Частоти n_i	6	20	45	24	5

За даним в умові розподілом обчислюємо:

1) Вибіркове середнє:

$$\begin{aligned}\bar{x}_e &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q x'_i \cdot n_i = \frac{1}{100} (99 \cdot 6 + 109 \cdot 20 + 119 \cdot 45 + 129 \cdot 24 + 139 \cdot 5) = \\ &= \frac{1}{100} \cdot 11920 = 119,2.\end{aligned}$$

2) Вибіркова дисперсія:

$$\begin{aligned}D_e &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q (x'_i)^2 \cdot n_i - (\bar{x}_e)^2 = \sum_{i=1}^q (x'_i)^2 \cdot \frac{n_i}{n} - (\bar{x}_e)^2 = 99^2 \cdot 0,06 + \\ &+ 109^2 \cdot 0,2 + 119^2 \cdot 0,45 + 129^2 \cdot 0,24 + 139^2 \cdot 0,05 - (119,2)^2 = 87,96.\end{aligned}$$

3) Виправлена вибіркова дисперсія:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{100}{99} \cdot 87,96 \approx 88,8485.$$

4) Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{88,8485} \approx 9,4259.$$

Знайдемо ймовірності p_i . Значення функції $\Phi(x)$ знаходимо за Таблицею A2 (Частина 2). Маємо

$$\begin{aligned} p_1 &= \Phi\left(\frac{104-119,2}{9,4259}\right) - \Phi\left(\frac{94-119,2}{9,4259}\right) = \Phi(-1,61) - \Phi(-2,67) = -\Phi(1,61) + \\ &+ \Phi(2,67) = -0,4463 + 0,4962 = 0,0499, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \Phi\left(\frac{114-119,2}{9,4259}\right) - \Phi\left(\frac{104-119,2}{9,4259}\right) = \Phi(-0,55) - \Phi(-1,61) = -\Phi(0,55) + \\ &+ \Phi(1,61) = -0,2088 + 0,4463 = 0,2375, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \Phi\left(\frac{124-119,2}{9,4259}\right) - \Phi\left(\frac{114-119,2}{9,4259}\right) = \Phi(0,51) - \Phi(-0,55) = \Phi(0,51) + \\ &+ \Phi(0,55) = 0,1950 + 0,2088 = 0,4038, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= \Phi\left(\frac{134-119,2}{9,4259}\right) - \Phi\left(\frac{124-119,2}{9,4259}\right) = \Phi(1,57) - \Phi(0,51) = 0,4418 - \\ &- 0,1950 = 0,2468, \end{aligned}$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{144-119,2}{9,4259}\right) - \Phi\left(\frac{134-119,2}{9,4259}\right) = \Phi(2,63) - \Phi(1,57) = 0,4958 -$$

$$- 0,4418 = 0,054.$$

Складемо таблицю:

інтервал $[x_i; x_{i+1}]$	[94;104)	[104;114)	[114;124)	[124;134)	[134;144]	Σ
частоти n_i	6	20	45	24	5	100
ймовірнос- ті p_i	0,0499	0,2375	0,4038	0,2468	0,054	0,992
теоретичні частоти np_i	4,99	23,75	40,38	24,68	5,4	99,2
$(n_i - np_i)^2$	1,0201	14,0625	21,3444	0,4624	0,16	—
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	0,2044	0,5921	0,5286	0,0187	0,0296	1,3734

Фактично спостережене значення $\chi^2_{\text{спост}} = 1,3734$. Тому що число інтервалів $q = 5$, а нормальний закон розподілу визначається двома параметрами, які ми оцінювали за вибіркою, тоді число ступенів свободи $\nu = 5 - 1 - 2 = 2$. За Таблицею А6 (Частина 2) $\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 2) = 5,99$. Тому що $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гіпотеза про нормальний закон розподілу випадкової величини X узгоджується з дослідними даними, тобто не відкидається.