

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

**ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ
РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
РОЗДІЛИ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА», «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА»,
«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ», «ПРЯМА ТА
ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ», «ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»,
«ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ»**

**для студентів технічних спеціальностей
денної форми навчання**

Приклади розв'язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики. Розділи «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині», «Пряма та площина у просторі», «Поверхні другого порядку», «Лінійні оператори» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл. : Н. М. Антоненко, А. В. Засовенко, І. І. Зіненко, Н. В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 67 с.

Укладачі: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент,
Засовенко А.В. к. т. н., доцент,
Зіненко І.І., асистент,
Сніжко Н.В, к. ф.-м. н., доцент

Рецензент: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Відповідальний за випуск: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 5 від 23.02.2023 р.

Рекомендовано
НМК машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 5 від 09.03.2023 р.

ЗМІСТ

1 Лінійна алгебра	4
2 Векторна алгебра	19
3 Аналітична геометрія на площині	27
4 Пряма та площина у просторі	39
5 Поверхні другого порядку	46
6 Лінійні оператори	51
Література	64
Додаток А. Рівняння та графіки кривих другого порядку зі зміщеним центром	65
Додаток Б. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку та їх графіки	66

1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Розв'язування типового варіанту

Завдання 1.1 (до Завдання 1.2.1 [4]). Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ x-2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання. Для знаходження визначника необхідно скористатися правилом трикутника або Саррюса.

Правило трикутника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило Саррюса. Справа від визначника приписуємо два його перших стовпця, потім знаходимо суму добутків елементів, які стоять на головній діагоналі та на діагоналях паралельних їй і віднімаємо добутки елементів, які стоять на побічній діагоналі та на діагоналях паралельних їй:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Розкриємо визначник за правилом трикутника, отримаємо квадратне рівняння відносно змінної x :

$$\Delta = 6 + x + 4(x - 2) - (6 + 4 + x(x - 2)) = 0, \quad -x^2 + 7x - 12 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Відповідь: $\{3; 4\}$

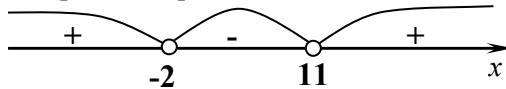
Завдання 1.2 (до Завдання 1.2.2 [4]). Розв'язати нерівність

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ 3 & -4 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} > 0$$

Розв'язання. Розкривши визначник за правилом трикутника, отримаємо квадратну нерівність:

$$4x + 5x + 3 + 4 - x^2 + 15 > 0; \quad -x^2 + 9x + 22 > 0, \quad x^2 - 9x - 22 < 0.$$

На числову вісь нанесемо корені відповідного квадратного рівняння $x_1 = 11$; $x_2 = -2$ та отримаємо три інтервали, на яких з'ясуємо знак квадратного тричлена.



Виберемо інтервали, на яких знак квадратного тричлена співпадає зі знаком нерівності. Розв'язок заданої нерівності: $x \in (-2; 11)$.

Відповідь: $x \in (-2; 11)$.

Завдання 1.3 (до Завдання 1.2.3 [4]). Обчислити визначник 4-го порядку:

- а) розклавши по елементам 1-го рядка;
- б) використавши властивості визначників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Обчислимо заданий визначник, розклавши його по елементам першого рядка:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \\
 & = 2 \cdot (4 + 6 + 6 + 2 - 18 + 4) + 3 \cdot (18 - 6 + 6 - 4) + (9 - 1 - 3 - 2) + 0 = 53.
 \end{aligned}$$

б) 1 спосіб. Зведемо обчислення заданого визначника четвертого порядку до обчислення одного визначника третього порядку, перетворивши в першому стовпці всі елементи, крім третього на нулі. Для цього до першого рядка додамо третій помножений на (-2) , а до четвертого – третій помножений на (-3) , отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо отриманий визначник по елементам першого стовпця, маємо

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \\
 & = 14 + 12 + 0 + 48 - 0 - 21 = 53.
 \end{aligned}$$

2 спосіб. Зведемо заданий визначник до верхньотрикутного вигляду, тобто елементи нижче головної діагоналі перетворимо на нулі, та скористаємось тим, що визначник верхньотрикутної матриці дорівнює добутку елементів, що стоять на головній діагоналі.

Спершу поміняємо місцями перший та третій рядки заданого визначника (визначник змінить знак), потім до третього рядка додаємо перший помножений на (-2) , а до четвертого – перший помножений на (-3) . Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \end{vmatrix}.$$

До третього рядка додамо другий, а до четвертого – другий помножений на (-4) , матимемо:

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

До четвертого рядка додамо третій помножений на (-8) , отримаємо:

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 53 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 53 = 53.$$

Відповідь: а) 53; б) 53.

Завдання 1.4 (до Завдання 1.2.4 [4]). Розв'язати систему лінійних неоднорідних рівнянь:

- а) за правилом Крамера;
- б) матричним способом;
- в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Розв'яжемо систему за правилом Крамера. Для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

формули Крамера мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник матриці системи,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad -$$

визначники невідомих.

Знайдемо визначник матриці A :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 5 + 1 - 10 + 3 + 4 = 27.$$

Послідовно замінюючи у визначнику Δ перший другий та третій стовпці на стовпці вільних членів, отримуємо:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 7 - 1 + 2 + 2 + 28 = 54,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -84 + 1 + 10 + 35 + 3 + 8 = -27,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 35 + 20 + 21 + 1 = 81.$$

За формулами Крамера одержуємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3.$$

б) Розв'яжемо систему матричним способом. Запишемо систему в матричній формі:

$$AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи в матричній формі має вигляд: $X = A^{-1}B$, де A^{-1} – обернена матриця до матриці A , яку знаходимо за формулою:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \text{ де } \det A \neq 0, A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} - \text{приєднана матриця,}$$

елементами якої є алгебраїчні доповнення транспонованої матриці A^T .

Знайдемо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 5 + 1 - 10 + 3 + 4 = 27 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - (-1) = 9; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 5) = 9;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-10) = 9; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 1) = 5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-5) = -7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 5) = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Запишемо приєднану матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок системи:

$$X = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 18+35+1 \\ 18-49+4 \\ 18+56+7 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 54 \\ -27 \\ 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

в) Розв'яжемо систему методом Гаусса, який складається з прямого ходу (зведення системи до трикутного вигляду) та зворотного (розв'язання зведеної до трикутного вигляду системи, починаючи з останнього рівняння).

Запишемо розширену матрицю системи (до матриці системи приєднуємо стовпець вільних членів):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right).$$

Приведемо її, за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці, до трикутного вигляду. Спочатку переставимо місцями перший та другий рядки розширеної матриці, отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right).$$

Перетворимо на нулі всі елементи першого стовпця, крім першого: додамо до другого рядка перший, помножений на (-3) , а до третього – перший помножений на (-5) . Матимемо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \\ 0 & 9 & -9 & -36 \end{array} \right).$$

Помножимо третій рядок на $\left(\frac{1}{9}\right)$ та поміняємо місцями з другим рядком, отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \\ 0 & 9 & -9 & -36 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \end{array} \right).$$

Далі додамо до третього рядка другий, помножений на (-7) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right).$$

Помножимо третій рядок на $\frac{1}{3}$, матимемо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

На цьому прямий хід метода Гаусса завершено. Запишемо отриману систему у вигляді СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_2 - x_3 = -4, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Зворотнім ходом методу Гаусса знаходимо невідомі змінні:

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 2x_2 - x_3, \\ x_2 = -4 + x_3, \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 2 \cdot (-1) - 3 = 2, \\ x_2 = -4 + 3 = -1, \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: а) $\{2; -1; 3\}$; б) $\{2; -1; 3\}$; в) $\{2; -1; 3\}$.

Завдання 1.5 (до Завдання 1.2.5 [4]). Розв'язати системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$, тому система

має єдиний розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

б) Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 9 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, тому система має

безліч розв'язків.

Відомо, що система трьох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

коли $\det A = 0$, може зводитися до системи двох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими, коли хоча б один з мінорів 2-го порядку відмінний від нуля, або до одного рівняння з трьома невідомими, коли усі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю. Розглянемо випадок, коли система зводиться до двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \end{cases}$$

де $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Розв'язок цієї системи дають формули:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t, \quad t \in R$$

Друге рівняння заданої системи є сумою першого та третього, тому його можна відкинути. Отримуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо формули для знаходження розв'язку цієї системи:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot t = (-15 + 4)t = -11t,$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot t = (12 - 10)t = 2t,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot t = (-2 + 9)t = 7t.$$

Відповідь: а) $\{(0;0;0)\}$; б) $\begin{cases} x_1 = -11t, \\ x_2 = 2t, \\ x_3 = 7t, \end{cases} \text{ де } t \in \mathbb{R}.$

Завдання 1.6 (до Завдання 1.2.6 [4]). Виконати дії над матрицями:

а) $A \cdot (2 \cdot D - S^T)$; б) $S \cdot D + 3E$.

Тут $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

а) Результатом множення матриці на число є матриця, кожний елемент якої помножений на це число:

$$2 \cdot D = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матриця – це матриця рядки і стовпці якої змінені місцями:

$$S^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$G = 2 \cdot D - S^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 8 & 2 & -4 \\ 7 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $R = A \cdot G$ (Перемножити дві матриці можна лише тоді, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. При цьому при множенні матриці $A = (a_{il})$ на матрицю $G = (g_{lj})$ ($i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$) елементи матриці

$R = A \cdot G$ обчислюються за формулою $r_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} g_{lj}$, де $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$):

$$\begin{aligned} R = A \cdot G &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 8 & 2 & -2 \\ 7 & -5 & 11 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4-15-8+14 & 24-10-2-10 & -4+0+2+22 \\ -2+0+24-0 & -12+0+6+0 & 2+0-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 20 \\ 22 & -6 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) Спочатку знайдемо добуток $S \cdot D$:

$$S \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6-1+0-3 & 9+0+0+2 & 0+1+0-5 \\ 0-2+8+3 & 0+0+4-2 & 0+2-2+5 \\ 2-2+8-3 & 3+0+4+2 & 0+2-2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 5 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$E - \text{одинична матриця третього порядку, тобто } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $3 \cdot E$:

$$3 \cdot E = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Остаточнo отримуємо:

$$S \cdot D + 3E = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 5 & 9 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & -4 \\ 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: а) } \begin{pmatrix} -5 & 2 & 20 \\ 22 & -6 & -4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 5 & 11 & -4 \\ 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.7 (до Завдання 1.2.7 [4]). Розв'язати матричні рівняння:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } Y \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Запишемо задане рівняння у вигляді $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Тоді невідому матрицю X можна знайти за формулою: $X = A^{-1}B$, де A^{-1} – обернена матриця матриці A .

Знайдемо визначник матриці A : $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення матриці A : $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-2) = -2.$$

Обернена матриця матиме вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо невідому матрицю X :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-5) & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \\ 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-5) & 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & -1,1 \\ 0,2 & -0,4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) Запишемо задане рівняння у вигляді $Y \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Тоді невідому матрицю Y можна

знайти за формулою: $Y = B \cdot A^{-1}$, де A^{-1} – обернена матриця матриці

$$A. \text{ Знайдемо визначник матриці } A: \det A = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення матриці A : $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3.$$

Обернена матриця матиме вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 0 \cdot (-3) \\ (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) & (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: а) } X = \begin{pmatrix} 1,3 & -1,1 \\ 0,2 & -0,4 \end{pmatrix}; \text{ б) } Y = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.8 (до Завдання 1.2.8 [4]). Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі, знайти всі розв'язки системи:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -7, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків, які залежать від $n - r$ параметрів (n – кількість невідомих, r – ранг матриці системи).

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -9 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -5 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right).$$

Знайдемо ранг матриці системи ($\text{rang} A$) та ранг розширеної матриці ($\text{rang} \tilde{A}$). Для цього зведемо розширену матрицю до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень, які не змінюють ранг матриці. Спочатку перетворимо на нулі всі елементи першого стовпця, крім першого. Для цього до другого рядка додамо перший помножений на 3, до третього – перший, помножений на (-1) , до четвертого – перший помножений на (-2) , отримуємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -9 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -5 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & -13 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -13 & -8 & 6 & -9 \end{array} \right).$$

Далі додамо до третього та четвертого рядків другий рядок, маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & -13 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -13 & -8 & 6 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \end{array} \right).$$

Отже, ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу матриці системи $\text{rang } \tilde{A} = \text{rang } A = 2$, тому згідно теореми Кронекера-Капеллі, задана система сумісна та має безліч розв'язків, які залежать від $n - r = 4 - 2 = 2$ параметрів.

Задавна система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 13x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2, \\ 13x_2 = -8x_3 + 6x_4 + 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 \left(-\frac{8}{13}x_3 + \frac{6}{13}x_4 + \frac{9}{13} \right) - 3x_3 + 2x_4 + 2, \\ x_2 = -\frac{8}{13}x_3 + \frac{6}{13}x_4 + \frac{9}{13}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 - \frac{10}{13}, \\ x_2 = -\frac{8}{13}x_3 + \frac{6}{13}x_4 + \frac{9}{13}. \end{cases}$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 - \frac{10}{13}, \\ x_2 = -\frac{8}{13}x_3 + \frac{6}{13}x_4 + \frac{9}{13}. \end{cases}$$

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Розв'язування типового варіанту

Завдання 2.1 (до Завдання 2.2.1 [4]). Задані точки $A(3; -1; 2)$ і $B(2; 1; 5)$ та вектор $\vec{a} = (-2; 1; 3)$. Знайти: **а)** координати вектора $\overrightarrow{AB}$; **б)** перевірити колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$; **в)** порівняти довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$; **г)** порівняти напрямки векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ у випадку їх колінеарності.

Розв'язання.

а) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2 - 3; 1 + 1; 5 - 2) = (-1; 2; 3).$$

б) Вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні. У нашому випадку: $\frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{3}$. Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$ не колінеарні.

в) Знайдемо довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

Отже, $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$.

г) Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ не колінеарні, тому порівняти їх напрямки неможливо. (У випадку колінеарності векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$ маємо $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{a}$; при $\lambda < 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \vec{a}$, при $\lambda > 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \vec{a}$).

Відповідь: **а)** $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 3)$; **б)** $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$ не колінеарні;

в) $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$; **г)** порівняти неможливо.

Завдання 2.2 (до Завдання 2.2.2 [6]). Для векторів $\vec{a} = (-2; 1; 3)$ і $\vec{b} = (1; 2; -5)$ знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Розв'язання. $\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 1; 1 + 2; 3 + (-5)) = (-1; 3; -2)$;

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}.$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (-2 - 1; 1 - 2; 3 - (-5)) = (-3; -1; 8);$$

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 1 + 64} = \sqrt{74}.$$

$$2\bar{a} = (2 \cdot (-2); 2 \cdot 1; 2 \cdot 3) = (-4; 2; 6); \quad 3\bar{b} = (3 \cdot 1; 3 \cdot 2; 3 \cdot (-5)) = (3; 6; -15);$$

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = (-4 - 3; 2 - 6; 6 - (-15)) = (-7; -4; 21);$$

$$|2\bar{a} - 3\bar{b}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 21^2} = \sqrt{49 + 16 + 441} = \sqrt{506}.$$

$$\text{Відповідь: } |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{14}; \quad |\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{74}; \quad |2\bar{a} - 3\bar{b}| = \sqrt{506}.$$

Завдання 2.3 (до Завдання 2.2.3 [4]). Вектор $\bar{c} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ розкладено за базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Знайти розклад за цим базисом вектора $\bar{d}$, протилежно напрямленого до вектора $\bar{c}$, якщо відомий модуль вектора $|\bar{d}| = 5$.

Розв'язання. Оскільки вектор $\bar{c}$ протилежно напрямлений до вектора $\bar{d}$, то $\bar{d} = \lambda \bar{c}$ і $\lambda < 0$. Маємо $\bar{d} = (2\lambda; -2\lambda; 3\lambda)$,

$$|\bar{d}| = \sqrt{(2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda^2} = \sqrt{17\lambda^2} = |\lambda|\sqrt{17},$$

$$|\lambda|\sqrt{17} = 5, \quad |\lambda| = \frac{5}{\sqrt{17}}, \quad \lambda = \pm \frac{5}{\sqrt{17}}. \text{ Оскільки } \lambda < 0, \text{ то } \lambda = -\frac{5}{\sqrt{17}}. \text{ Отже,}$$

$$\bar{d} = (2\lambda; -2\lambda; 3\lambda) = \left(\frac{-10}{\sqrt{17}}; \frac{10}{\sqrt{17}}; -\frac{15}{\sqrt{17}} \right).$$

$$\text{Відповідь: } \bar{d} = \left(-\frac{10}{\sqrt{17}}; \frac{10}{\sqrt{17}}; -\frac{15}{\sqrt{17}} \right).$$

Завдання 2.4 (до Завдання 2.2.4 [4]). Дано чотири вектори: $\bar{a} = (1; 3; 5)$, $\bar{b} = (-2; 1; -1)$, $\bar{c} = (1; -1; -4)$, $\bar{m} = (7; 2; -1)$. Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, знайти розвинування вектора $\bar{m}$ за цим базисом.

Розв'язання. Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, якщо визначник, що складений з їх координат, не дорівнює нулю. Перевіримо це:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 10 - 3 - 5 - 24 - 1 = -27 \neq 0.$$

Отже вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють базис.

Розвинення вектора $\bar{m}$ за базисом $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ має вигляд: $\bar{m} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$. Потрібно знайти коефіцієнти x , y , z цього розвинення, які називаються *координатами вектора $\bar{m}$ в базисі $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$* . Для цього треба розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 3x + y - z = 2, \\ 5x - y - 4z = -1, \end{cases}$$

де 1-й, 2-й і 3-й стовпці коефіцієнтів системи – задані координати відповідно векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, стовпець вільних членів – задані координати вектора $\bar{m}$.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -28 - 2 - 2 + 1 - 16 - 7 = -54;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 35 - 3 - 10 + 84 - 1 = 27;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 20 - 21 - 35 - 6 + 2 = -81.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{-27} = -1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-81}{-27} = 3.$$

Відповідь: $\bar{m} = 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$.

Завдання 2.5 (до Завдання 2.2.5 [4]). Знайти орт вектора $\vec{a} = (-2; 1; 3)$ та його напрямні косинуси.

Розв'язання. Орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ обчислюється за формулою $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right)$.

Знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

$$\text{Обчислимо орт вектора } \vec{a}: \vec{a}^0 = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

Знайдемо напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\text{Відповідь: } \vec{a}^0 = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right); \quad \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \\ \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Завдання 2.6 (до Завдання 2.2.6 [4]). Визначити при якому значенні α вектори $\vec{a} = \vec{i} + \alpha\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Маємо

$$1 \cdot (-2) + \alpha \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 0; \quad -2 + 3\alpha - 5 = 0; \quad 3\alpha = 7; \quad \alpha = 7/3.$$

$$\text{Відповідь: } \alpha = 7/3.$$

Завдання 2.7 (до Завдання 2.3.7 [4]). Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{f} = (2; 5; 1)$, рухаючись прямолінійно із точки $A(3; -1; 2)$ в точку $B(2; 1; 5)$.

Розв'язання. Робота A дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{f}$ на вектор переміщення $\vec{AB}$: $A = \vec{f} \cdot \vec{AB}$.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2 - 3; 1 + 1; 5 - 2) = (-1; 2; 3);$$

$$A = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -2 + 10 + 3 = 11 \text{ (од. роб.)}$$

Відповідь: $A = 11$ од. роб.

Завдання 2.8 (до Завдання 2.2.8 [4]). Знайти вектор $\vec{m}$, якщо відомо, що він колінеарний до вектора $\vec{a} = (-2; 1; 3)$ і скалярний добуток $\vec{m} \cdot \vec{a} = 42$.

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто має місце рівність: $\vec{m} = \lambda \vec{a}$. Тоді $\vec{m} \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a} = \lambda |\vec{a}|^2$. За умовою $\lambda |\vec{a}|^2 = 42$. Маємо: $|\vec{a}|^2 = (-2)^2 + 1^2 + 3^2 = 4 + 1 + 9 = 14$; $\lambda \cdot 14 = 42$; $\lambda = 42/14 = 3$; $\vec{m} = \lambda \vec{a} = 3 \cdot (-2; 1; 3) = (-6; 3; 9)$.

Відповідь: $\vec{m} = (-6; 3; 9)$.

Завдання 2.9 (до Завдання 2.2.9 [4]). Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$. Знайти скалярний добуток $\vec{m} \cdot \vec{n}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$.

Розв'язання. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}$ та $\vec{n}$, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів $S = |\vec{m} \times \vec{n}|$.

Обчислимо векторний добуток векторів $\vec{m}$ та $\vec{n}$:

$$\vec{m} \times \vec{n} = (2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b}.$$

Із урахуванням властивостей векторного добутку двох векторів $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ та формули $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$, отримуємо:

$$\vec{m} \times \vec{n} = 2 \cdot \vec{0} - 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} - 3 \cdot \vec{0} = -7\vec{a} \times \vec{b}.$$

$$S = |\overline{m} \times \overline{n}| = |-7 \overline{a} \times \overline{b}| = 7 |\overline{a} \times \overline{b}| = 7 |\overline{a}| |\overline{b}| \sin(\overline{a}, \overline{b}) =$$

$$= 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 168 \cdot \sqrt{3}/2 = 84\sqrt{3} \text{ (кв. од.)}$$

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = (2\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - 3\overline{b}) = 2\overline{a} \cdot \overline{a} - 6\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{a} - 3\overline{b} \cdot \overline{b}.$$

Із урахуванням властивостей скалярного добутку двох векторів $\overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$ та формули $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\overline{a}, \overline{b})$, отримуємо:

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = 2|\overline{a}|^2 - 6\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{b} - 3|\overline{b}|^2 = 2 \cdot |\overline{a}|^2 - 5|\overline{a}| |\overline{b}| \cos(\overline{a}, \overline{b}) - 3 \cdot |\overline{b}|^2 =$$

$$= 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ - 3 \cdot 6^2 = 32 - 120 \cdot 0,5 - 108 = -136.$$

Відповідь: $S = 84\sqrt{3}$ кв. од.; $\overline{m} \cdot \overline{n} = -136$.

Завдання 2.10 (до Завдання 2.2.10 [4]). Знайти момент $\overline{M}$ сили $\overline{p} = (2; 5; 1)$ відносно точки $C(2; 1; 5)$, якщо сила прикладена до точки $A(3; -1; 2)$.

Розв'язання. Момент сили дорівнює векторному добутку вектора плеча на вектор сили: $\overline{M} = \overline{CA} \times \overline{p}$.

$$\overline{CA} = (x_A - x_C; y_A - y_C; z_A - z_C) = (3 - 2; -1 - 1; 2 - 5) = (1; -2; -3).$$

$$\overline{M} = \overline{CA} \times \overline{p} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 6\overline{j} + 5\overline{k} + 4\overline{k} - \overline{j} + 15\overline{i} = 13\overline{i} - 7\overline{j} + 9\overline{k}.$$

Відповідь: $\overline{M} = (13; -7; 9)$.

Завдання 2.11 (до Завдання 2.2.11 [4]). Задані координати вершин трикутника ABC : $A(3; -1; 2)$, $B(2; 5; 1)$, $C(2; 1; 5)$. Знайти $S_{\Delta ABC}$ та внутрішній кут при вершині A .

Розв'язання.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, обчислюється за формулою $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

Спочатку знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, на яких побудовано трикутник ΔABC :

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2 - 3; 5 - (-1); 1 - 2) = (-1; 6; -1);$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (2 - 3; 1 - (-1); 5 - 2) = (-1; 2; 3).$$

Маємо:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k} + 6\bar{k} + 3\bar{j} + 2\bar{i} = 20\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k};$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{20^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{400 + 16 + 16} = \sqrt{432} = 12\sqrt{3};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (кв. од.)}$$

Знайдемо внутрішній кут при вершині A за формулою

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}. \text{ Обчислимо скалярний добуток векторів } \overline{AB} \text{ і } \overline{AC}$$

та їх модулі:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-1) \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 10;$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 36 + 1} = \sqrt{38};$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$$

Маємо:

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{532}} = \frac{5}{\sqrt{133}}; \angle A = \arccos \frac{5}{\sqrt{133}}.$$

$$\textbf{Відповідь: } S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3} \text{ кв. од.}; \angle A = \arccos \frac{5}{\sqrt{133}}.$$

Завдання 2.12 (до Завдання 2.2.12 [4]). З'ясувати, чи знаходяться чотири точки: $A(1; 1; 0)$, $B(-1; 0; 3)$, $C(0; 4; -2)$, $D(4; 3; -5)$ на одній площині.

Розв'язання. Точки A , B , C , D знаходяться на одній площині, якщо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, що мають спільний початок, компланарні. Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-1 - 1; 0 - 1; 3 - 0) = (-2; -1; 3);$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (0 - 1; 4 - 1; -2 - 0) = (-1; 3; -2);$$

$$\overline{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (4 - 1; 3 - 1; -5 - 0) = (3; 2; -5);$$

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 30 + 6 - 6 - 27 - 8 + 5 = 0.$$

Отже, точки A, B, C, D знаходяться на одній площині.

Відповідь: точки A, B, C, D знаходяться на одній площині.

Завдання 2.13 (до Завдання 2.2.13 [4]). Обчислити об'єм тетраедра $ABCD$, якщо відомі координати його вершин $A(3; -1; 2)$, $B(2; 5; 1)$, $C(2; 1; 5)$, $D(1; 1; 4)$. З'ясувати, яку трійку (праву чи ліву) утворюють вектори, на яких тетраедр побудований.

Розв'язання. Об'єм тетраедра $ABCD$, побудованого на векторах

$$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \text{ обчислюється за формулою } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}|.$$

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2 - 3; 5 + 1; 1 - 2) = (-1; 6; -1);$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (2 - 3; 1 + 1; 5 - 2) = (-1; 2; 3);$$

$$\overline{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (1 - 3; 1 + 1; 4 - 2) = (-2; 2; 2);$$

Знайдемо їх мішаний добуток:

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 36 + 2 - 4 + 12 + 6 = -24;$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |-24| = \frac{24}{6} = 4 \text{ (куб. од.)}$$

Оскільки $\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = -24 < 0$, то вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, на яких побудований тетраедр, утворюють ліву трійку.

Відповідь: $V_{ABCD} = 4$ куб. од.; вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, на яких побудований тетраедр, утворюють ліву трійку.

3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Завдання 3.1 (до Завдання 3.2.1 [4]). Трикутник ABC задано координатами його вершин: $A(6;-4)$, $B(10;8)$, $C(-6;2)$. Побудувати трикутник ABC в декартовій системі координат і знайти:

- а) довжину і рівняння сторони AB ;
 - б) довжину і рівняння висоти CH , що проведена з вершини C на сторону AB ;
 - в) координати т. H – точки перетину CH і AB ;
 - г) рівняння середньої лінії MN , паралельної стороні BC ;
 - д) тангенс кута при вершині B .
- Усі рівняння прямих представити у загальному вигляді.

Розв’язання. Побудуємо трикутник за координатами його вершин (рис. 3.1).

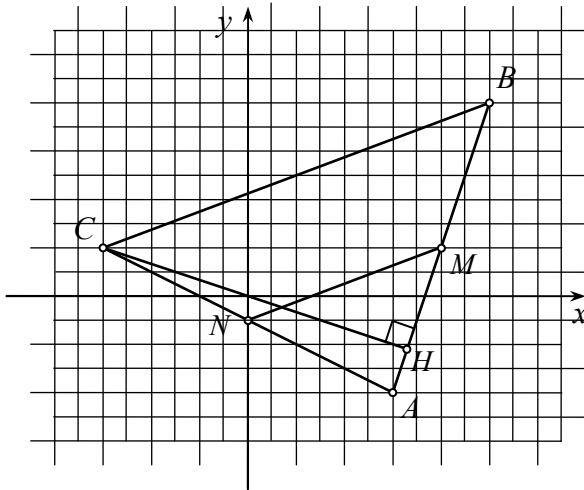


Рисунок 3.1

- а) Довжина сторони AB :

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \\
 &= \sqrt{(10 - 6)^2 + (8 - (-4))^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

Рівняння сторони AB знайдемо як рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \quad \frac{x - 6}{10 - 6} = \frac{y - (-4)}{8 - (-4)}, \quad \frac{x - 6}{4} = \frac{y + 4}{12},$$

$$3x - y - 22 = 0 \text{ (рівняння } AB \text{ у загальному вигляді) або } y = 3x - 22.$$

б) З п. а) кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $k_{AB} = 3$.

Оскільки $CH \perp AB$, то $k_{CH} \cdot k_{AB} = -1$. Маємо: $k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{3}$.

Рівняння прямої CH :

$$y = y_C + k_{CH}(x - x_C),$$

$$y = 2 - \frac{1}{3}(x + 6) = -\frac{1}{3}x.$$

Запишемо рівняння прямої CH у загальному вигляді: $y = -\frac{1}{3}x$,

$$y + \frac{1}{3}x = 0, \quad 3y + x = 0.$$

Довжина висоти – це відстань від точки C до прямої AB .

Відомо, що відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L , заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

У нашому випадку отримуємо:

$$d = CH = \frac{|Ax_C + By_C + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot (-6) - 1 \cdot (2) - 22|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{42}{\sqrt{10}} = \frac{21\sqrt{10}}{5}.$$

в) Точку H перетину висоти CH і прямої AB , знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = 3x - 22 \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{5} \\ y = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Отже, точка H має координати $H\left(\frac{33}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

г) Рівняння середньої лінії MN , паралельної стороні BC , можна знайти одним із нижче наведених способів.

1 спосіб. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BC . Для цього знайдемо рівняння сторони BC :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}, \quad \frac{x - 10}{-6 - 10} = \frac{y - 8}{2 - 8}, \quad \frac{x - 10}{-16} = \frac{y - 8}{-6}, \quad y = \frac{3}{8}x + \frac{17}{4}.$$

$$\text{Отже, } k_{BC} = \frac{3}{8}.$$

Оскільки шукана середня лінія паралельна прямій BC , то їх кутові коефіцієнти рівні. Нехай M – середина сторони AB . Тоді

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + 8}{2} = 2.$$

Отже, $M(8, 2)$. Рівняння середньої лінії MN (рис. 3.1) за кутовим коефіцієнтом $k_{MN} = \frac{3}{8}$ і точкою $M(8, 2)$:

$$y = y_M + k_{MN}(x - x_M) = 2 + \frac{3}{8}(x - 8) = \frac{3}{8}x - 1, \quad y = \frac{3}{8}x - 1.$$

Запишемо рівняння MN у загальному вигляді: $y = \frac{3}{8}x - 1$,

$$y - \frac{3}{8}x + 1 = 0, \quad 8y - 3x + 8 = 0.$$

2 спосіб. Нехай точки M та N – середини сторін AB та AC відповідно. Тоді

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + 8}{2} = 2, \quad M(8; 2);$$

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{6 + (-6)}{2} = 0, \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1, \quad N(0; -1).$$

Рівняння середньої лінії MN знайдемо як рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}, \quad \frac{x - 8}{0 - 8} = \frac{y - 2}{-1 - 2}, \quad \frac{x - 8}{-8} = \frac{y - 2}{-3}, \quad y = \frac{3}{8}x - 1.$$

д) Відомо, що кут ϕ між прямими визначається формулою:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \text{ де через } k_1 \text{ позначають коефіцієнт прямої, яку}$$

повертають проти руху стрілки годинника до збігу з другою прямою.

У нашому випадку маємо:

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} k_{BC}}.$$

З п. а) кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $k_{AB} = 3$, з п. г)

кутовий коефіцієнт прямої BC — $k_{BC} = \frac{3}{8}$. Маємо:

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} k_{BC}} = \frac{3 - \frac{3}{8}}{1 + 3 \cdot \frac{3}{8}} = \frac{21}{17}.$$

Відповідь: а) $AB = 4\sqrt{10}$, $3x - y - 22 = 0$; б) $CH = \frac{21\sqrt{10}}{5}$,

$3y + x = 0$; в) $H\left(\frac{33}{5}, -\frac{11}{5}\right)$; г) $8y - 3x + 8 = 0$; д) $\operatorname{tg} B = \frac{21}{17}$.

Завдання 3.2 (до Завдання 3.2.2 [4]). Задані т. M та пряма L . Рівняння прямої L записати у «відрізках» і побудувати її. Скласти рівняння прямої L_1 , яка паралельна прямій L , і рівняння прямої L_2 , яка перпендикулярна прямій L . Ці прямі проходять через точку M .

а) L : $x + 2y - 2 = 0$; $M(5; 1)$; б) L : $2x - 5y + 8 = 0$; $M(-3; 4)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої у «відрізках» має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a , b — величини відрізків, які відтинає пряма на осях Ox та Oy відповідно.

а) Запишемо рівняння прямої L у «відрізках»:

$$x + 2y - 2 = 0, \quad x + 2y = 2 \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right., \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1.$$

Пряма L зображена на рис. 3.2.

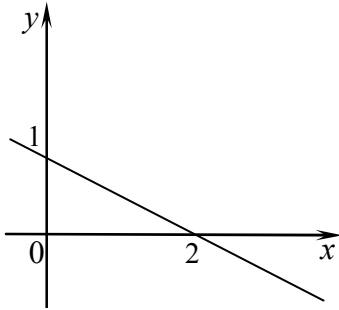


Рисунок 3.2

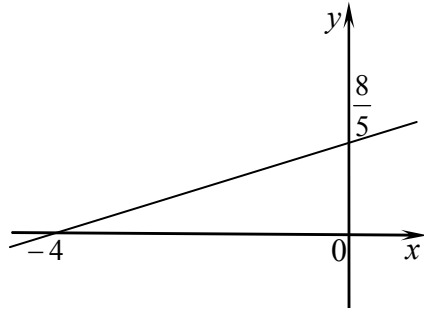


Рисунок 3.3

Пряма $L: x + 2y - 2 = 0$ задана загальним рівнянням. Запишемо його у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом: $2y = -x + 2$, $y = -\frac{x}{2} + 1$.

Кутовий коефіцієнт прямої L : $k_L = -\frac{1}{2}$.

Оскільки шукана пряма $L_1 \parallel L$, то $k_{L_1} = k_L = -\frac{1}{2}$. Рівняння прямої L_1 за кутовим коефіцієнтом $k_{L_1} = -\frac{1}{2}$ та точкою $M(5;1)$:
 $y = y_M + k_{L_1}(x - x_M)$, $y = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 5)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, $x + 2y - 7 = 0$.

Оскільки шукана пряма $L_2 \perp L$, то $k_{L_2} \cdot k_L = -1$, $k_{L_2} = -\frac{1}{k_L} = 2$. Рівняння прямої L_2 за кутовим коефіцієнтом $k_{L_2} = 2$ та точкою $M(5;1)$: $y = y_M + k_{L_2}(x - x_M)$, $y = 1 + 2(x - 5)$, $y = 2x - 9$, $2x - y - 9 = 0$.

б) Запишемо рівняння прямої L у «відрізках»:

$$2x - 5y + 8 = 0, \quad 2x - 5y = -8 \quad \left| : \left(-\frac{1}{8}\right) \right., \quad \frac{2x}{-8} - \frac{5y}{-8} = 1,$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{8/5} = 1.$$

Пряма L зображена на рис. 3.3.

Пряма $L: 2x - 5y + 8 = 0$ задана загальним рівнянням. Запишемо його у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом: $-5y = -2x - 8$, $y = \frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$. Кутовий коефіцієнт прямої $L: k_L = \frac{2}{5}$.

Оскільки шукана пряма $L_1 \parallel L$, то $k_{L_1} = k_L = \frac{2}{5}$. Рівняння прямої

L_1 за кутовим коефіцієнтом $k_{L_1} = \frac{2}{5}$ та точкою $M(-3; 4)$:

$$y = y_M + k_{L_1}(x - x_M), \quad y = 4 + \frac{2}{5}(x + 3), \quad y = \frac{2}{5}x + \frac{26}{5}, \quad 2x - 5y + 26 = 0.$$

Оскільки шукана пряма $L_2 \perp L$, то $k_{L_2} \cdot k_L = -1$, $k_{L_2} = -\frac{1}{k_L} = -\frac{5}{2}$.

Рівняння прямої L_2 за кутовим коефіцієнтом $k_{L_2} = -\frac{5}{2}$ та

точкою $M(-3; 4)$: $y = y_M + k_{L_2}(x - x_M), \quad y = 4 + \left(-\frac{5}{2}\right)(x + 3),$

$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}, \quad 5x + 2y + 7 = 0.$$

Відповідь: а) $L: \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$ – рівняння прямої L у «відрізках»;

рис. 3.2; $L_1: x + 2y - 7 = 0$; $L_2: 2x - y - 9 = 0$; **б)** $L: \frac{x}{-4} + \frac{y}{8/5} = 1$ –

рівняння прямої L у «відрізках»; рис. 3.3; $L_1: 2x - 5y + 26 = 0$; $L_2: 5x + 2y + 7 = 0$.

Завдання 3.3 (до Завдання 3.2.3 [4]). Встановити назву кривої 2-го порядку $a_i x^2 + b_i y^2 + c_i x + d_i y + k_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Знайти центр, півосі для еліпса та гіперболи; для параболи – координати вершини, точки перетину з осями координат і рівняння вісі симетрії. Зробити креслення в системі xOy . Дані наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

i	a_i	b_i	c_i	d_i	k_i
1	25	4	200	-16	316
2	4	-25	16	50	-109
3	-9	4	-36	-8	-68
4	2	0	10	-1	11
5	0	1	-4	2	6

Розв'язання.

1) За умовою $25x^2 + 4y^2 + 200x - 16y + 316 = 0$. Виділимо повні квадрати при змінних x та y :

$$\begin{aligned}
 &25(x^2 + 8x) + 4(y^2 - 4y) + 316 = 0, \\
 &25((x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2) - 4^2) + 4((y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2) - 2^2) + 316 = 0 \\
 &25((x+4)^2 - 16) + 4((y-2)^2 - 4) + 316 = 0, \\
 &25(x+4)^2 + 4(y-2)^2 = 100, \\
 &\frac{(x+4)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1.
 \end{aligned}$$

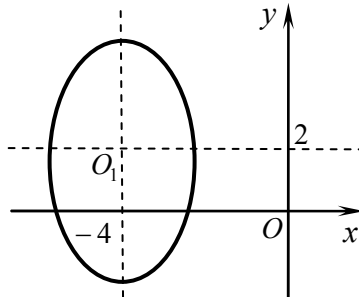


Рисунок 3.4

Отримали рівняння еліпса $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ з півосями

$a = 2$, $b = 5$ (див. Додаток А). Центр кривої – точка $O_1(-4, 2)$. Крива зображена на рис. 3.4.

2) За умовою $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$. Виділимо повні квадрати при змінних x та y :

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 &= 0, \\ 4(x^2 + 4x) - 25(y^2 - 2y) &= 109, \\ 4((x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2) - 2^2) - 25((y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1) - 1) &= 109 \\ 4((x+2)^2 - 4) - 25((y-1)^2 - 1) &= 109, \\ 4(x+2)^2 - 25(y-1)^2 &= 100, \\ \frac{(x+2)^2}{5^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} &= 1. \end{aligned}$$

Отримали рівняння гіперболи $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ з півосями $a = 5$, $b = 2$ (див. Додаток А). Центр кривої – точка $O_1(-2, 1)$. Крива зображена на рис. 3.5.

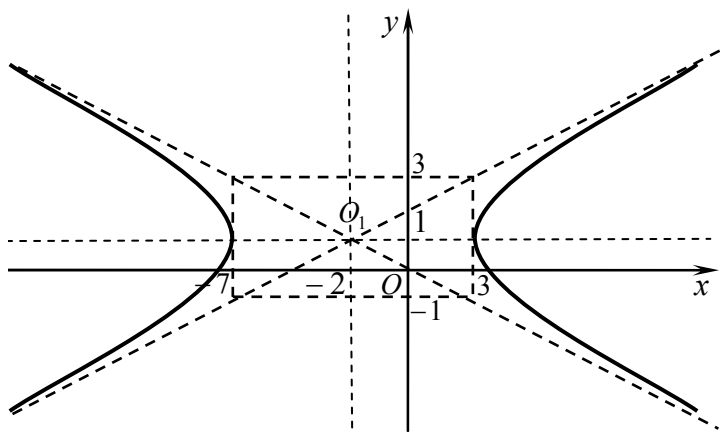


Рисунок 3.5

3) $-9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y - 68 = 0$.

Виділимо повні квадрати при змінних x та y :

$$-9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) - 68 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -9\left((x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 2^2\right) + 4\left((y^2 - 2y + 1) - 1\right) - 68 = 0, \\
& -9\left((x+2)^2 - 4\right) + 4\left((y-1)^2 - 1\right) - 68 = 0, \\
& -9(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 36, \\
& \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = -1.
\end{aligned}$$

Отримали рівняння гіперболи $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ з півосями $a=2$, $b=3$ (див. Додаток А). Центр кривої – точка $O_1(-2,1)$. Крива зображена на рис. 3.6.

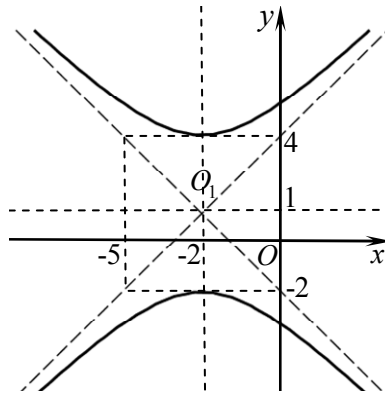


Рисунок 3.6

4) За умовою $2x^2 + 10x - y + 11 = 0$. Виділимо повний квадрат при змінній x :

$$\begin{aligned}
& 2(x^2 + 5x) - y + 11 = 0 \\
& 2\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) - y + 11 = 0, \\
& 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = y + \frac{3}{2}, \\
& \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

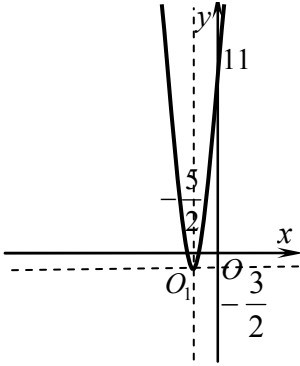


Рисунок 3.7

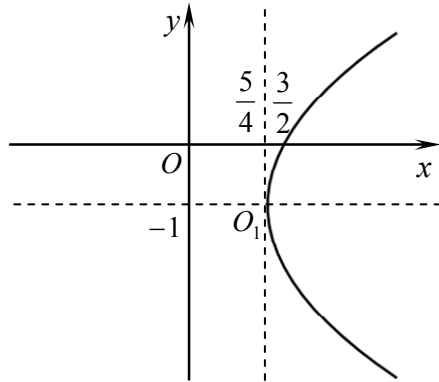


Рисунок 3.8

Отримали рівняння параболи $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ (див. *Додаток А*).

Вершина параболи – точка $O_1\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Знайдемо точки, в яких парабола перетинає осі координат. У точках перетину параболи з віссю Ox $y = 0$, тому $2x^2 + 10x + 11 = 0$, $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{3}$. Отже, точки перетину параболи з віссю Ox – $(-5 - \sqrt{3}; 0)$ і $(-5 + \sqrt{3}; 0)$. У точках перетину параболи з віссю Oy $x = 0$, тому $-y + 11 = 0$, $y = 11$. Отже, точка перетину параболи з віссю Oy – $(0; 11)$. Рівняння вісі симетрії параболи: $x - x_0 = 0$, $x + \frac{5}{2} = 0$, $x = -\frac{5}{2}$. Крива зображена на рис. 3.7.

$$5) y^2 - 4x + 2y + 6 = 0.$$

Виділимо повний квадрат при змінній y :

$$\begin{aligned} y^2 + 2y - 4x + 6 &= 0, \\ (y^2 + 2y + 1) - 1 &= 4x - 6, \\ (y + 1)^2 &= 4x - 5, \\ (y + 1)^2 &= 4\left(x - \frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

Отримали рівняння параболи $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ (див. Додаток А). Вершина параболи – точка $O_1\left(\frac{5}{4}, -1\right)$.

Знайдемо точки, в яких парабола перетинає осі координат. У точках перетину параболи з віссю Ox $y = 0$, тому $-4x + 6 = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

Отже, точка перетину параболи з віссю Ox – $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. У точках перетину параболи з віссю Oy $x = 0$, тому $y^2 + 2y + 6 = 0$, $D = -20$, тому це рівняння не має розв'язків, а крива не перетинає вісь Oy . Рівняння осі симетрії параболи: $y - y_0 = 0$, $y + 1 = 0$, $y = -1$. Крива зображена на рис. 3.8.

Відповідь: 1) еліпс $\frac{(x+4)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$; центр $O_1(-4, 2)$; $a = 2$, $b = 5$; рис. 3.4; 2) гіпербола $\frac{(x+2)^2}{5^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$; центр $O_1(-2, 1)$; $a = 5$, $b = 2$, рис. 3.5; 3) гіпербола $\frac{(x+2)^2}{2^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = -1$; центр $O_1(-2, 1)$; $a = 2$, $b = 3$, рис. 3.6; 4) парабола $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right)$; вершина $O_1\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; точки перетину параболи з віссю Ox – $(-5 - \sqrt{3}; 0)$ і $(-5 + \sqrt{3}; 0)$; точка перетину параболи з віссю Oy – $(0; 11)$; вісь симетрії $x = -\frac{5}{2}$; рис. 3.7; 5) парабола $(y+1)^2 = 4\left(x - \frac{5}{4}\right)$; вершина $O_1\left(\frac{5}{4}, -1\right)$; точка перетину параболи з віссю Ox – $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; парабола не перетинає вісь Oy ; вісь симетрії $y = -1$; рис. 3.8.

Завдання 3.4 (до Завдання 3.2.4 [4]). Рівняння кривої в декартовій системі координат $(x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 + 2y^2$ записати у полярній системі координат і побудувати її.

Розв'язання. Скористаємось формулами зв'язку між декартовими та полярними координатами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Підставляючи їх у рівняння заданої кривої, одержуємо:

$$\begin{aligned} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} &= r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi, \\ r^3 &= r^2 + r^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Вважаючи, що $r \neq 0$ ($x^2 + y^2 \neq 0$), скорочуємо на r^2 :

$$r = 1 + \sin^2 \varphi.$$

Одержали рівняння заданої кривої у полярних координатах.

Для побудови кривої складемо таблицю, в якій вказані значення полярного кута φ_i та відповідні їм значення полярного радіусу r_i , $i = 1, \dots, 16$.

φ_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
r_i	1	1,25	1,5	1,75	2	1,75	1,5	1,25

φ_i	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
r_i	1	1,25	1,5	1,75	2	1,75	1,5	1,25

Побудуємо знайдені точки $M_i(\varphi_i; r_i)$ і з'єднаємо їх плавною лінією. Це і є шукана крива (рис. 3.9).

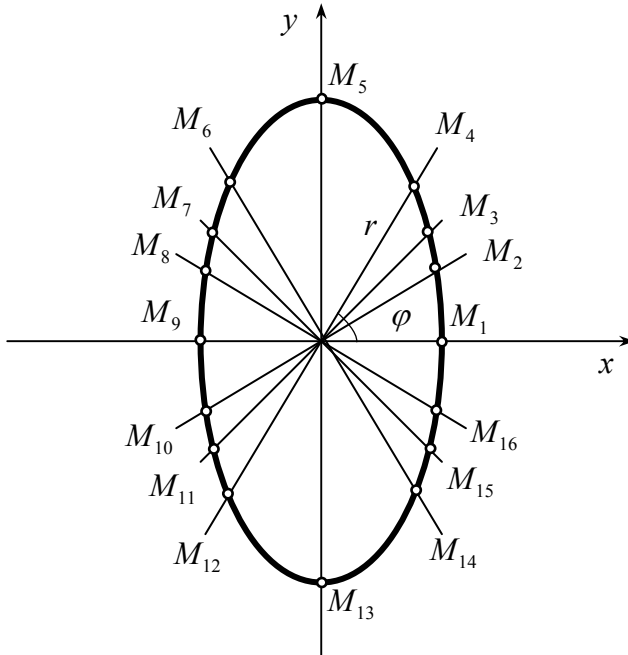


Рисунок 3.9

Відповідь: $r = 1 + \sin^2 \varphi$; рис. 3.9.

4 ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРИ

Розв'язування типового варіанту

Завдання 4.1 (до Завдання 4.2.1 [4]). Задані точки: $A(1; -4; -3)$, $B(2; -3; 1)$, $C(2; -4; -1)$, $D(6; -2; -7)$. Треба:

- 1) знайти рівняння площини (ABC) у загальному вигляді;
- 2) записати рівняння площини (ABC) у «відрізках» і побудувати її;
- 3) знайти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно прямій (AB) ;
- 4) скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно прямій (AB) ;

- 5) скласти рівняння площини, що проходить через точку D паралельно площині (ABC) ;
- 6) скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно площині (ABC) ;
- 7) знайти відстань d від точки D до площини (ABC) ;
- 8) знайти координати точки P , яка є проекцією точки D на площину (ABC) ;
- 9) знайти координати точки D_1 симетричної точці D відносно площини (ABC) ;
- 10) знайти кут α між прямими (AB) і (CD) ;
- 11) знайти кут φ між прямою (CD) і площиною (ABC) .

Розв'язання.

1) Рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

Підставимо координати точок A , B , C у рівняння (4.1):

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 4 & z + 3 \\ 2 - 1 & -3 - (-4) & 1 - (-3) \\ 2 - 1 & -4 - (-4) & -1 - (-3) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 4 & z + 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого рядка:

$$(x - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (y + 4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z + 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x - 1) \cdot 2 - (y + 4) \cdot (-2) + (z + 3) \cdot (-1) = 0, \quad 2x + 2y - z + 3 = 0.$$

Отже, $2x + 2y - z + 3 = 0$ – загальне рівняння площини (ABC) .

2) Рівняння площини у «відрізках» має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де a, b, c – відрізки, які площина відтинає відповідно на осях Ox, Oy, Oz .

Щоб записати рівняння площини (ABC) у «відрізках» перенесемо вільний член знайденого рівняння в праву частину рівняння та поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$2x + 2y - z = -3, \quad \frac{2x}{-3} + \frac{2y}{-3} - \frac{z}{-3} = 1, \quad \frac{x}{-3/2} + \frac{y}{-3/2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Отже, $\frac{x}{-3/2} + \frac{y}{-3/2} + \frac{z}{3} = 1$ – рівняння площини (ABC) у «відрізках».

На рис. 4.1 зображено площину (ABC) .

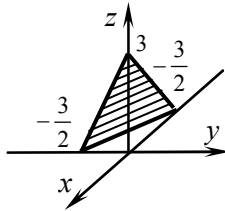


Рисунок 4.1

3) Нехай l_1 – шукана пряма, яка проходить через точку C паралельно прямій (AB) .

Канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (4.2)$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, що належить прямій, $\vec{S} = (l; m; n)$ – напрямний вектор прямої.

Оскільки $l_1 \parallel (AB)$, то в якості напрямного вектора прямої l_1 можна взяти напрямний вектор прямої (AB) :

$$\vec{S}_{AB} = \vec{AB} = (2 - 1; -3 - (-4); 1 - (-3)) = (1; 1; 4). \quad \text{Використовуючи}$$

канонічні рівняння прямої (4.2), складемо рівняння прямої l_1 :

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - (-4)}{1} = \frac{z - (-1)}{4}, \quad \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 4}{1} = \frac{z + 1}{4}.$$

4) Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.3)$$

З умови перпендикулярності прямої та площини випливає, що в якості нормального вектора $\bar{n}_1$ шуканої площини можна взяти напрямний вектор прямої (AB) , тобто $\bar{n}_1 = \bar{S}_{AB} = (1; 1; 4)$. Використовуючи рівняння (4.3), складемо рівняння шуканої площини:

$$1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - (-4)) + 4 \cdot (z - (-1)) = 0, \quad x + y + 4z + 6 = 0.$$

5) Оскільки шукана площина та площина (ABC) паралельні, то в якості нормального вектора шуканої площини можна взяти нормальний вектор площини (ABC) . Використовуючи рівняння (4.3), отримаємо:

$$2 \cdot (x - 6) + 2 \cdot (y - (-2)) - 1 \cdot (z - (-7)) = 0, \quad 2x + 2y - z - 15 = 0.$$

6) Нехай l_2 – шукана пряма, яка проходить через точку D перпендикулярно площині (ABC) .

Параметричні рівняння прямої мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \quad (4.4)$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, що належить прямій, $\bar{S} = (l; m; n)$ – напрямний вектор прямої, t – параметр.

З умови перпендикулярності прямої та площини випливає, що в якості напрямного вектора прямої l_2 можна взяти нормальний вектор $\bar{n}$ площини (ABC) , тобто $\bar{S}_{l_2} = \bar{n} = (2; 2; -1)$. Використовуючи параметричні рівняння прямої (4.4), складемо рівняння прямої l_2 :

$$\begin{cases} x = 2t + 6, \\ y = 2t - 2, \\ z = -t - 7. \end{cases}$$

7) Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Маємо:

$$d = \frac{|2 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-7) + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|12 - 4 + 7 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6.$$

8) Нехай точка P – проекція точки D на площину (ABC) . Точка P є точкою перетину прямої l_2 , що перпендикулярна площині (ABC) , та площини (ABC) . Знайдемо координати точки P . Для цього треба розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 3 = 0, \\ x = 2t + 6, \\ y = 2t - 2, \\ z = -t - 7. \end{cases}$$

Підставимо вирази для x , y , z в перше рівняння системи та знайдемо значення параметра t :

$$2(2t + 6) + 2(2t - 2) - (-t - 7) + 3 = 0, \quad t = -2.$$

Підставивши $t = -2$ в останні три рівняння системи, отримаємо координати точки P :

$$\begin{cases} x = 2 \cdot (-2) + 6, \\ y = 2 \cdot (-2) - 2, \\ z = -(-2) - 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -6, \\ z = -5. \end{cases}$$

Отже, $P(2; -6; -5)$.

9) Нехай $D_1(x_{D_1}; y_{D_1}; z_{D_1})$ – точка, симетрична точці D відносно площини (ABC) . Точка P , знайдена в попередньому пункті, є серединою відрізка DD_1 . Маємо:

$$x_P = \frac{x_D + x_{D_1}}{2}, \quad x_{D_1} = 2x_P - x_D = 2 \cdot 2 - 6 = -2,$$

$$y_P = \frac{y_D + y_{D_1}}{2}, \quad y_{D_1} = 2y_P - y_D = 2 \cdot (-6) - (-2) = -10,$$

$$z_P = \frac{z_D + z_{D_1}}{2}, \quad z_{D_1} = 2z_P - z_D = 2 \cdot (-5) - (-7) = -3.$$

Отже, $D_1(-2; -10; -3)$.

10) Кут між двома прямими вимірюється в межах від 0° до 90° . Косинус кута між ними знаходять за формулою:

$$\cos \alpha = |\cos(\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2)| = \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2|}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|},$$

де $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ – напрямні вектори цих прямих.

Напрямний вектор прямої (AB) знайдено в пункті 3):

$\bar{S}_{AB} = \overline{AB} = (1; 1; 4)$. Напрямний вектор прямої (CD):

$\bar{S}_{CD} = \overline{CD} = (6 - 2; -2 - (-4); -7 - (-1)) = (4; 2; -6)$. Маємо:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{CD}|}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-6)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \\ &= \frac{|4 + 2 - 24|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{56}} = \frac{|-18|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{56}} = \frac{18}{12\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{7}}{14}\right). \end{aligned}$$

11) Кут між прямою та площиною вимірюється в межах від 0° до 90° . Синус кута між ними обчислюється за формулою:

$$\sin \varphi = |\cos(\bar{n} \wedge \bar{s})| = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{s}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|},$$

де $\bar{n}$ – нормальний вектор площини, $\bar{s}$ – напрямний вектор прямої.

Маємо:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|\bar{n} \cdot \bar{S}_{CD}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}_{CD}|} = \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-6)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}, \\ \varphi &= \arcsin\left(\frac{3\sqrt{14}}{14}\right). \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $2x + 2y - z + 3 = 0$; 2) $\frac{x}{-3/2} + \frac{y}{-3/2} + \frac{z}{3} = 1$;

3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+1}{4}$; 4) $x + y + 4z + 6 = 0$; 5) $2x + 2y - z - 15 = 0$;

$$6) \begin{cases} x = 2t + 6, \\ y = 2t - 2, \\ z = -t - 7. \end{cases} \quad 7) d = 6; \quad 8) P(2; -6; -5); \quad 9) D_1(-2; -10; -3);$$

$$10) \alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{7}}{14}\right); \quad 11) \varphi = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{14}}{14}\right).$$

Завдання 4.2. Перетворити загальні рівняння площин на рівняння у «відрізках» та побудувати їх у декартовій системі координат:

$$a) 4x + 3y + 12 = 0; \quad б) y - 3z + 3 = 0.$$

Розв'язання.

а) Перенесемо вільний член 12 у праву частину рівняння та поділимо його ліву та праву частини на -12, отримаємо

$$4x + 3y = -12, \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Площину зображено на рис. 4.2.

б) Перенесемо вільний член 3 у праву частину рівняння та поділимо його ліву та праву частини на -3, отримаємо

$$y - 3z = -3, \quad \frac{y}{-3} + \frac{z}{1} = 1.$$

Площину зображено на рис. 4.3.

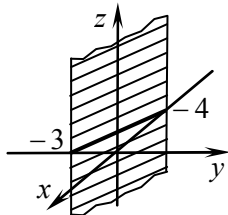


Рисунок 4.2

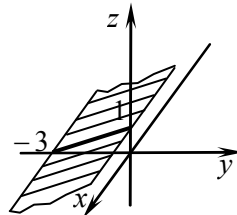


Рисунок 4.3

Відповідь: **а)** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1$, рис. 4.2; **б)** $\frac{y}{-3} + \frac{z}{1} = 1$, рис. 4.3.

5 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розв'язування типового варіанту

Завдання 5.1 (до Завдання 5.2.1 [4]). Звести рівняння поверхонь до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, центр, півосі. Зробити схематичне креслення у новій системі координат:

а) $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 144x + 32y + 36z + 52 = 0$;

б) $9x^2 - 36y^2 + 4z^2 - 54x - 144y + 16z - 47 = 0$;

в) $x^2 + 2z^2 + 4x - 4z - 16y + 14 = 0$;

г) $25y^2 + 9z^2 - 50y + 54z - 119 = 0$;

д) $x^2 + 2x + 2y - 5 = 0$.

Розв'язання.

а) $36x^2 - 144x + 16y^2 + 32y + 9z^2 + 36z + 52 = 0$.

Виділимо повні квадрати при змінних x , y , z :

$$36(x^2 - 4x) + 16(y^2 + 2y) + 9(z^2 + 4z) + 52 = 0,$$

$$36((x^2 - 4x + 4) - 4) + 16((y^2 + 2y + 1) - 1) + 9((z^2 + 4z + 4) - 4) + 52 = 0,$$

$$36(x - 2)^2 - 144 + 16(y + 1)^2 - 16 + 9(z + 2)^2 - 36 + 52 = 0,$$

$$36(x - 2)^2 + 16(y + 1)^2 + 9(z + 2)^2 = 144.$$

Поділимо останнє рівняння на 144:

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} + \frac{(z + 2)^2}{16} = 1.$$

Отримали рівняння еліпсоїда з центром у точці $O_1(2; -1; -2)$ та півосями $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ (див. *Додаток Б*).

Виконаємо паралельне перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1(2; -1; -2)$ за формулами: $X = x - 2$, $Y = y + 1$, $Z = z + 2$. У системі координат O_1XYZ рівняння еліпсоїда має вигляд:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} + \frac{Z^2}{16} = 1.$$

На рис. 5.1 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

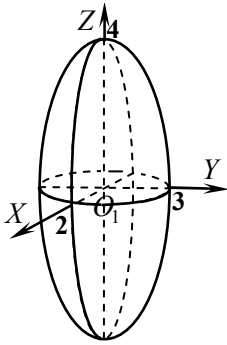


Рисунок 5.1

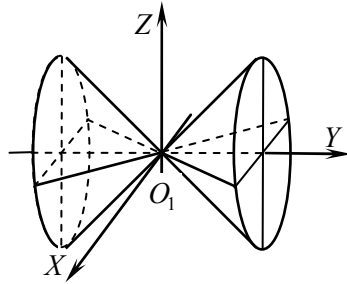


Рисунок 5.2

$$\text{б) } 9x^2 - 54x - 36y^2 - 144y + 4z^2 + 16z - 47 = 0.$$

Виділимо повні квадрати при змінних x , y , z :

$$9(x^2 - 6x) - 36(y^2 - 4y) + 4(z^2 + 4z) - 47 = 0,$$

$$9((x^2 - 6x + 9) - 9) - 36((y^2 - 4y + 4) - 4) + 4((z^2 + 4z + 4) - 4) - 47 = 0,$$

$$9(x - 3)^2 - 81 - 36(y - 2)^2 + 144 + 4(z + 2)^2 - 16 - 47 = 0,$$

$$9(x - 3)^2 - 36(y - 2)^2 + 4(z + 2)^2 = 0,$$

$$9(x - 3)^2 + 4(z + 2)^2 = 36(y - 2)^2.$$

Поділимо останнє рівняння на 36:

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(z + 2)^2}{9} = \frac{(y - 2)^2}{1}.$$

Отримали рівняння конуса другого порядку з вершиною в точці $O_1(3; 2; -2)$ (див. Додаток Б). Виконаємо паралельне перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1(3; 2; -2)$ за формулами: $X = x - 3$, $Y = y - 2$, $Z = z + 2$. У системі координат O_1XYZ рівняння конуса має вигляд:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Z^2}{9} = \frac{Y^2}{1}.$$

На рис. 5.2 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

$$\text{в) } x^2 + 2z^2 + 4x - 4z - 16y + 14 = 0.$$

Виділимо повні квадрати при змінних x та z :

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2z^2 - 4z - 16y + 14 &= 0, \\ (x^2 + 4x) + 2(z^2 - 2z) - 16y + 14 &= 0, \\ ((x^2 + 4x + 4) - 4) + 2((z^2 - 2z + 1) - 1) - 16y + 14 &= 0, \\ (x + 2)^2 - 4 + 2(z - 1)^2 - 2 - 16y + 14 &= 0, \\ (x + 2)^2 + 2(z - 1)^2 &= 16y - 8. \end{aligned}$$

Поділимо останнє рівняння на 8:

$$\begin{aligned} \frac{(x + 2)^2}{8} + \frac{(z - 1)^2}{4} &= 2y - 1, \\ \frac{(x + 2)^2}{8} + \frac{(z - 1)^2}{4} &= 2\left(y - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Отримали рівняння еліптичного параболоїда з віссю симетрії Oy (див. *Додаток Б*). Зробимо паралельне перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1\left(-2; \frac{1}{2}; 1\right)$ за формулами: $X = x + 2$, $Y = y - \frac{1}{2}$, $Z = z - 1$. У системі координат O_1XYZ рівняння еліптичного параболоїда матиме вигляд:

$$\frac{X^2}{8} + \frac{Z^2}{4} = 2Y.$$

На рис. 5.3 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

$$\text{г) } 25y^2 + 9z^2 - 50y + 54z - 119 = 0.$$

Виділимо повні квадрати при змінних y та z :

$$\begin{aligned} 25y^2 - 50y + 9z^2 + 54z - 119 &= 0, \\ 25(y^2 - 2y) + 9(z^2 + 6z) - 119 &= 0, \\ 25((y^2 - 2y + 1) - 1) + 9((z^2 + 6z + 9) - 9) - 119 &= 0, \\ 25(y - 1)^2 - 25 + 9(z + 3)^2 - 81 - 119 &= 0, \end{aligned}$$

$$25(y-1)^2 + 9(z+3)^2 = 225.$$

Поділимо останнє рівняння на 225:

$$\frac{(y-1)^2}{9} + \frac{(z+3)^2}{25} = 1.$$

Отримали рівняння еліптичного циліндра (див. *Додаток Б*). Виконаємо паралельне перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1(0;1;-3)$ за формулами: $X = x$, $Y = y - 1$, $Z = z + 3$. У системі координат O_1XYZ рівняння еліптичного циліндра матиме вигляд:

$$\frac{Y^2}{9} + \frac{Z^2}{25} = 1.$$

На рис. 5.4 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

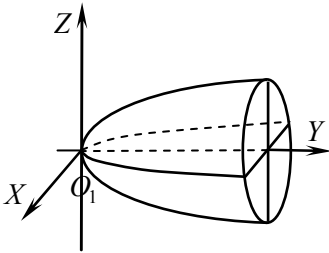


Рисунок 5.3

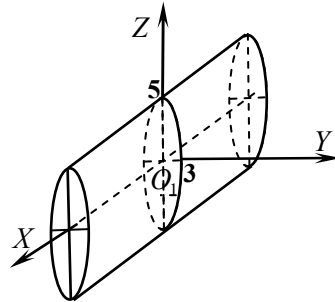


Рисунок 5.4

д) $x^2 + 2x + 2y - 5 = 0$.

Виділимо повний квадрат при змінній x :

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + 2y - 5 = 0, \quad (x+1)^2 = -2(y-3).$$

Отримали рівняння параболічного циліндра (див. *Додаток Б*). Виконаємо паралельне перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1(-1;3;0)$ за формулами: $X = x + 1$, $Y = y - 3$, $Z = z$. У системі координат O_1XYZ рівняння параболічного циліндра матиме вигляд:

$$X^2 = -2Y.$$

На рис. 5.5 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

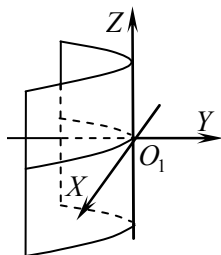


Рисунок 5.5

Відповідь: а) еліпсоїд $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{16} = 1$, центр – $O_1(2; -1; -2)$, півосі $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, рис. 5.1;

б) конус другого порядку $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(z+2)^2}{9} = \frac{(y-2)^2}{1}$, вершина – $O_1(3; 2; -2)$, рис. 5.2;

в) еліптичний параболоїд $\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{(z-1)^2}{4} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$, центр – $O_1\left(-2; \frac{1}{2}; 1\right)$, рис. 5.3;

г) еліптичний циліндр $\frac{(y-1)^2}{9} + \frac{(z+3)^2}{25} = 1$, центр – $O_1(0; 1; -3)$, рис. 5.4;

д) параболічний циліндр $(x+1)^2 = -2(y-3)$, центр – $O_1(-1; 3; 0)$, рис. 5.5.

6 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Розв'язування типового варіанту

Завдання 6.1 (до Завдання 6.2 [4])

1) Нехай $\bar{a} = (x, y, z)$. Чи будуть лінійними наступні перетворення:

$$A\bar{a} = (x^3, x - y, y + z), \quad B\bar{a} = (1, x - y, x + z), \quad C\bar{a} = (x, x + z, y - z)?$$

2) Знайти матрицю в базисі $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, яка в базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ якщо } \bar{e}_1 = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}, \quad \bar{e}_2 = -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}, \quad \bar{e}_3 = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}.$$

3) Знайти власні значення та власні вектори матриці $G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Привести квадратичну форму $F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz + 4yz$ до канонічного вигляду.

5) Дослідити криву другого порядку та побудувати її:
 $5x^2 + 8y^2 + 4xy + 8x + 14y + 5 = 0$.

Розв'язання.

1) За означенням: перетворення (оператор) f називається лінійним, якщо для $\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$ та $\forall \lambda \in R$ виконуються дві аксіоми:

I) $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$ – властивість адитивності;

II) $f(\lambda \bar{x}_1) = \lambda \cdot f(\bar{x}_1)$ – властивість однорідності.

Перетворення $A\bar{a} = (x^3, x - y, y + z)$ не є лінійним, через те що не виконуються ці аксіоми. Нехай $A\bar{a}_1 = (x_1^3, x_1 - y_1, y_1 + z_1)$,

$A\bar{a}_2 = (x_2^3, x_2 - y_2, y_2 + z_2)$, тоді

$$A(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = ((x_1 + x_2)^3, (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)),$$

$$A(\bar{a}_1) + A(\bar{a}_2) = (\underline{x_1^3 + x_2^3}, (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2)).$$

Отже перша аксіома (властивість адитивності) не виконується: $A(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \neq A(\bar{a}_1) + A(\bar{a}_2)$. Також не виконується і друга аксіома (властивість однорідності):

$$A(\lambda \bar{a}) = (\underline{\lambda^3 x^3}, \lambda x - \lambda y, \lambda y + \lambda z), \quad \lambda A\bar{a} = (\underline{\lambda x^3}, \lambda(x - y), \lambda(y + z)).$$

Отже, $A(\lambda \bar{a}) \neq \lambda A\bar{a}$.

Перетворення $B\bar{a} = (1, x - y, x + z)$ також не є лінійним. Переконаємось, що не виконується друга аксіома (властивість однорідності). Дійсно:

$$B(\lambda \bar{a}) = (1, \lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda z), \quad \lambda B\bar{a} = (\lambda, \lambda(x - y), \lambda(x + z)),$$

а отже $B(\lambda \bar{a}) \neq \lambda B\bar{a}$.

Перетворення $C\bar{a} = (x, x + z, y - z)$ є лінійним, тому що виконуються обидві аксіоми. Дійсно: якщо $C\bar{a}_1 = (x_1, x_1 + z_1, y_1 - z_1)$ та $C\bar{a}_2 = (x_2, x_2 + z_2, y_2 - z_2)$, тоді

$$C(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)),$$

$$C(\bar{a}_1) + C(\bar{a}_2) = (x_1, x_1 + z_1, y_1 - z_1) + (x_2, x_2 + z_2, y_2 - z_2) = \\ = (x_1 + x_2, (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2), (y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)),$$

отже перша аксіома (властивість адитивності) виконується: $C(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = C(\bar{a}_1) + C(\bar{a}_2)$. Також виконується і друга аксіома (властивість однорідності): $C(\lambda \bar{a}) = (\lambda x, \lambda x + \lambda z, \lambda y - \lambda z)$, $\lambda C\bar{a} = (\lambda x, \lambda(x + z), \lambda(y - z))$, $A(\lambda \bar{a}) = \lambda A\bar{a}$.

2) Матрицю оператора шукаємо за формулою: $D' = S^{-1} D S$, де S – матриця переходу, яку отримаємо з умови завдання, записом координат векторів $\bar{e}_i$ ($i = \overline{1,3}$) у стовпчики:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $S^{-1} = \frac{S^*}{\det S}$.

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-2) + (-2) + 1 - 1 + 4 = 1.$$

Елементи союзної матриці S^* – це алгебраїчні доповнення, які обчислюються наступним чином:

$$S_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5; \quad S_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3;$$

$$S_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1; \quad S_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3;$$

$$S_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2; \quad S_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1;$$

$$S_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad S_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 1) = 1;$$

$$S_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Отже, обернена матриця буде $S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Знайдемо добуток двох матриць $S^{-1}D$:

$$\begin{aligned} S^{-1}D &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обчислимо $D' = S^{-1}DS$:

$$D' = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 16 & 5 \\ -5 & 11 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Складемо та розв'яжемо секулярне (характеристичне) рівняння:

$$\det(G - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4 - \lambda)(2 - \lambda)^2 - 4 + \lambda = 0,$$

$$12 - \lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda = 0, \quad (-1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4.$$

Отже, власні значення заданого оператора: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$.

Знайдемо власні вектори заданого оператора.

$$\lambda_1 = 1: (G - 1E)\vec{x} = \vec{0}, \quad \text{rang}(G - 1E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (\text{тому що}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0), \quad (n - r) = 1 \Rightarrow \text{власному значенню } \lambda_1 = 1 \text{ відповідає}$$

один лінійно незалежний власний вектор оператора. Координати його знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0, \\ 0 \cdot x + y + z = 0, \\ 0 \cdot x + y + z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -C, \\ z = C. \end{cases}$$

Таким чином власний вектор, що відповідає власному значенню

$$\lambda_1 = 1: \vec{x}_1 = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Покладемо } C = 1, \text{ тоді } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 3: (A - 3E)\bar{x} = \bar{0}, \text{ rang}(A - 3E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \text{ (тому що}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0), (n - r) = 1 \Rightarrow \text{власному значенню } \lambda_2 = 3 \text{ відповідає}$$

один лінійно незалежний власний вектор оператора. Координати його знайдемо зі СЛАР:

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0, \\ 0 \cdot x - y + z = 0, \\ 0 \cdot x + y - z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = z, \\ z = C. \end{cases}$$

Отже, власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 3$:

$$\bar{x}_2 = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Покладемо } C = 1, \text{ тоді } \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 4: (G - 4E)\bar{x} = \bar{0}, \text{ rang}(A - 4E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \text{ (тому що}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0). (n - r) = 1 \Rightarrow \text{власному значенню } \lambda_3 = 4 \text{ відповідає}$$

один лінійно незалежний власний вектор оператора. Координати його знайдемо зі СЛАР:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0, \\ 0 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0, \\ 0 \cdot x + y - 2 \cdot z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + z = 0, \\ y - 2z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Отже, власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_3 = 4$:

$$\bar{x}_3 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Покладемо } C = 1, \text{ тоді } \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Спочатку пригадаємо що таке канонічний вигляд квадратичної форми.

Означення. Кажуть, що квадратична форма записана у канонічному вигляді, якщо всі $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, тобто

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2. \quad \text{Отже матриця}$$

квадратичної форми, що записана у канонічному вигляді, діагональна. Її елементи – це власні значення квадратичної форми.

Алгоритм зведення квадратичної форми до канонічного вигляду:

$$1. \text{ Складаємо матрицю квадратичної форми } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \text{ Вона}$$

повинна бути симетричною.

2. Знаходимо власні значення та власні вектори матриці квадратичної форми (див. попередній приклад).

3. Ортогоналізуємо базис, отриманий з власних векторів (Якщо всі власні значення різні, то базис з власних векторів ортогональний, якщо серед власних значень є кратні значення, то отримані вектори, що відповідають цим власним значенням ортогоналізуємо).

4. Нормуємо отриманий ортогональний базис.

5. Складаємо матрицю переходу від «старого» ортонормованого базису до ортонормованого базису з власних векторів та записуємо квадратичну форму у канонічному вигляді

$$F(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Застосуємо цей алгоритм до заданої квадратичної форми.

1. Складаємо матрицю квадратичної форми: по головній діагоналі цієї матриці розміщуємо коефіцієнти при квадратах відповідних змінних – це $(3; 3; 0)$; з умови симетричності матриці, визначаємо елементи a_{12} та a_{21} , кожен з них дорівнює коефіцієнту при xu поділеному на два; далі визначаємо елементи a_{13} та a_{31} , кожен з них дорівнює коефіцієнту при xz поділеному на два; аналогічно, елементи a_{23} та a_{32} дорівнюють коефіцієнту при uz поділеному на два. Отже, матриця заданої квадратичної форми має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені (власні значення) та власні вектори.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0,$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2.$$

$$\lambda_{1,2} = 4: (A - 4E)\bar{x} = \bar{0}, \quad \text{rang}(A - 4E) = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 1,$$

$n - r = 2$. В якості вільних змінних візьмемо y та z , матимемо:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0, \\ -x - y + 2z = 0, \\ 2x + 2y - 4z = 0, \end{cases} \Rightarrow x = -y + 2z.$$

$$\text{Нехай: } \begin{cases} y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow x = -1; \text{ або } \begin{cases} y = 0, \\ z = 1, \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Отже, вектори } \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{власні вектори, які відповідають}$$

власному значенню $\lambda_{1,2} = 4$.

$$\text{Далі для } \lambda_3 = -2: (A + 2E)\bar{x} = \bar{0}, \quad \text{rang}(A + 2E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

$n - r = 1$, в якості вільної змінної візьмемо z , матимемо:

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 0, \\ -x + 5y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 2z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2y + z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z, \\ y = -\frac{1}{2}z. \end{cases}$$

Нехай $z = 2$, тоді $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$ Тобто власний вектор $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Зробимо ортогоналізацію отриманого базису $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$. Зауважимо, що $\bar{x}_3$ ортогональний до $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$, що зрозуміло, бо вони відносяться до різних власних значень. А вектори $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ між собою не ортогональні. Зробимо заміну вектора $\bar{x}_2$ на вектор $k\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ так, щоб він був ортогональний до $\bar{x}_1$:

$$\bar{x}_1 \cdot (k\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = 0, \Rightarrow k(\bar{x}_1, \bar{x}_1) + (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \quad k = -\frac{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{(\bar{x}_1, \bar{x}_1)} = -\frac{(-2)}{2} = 1.$$

Новий вектор $k\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ також є власним вектором

відносно $\lambda_{1,2} = 4$.

4. Нормуємо отриманий ортогональний базис:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|} = \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{|\bar{x}_1 + \bar{x}_2|} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|} = \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

5. Матриця переходу S від ортонормованого базису $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ до ортонормованого базису з власних векторів $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, лінійна заміна змінних $X = SX'$ з ортогональною матрицею S зводить квадратичну форму $F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz + 4yz$ до канонічного вигляду $F(x', y', z') = 4x'^2 + 4y'^2 - 2z'^2$.

Перевірка:

$$\begin{aligned} S^T A S &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5) У загальному випадку для квадратичної форми рівняння кривої другого порядку $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$

маємо наступні інваріанти відносно повороту початку координат та повороту осей:

$$S = a_{11} + a_{22}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В залежності від значень цих величин S, δ, Δ, B квадратична форма визначає одну з наступних ліній:

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$S \cdot \Delta < 0$	дійсний еліпс
		$S \cdot \Delta > 0$	уявний еліпс
	$\Delta = 0$	пара уявних спряжених прямих, що перетинаються	
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	гіпербола	
	$\Delta = 0$	пара дійсних прямих, що перетинаються	
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	парабола	
	$\Delta = 0$	$B > 0$	пара уявних паралельних прямих
		$B < 0$	пара дійсних паралельних прямих
		$B = 0$	пара дійсних прямих, що співпадають

Для заданої кривої маємо:

$$S = a_{11} + a_{22} = 5 + 8 = 13, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 200 + 56 + 56 - 128 - 20 - 245 = -81.$$

Оскільки, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, $S \cdot \Delta < 0$, то задана крива другого порядку – дійсний еліпс.

Приведемо квадратичну форму заданої кривої до канонічного вигляду (див. п. 4)).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Секулярне (характеристичне) рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0, \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9.$$

Знайдемо головні осі квадратичної форми, тобто власні вектори матриці A :

$$\lambda_1 = 4: (A - 4E) \cdot \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 4y = 0. \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 0.$$

Нехай $y = -1$, тоді $x = 2$. Отже, $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 4$.

$$\lambda_2 = 9: (A - 9E) \cdot \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0, \\ 2x - y = 0. \end{cases} \Rightarrow 2x_2 - y_2 = 0.$$

Нехай $y = 2$, тоді $x = 1$. Отже, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 9$.

Нормуємо власні вектори: $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$

Зробимо перехід від ортонормованого базису $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ до ортонормованого базису з власних векторів $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'. \end{cases}$$

Після підстановки отриманих виразів для змінних x і y в задане рівняння, отримаємо:

$$4x'^2 + 9y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{36}{\sqrt{5}} y' + 5 = 0.$$

Далі відокремлюємо повні квадрати при кожній зі змінних та отримуємо остаточне канонічне рівняння кривої:

$$4 \left(x'^2 + 2 \frac{1}{4\sqrt{5}} x' + \left(\frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 \right) - 4 \left(\frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 +$$

$$+ 9 \left(y'^2 + 2 \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) - 9 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + 5 = 0,$$

$$4 \left(x' + \frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 + 9 \left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{1}{20} + \frac{36}{5} - 5;$$

$$4 \left(x' + \frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 + 9 \left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{9}{4};$$

$$\frac{16}{9} \left(x' + \frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1, \quad \frac{\left(x' + \frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2}{9/16} + \frac{\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2}{1/4} = 1.$$

Це рівняння еліпса (як ми встановили спочатку) з центом у точці

$C \left(-\frac{1}{4\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ та півсями $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$. Схематично його графік

показано на рис. 6.1.

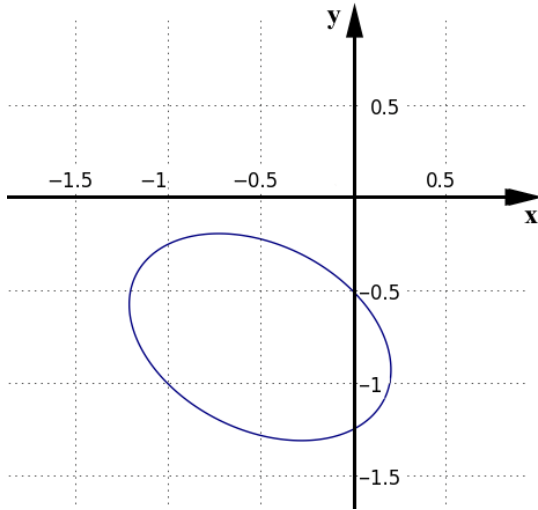


Рисунок 6.1

Відповідь: 1) $A\bar{a}$, $B\bar{a}$ – не лінійні перетворення,

$C\bar{a} = (x, x + z, y - z)$ – лінійне перетворення; 2) $\begin{pmatrix} -7 & 16 & 5 \\ -5 & 11 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\lambda_1 = 1$, $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 4$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

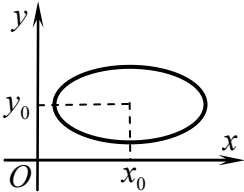
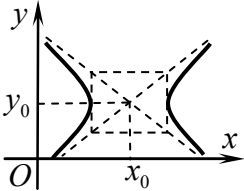
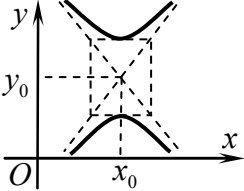
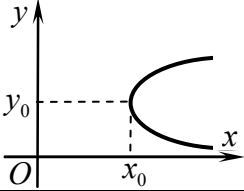
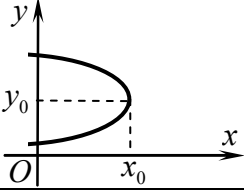
4) $F(x', y', z') = 4x'^2 + 4y'^2 - 2z'^2$; 5) задана крива – еліпс з центом у

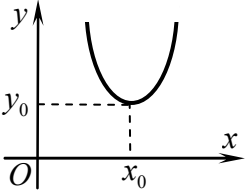
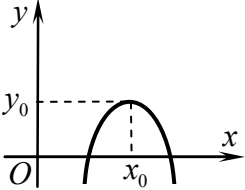
точці $C\left(-\frac{1}{4\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ та півсями $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, рис. 6.1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика : підруч. : у 2 кн. Кн.1. Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – К. : Либідь, 2003. – 400 с.
2. Вища математика : збірник задач : у 2 ч. / Х. І. Гаврильченко, С. П. Полушкін, П. С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. П. П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2004. – Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – 2004. – 279 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навчальний посібник. 3-х частинах. Ч. 1 / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Харків: Веста, 2008. – 200 с.
4. Індивідуальні завдання до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині», «Пряма та площина у просторі», «Поверхні другого порядку», «Лінійні оператори» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: А. В. Засовенко, І. М. Килимник. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 82 с.
5. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. Посібник / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. –2-ге видання. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
6. Кулініч Г. Л. Вища математика : основні означення, приклади і задачі : [навч. посібник]. Кн.1 / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – К. : Либідь, 1994. – 312 с.
7. Михайленко В. В. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : підручник / В. В. Михайленко, Л. Д. Добряков. – Житомир : ЖДТУ, 2004. – 554 с.
8. Шкіль М. І. Вища математика. Кн. 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 280 с.

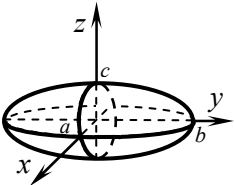
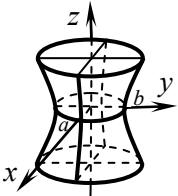
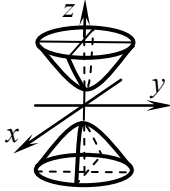
Додаток А
Рівняння та графіки кривих другого порядку
зі зміщеним центром

	Тип кривої	Рівняння	Графік
1	Еліпс	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	
2	Гіпербола	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	
		$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$	
3	Парабола	$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$	
		$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$	

		$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	
		$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$	

Додаток Б

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку та їх графіки

	Тип кривої	Рівняння	
1	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
2	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
3	Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	

4	Конус другого порядку	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
5	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	
6	Гіперболіч- ний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	
7	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
8	Гіперболіч- ний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
9	Параболіч- ний циліндр	$x^2 = 2py$	