

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
до розрахунково-графічної роботи
з вищої математики

для студентів
технічних спеціальностей
денної форми навчання
(1 семестр)
2 частина

2015

Індивідуальні завдання до розрахунково-графічної роботи з вищої математики для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання (1 семестр) 2 частина / Укл.:Килимник І.М., Полякова Т.Г., Бондаренко В. М.– Запоріжжя: ЗНТУ, 2015 – 90 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент
Полякова Т.Г., асистент
Бондаренко В. М., зав. лаб.

Комп'ютерна верстка: Давиденко С.І.

Рецензент: Онуфрієнко Л.М., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої
математики ЗНТУ
Протокол № 6 від 25.02.15

ЗМІСТ

1. Границя послідовності та функції.	4
1.1 Аудиторні завдання.	4
1.2 Індивідуальні завдання.	6
2. Неперервність функції.	31
2.1 Аудиторні завдання	31
2.2 Індивідуальні завдання.	33
3. Диференціальне числення функції однієї змінної	40
3.1 Аудиторні завдання	40
3.2 Індивідуальні завдання.	46
4. Функції кількох змінних	70
4.1 Аудиторні завдання.	70
4.2 Індивідуальні завдання	72
Література	90

1. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ФУНКЦІЙ

1.1 Аудиторні завдання

1. Знайти границі послідовностей

$$1a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 1} - 6n^3}{\sqrt{2n^6 + 3} - n}$$

$$б) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 2} + \sqrt{4n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^4 + 1} (2n + 1)}$$

$$в) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 5} - \sqrt[4]{16n^4 + 1}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt{16n^4 + 3}}$$

$$г) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n^4 + n} + \sqrt{n + 2}}$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right)$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 7^n}{2 \cdot 7^{n+1} + 3^n}$$

$$4a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - 3(n+1)!}$$

$$б) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)((n+1)! - (n+4)!)}{(n+6)!}$$

2. Знайти границі функцій

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x + 5}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 1}{5x^2 + 3x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^2}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 5}{2x^2 - x - 10}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{6x^3 - 2}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{4x + 3x^3}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x}{4 - 6x^2}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{2x^2 - 7x - 9}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 15x - 16}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-6x-16}$$

$$13a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 3x}$$

$$д) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 4x}{\arcsin^2 3x}$$

$$14 a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{4x+8}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+3}{x^2-1} \right)^{2x+4}$$

$$15a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-7x)^{\frac{6}{5x}}$$

$$16a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$17 a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{x}{3x-3}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{\sqrt[3]{2x+6}-2}$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 10x}{x \operatorname{tg} 4x}$$

$$r) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 3x}{\sin^2 2x}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x \cdot \operatorname{arctg}^2 2x}$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x-2} \right)^{3x+1}$$

$$r) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{5x-2} \right)^{3-4x}$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sin^2 x \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}}$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\ln(1-7x)}$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x \right)^2}$$

Довідковий матеріал

$$1. \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

2. Для $x \rightarrow \infty, k \in \mathbb{R}$:

$$\sin kx \sim kx$$

$$\arcsin kx \sim kx$$

$$1 - \cos kx \sim \frac{(kx)^2}{2}$$

$$a^{kx} - 1 \sim kx \cdot \ln a$$

$$(1 + kx)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot kx, (\alpha > 0)$$

$$\operatorname{tg} kx \sim kx$$

$$\operatorname{arctg} kx \sim kx$$

$$e^{kx} - 1 \sim kx$$

$$\ln(1 + kx) \sim kx$$

$$\sqrt[\alpha]{1 + kx} - 1 \sim \frac{kx}{\alpha}, (\alpha > 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a \in (0, 1) \\ \infty, & \text{якщо } a \in (1, \infty) \end{cases}, \text{ де } a - \text{const}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

1.2 Індивідуальні завдання

1.2.1 Знайти границі

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n - 3}}{\sqrt[5]{n^5 + 3} + \sqrt{n - 3}}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{27n^3 + 2}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{8n^5 + n}}$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n-1} + 3\sqrt{n^4+2}}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt[3]{n^2+3}}$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[5]{n-1}}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt{n-3}}$$

$$5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3-1} + 4\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt{n}}$$

$$6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-4} + \sqrt{n}}{\sqrt[7]{n^5+1} - \sqrt{n+1}}$$

$$7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} + \sqrt{n+4}}{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{8n^3+1}}$$

$$8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt[5]{n^5-3} + \sqrt[3]{n}}$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+6} + 2\sqrt{n^4-1}}{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt{n^2+2}}$$

$$10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^6+3}}{\sqrt{6n^2-2n+1} + \sqrt{n}}$$

$$11. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{81n^4+2n} - \sqrt[3]{n^2-1}}{\sqrt[7]{n^3+3} + \sqrt[3]{n^2-1}}$$

$$12. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^7+n^3-n^2} + \sqrt[3]{n^4+7}}{\sqrt[4]{16n^8+2n-1} + \sqrt[3]{n}}$$

$$13. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt[3]{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^3-n} + \sqrt{n+1}}$$

$$14. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2+4} - \sqrt{16n-1}}{\sqrt[7]{n^{14}+2n} - \sqrt[3]{n^2+3}}$$

$$15. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[3]{8n-1} - \sqrt[5]{n^2+4}}$$

$$16. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{9n^2+2} - \sqrt[3]{27n^6+1}}{\sqrt[7]{2n+3} - \sqrt[5]{8n+n^{12}}}$$

$$17. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6-1} + \sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[5]{n^3+n} - \sqrt{n^2+4}}$$

$$18. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sqrt[3]{n^2+n^6}}{n^4 + \sqrt[7]{n^5+1}}$$

$$19. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4+3} - \sqrt[5]{n^2-2}}{\sqrt[5]{n^2-2} + \sqrt{n}}$$

$$20. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^9+1} - 5n}$$

$$21. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3} - \sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[6]{n^3+1} - 5\sqrt{n}}$$

$$22. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+2} - 6n}$$

$$23. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} + 4\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2+2} - \sqrt[5]{n^3-4}}$$

$$24. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3\sqrt[3]{n^4-1}}{\sqrt[5]{n^{10}+2n} + 6n}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n^6-1}}{\sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n^4+2}}$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+3} - \sqrt{n}}$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6-3} + \sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^4+1} - \sqrt[3]{n}}$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n^2+5}}{5\sqrt[3]{n^3+4} - \sqrt{n}}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^4+n} - 5}{\sqrt[4]{n^4+2} - \sqrt{n}}$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n^6+1}}$$

1.2.2 Знайти границі

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2+3n})$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{4n^2+5} - 2n)$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+5n} - 3n)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2-2n+5} - 2n)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{9n^2+7} - 3n)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-7n+3})$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{16n^2+2} - 4n)$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+7n} - 2n)$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2-4n+2})$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{9n^2-3n})$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n^2+4} - \sqrt{7n^2+5n-3})$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n+2} - n)$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{9n^2-1} - \sqrt{n^2+4n})$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2+4} - \sqrt{3n^2+5n})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{4n^2-3n} - \sqrt{n^2+5})$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25n^2+9n} - 5n)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+7n-4} - n)$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{3n^2+1} - \sqrt{n})$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n^2-3n} - \sqrt{5n^2+2})$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (2n - \sqrt{4n^2-3})$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2+5n})$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2-8n+3})$$

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt{5n^2 + 2n} \right)$ 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(5n - \sqrt{25n^2 - 7n} \right)$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + 10n} \right)$ 26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{6n^2 - 2n} - \sqrt{6n^2 + 1} \right)$
27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 - 5n + 7} \right)$ 28. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(7n - \sqrt{49n^2 + 5} \right)$
29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{n} - \sqrt{5n^2 + 4} \right)$ 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 8n} \right)$

1.2.3 Знайти границі

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{3^n - 2^n}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^{n+1}}{4^n - 3^n}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^{n+2}}{3^n - 2^n}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 5^n}{4^{n+1} + 5^n}$ 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 2^n}{5^{n+1} + 2^{n+1}}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 6^{n+1}}{4^{n+1} + 6^{n+2}}$ 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 6^n}{5^{n+1} - 6^n}$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 7^n}{3^{n+2} - 7^n}$ 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 7^{n-1}}{5^{n+1} - 7^n}$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 8^n}{8^{n+2} + 3^n}$ 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 9^{n-1}}{4^{n+2} - 9^n}$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 9^{n+1}}{5^{n+1} + 9^n}$ 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 6^{n+1}}{2^{n+1} - 6^n}$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^{n+3}}{5^n - 2^{n+1}}$ 16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^{n+2}}{4^{n+1} - 2^n}$

$$17. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 9^{n+1}}{2^{n+1} - 9^n}$$

$$19. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 7^{n-1}}{3^n + 7^{n+1}}$$

$$21. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{5^n + 3^n}$$

$$23. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 5^n}{6^{n+1} - 5^{n+1}}$$

$$25. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 9^{n+1}}{2^{n+1} + 9^{n+2}}$$

$$27. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n - 7^n}{9^{n+1} + 7^{n+1}}$$

$$29. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 5^n}{2^n - 5^{n-1}}$$

$$18. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 9^n}{6^n + 9^{n+1}}$$

$$20. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 7^n}{5^n + 7^{n+1}}$$

$$22. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 7^{n+1}}{4^{n+2} + 7^{n+2}}$$

$$24. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 9^{n+1}}{9^n - 3^{n+1}}$$

$$26. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^n + 4^{n+1}}$$

$$28. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} - 7^{n+2}}{4^n + 7^n}$$

$$30. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 7^n}{6^{n+2} - 7^{n+2}}$$

1.2.4 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)! + (2n+1)!) \cdot n}{(2n+2)!}$$

$$5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n-1)! + (2n)!) \cdot n}{(2n+1)!}$$

$$7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + n!}{(2n-1) \cdot (n+1)!}$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(n+1) \cdot ((2n-1)! - (2n)!)}$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+3)!}{(n+4)! - (n+2)!}$$

$$6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n+3)}{(n+3)! - (n+1)!}$$

$$8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(n+3)!}{(n+4)! + (n+2)!}$$

$$10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! + (n+2)!}{(3n-1) \cdot (n+3)!}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + (2n+1)!}{(2n+2)! - (2n+1)!}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! + (2n+1)!}{(n+1) \cdot ((2n)! + (2n+1))!}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! (2n+3)}{(3n-1)! + (3n+1)!}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+3)!}{n! + (n+3)!}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+2)!}{(n+1)! - (n+2)!}$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(3n+1) \cdot n!}$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)! + (n+4)!}{(n+6)!}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \cdot ((2n+1)! - (2n+2)!)}{(2n+3)!}$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{n! - (n-1)!}$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+8)!}{4n \cdot ((n+7)! + (n+6)!)}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)! - (2n+2)!}{(2n+1)! + (2n+2)!}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! - (3n+1)!}{(3n)!(2n-1)}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! + (3n+2)!}{(3n+1)!(2n+1)}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+2)!}{n! + (n+2)!}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot (2n+1)}{(n)! - (n-1)!}$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-4) \cdot (n+1)!}{(n+2)! + (n+1)!}$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)!}{n \cdot ((n+5)! - (n+4)!)}$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)((2n)! - (2n+1)!)}{(2n+2)!}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)((2n-1)! + (2n)!)}{(2n+1)!}$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)((n+4)! - (n+3)!)}{(n+5)!}$$

1.2.5 Знайти границі

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 28}{x^3 - 8}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 10}{5x^2 + 3x - 3}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^2 + 5x + 6}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 15}{x^3 - 64}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 + 4x - 5}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 11x + 18}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 + x + 1}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 30}{x^2 + 4}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4x}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x - 14}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^2 - 5x + 1}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 5x - 1}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x + 6}{7x^2 - 14x + 1}$$

1.2.6 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{2x^3 - 4x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 6x + 3}{x^2 + 4x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{3x - 7x^2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{5x^2 - 3}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + 6x + 1}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 - 19x - 5}{2x^2 + 6x + 5}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 4x - 1}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 5x^2 + 12}{3x^2 + 5x}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^3 + 4x}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 20}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 + x + 1}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x + 10}{4x^2 + 1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^3 + x}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 2x - 28}{3x^2 - 7}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 4x - 2}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 4x - 4}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 - 6x}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{3x^3 + x - 2}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 14}{2x^2 - 7x + 10}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - 4x^2 + 1}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{3x^3 - 1}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{2x - 4}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 4x - 7}{x^3 + 6x}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^2 + 2x - 1}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 + 2x + 7}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 4x - 20}{x^3 + 3}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 6x - 27}{x^3 + x - 1}$$

1.2.7 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x}{3x^2 + 5x - 12}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x}{x^3 + 2x + 3}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1}{5x^2 - 3x - 14}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 3x^2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^3 + 7x^2 - 6}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x}{x^3 + x - 2}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x}{2x^2 - 9x + 10}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 + 5x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^3 - 8}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 10}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 2x - 12}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - x^3}{12x^2 - 7x - 5}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 2x}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - x^3}{3x^2 + 7x}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x}{x^3 + 125}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 28}{x^2 - 4x + 3}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x - 1}{3x^2 + x - 10}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - 11x}{3x^2 - 20x + 12}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 1}{x^2 - 11x + 18}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 2x - 24}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 10}{x^2 - 5x - 14}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5}{4x^2 - 5x - 14}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 + 4}{2x^2 + 6x - 36}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 8x - 1}{7x^2 - 27x - 4}$$

1.2.8 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^3 + x - 1}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{2x^2 + 5}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 7x^2}{x^3 + 7x^2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{7x^5 + x^3 + 2}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x^3}{x^4 - 7x^2}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{4x^4 - 1}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5x^2 + x^3}{x^6 + 5x^3 + 3}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3 + x^2}{3x^4 - 2}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^4 + 4x - 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^4 + x^2 - 1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x - 1}{x^6 + 4x + 1}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 5}{5x^3 - 7x^2 + 5}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4x}{7x^3 - 4x^2}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4 - x^2}{x^3 - x^2 - 4}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 1}{2x^3 + 6x - 1}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 3}{2x^4 + 3}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 5}{5x^3 + 2x^2 + 7}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 2x}{x^3 + x}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 5}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{2x^5 + x^2 - 3}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^4 + 3x}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x}{5x^4 - 4x}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2}{5x^7 - 3x^4}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x - x^4}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - x^2}{6x^3 - x^2}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 7x^2}{7x^5 - 6x}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{8 - x^6}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{x^6 - 5x^2 + 2}$$

1.2.9 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 2x}{x^3 + 4x - 1}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{5x - 7}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x - 2}{x^2 + 4x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 1}{3x^2 - 2}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 3x + 1}{x^2 + 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x^2 - 3}{x^3 + 2x + 1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 6x}{2 - x^3}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^2 + x^5}{x^2 + 4}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^4}{3x^2 + 4x}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 - 7x^3}{7x^2 - 3x^6}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 1}{x^4 + 1}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 7}{x^2 + 4x - 2}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 2}{7x - 5}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^6 - 1}{x^5 + 2x}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5x^3}{5x^2 - 3x}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 1}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x^4}{x^5 - 3x^2}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2}{4x^2 + 1}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 2x + x^4}{x^3 + 2}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 7x + 3}{4x + 5}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x^5}{3x^2 + x - 1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^6}{3x^2 + 2x - 3}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^2 - 4}{x^3 + 3x - 4}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^6}{1 - x^2}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2x + x^4}{7x^2 + 2}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 3}{3 - 2x^2}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 2x - 1}$$

1.2.10 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x - x^4}{3x^4 - 2x - 1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x + 1}{7x^2 - x + 4}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x}{2x^2 - x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 12}{x^2 + x - 12}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 + 5x - 12}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 6x + 1}{4 - x^2 - 6x^3}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{4 - x^2 - 6x^3}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{3x^4 + 2}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x + 1}{3x^2 - 4x - 1}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 7x + 5}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{5x^3 + 2}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{5 - x^3}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 2x - x^3}{3x^3 + 4x}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^2 - x^4}{3x^2 + 4x^3 + 2x^4}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 1}{3 - 4x^3}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x}{14x^2 - 2x + 3}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 1}{x^4 - 2x + 3}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{3x^2 - 2}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 1}{5x^2 + 6x + 7}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 3}{3x - 5x^3 + 1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{3x^4 - 2x^2 - 3}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4}{2x^2 - 4x + 1}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 2x^3 - x^2}{5x^2 + 3x^3 - 5x^5}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 3}{3x^2 + 4x - 2}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 7}{7 - 2x^2 - x^4}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2}{2x^3 - 3x^2}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 6x - x^7}{2x^7 - 5}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x + x^3}{3x^3 - 4x + 1}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{1 - 2x - 3x^4}$$

1.2.11 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{x^3 + 2x + 33}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 + 2x - 3}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{7x^2 - 4x - 3}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{2x^2 + 3x - 14}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + x - 4}{x^3 + 3x + 4}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 7x - 8}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{5x^2 + 3x - 26}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x + 12}{3x^2 + 2x - 8}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x - 4}{4x^2 - 3x - 7}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^3 + 5x + 6}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^3 + x - 10}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8x + 7}{5x^2 + 6x - 11}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^3 + 9x - 10}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 14}{2x^2 - 9x + 10}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^3 + x + 10}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 6x - 20}{3x^2 + 5x - 22}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 7x - 8}{7x^2 + 6x - 13}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{5x^2 + 4x - 28}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^3 + 11x - 12}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^3 - 5x - 12}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x + 36}{3x^2 - 2x - 33}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 7x + 8}{5x^2 + 3x - 2}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^3 + 5x - 18}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 12x + 13}{3x^2 - 7x - 10}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 12x - 13}{7x^2 + 7x - 14}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{4x^2 + 11x - 38}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 3x - 9}{x^3 - 11x + 10}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 11x - 34}{x^3 + 5x + 18}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 7x - 26}{x^3 + 3x + 14}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{3x^2 - 5x - 8}$$

1.2.12 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{8-x}}{2x^2 - 5x - 7}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}}{3x^2 + 4x - 7}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{2}}{3x^2 - x - 10}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{5x^2 - 4x - 9}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{8-x} + 3x}{2x^2 - 5x - 7}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{3x^2 - 2x - 40}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 + 2x - 35}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + x - 36}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{3x^2 - 4x - 4}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{2x^2 - 3x - 9}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 7x - 15}{\sqrt{x+1} - 2}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{3+x} - 2}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 4x - 7}{\sqrt{8-x} - 3}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 + 2x - 15}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{3x^2 + 5x - 8}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{\sqrt{6x+1} - 5}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{2x^2 - 3x - 44}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{6-5x}}{3x^2 + 4x - 4}$$

1.2.13 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+3} - 2}{3x^2 - 9x - 30}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt[3]{7-x}}{4x^2 - 3x - 7}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 4x - 20}{\sqrt[3]{x-1} - 1}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 6x - 16}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{4 - \sqrt[3]{x+59}}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{x+7}}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 + \sqrt[3]{x-5}}{x^2 - 4x - 21}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + x^2 + 2}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{2 - \sqrt[3]{2x+4}}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{6x^2 + x - 7}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x - 18}{2 - \sqrt[3]{5 - x}}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{5x - 40}{2 - \sqrt[3]{x}}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt[3]{2x - 5}}{x^2 + x - 12}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6 + x} - 2}{4x^2 - 5x - 6}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{1 - \sqrt[3]{2 + x}}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 7x - 8}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{\sqrt[3]{x - 6} + 2}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{\sqrt[3]{26 + x} - 3}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{7 - 3x} - 1}{x^2 + 3x - 10}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{2x^2 - 4x - 6}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + \sqrt[3]{3x - 2}}{x^2 + 3x + 2}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{9x} + 3}{2x^2 + 3x - 9}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} - 2}{4x^2 + 5x - 9}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{9 - x}}{3x^2 + 4x - 7}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{\sqrt[3]{10 - x} - 2}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x - 8}{\sqrt[3]{10 + x} - 2}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{26 + x} - 3}{3x^2 + 5x - 8}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 8x - 128}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

1.2.14 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{\arctg^2 3x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi(x + 5))}{\arctg 3x}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 2x}{\cos 7x - \cos 2x}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 7x}{\sin(\pi(x + 7))}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) \cdot \operatorname{tg} 3x}{\arcsin 2x^2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \cdot \arcsin^2 5x}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\arcsin^2 7x}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 5x}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \cdot \arcsin 2x}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \cdot \operatorname{arctg}^2 x}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 5x$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos^3 3x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 2x}{\operatorname{arctg}(x^2) + 2x}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 3x}{\cos^2 2x - 1}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2) - 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \operatorname{arctg} 2x}{1 - \cos x}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{\cos 5x - \cos 3x}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x \cdot \arcsin 2x}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^3) - 2x}{\operatorname{tg} 4x - \sin 2x}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{\cos 3x - \cos x}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{\arcsin 3x - \operatorname{arctg} 5x}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2) - 2x^3}{1 - \cos 4x}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \sin 4x}{\cos 3x - \cos x}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{1 - \sqrt{\cos x}}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin x}{\operatorname{arctg} 3x}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}{\cos x - \cos 3x}$$

1.2.15 Знайти границі

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2-3x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{5x+2}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2} \right)^{2-3x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{2x+1}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{2x-1}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-3} \right)^{2-5x}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x+3} \right)^{1-7x}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1} \right)^{7-4x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+2} \right)^{3x+2}$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-1} \right)^{2-3x}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-3}{3x+2} \right)^{4x-3}$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x-3} \right)^{5x+2}$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+6}{2x-3} \right)^{2-7x}$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2} \right)^{3-2x}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{4x+3}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+4} \right)^{8-3x}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+2} \right)^{2x-4}$

19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{2-5x}$

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{2-3x}$

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1} \right)^{7-5x}$

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{2x-1}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{4-3x}$

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1} \right)^{3x-1}$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-5} \right)^{3x+4}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{7-3x}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{1-3x}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+1}{6x+2} \right)^{1-6x}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-6} \right)^{3-2x}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-1}{7x+2} \right)^{5x+2}$$

1.2.16 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3x-5} \right)^{2x+3}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{x+4} \right)^{1-2x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{3x+4} \right)^{x+4}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{4x-1} \right)^{2x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{4x+2} \right)^{4-3x}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{9x-7} \right)^{2x+5}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+7x} \right)^{5x+1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{3x+1} \right)^{7-3x}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{2-x} \right)^{3-4x}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-4x} \right)^{5-6x}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{x+6} \right)^{2x-7}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{4x-5} \right)^{2x+9}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{3x-7} \right)^{3-4x}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{3x+1} \right)^{4+3x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-5}{x+4} \right)^{2x+1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{3x+7} \right)^{4x-7}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)^{4-5x}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{x-6} \right)^{8x-1}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{3x-4} \right)^{11-2x}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{4x+3} \right)^{2x+8}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+4}{5x-4} \right)^{4x+3}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-5} \right)^{5x+1}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{x-3} \right)^{2-4x}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{2x-1} \right)^{6x-1}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^{9-4x}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{7x+8}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+7}{3x-2} \right)^{7x+4}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{3x+2} \right)^{2x+1}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x-1} \right)^{1-3x}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{5x-5} \right)^{2-3x}$$

1.2.17 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^2 \right)^{\frac{2}{x^2}}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 3x^2 \right)^{\frac{4}{x^2}}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^3 \right)^{\frac{1}{x^4 + 3x^3}}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^3 \right)^{\frac{2}{x^5 - 2x^3}}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{4} \right)^{\frac{2}{x^2 + 2x}}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+2x}{3} \right)^{\frac{2}{x}}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4+x}{4} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^2\right)^{\frac{3}{2x^2}}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + 3x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^4 + 2x^2}}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - x^2}{3}\right)^{\frac{5}{x^4 - 3x^2}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 - 5x}{4}\right)^{\frac{1}{x^2 - x}}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + 3x^2}{2}\right)^{\frac{3}{5x^2}}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 + 2x^2}{5}\right)^{\frac{4}{x^2}}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 3x^3\right)^{\frac{5}{x^4 + x^3}}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + 3x^3}{2}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 + 2x}{4}\right)^{\frac{1}{x^2 - x}}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 + 5x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 3x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{2}{x^3 + x^2}}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^3}{3}\right)^{\frac{2}{x^3}}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^4}{4}\right)^{\frac{1}{x^4}}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 + x^3}{4}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - 5x^2}{3}\right)^{\frac{4}{x^2}}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 - x^3}{5}\right)^{\frac{2}{x^3}}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7 - 2x^2}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7 + x^3}{7} \right)^{\frac{3}{x^3}}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 + 2x^2}{5} \right)^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 - 2x^3}{5} \right)^{\frac{1}{x^3 - x^4}}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 5x^3}{2} \right)^{-\frac{1}{x^3}}$$

1.2.18 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\ln(1 + 2x^2)}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{2^{3x} - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{e^{5x} - e^{3x}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^x}{\ln(1 + x^2 - x)}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{\sqrt[5]{1 + x} - 1}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{(1 + x^2)^5 - 1}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^4 - 1}{\ln(1 + 5x)}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{\sqrt[5]{1 + x} - 1}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1 + x^2} - 1}{\ln(1 + \sin^2 x)}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2} - 1}{\sqrt[5]{1 + x^2} - 1}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt[3]{1 + 2x^2} - 1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^x}{\ln(1 + 2x)}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\ln(1 + 3x^3)}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{1 - e^{x^2}}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \sin x)}{1 - 2x^2}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sqrt[5]{1 - x^2} - 1}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\ln(1 + \arctg^2 2x)}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\sqrt[5]{1 + x} - 1}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^3}}{\sqrt[4]{1 + 2x} - 1}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 2x^3} - 1}{e^{3x^3} - 1}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + 2x^2} - 1}{\ln(1 - 3x^2)}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + x^2} - 1}{\ln(1 + 3x^2)}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^{2x}}{\arctg 2x - 7x}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{\ln(1 + 3x^2)}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\arcsin x^3}$$

1.2.19 Знайти границі

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi - 3x}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{\sin^2 3x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3 + 8}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x-4)}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6x - \pi}{\cos 3x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1-\operatorname{tg} x}}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

2.1 Аудиторні завдання

1. Знайти область визначення функцій:

$$а) y = \arcsin \frac{5x-3}{2} + \sqrt{4x^2-1}$$

$$б) y = \arccos \frac{x-3}{5} - \lg(3x+6)$$

$$в) y = \sqrt{4x^2-1} + \lg(3x+6)$$

$$г) y = \sqrt{\frac{x+5}{4-2x}} + \arccos \frac{x-3}{4}$$

Відповіді: а) $x \in [0,5; 1]$, б) $x \in (-2; 8]$;

в) $x \in (-2; -0,5] \cup [0,5; \infty)$, г) $x \in [-1; 2)$

2. Дослідити на неперервність функції та зробити схематичне креслення їх графіків:

$$а) y = \frac{x+2}{x-2}$$

$$б) y = \frac{x-3}{1+x}$$

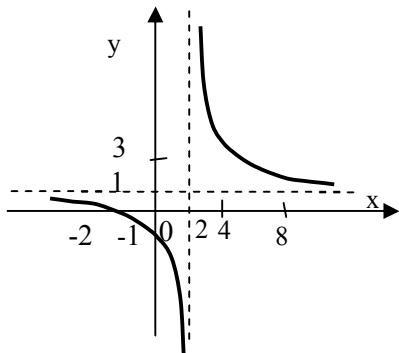
$$в) y = 4^{\frac{1}{2-x}}$$

$$г) y = \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$$

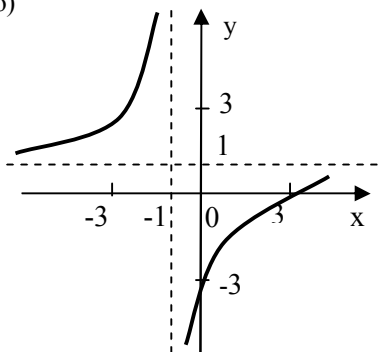
$$д) y = \begin{cases} -x^2, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Відповіді: а) $x = 2$ – точка розриву другого роду; б) $x = -1$ – точка розриву другого роду; в) $x = 2$ – точка розриву другого роду; г) $x = -1$ – точка розриву першого роду, стрибок $\delta = 2$; д) функція неперервна в точці $x = -1$ і має розрив першого роду в точці $x = 2$, стрибок $\delta = 2$.

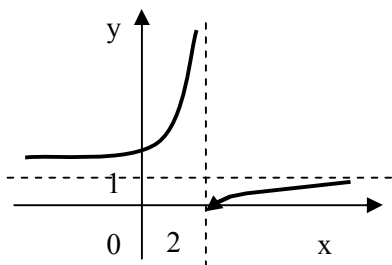
a)



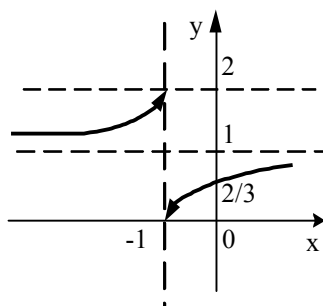
б)



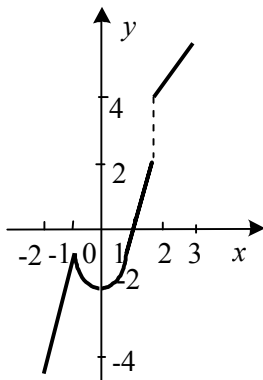
в)



г)



д)



2.2 Індивідуальні завдання.

2.2.1 Знайти область визначення функції

$$1. y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-4)}}$$

$$2. y = \sqrt{16-x^2} - 3\sqrt{x^2-4}$$

$$3. y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+3x+2}}$$

$$4. y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x^2}$$

$$5. y = \sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$$

$$6. y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

$$7. y = \sqrt{x-2} + \sqrt{81-x^2}$$

$$8. y = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{16-x^2}$$

$$9. y = \lg(25-x^2) + \arcsin \frac{2x-1}{7}$$

$$10. y = \lg(6x^2+x-1) - \arccos \frac{x-2}{3}$$

$$11. y = \frac{1}{\lg(x-1)} + \sqrt{x+3}$$

$$12. y = \frac{4}{\sqrt{x^2-5x+6}} - \arccos \frac{x-1}{7}$$

$$13. y = \ln((x-3)(x+10)) - \arcsin \frac{2x+1}{7}$$

$$14. y = \sqrt{x^2-4x+3} - \frac{2}{x}$$

$$15. y = \sqrt{2+3x-5x^2} - \arccos \frac{x-2}{5}$$

$$16. y = \sqrt{6-x-2x^2} + \arcsin \frac{x+1}{2}$$

$$17. y = \ln(6x^2 - x - 1) + \arcsin \frac{x-4}{7}$$

$$18. y = \ln \frac{5-x}{x-3} + \sqrt{(7-x)(7+x)}$$

$$19. y = \arcsin \frac{x-6}{7} + \sqrt{2+3x+5x^2}$$

$$20. y = \sqrt{81-x^2} - 2\sqrt{x^2-4}$$

$$21. y = \arcsin \frac{x-1}{11} + \sqrt{3x^2+2x-1}$$

$$22. y = \sqrt{x-1} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$23. y = \lg \frac{x^2-6x+8}{x^2+9x+20}$$

$$24. y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$25. y = \arccos \frac{x-2}{5} + \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$$

$$26. y = \ln \frac{x-2}{9-x} + \arcsin \frac{x-3}{5}$$

$$27. y = \sqrt{81-x^2} + \arcsin \frac{2x-1}{5}$$

$$28. y = \sqrt{x^2-36} - \arcsin \frac{2x-5}{9}$$

$$29. y = \sqrt{\frac{3-x}{x-5}} + \arccos \frac{x+3}{6}$$

$$30. y = \sqrt{\frac{x^2+2x-15}{x+1}}$$

2.2.2 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції.

1. $y = \frac{2x-3}{1-x}$

2. $y = \frac{x-2}{4-x}$

3. $y = \frac{x-1}{2x+1}$

4. $y = \frac{x-4}{2x+1}$

5. $y = \frac{x+4}{x+2}$

6. $y = \frac{x-3}{x+1}$

7. $y = \frac{x+4}{2x-1}$

8. $y = \frac{x+1}{2x-1}$

9. $y = \frac{2x-5}{x+1}$

10. $y = \frac{x+2}{2x-1}$

11. $y = \frac{x+3}{3x+1}$

12. $y = \frac{x-2}{x+1}$

13. $y = \frac{x+2}{x-1}$

14. $y = \frac{x-3}{2x-1}$

15. $y = \frac{2x+3}{x+1}$

16. $y = \frac{4-x}{x+2}$

17. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

18. $y = \frac{5-x}{x+1}$

19. $y = \frac{x-9}{3x+1}$

20. $y = \frac{3x-1}{2x+1}$

21. $y = \frac{x-4}{2x-1}$

22. $y = \frac{x+1}{x-2}$

23. $y = \frac{2x+3}{2x+1}$

24. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

25. $y = \frac{x-1}{x+2}$

26. $y = \frac{x+9}{x-3}$

27. $y = \frac{x+2}{x-4}$

28. $y = \frac{3x-1}{x+2}$

29. $y = \frac{x+1}{x+2}$

30. $y = \frac{3x+1}{x-2}$

2.2.3 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції.

1. $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$

2. $y = 2^{\frac{1}{5+x}}$

3. $y = 4^{\frac{1}{x+1}}$

4. $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$

5. $y = 3^{\frac{1}{x-5}}$

6. $y = 2^{\frac{1}{x-9}}$

7. $y = 5^{\frac{1}{x-9}}$

8. $y = 4^{\frac{1}{x+3}}$

9. $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 10. $y = 9^{\frac{1}{x+9}}$ | 11. $y = 5^{\frac{1}{x-4}}$ | 12. $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$ |
| 13. $y = 2^{\frac{1}{3+x}}$ | 14. $y = 3^{\frac{1}{7+x}}$ | 15. $y = 2^{\frac{1}{x-8}}$ |
| 16. $y = e^{\frac{1}{x+10}}$ | 17. $y = 4^{\frac{1}{4-x}}$ | 18. $y = 6^{\frac{1}{5-x}}$ |
| 19. $y = 3^{\frac{1}{x-4}}$ | 20. $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$ | 21. $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ |
| 22. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$ | 23. $y = 3^{\frac{1}{x-3}}$ | 24. $y = 4^{\frac{1}{x+4}}$ |
| 25. $y = 5^{\frac{1}{x-5}}$ | 26. $y = 6^{\frac{1}{x-6}}$ | 27. $y = 7^{\frac{1}{x-7}}$ |
| 28. $y = 2^{\frac{1}{2-x}}$ | 29. $y = 4^{\frac{1}{x-4}}$ | 30. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$ |

2.2.4 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції.

- | | |
|---|---|
| 1. $y = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x-4}}};$ | 2. $y = \frac{4}{6 + 7^{\frac{1}{x+2}}}$ |
| 3. $y = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x+2}}}$ | 4. $y = \frac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x-2}}}$ |
| 5. $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ | 6. $y = \frac{2}{3 + 5^{\frac{1}{x+1}}}$ |
| 7. $y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-4}}}$ | 8. $y = \frac{3}{2 + 2^{\frac{1}{x-3}}}$ |
| 9. $y = \frac{5}{3 + 2^{\frac{1}{x+4}}}$ | 10. $y = \frac{2}{4 + 5^{\frac{1}{x+3}}}$ |

$$11. \quad y = \frac{4}{1 + 4 \frac{1}{x-3}}$$

$$13. \quad y = \frac{5}{4 + 3 \frac{1}{x+2}}$$

$$15. \quad y = \frac{1}{1 + 3 \frac{1}{x+6}}$$

$$17. \quad y = \frac{1}{2 + 5 \frac{1}{x-2}}$$

$$19. \quad y = \frac{3}{4 + 2 \frac{1}{x-5}}$$

$$21. \quad y = \frac{6}{3 + 6 \frac{1}{x-2}}$$

$$23. \quad y = \frac{1}{2 + 3 \frac{1}{x-7}}$$

$$25. \quad y = \frac{3}{2 + 2 \frac{1}{x-4}}$$

$$27. \quad y = \frac{2}{1 + 8 \frac{1}{x-5}}$$

$$29. \quad y = \frac{9}{2 + 7 \frac{1}{x-3}}$$

$$12. \quad y = \frac{7}{1 + 3 \frac{1}{x-5}}$$

$$14. \quad y = \frac{6}{2 + 4 \frac{1}{x-1}}$$

$$16. \quad y = \frac{1}{3 + 2 \frac{1}{x+7}}$$

$$18. \quad y = \frac{2}{1 + 3 \frac{1}{x-4}}$$

$$20. \quad y = \frac{1}{1 + 3 \frac{1}{x+1}}$$

$$22. \quad y = \frac{4}{5 + 2 \frac{1}{x-5}}$$

$$24. \quad y = \frac{5}{1 + 4 \frac{1}{x+3}}$$

$$26. \quad y = \frac{1}{3 + 5 \frac{1}{x+1}}$$

$$28. \quad y = \frac{4}{4 + 2 \frac{1}{x+3}}$$

$$30. \quad y = \frac{1}{3 + 2 \frac{1}{x+2}}$$

2.2.5 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції

$$1. \quad y = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2+2, & 0 \leq x < 2 \\ -x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$2. \quad y = \begin{cases} 2, & x < -3 \\ x^2-1, & -3 \leq x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$3. \quad y = \begin{cases} 2x+1, & x < -1 \\ x^2-4, & -1 \leq x < 3 \\ x+2, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$4. \quad y = \begin{cases} 1-2x, & x \leq -1 \\ 2x^2+1, & -1 < x \leq 2 \\ 2^x, & x > 2 \end{cases}$$

$$5. \quad y = \begin{cases} x^3+1, & x \leq 0 \\ x+3, & 0 < x < 1 \\ 5-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$6. \quad y = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \\ x-3, & x > 2 \end{cases}$$

$$7. \quad y = \begin{cases} x^2-4, & x \leq 2 \\ 2-x, & 2 < x \leq 6 \\ 2x-7, & x > 6 \end{cases}$$

$$8. \quad y = \begin{cases} 3x-2, & x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$9. \quad y = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & \frac{\pi}{4} < x < 2\pi \\ x-1, & x \geq 2\pi \end{cases}$$

$$10. \quad y = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \\ 1, & x > e \end{cases}$$

$$11. \quad y = \begin{cases} 5^x, & x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \leq 2 \\ 3x-2, & x > 2 \end{cases}$$

$$12. \quad y = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x+2, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$13. \quad y = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi \\ -1, & x > \pi \end{cases}$$

$$14. \quad y = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 4-x, & 2 < x < 4 \\ x^2-9, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$15. \quad y = \begin{cases} 2x-3, & x < 1 \\ x^2-2, & 1 \leq x < 3 \\ -x, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$16. \quad y = \begin{cases} -2x, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x < 2 \\ 3x-5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$17. \quad y = \begin{cases} 1, & x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi \\ x, & x \geq 2\pi \end{cases}$$

$$18. \quad y = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0 \\ -2x+1, & 0 < x < 3 \\ x+2, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$19. \quad y = \begin{cases} 2-x, & x < -3 \\ -x^2, & -3 \leq x < 2 \\ 2-3x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$20. \quad y = \begin{cases} 1-x, & x < -1 \\ 2x+4, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$21. \quad y = \begin{cases} x - \frac{\pi}{4}, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos 2x, & \frac{\pi}{4} < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$22. \quad y = \begin{cases} x^2-4, & x < -1 \\ 3x, & -1 \leq x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$23. \quad y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x < 3 \\ -x, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$24. \quad y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & x < -3 \\ -x-5, & -3 \leq x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$25. \quad y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x < 2 \\ x^3 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$26. \quad y = \begin{cases} x+10, & x \leq -3 \\ x^2 + 4, & -3 < x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$27. \quad y = \begin{cases} x+3, & x < -1 \\ 2-2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$28. \quad y = \begin{cases} -x^2 + 3, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & 1 < x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$29. \quad y = \begin{cases} 4, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x < 2 \\ 3-x, & x > 2 \end{cases}$$

$$30. \quad y = \begin{cases} x^3, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & -1 < x < 3 \\ x+2, & x \geq 3 \end{cases}$$

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. Аудиторні завдання

1. Знайти похідну функції, користуючись означенням похідної:

а) $y = \sin \frac{5x}{2}$

б) $y = 5x^3 - 3x^2 + 2$

2. Знайти похідну функції, користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання.

а) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{\sin^2 3} + (2x-3)^7$

б) $y = \ln \sqrt[3]{x^3 - 2x + 4} - \arcsin \sqrt{2x^3 - 1}$

$$\text{в) } y = e^{\cos^2(x+2)} \cdot \operatorname{tg}(3x^4 + 5x) - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin^3 \frac{x}{2}}$$

3. Знайти похідну функції, застосовуючи логарифмічне диференціювання.

$$\text{а) } y = \left(\cos \sqrt[3]{x} \right)^{\ln(x^3 + 6)}$$

$$\text{б) } y = \frac{\sqrt[5]{x^2 + 5x}}{(6x - 4)^2 (x + 5)^3}$$

4. Знайти першу і другу похідну функції, заданої неявно.

$$\text{а) } \sin(x + y) = 2e^{2x+y}$$

$$\text{б) } x^2 + xy^3 + y^2 = 0$$

5. Знайти першу і другу похідну функції, заданої параметрично.

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2 - 3t \\ y = 2t - 3t^2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = \ln t \\ y = 1/(1 - t) \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

6. Знайти границі функцій, користуючись правилом Лопіталя.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - 3e^{x^2} + 3}{4x^2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg^2 x - x^2}{x \cdot \sin 2x}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot e^{2x} - 1}{5x - x^3}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 + 5) \cdot e^{-7x}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin x}{ctg x}$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot tg \frac{\pi x}{2}$$

7. Довести, що функція є розв'язком заданого рівняння:

$$\text{а) } y = (\arcsin x) / \sqrt{1-x^2}, \quad (1-x^2)y' - xy = 1;$$

$$\text{б) } y = x(1 - \ln x), \quad y' = y/x - 1;$$

$$\text{в) } y = xe^{-x^2/2}, \quad y'' + 2y + xy' = 0.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку:

$$\text{а) } y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1; 4];$$

$$\text{б) } y = x - \sin^2 x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{в)} \ y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} - x, \ x \in [1; 4].$$

9. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій:

$$\text{а)} \ y = \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{б)} \ y = \frac{e^{x+5}}{x^2 - 1},$$

$$\text{в)} \ y = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} - x$$

10. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції:

$$\text{а)} \ y = \frac{2x}{4 - x^2},$$

$$\text{б)} \ y = x \cdot e^{3x-2}.$$

11. Знайти асимптоти графіків заданих функцій:

$$\text{а)} \ y = \frac{x^2 - 4x}{5x - 2},$$

$$\text{б)} \ y = \frac{x+1}{9-x^2}.$$

12. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функцій в заданих точках:

$$\text{а)} \ y(x) = x \cdot \ln x, \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 0$$

$$\text{б)} \ x^2 + y^2 = 25, \quad x_0 = 4 \quad y_0 = -3$$

$$\text{в)} \ y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}, \quad x_0 = 2 \quad y_0 = 3$$

13. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2} \quad \text{б)} \quad y = x \cdot e^x$$

Довідковий матеріал

Похідна

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad x' = 1; \quad C' = 0$$

$$(u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'; \quad (C \cdot u)' = C \cdot u';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}; \quad \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C}{u^2} \cdot u'$$

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha - \text{кут нахилу з додатнім напрямом } O x$$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) - \text{рівняння дотичної до графіка функції}$$

$$y = f(x_0) \text{ в точці } (x_0, y_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) - \text{рівняння нормалі до графіка функції}$$

$$y = f(x_0) \text{ в точці } (x_0, y_0)$$

Таблиця похідних для функції $u = u(x)$

$$1. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'; \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'; \quad a - \text{const}$$

$$3. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'; \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$4. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$5.(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$6.(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$7.(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$8.(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$9.(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$10.(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$11.(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$12.(sh u)' = ch u \cdot u'$$

$$13.(ch u)' = sh u \cdot u'$$

$$14.(th u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$$

$$15.(cth u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$$

$$16.(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v', \quad u = u(x), \quad v = v(x)$$

Правило Лопітала (для розкриття невизначеностей $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

$\left[\frac{0}{0} \right]$, $[1^\infty]$ та інших):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2 Індивідуальні завдання

3.2.1 Знайти похідну функції, користуючись означенням похідної.

- | | | |
|---|---|------------------------------------|
| 1. $y = \sin 3x$ | 2. $y = \operatorname{tg} 2x$ | 3. $y = 2^{1-3x}$ |
| 4. $y = 1 + x - x^2$ | 5. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ | 6. $y = 2 \cdot e^{x/2}$ |
| 7. $y = 2/(x+2)$ | 8. $y = \frac{\cos 2x}{2}$ | 9. $y = 1/(1-x)$ |
| 10. $y = e^{3x+2}$ | 11. $y = \sin 2x/3$ | 12. $y = 2x - 3x^2$ |
| 13. $y = 3x^2 + 5x - 6$ | 14. $y = \sqrt{x-1}$ | 15. $y = 2 \cdot \sin \frac{x}{2}$ |
| 16. $y = 4 \cos \left(\frac{x}{3} + 2 \right)$ | 17. $y = \cos (x/3)$ | 18. $y = 1/x$ |
| 19. $y = x^2 + 2x$ | 20. $y = \sqrt[3]{x^2}$ | 21. $y = \sqrt{3x+1}$ |
| 22. $y = x^{-2}$ | 23. $y = \sin \frac{x}{4}$ | 24. $y = 3^{x+1}$ |
| 25. $y = \operatorname{ctg} 4x$ | 26. $y = 1/(2x+5)$ | 27. $y = \operatorname{ctg} (x/2)$ |
| 28. $y = 6 - 4x^2$ | 29. $y = 3x^2/2$ | 30. $y = (x+1)^2$ |

3.2.2 Знайти похідну функції, користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання.

1. а) $y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{3} + 2\sin 3x - \cos\sqrt{2}$
- б) $y = 2^{\cos x - 5} - \sqrt[3]{x^4 + 1}$
- в) $y = \sin^3 2x \cdot \ln(x^2 - 1) - \frac{e^{2x}}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

$$2. a) y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - 3 \cos 2x + \sin 4$$

$$б) y = 5 \operatorname{tg}(x^3 + 2x) + e^{\sqrt{3x-4}}$$

$$в) y = \frac{\sin 5x}{(x^3 + 2x)^2} - 3 \arcsin \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - 2x^2}$$

$$3. a) y = 3 \operatorname{tg} 4x - \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} + \sqrt[3]{\pi}$$

$$б) y = \sin^3(x^2 + 2x) - e^{\operatorname{arctg} 4x}$$

$$в) y = \frac{\ln^2(2x+1)}{\operatorname{arctg} 3x} + 3^{\cos^2 x} \cdot \sqrt{x^4 + 2}$$

$$4. a) y = \sqrt[3]{5} \operatorname{ctg} 5x - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} + \sqrt[5]{\pi}$$

$$б) y = \sin^3(2^{\arccos x}) - e^{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$в) y = \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{5x}} - \cos 3x \cdot \operatorname{arctg}^3 2x$$

$$5. a) y = \operatorname{tg} 2 \cdot \sin 3x + e^5 - \frac{\sqrt[7]{x^4}}{4}$$

$$б) y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 2x)$$

$$в) y = \frac{x^2 - 6}{\operatorname{tg} 2x} - \log_6 5x \cdot \arccos(3x - 3)$$

$$6. a) y = \frac{e^x}{3} - 2\sqrt[3]{x^2} + \ln 3 \cdot \sin 2x$$

$$б) y = 3 \ln(1 + \sqrt{x}) - 2\sqrt{1 + \cos x}$$

$$\text{в)} y = \frac{\arcsin^2 x}{(2x+1)^3} - \operatorname{tg}^2 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$$

$$7. \text{ а)} y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \pi^2$$

$$\text{б)} y = \ln(1 + \sin^2 x) - \operatorname{arctg}(\sin x)$$

$$\text{в)} y = \frac{2^{x^2+3x}}{x^2-5x} - \arcsin^2 2x \cdot \cos^3 3x$$

$$8. \text{ а)} y = \frac{3^{x^2}}{2} + \sqrt{\pi} + 7 \cdot \sqrt[7]{x^5}$$

$$\text{б)} y = 2 \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}} - \ln(\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{в)} y = \sin^2 7x \cdot e^{x^2-3} - \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x^2+3x+2}$$

$$9. \text{ а)} y = \sqrt[3]{\pi^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 5 \ln 4x$$

$$\text{б)} y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3} - \sin^3(2x^2+5)$$

$$\text{в)} y = (2x+3) \cdot \sqrt{2+3x-x^2} - \frac{\arccos^2 2x}{\sin^3 x}$$

$$10. \text{ а)} y = \frac{3}{\sqrt[5]{x^4}} + \sqrt{\sin 2} - 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$$

$$\text{б)} y = \arccos(\sqrt{1-2x^2}) + e^{\operatorname{ctg} x}$$

$$\text{в)} y = \frac{\ln 5x}{x^2+2^x} - (3x-x^2) \cos^3 2x$$

$$11. \text{ a) } y = 2x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\cos 1} + 5 \operatorname{tg} \frac{x}{5}$$

$$\text{б) } y = \ln^2(\sin 2x) - \sqrt{e^{x^2} - \cos 3x}$$

$$\text{в) } y = \frac{x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 + 10}} - 5^{x^2 + 2x} \cdot \cos 2x$$

$$12. \text{ a) } y = \sin 3 + \frac{x^2 \sqrt[3]{x}}{3} + \frac{3 \cos 2x}{2}$$

$$\text{б) } y = (5x - 2)^4 - \ln^3(e^{x^2} + 5x)$$

$$\text{в) } y = \frac{\arcsin x^2}{x - 1} - (3 - 2x)^3 \cdot \operatorname{tg} 5x$$

$$13. \text{ a) } y = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + \sin \sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt[5]{x^2}}$$

$$\text{б) } y = 2\sqrt{e^{2x} + 1} - 3 \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\text{в) } y = \frac{\sin^2 x}{\cos \sqrt{x}} - 2^{x^2 + 3x} \cdot \arcsin(5x + 1)$$

$$14. \text{ a) } y = e^{\sqrt{3}} - 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{б) } y = \ln(x^3 + 3 \cos x) - 2^{\arcsin 5x}$$

$$\text{в) } y = (2x - 1) \cdot \sqrt{2 + x - x^2} - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2 + 5}$$

$$15. \text{ a) } y = \ln 3 + 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} - \frac{x}{2\sqrt[5]{x^3}}$$

$$\text{б) } y = \ln(x^2 + 3 \sin x) - 2^{\arcsin 3x}$$

$$\text{в) } y = 3^{\arctg \sqrt{x}} \cdot (6x - x^2) - \frac{\tg 3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$16. \text{ а) } y = 6^{2x-3} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \tg 2$$

$$\text{б) } y = \arctg\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) - e^{2\sin^3 x}$$

$$\text{в) } y = \frac{\cos^2 x}{\arccos 2x} + \ln(1 + 2x) \cdot (x^3 + 3x)$$

$$17. \text{ а) } y = \frac{1}{3\sqrt[5]{x}} + \sin \sqrt{2} + \ln(2x - 1)$$

$$\text{б) } y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 5}\right) - 2\arctg \sqrt{x^3 - 1}$$

$$\text{в) } y = 3^{x^2+5x} \cdot \arcsin \sqrt{x} - \frac{\tg^2 5x}{e^{2\sin x}}$$

$$18. \text{ а) } y = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} - \arctg 2x - \sqrt{\sin 1}$$

$$\text{б) } y = \ln(\cos^2 x + x^2) - 3\sqrt{2^{\sin 2x} + x^3}$$

$$\text{в) } y = \arccotg^2 5x \cdot \ln(x - 4) - \frac{\log_3(x + 4)}{\cos^5 x}$$

$$19. \text{ а) } y = \frac{1}{3\sqrt{x^5}} - \cos \frac{x}{3} + 5 \sin 5$$

$$\text{б) } y = \sqrt{5x - x^2} - \ln^3(1 - \sin x^3)$$

$$\text{в) } y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1) - \frac{\arctg(x + 7)}{(x - 2)^2}$$

$$20. \text{ a) } y = \sin \operatorname{tg} 2 - \frac{4}{3\sqrt[7]{x^5}} + 2 \ln(3x + 1)$$

$$\text{б) } y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - 2 \operatorname{arctg} (e^x - e^{-x})$$

$$\text{в) } y = \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7} - \sqrt{\arccos x} \cdot 3^{-x^2}$$

$$21. \text{ a) } y = \sin \sqrt[8]{3} - \frac{3}{4\sqrt{x}} + \operatorname{tg}(2x + 3)$$

$$\text{б) } y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) - e^{\sin^2 3x}$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 7x^2 - \frac{4 \ln(3x + 7)}{5x^2}$$

$$22. \text{ a) } y = \frac{\sqrt[8]{x^5}}{5} - \sqrt{\sin 2} + \cos(2x - 1)$$

$$\text{б) } y = \arcsin \sqrt{1 - 2x^2} - (3x^2 + 4x)^5$$

$$\text{в) } y = \frac{4 \log_2(3x - 5)}{(x - 2)^2} + 3^{-x^2} \cdot \arcsin 3x^3$$

$$23. \text{ a) } y = \frac{\sqrt[10]{x^9}}{9} - \ln \sin 3 + \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + 2 \right)$$

$$\text{б) } y = \ln^2(x + \cos x) - 2^{\sin^3 2x}$$

$$\text{в) } y = \ln(2x + 3) \cdot e^{-x^2} + \frac{\log_3(2x + 5)}{\cos 5x}$$

$$24. \text{ a) } y = \ln \cos 1 - \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2\sqrt[8]{x^7}}$$

$$\text{б)} y = \arccos \sqrt{4-2x} + 2^{\sin^2 3x}$$

$$\text{в)} y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^2 + \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{2x^2 + 3x}$$

$$25. \text{ а)} y = \frac{2}{3\sqrt[5]{x^3}} - \ln 3 + \sin(2x+3)$$

$$\text{б)} y = \ln \left(\arcsin \sqrt{1-e^x} \right) - 2^{2x^2-5x}$$

$$\text{в)} y = 3^{\cos x} \cdot \arcsin^2 3x - \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{3x^2 - 4}$$

$$26. \text{ а)} y = \frac{3}{2\sqrt[6]{x^5}} - \sqrt[3]{\pi^2} + \sin \frac{x}{3}$$

$$\text{б)} y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + 3^{5x-3x^2}$$

$$\text{в)} y = \frac{e^{-\operatorname{ctg} 2x}}{3x^2 + 4x + 2} - \log_3(2x+4) \cdot \operatorname{arctg}^3 7x$$

$$27. \text{ а)} y = \sqrt[5]{\sin 3} - \frac{3\sqrt[6]{x^5}}{4} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\text{б)} y = \ln \left(\sin^3 x + e^{2x} \right) - 3\sqrt{x^2 + 3x + e^{\operatorname{ctg} x}}$$

$$\text{в)} y = 4^{-\sin 2x} \cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{\cos(7x+2)}{\operatorname{ctg} 2x^3}$$

$$28. \text{ а)} y = \sqrt[5]{\cos \operatorname{tg} 3} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

$$\text{б)} y = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3+6x-x^2}$$

$$\text{в)} y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$$

$$29. \text{ а)} y = \operatorname{tg} \ln 2 + \frac{3}{\sqrt[7]{x^4}} - \arccos 2x$$

$$\text{б)} y = \frac{1}{8} \ln(1 - 4x^2) - \sqrt{\arcsin 2x}$$

$$\text{в)} y = \operatorname{ctg}(8\sqrt{x}) \cdot \operatorname{arctg}^2 x + \frac{2x^2 + 3x}{\sin 2x}$$

$$30. \text{ а)} y = \operatorname{tg} \sqrt[8]{4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^7}} + \operatorname{ctg} 3x$$

$$\text{б)} y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - 1 - \ln(2 + e^{x^3})$$

$$\text{в)} y = \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x} + \operatorname{tg}(2\sqrt{x}) \cdot e^{\arcsin \sqrt{1-x}}$$

3.2.3 Знайти похідну функції, застосовуючи логарифмічне диференціювання.

$$1. \quad \text{а)} y = (\sin \sqrt{x})^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\text{б)} y = \frac{\sqrt{x-2}}{(x+1)^3(x+5)^4}$$

$$2. \quad \text{а)} y = (\operatorname{arctg} x)^{e^{\operatorname{tg} x}}$$

$$\text{б)} y = \frac{\sqrt[3]{x-3}}{(x+5)^3(x+1)^2}$$

$$3. \quad \text{а)} y = (x^2 + 1)^{\operatorname{ctg} 8x}$$

$$\text{б)} y = \frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{x^3}$$

$$4. \quad \text{а)} y = (\sin 3x)^{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$$

5. a) $y = x^{\sin 2x}$

б) $y = (x-1) \cdot \sqrt[5]{\frac{4x+1}{x}}$

6. a) $y = (\cos x)^{\sin \sqrt{x}}$

б) $y = \frac{(5x+4)\sqrt{x+1}}{6x^3}$

7. a) $y = (2x)^{\sqrt{x}}$

б) $y = \frac{(x-1)^3 \sqrt[3]{x^2+1}}{(x+5)^2}$

8. a) $y = (\arctg 3x)^{2x}$

б) $y = \frac{(x+2)^2 \sqrt[4]{x-1}}{(x-3)^3}$

9. a) $y = x^{\ln^2 x}$

б) $y = \frac{(x+1)^5 \sqrt[4]{x-3}}{\sqrt[6]{(x+3)^5}}$

10. a) $y = (\sin 2x)^{\cos 2x}$

б) $y = \frac{\sqrt[5]{x+1} \cdot (x^2+1)^3}{(x+5)^2}$

11. a) $y = x^{\frac{1}{x}}$

б) $y = \frac{(x-2)^7}{\sqrt{(x+2)^5(x-3)^7}}$

12. a) $y = (2x)^{\sin^2 x}$

б) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{(x+2)^3 \sqrt[3]{(x-3)^2}}$

13. a) $y = (x^2 + 1)^{\sin 2x}$

б) $y = \frac{\sqrt[5]{2x-3}}{(x+3)^3 \cdot (x+5)}$

14. a) $y = (2x)^{\arctg 2x}$

б) $y = \frac{(x+4)^6 \sqrt[3]{x+5}}{(x-1)^4}$

15. a) $y = (\tg x)^{\ln(\sqrt{x}+1)}$

б) $y = (x+1) \sqrt[4]{\frac{x-5}{(x+3)^3}}$

16. a) $y = (\ctg 2x)^{3x^2}$

б) $y = \frac{(x+1)^6}{\sqrt[3]{x-5} \cdot (3x+2)^3}$

17. a) $y = (\arctg x)^{e^{2x}}$

б) $y = \frac{(x+1) \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[5]{3x+4}}$

$$18. \quad a) y = \left(\arcsin \sqrt{x} \right)^{\cos 8x}$$

$$b) y = \sqrt[3]{\frac{(x+3)\sqrt[3]{2x+5}}{(3x+2)^5}}$$

$$19. \quad a) y = (\cos 6x)^{2-x}$$

$$b) y = \frac{6(x+2)\sqrt{2x^2+3x}}{(x-5)^3}$$

$$20. \quad a) y = \left(\cos \frac{4}{x} \right)^{\sin \frac{x}{4}}$$

$$b) y = 4x^4 \cdot \sqrt[7]{\frac{(x+1)^3}{(2x-5)^4}}$$

$$21. \quad a) y = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} \right)^{\cos 2x}$$

$$b) y = \frac{2(x-1)^5 \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$$

$$22. \quad a) y = \left(x + e^{2x} \right)^{\sin 5x}$$

$$b) y = \frac{3(x+4)^3 \sqrt{2x+5}}{(3x^2+2)^2}$$

$$23. \quad a) y = (1 - \cos 4x)^{\operatorname{arctg} 2x}$$

$$b) y = 4 \sqrt[4]{\frac{x^3}{(2x-1)^5}} \cdot 4(x+1)^4$$

$$24. \quad a) y = \left(3^x + 4 \right)^{\frac{2}{x}}$$

$$b) y = \frac{(x^2+1)^3 \sqrt[4]{(2x+1)^3}}{(3x-1)^5}$$

$$25. \quad a) y = \left(3x^2 + 5x \right)^{\cos \frac{x}{3}}$$

$$b) y = 3 \sqrt[3]{\frac{(x^2+1) \cdot x}{(2x+3)^5}}$$

$$26. \quad a) y = \left(\ln(x^2 + 1) \right)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$b) y = \frac{(x^3+1)^3}{\sqrt[4]{(2x-5)^3} (4x+3)^2}$$

$$27. \quad a) y = (2x+3)^{e^{\operatorname{tg} x}}$$

$$b) y = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^2+3x}}{\sqrt[3]{2x+7}}$$

$$28. \quad a) y = (3x-3)^{\operatorname{ch} x}$$

$$b) y = \frac{\sqrt[4]{x^3(x-1)}}{(x^2+4)^5}$$

$$29. \quad a) y = \left(x^5 - 3x \right)^{\cos \frac{x}{3}}$$

$$b) y = \frac{\sqrt[3]{2x+7}}{(x+2)^4 (2x+5)^3}$$

30. а) $y = (\arcsin 2x)^{\cos^2 x}$ б) $y = \frac{(x^2 - 3)^3 \sqrt[5]{2x + 9}}{(3x + 4)^4}$

3.2.4 Знайти першу похідну функції, заданої неявно

- | | |
|------------------------------------|----------------------------|
| 1. $x^2 + y^3 - 3xy = 0$ | 2. $y^3 - 3y + 2x = 0$ |
| 3. $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^2 = 0$ | 4. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ |
| 5. $2y \ln y = x^2$ | 6. $x + y = xy^2 - x^2y$ |
| 7. $y^2 - 2xy - x^2 = 0$ | 8. $y^2 = 2 + xe^y$ |
| 9. $y = x + \arctg y$ | 10. $y = \cos(x + y)$ |
| 11. $x^y = y^x$ | 12. $y = \sin(x - y)$ |
| 13. $(x + y)^2 = 9(x - y)$ | 14. $y = 3 + xe^y$ |
| 15. $y \cdot \sin x = \cos(x - y)$ | 16. $x + y = e^y$ |
| 17. $y^2 = 2x + \ln \frac{y}{x}$ | 18. $ye^x = e^{y+1}$ |
| 19. $(x + y)^3 = 27(x - y)$ | 20. $xy - 0.5 \sin 2y = x$ |
| 21. $e^{xy} = x + y$ | 22. $xy = \arctg y$ |
| 23. $\tg y = x^2y$ | 24. $y = (\sin y)^x$ |
| 25. $\cos y = xy^2 + 3$ | 26. $y = e^y \sin x$ |
| 27. $\ctg y = x^2 + y$ | 28. $x + \sin y = \cos y$ |
| 29. $x^3 + 2xy = 3y^2$ | 30. $x^4 - xy + y^4 = 1$ |

3.2.5 Знайти похідні y'_x, y''_{xx} функції, заданої параметрично.

- | | |
|--|---|
| 1. $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^3 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$ |
|--|---|

$$3. \quad \begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(3 + \cos t) \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = t g^2 t \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} x = \operatorname{arcc} t g t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} x = \ln t \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} x = \sqrt{t-2} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{t^2+t} \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sec t \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} x = \sin t \\ y = \operatorname{cosec}(t) \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} x = t^2 + 4t \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} x = e^t \cdot (t+1) \\ y = e^t \cdot (t-1) \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} x = 2 - e^{-t} \\ y = 3t - e^{-2t} \end{cases}$$

$$26. \quad \begin{cases} x = \ln(\cos t) \\ y = \ln(\cos 2t) \end{cases}$$

$$27. \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$28. \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sin t} \\ y = \operatorname{ctg} t \end{cases}$$

$$29. \quad \begin{cases} x = 2^{\sin^2 t} \\ y = 2^{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$30. \quad \begin{cases} x = 2t^2 - 3 \\ y = \ln t \end{cases}$$

3.2.6 Знайти другу похідну функції.

$$1. \quad y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$2. \quad y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$$

$$3. \quad y = \frac{\ln(3 + x)}{3 + x}$$

$$4. \quad y = (2x^3 + 1) \cos 3x$$

$$5. \quad y = x^2 \ln x$$

$$6. \quad y = \ln \operatorname{ctg} 4x$$

$$7. \quad y = \operatorname{arctg}(x^2)$$

$$8. \quad y = \sqrt[3]{(1 - x)^2}$$

$$9. \quad y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

$$10. \quad y = \ln \ln x$$

$$11. \quad y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$12. \quad y = x^3 e^{5x}$$

$$13. \quad y = e^{-x} \cos 3x$$

$$14. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$15. \quad y = x e^{\sin x}$$

$$16. \quad y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$17. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$18. \quad y = \ln(x + \sqrt{x})$$

$$19. \quad y = x \cdot \operatorname{arctg} x$$

$$20. \quad y = x - \operatorname{arctg} x$$

$$21. \quad y = \frac{\log_3 x}{x}$$

$$22. \quad y = (3x - 7) \cdot 3^{-x}$$

$$23. \quad y = (x^2 - 7) \ln(x + 1)$$

$$24. \quad y = e^{2x} \sin 4x$$

$$25. \quad y = e^{4x+3} \cdot (x^3 + 2)$$

$$27. \quad y = x^2 e^{-1/x}$$

$$29. \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$26. \quad y = x e^{1+x} - e^{1+x}$$

$$28. \quad y = \ln \frac{1}{1+x}$$

$$30. \quad y = 2 + \sqrt{1-x^2}$$

3.2.7 Знайти границі функцій, користуючись правилом Лопітала.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 4x) e^{-3x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x \cdot \sin 3x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + tg^2 x}{x \sin 3x}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - e^x + 1}{3x^2}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 3x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - tg x}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{tg^2 2x}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin 3x - 3x e^{-x}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{3 \cdot \sin^2 x}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + e^{2x}}{4e^{2x}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 16x}{tg^2 4x}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - 3) e^{-2x}$$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(e^x - e^{-x})}{e^{3x^2+1} - e}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos 2x - \cos x)}{\ln \cos 5x}$
21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(2x - \pi)^2}$
22. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2}$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x^2} - 3^{3x^2}}{\arctg x + x^2 - x}$
24. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \lg^2 x}{3(x - \pi)^2}$
25. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{3 \sin^2 3x}$
26. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\lg 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$
27. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$
28. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x - 2\pi)^2}{\lg(\cos x - 1)}$
29. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$
30. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{e^{\sin 4x} - e^{\sin x}}$

3.2.8 Довести, що функція є розв'язком заданого рівняння.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $y = (x^2 + 2x + 2)/2$ | $(y')^2 + 1 = 2 \cdot y \cdot y''$ |
| 2. $y = 0,5 \cdot x^2 \cdot e^x$ | $y'' - 2y' + y = e^x$ |
| 3. $y = 2e^{-x} + 3e^{-2x}$ | $y'' + 3y' + 2y = 0$ |
| 4. $y = x + \sin 2x$ | $y'' + 4y = 4x$ |
| 5. $y = \sqrt{2x - x^2}$ | $y^3 y'' + 1 = 0$ |
| 6. $y = \frac{x-3}{x+4}$ | $2(y')^2 = (y-1)y''$ |
| 7. $y = \ln \sqrt{x^2 + 4}$ | $y''(x^2 + 4) + 2xy' = 1$ |
| 8. $y = -\frac{1}{x}$ | $yy'' = y'(y^2 + y')$ |

$$9. \quad y = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + 2$$

$$x^2 y'' + x y' = 1$$

$$10. \quad y = \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{2}}$$

$$y'' \cdot y^3 = 1$$

$$11. \quad y = \frac{1}{3} \sin^3 x - 2x + 1$$

$$y'' + \sin^3 x = 2 \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$12. \quad y = (x-1)e^{x+1} + 2$$

$$xy'' = y' \cdot \ln \frac{y'}{x}$$

$$13. \quad y = (2x^2 - 3x)e^x - 2e^{-x} + e^{-3x}$$

$$y'' + 4y' + 3y = (16x^2 - 14)e^x$$

$$14. \quad y = 1 - 2e^{-3x} + x^3 + 3x^2 - 2x$$

$$y'' - 9x^2 = 24x - 3y'$$

$$15. \quad y = 2 \cos 3x - 5 \sin 3x + 4x \sin 3x$$

$$y'' = 24 \cos 3x - 9y$$

$$16. \quad y = e^{-7x} \cdot 2x^3$$

$$y'' + 49y = 12xe^{-7x} - 14y'$$

$$17. \quad y = 3e^{-2x} + 2e^{\frac{x}{2}} - 5 \sin 2x - 3 \cos 2x$$

$$2y'' + 3y' = 2y + 68 \sin 2x$$

$$18. \quad y = -3e^{2x} + 2e^{-2x} - x(2x^2 + 3)$$

$$y'' - 8x^3 = 4y$$

$$19. \quad y = 5 - 2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$$

$$y'' + 3y' = 9x$$

$$20. \quad y = -3 \cos x + 5 \sin x + x + e^x$$

$$y'' - x = 2e^x - y$$

$$21. \quad y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + 2 \arctg x - 5$$

$$(1 + x^2)y'' = x^3 - 2xy'$$

$$22. \quad y = 5x - 3 - \ln \cos x$$

$$y'' \cdot \cos^2 x = 1$$

$$23. \quad y = 2ch \frac{x+1}{2}$$

$$1 + (y')^2 = y \cdot y''$$

$$24. \quad y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$$

$$xy'' + 0,5y' = 0,25y$$

$$25. \quad y = \cos e^x + \sin e^x$$

$$y'' + ye^{2x} = y'$$

$$26. \quad y = 2e^{3x} - 3e^{4x} - xe^{4x}$$

$$y'' + 12y = e^{4x} + 7y'$$

$$27. \quad y = (0,1x^2 - 0,04x + 2)e^{2x} - 4e^{-3x}$$

$$y'' + y' - xe^{2x} = 6y$$

$$28. \quad y = e^x(3 \sin x - 2(x+1) \cos x)$$

$$y'' - 4e^x \sin x = 2y' - 2y$$

$$29. \quad y = \sin x \cdot (3 + 0,5x) - 5 \cos x \qquad y'' + y - \cos x = 0$$

$$30. \quad y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin x + \sin 2x) \qquad y'' + 4y = \sin x$$

3.2.9 Знайти похідну n -го порядку

$$1. \quad y = 7^{5x}$$

$$2. \quad y = \lg(5x + 1)$$

$$3. \quad y = \ln x$$

$$4. \quad y = \frac{4}{x}$$

$$5. \quad y = \sin^2 3x$$

$$6. \quad y = e^{-3x}$$

$$7. \quad y = 2^{3x+5}$$

$$8. \quad y = \cos 3x$$

$$9. \quad y = \frac{1}{x+1}$$

$$10. \quad y = 3^{3x+1}$$

$$11. \quad y = \ln(1+x)$$

$$12. \quad y = \cos(5x-3)$$

$$13. \quad y = \log_2(x-4)$$

$$14. \quad y = \sin(2x+1)$$

$$15. \quad y = \log_3(x+3)$$

$$16. \quad y = \cos \frac{x}{2}$$

$$17. \quad y = 3^{2x}$$

$$18. \quad y = \frac{x}{x+1}$$

$$19. \quad y = 5^{-2x+1}$$

$$20. \quad y = \cos^2 2x$$

$$21. \quad y = \frac{1+x}{1-x}$$

$$22. \quad y = \log_2(x-4)$$

$$23. \quad y = \frac{1}{1-x}$$

$$24. \quad y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$$

$$25. \quad y = \cos \frac{x}{3}$$

$$26. \quad y = \lg(2x+7)$$

$$27. \quad y = \sin \frac{x}{2}$$

$$28. \quad y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$29. \quad y = \cos(3x+2)$$

$$30. \quad y = \lg(x+4)$$

3.2.10 Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізьку:

$$1. \quad y = x^5 - 15x^3 + 1 \qquad x \in [-4; 0]$$

$$2. \quad y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \qquad x \in [1; 3]$$

3. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ $x \in [-1; 4]$
4. $y = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} + x$ $x \in [-7; 2]$
5. $y = \frac{3-x^2}{3+x^2}$ $x \in [-1; 2]$
6. $y = x - \frac{8}{x^4}$ $x \in [-3; -1]$
7. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ $x \in [-2; 1]$
8. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$ $x \in [-1; 3]$
9. $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 3)$ $x \in [-2; 1]$
10. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ $x \in [-1; 4]$
11. $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$ $x \in [-2; 1]$
12. $y = x + \cos^2 x$ $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
13. $y = x^4 - 2x^2 + 2$ $x \in [-1; 2]$
14. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ $x \in [0; 3]$
15. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ $x \in [-5; -1]$
16. $y = 2 \sin x + \cos 2x$ $x \in [0; \pi]$
17. $y = \sqrt{9 - x^2}$ $x \in [-3; 3]$
18. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
19. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$ $x \in [0; \sqrt{3}]$
20. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 18$ $x \in [1; 3]$
21. $y = x - \ln(1+x)$ $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$
22. $y = 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ $x \in [0; 2]$

$$23. \quad y = \frac{2}{(5-x)^2} \quad x \in [-1; 0]$$

$$24. \quad y = x^3 + 3x^2 + 2 \quad x \in [-1; 3]$$

$$25. \quad y = (3-x)e^{-x} \quad x \in [0; 5]$$

$$26. \quad y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 18}} \quad x \in [-3; 3]$$

$$27. \quad y = ctg^2 x - 2ctgx \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$28. \quad y = \sqrt{100 - x^2} \quad x \in [-6; 8]$$

$$29. \quad y = \sin 2x - x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$30. \quad y = 2tgx - tg^2 x \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right]$$

3.2.11 Знайти екстремуми та інтервали монотонності функції

$$1. \quad y = xe^{-\frac{x^4}{4}}$$

$$2. \quad y = \frac{x+2}{(x-2)^2}$$

$$3. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$4. \quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$$

$$5. \quad y = x^4 - 2x^2 + 3$$

$$6. \quad y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$$

$$7. \quad y = \frac{x}{\ln x}$$

$$8. \quad y = (x+1)e^{2x}$$

$$9. \quad y = (x+1)^2 e^{2x}$$

$$10. \quad y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$11. \quad y = x^2 \ln x$$

$$12. \quad y = \frac{4x^3 + 1}{x}$$

$$13. \quad y = (x-1)^2 (x-2)^3$$

$$14. \quad y = (2x^2 + 2x - 3)e^{-2x}$$

$$15. \quad y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$$

$$17. \quad y = \frac{e^x}{x}$$

$$19. \quad y = x \cdot \sqrt[3]{1-x}$$

$$21. \quad y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$23. \quad y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$25. \quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$$

$$27. \quad y = x - 2 \ln x$$

$$29. \quad y = x - \arctg 2x$$

$$16. \quad y = \frac{10}{x(4x^2 - 9x + 6)}$$

$$18. \quad y = x + \frac{1}{x}$$

$$20. \quad y = \frac{x^2}{x-2}$$

$$22. \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$24. \quad y = x^3(x+2)^2$$

$$26. \quad y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$28. \quad y = 2x^2 - \ln x$$

$$30. \quad y = x - \ln(1+x^2)$$

3.2.12 Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції

$$1. \quad y = \ln(x^2 + 4)$$

$$3. \quad y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2$$

$$5. \quad y = x^2 \ln x$$

$$7. \quad y = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$9. \quad y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

$$11. \quad y = x - \arctg x$$

$$13. \quad y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$2. \quad y = \frac{x}{4x^2 + 1}$$

$$4. \quad y = \frac{x^3 - x}{(x+1)^2}$$

$$6. \quad y = e^x(x^2 + 1)$$

$$8. \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

$$10. \quad y = x^2 + \frac{8}{x+2}$$

$$12. \quad y = 2x - \frac{3}{2} \ln(1+x^2)$$

$$14. \quad y = \frac{2}{x} \ln \frac{x}{2}$$

15. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

16. $y = \frac{e^x}{x}$

17. $y = x + \sin x$

18. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

19. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

20. $y = (x + 1) \ln x$

21. $y = e^{-x^2}$

22. $y = \frac{x^2}{x - 2}$

23. $y = x \cdot \arctg x$

24. $y = x - \frac{8}{x^4}$

25. $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$

26. $y = x^2 e^{-x}$

27. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$

28. $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

29. $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$

30. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

3.2.13 Знайти асимптоти графіка заданої функції

1. $y = \frac{x^4}{x^3 - 3}$

16. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$

2. $y = \frac{x^2 + 5}{2x + 3}$

17. $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$

3. $y = \frac{1 - x^2}{2 - x^2}$

18. $y = \frac{4x - x^2}{5x - 2}$

4. $y = \frac{x}{2x - 1} + x$

19. $y = \frac{5x - x^2}{x^2 + 6x + 9}$

5. $y = \frac{5 - x^2}{3 - x^2}$

20. $y = \frac{3 - x}{x^2 + 2x}$

$$6. y = \frac{x^2 + 9}{5x - 1}$$

$$7. y = \frac{2 - x^2}{5 - x^2}$$

$$8. y = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4}$$

$$9. y = \frac{2x^2 - 7}{3x - 2}$$

$$10. y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$11. y = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$$

$$12. y = \frac{x^3}{2(x+2)^2}$$

$$13. y = \frac{2x^2}{4x^2 - 5}$$

$$14. y = \frac{4x - 16}{(x - 2)^2}$$

$$15. y = \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$$

$$21. y = \frac{2x^2 - 3}{-x^2 + 4x - 4}$$

$$22. y = \frac{7 - 2x^2}{x^2 + 2x - 15}$$

$$23. y = \frac{2x + x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$24. y = \frac{2x^2}{2 - 5x}$$

$$25. y = \frac{4x^2}{-x^2 + 4x - 3}$$

$$26. y = \frac{x - 1}{9 - x^2}$$

$$27. y = \frac{8 + x^2}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$28. y = \frac{(x + 1)^2}{16 - x^2}$$

$$29. y = \frac{6x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$30. y = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 5x + 6}$$

3.2.14 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

1. а) $y = \frac{4x + 1}{x^2}$

б) $y = \frac{x^2}{2} + \ln x$

2. а) $y = \frac{4x}{(x - 2)^2}$

б) $y = e^x(x - 5)$

- | | | | | |
|-----|----|---------------------------------------|----|---------------------------|
| 3. | a) | $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ | б) | $y = \frac{e^x}{x+1}$ |
| 4. | a) | $y = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ | б) | $y = \frac{x}{\ln x}$ |
| 5. | a) | $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$ | б) | $y = x^2 \ln x$ |
| 6. | a) | $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ | б) | $y = xe^{\frac{1}{x}}$ |
| 7. | a) | $y = \frac{x^3 + 1}{x}$ | б) | $y = x^2 e^{-x^2}$ |
| 8. | a) | $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$ | б) | $y = \ln(x^2 - 2x)$ |
| 9. | a) | $y = \frac{1-x}{x^2}$ | б) | $y = e^{-x}(x+4)$ |
| 10. | a) | $y = \frac{x - \frac{1}{2}}{(x+2)^2}$ | б) | $y = \frac{\ln x}{x} + x$ |
| 11. | a) | $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ | б) | $y = x^2 e^{-x}$ |
| 12. | a) | $y = \frac{4x}{(x+2)^2}$ | б) | $y = x^2(\ln x - 1)$ |
| 13. | a) | $y = \frac{x}{(x+2)^3}$ | б) | $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ |
| 14. | a) | $y = \frac{4x^3 + 1}{x}$ | б) | $y = 2x^3 e^{-x}$ |
| 15. | a) | $y = \frac{x-2}{(x+3)^2}$ | б) | $y = e^x(x+2)$ |
| 16. | a) | $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ | б) | $y = \frac{e^x}{x}$ |

- | | | | | |
|-----|----|---------------------------------------|----|-----------------------------|
| 17. | a) | $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ | б) | $y = x^2 e^x$ |
| 18. | a) | $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ | б) | $y = x e^{-x^2}$ |
| 19. | a) | $y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$ | б) | $y = x \ln^2 x$ |
| 20. | a) | $y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}$ | б) | $y = x(\ln x - 3)$ |
| 21. | a) | $y = \frac{x - 2}{(x + 3)^2} - 1$ | б) | $y = x^2 - 2 \ln x$ |
| 22. | a) | $y = \frac{x + 4}{(x + 1)^2}$ | б) | $y = \frac{e^x}{x - 2}$ |
| 23. | a) | $y = 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ | б) | $y = x \ln x$ |
| 24. | a) | $y = \frac{x^3}{x - 2}$ | б) | $y = (x + 4)e^{2x}$ |
| 25. | a) | $y = \frac{(4 - x)^3}{2 - x}$ | б) | $y = \ln(x^2 + 4x)$ |
| 26. | a) | $y = \frac{-8}{x^4} + x$ | б) | $y = e^{\frac{1}{x+2}}$ |
| 27. | a) | $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$ | б) | $y = x - \ln(1 + x)$ |
| 28. | a) | $y = 2x - 1 + \frac{1}{x + 1}$ | б) | $y = x^3 e^x$ |
| 29. | a) | $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ | б) | $y = \frac{x^2}{2} + \ln x$ |
| 30. | a) | $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ | б) | $y = x e^{\frac{1}{x}}$ |

3.2.15 Знайти рівняння нормалі в точці перетину графіка функції з віссю ОУ та рівняння дотичної в точці перетину графіка функції з віссю ОХ. Завдання взяти із п.п 2.2.2

4. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

4.1 Аудиторні завдання

1. Знайти область визначення функції

а) $z = \sqrt{4 - 2x + y^2}$

б) $z = \sqrt{x + y - 1} + \arccos x$

в) $z = \ln(x^2 + y) + \sqrt{1 - y}$

г) $z = \arcsin y + \sqrt{y^2 + 2 - x}$

2. Знайти перші частинні похідні заданої функції.

а) $z = y \ln \sqrt[4]{x^2 + y^2} - 3 \sin(xy) + 2x$

б) $z = x \cdot 2^{3y} - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$

в) $z = \arcsin(x^2 y) + \sqrt[3]{x^2 + y^3}$

3. Знайти частинні похідні другого порядку для заданої функції

а) $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

б) $z = 4x^3 + 5y^2 - x^2 y - 3x + y + 7$

в) $z = x \sin^2 y$

г) $z = \operatorname{tg}(x^3 y^2 + 3)$

д) $z = \cos(x + 5y^2)$

е) $z = x \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

4. Знайти диференціали першого і другого порядку функції двох змінних

а) $z = 3x^4 + 5x - 2x^3y^7 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2$

б) $z = x^2 - xy - 3y^3$

в) $z = \ln(x^2 + y)$

г) $z = x^2 e^{y^2} - 2xy$

5. Знайти похідні першого порядку для функції, що задана неявно.

а) $\sin z^4 - e^{yz} + x^2y = 0$

б) $z^2 \sqrt[3]{y} - x^2y \cos z + 4 = 0$

в) $\sin y^2 = 1 - x^y$

г) $xy^3 + \ln y + x^2 = 0$

6. Знайти похідні першого порядку для складених функцій.

а) $z = \frac{x^2 - y^3}{\sqrt{xy} - x^3}, x = e^{3uv} - u^2, y = e^{\frac{2v}{u}}$

б) $z = \ln^2(x^2 + y^2), x = 3\sqrt{t} + t^2, y = 4t^3 - 2$

в) $z = x^3y - 4xy^2 + \sqrt{xy}, y = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$

7. Знайти рівняння дотичної та нормалі до поверхні.

а) $z = x^2 + 2y^2$ в точці $(1; 1; ?)$

б) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точці $(1; 2; -1)$

в) $x^2 + 20y^2 + z^2 - 28 = 0$ при $x_0 = 2; y_0 = 1$

8. Знайти екстремум функції.

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

б) $z = \frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{2}y^2 - 9x - 3y + 12$

9. Знайти умовний екстремум функції

а) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$

б) $z = x^3 + y^3$ при $x + y = 2$

10. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - y - x)$ в трикутнику, обмеженому прямими $x = 1$; $y = 0$; $x + y = 6$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 10 + 2xy - x^2$ в замкнутій області D , яка задана нерівністю $0 \leq y \leq 4 - x^2$.

4.2 Індивідуальні завдання

4.2.1 Знайти і намалювати область визначення функції.

1. $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$

2. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$

3. $z = \sqrt{1+x-y^2} + \sqrt{1-x-y^2}$

4. $z = \sqrt{(x+1)(y-1)}$

5. $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$

6. $z = (9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$

7. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

8. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$

9. $z = e^{\sqrt{x-y}} + \sqrt{y-1}$

10. $z = \ln(4 - 4x - y^2)$

$$11. \quad z = \frac{5}{4 - x^2 - y^2}$$

$$13. \quad z = \ln(y^2 - x^2)$$

$$15. \quad z = \arccos(x + 2y)$$

$$17. \quad z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$$

$$19. \quad z = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

$$21. \quad z = \ln(2x^2 - y)$$

$$23. \quad z = \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$$

$$25. \quad z = 3x + \frac{y}{2 - x + y}$$

$$27. \quad z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$$

$$29. \quad z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$$

$$12. \quad z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$14. \quad z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

$$16. \quad z = \sqrt{4x^2 - y^2}$$

$$18. \quad z = \sqrt{1 - x - y}$$

$$20. \quad z = \sqrt{x + y} \ln(y^2 - x^2)$$

$$22. \quad z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$24. \quad z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$$

$$26. \quad z = 4x + \frac{y}{\sqrt{2x - 5y}}$$

$$28. \quad z = \ln(9 - x^2 - y^2)$$

$$30. \quad z = \arccos(x + 3y)$$

4.2.2 Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$1. \quad z = \ln(y^2 + 2xy + x^2 - 2)$$

$$3. \quad z = \cos(2x + 3y - x^2 y^3)$$

$$5. \quad z = \sqrt{x^3 y} + 5x - 3y$$

$$7. \quad z = \ln(3x^2 - y^2 + 4x)$$

$$9. \quad z = 2^{y+xy^2-5x}$$

$$11. \quad z = \ln(\sqrt{xy} - x)$$

$$2. \quad z = \operatorname{tg}(x^3 - 2yx + 3)$$

$$4. \quad z = \sin \sqrt{2 - x - y^2}$$

$$6. \quad z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$8. \quad z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}$$

$$10. \quad z = \arccos(x - y^2 - 1)$$

$$12. \quad z = \operatorname{tg}(y^3 - 2x + 5)$$

$$13. \quad z = \arcsin\left(\frac{x}{y} + 2\right)$$

$$14. \quad z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + 3xy}}$$

$$15. \quad z = \left(\frac{x}{y}\right)^3$$

$$16. \quad z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$17. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{y^3}{x}$$

$$18. \quad z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$$

$$19. \quad z = \operatorname{ctg} \frac{y}{x^2}$$

$$20. \quad z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2 + 3}$$

$$21. \quad z = \ln(y^2 - ye^{-x} + x)$$

$$22. \quad z = xy + \ln(x^4 - y^3)$$

$$23. \quad z = \cos(x^3 y^2 - yx + 2y)$$

$$24. \quad z = e^{-\left(xy + 3x^2 - 4y^3\right)}$$

$$25. \quad z = \ln(3xy - 4 + x^2)$$

$$26. \quad z = \operatorname{arctg}(3x^2 - y^2 + 2xy)$$

$$27. \quad z = \sin \sqrt[3]{yx^4}$$

$$28. \quad z = \operatorname{ctg}\left(\frac{x^2 + y}{y^2}\right)$$

$$29. \quad z = \cos(xy^2)$$

$$30. \quad z = \frac{x^3 y^2 - 2x}{yx^2 + y^3}$$

4.2.3 Знайти частинні похідні 2-го порядку

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = f(x, y)$

$$1. \quad z = (\sin x + \cos x) e^{2y}$$

$$2. \quad z = \sin(2x + y^2)$$

$$3. \quad z = \cos(x^3 - 2xy)$$

$$4. \quad z = e^{2x^2 - y^3}$$

$$5. \quad z = \ln(3x^2 - y^2)$$

$$6. \quad z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$$

$$7. \quad z = e^{x^2 - 2y^2}$$

$$8. \quad z = \sin(x + 3y) - y^2$$

$$9. \quad z = \sin(x^3 y) + y^3$$

$$10. \quad z = \operatorname{arctg}(2x - y)$$

11. $z = \ln(2xy - 3)$

13. $z = \ln(3x^2 + 2y^2)$

15. $z = \sin(2x + 5y^2)$

17. $z = \cos(3x^2 - 4y^3)$

19. $z = \ln(xy - y^2)$

21. $z = \cos(x - y^3)$

23. $z = \ln(x + e^{-y})$

25. $z = y \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$

27. $z = \arctg \frac{y}{x}$

29. $z = \ln(x^2 - y^2)$

12. $z = \cos(xy^2) + x^3$

14. $z = \arctg(3x + 2y)$

16. $z = e^{2x^2 - 5y}$

18. $z = \arctg(x + \sqrt{y})$

20. $z = e^{y^2 - x^2}$

22. $z = e^{xy}$

24. $z = \ln(y^2 + 2x)$

26. $z = x e^{\frac{y}{x}}$

28. $z = x^y$

30. $z = e^{x^2 y}$

4.2.4 Знайти для функції

 $z = f(x, y)$ повний диференціал dz і $d^2 z$

1. $z = x^2 - 3xy^3 + 5y^4$

3. $z = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2y - 4y^3$

5. $z = 0,5x^2 + 6xy^2 - 3y$

7. $z = 1,5x^3 - 7x^3y^2 - 4y^7$

9. $z = 3x^2 + 3x^2y^3 - 4y^3$

11. $z = 2x^2 - 3x^4y^2 + y^2$

13. $z = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^3y^3 - \frac{1}{4}y^4$

15. $z = 3x^2 + 2x - 8xy^2 + 8y^3$

2. $z = -3x^3 + 2x^2y^4 - 2y^2$

4. $z = \frac{1}{4}x^4 - 5xy^4 - 3y^3$

6. $z = \frac{1}{5}x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5$

8. $z = 3x - 5x^3y^2 - \frac{1}{2}y^3$

10. $z = x^3 - x^2y + y^3$

12. $z = x^4 - 2x^2y^3 + 2y$

14. $z = -3x^2 + 5x^2y - 7y^3$

16. $z = 2x^3 - 3x^4y + 5y - 2y^2$

17. $z = -3x^2 + 3x^2y^5 + 2y^4 - 3y$ 18. $z = x^3 - 8xy^5 + 2y^7$
 19. $z = 3x^5 + x - 8x^2y^3 + 2y^6$ 20. $z = 5x^4 + 2x^4y^5 - 4y^6$
 21. $z = -\frac{1}{5}x^5 + x^2 - 4x^3y^2 - 3y$ 22. $z = -x^2 - 8xy^3 + 3y^5$
 23. $z = 5x^2 - 6x^2y^2 - 7y^4$ 24. $z = -5x^4 + 9x^2y^3 + 10y^2$
 25. $z = -\frac{1}{2}x^4 - 7x^3y^2 - 2y^8$ 26. $z = 5x^5 - x + 8x^3y^4 - 5y^3$
 27. $z = -2x^5 - 5x^4y^5 - 3y^3 + 2y$ 28. $z = 2x^3 + 3x^2 - 4x^5y^2 + 2y$
 29. $z = -3x^3 + 2x^2 - 4x^3y^4 + 3y^5$ 30. $z = -\frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x^7y^6 - 3$

4.2.5 Знайти частинні похідні а) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; б) $\frac{dy}{dx}$ функції, яка

задана неявно.

1. а) $x \sin y + y \cos z + z \sin x = 1$ б) $x^3y - y^3x = 4$
 2. а) $\sin(z^3) - xyz = 0$ б) $xy - \ln y = 3$
 3. а) $e^z - x^2yz = 1$ б) $\arctg(x + y) = y$
 4. а) $\ln(x + z) - x^2yz^3 = 0$ б) $x^2y = e^y$
 5. а) $z^3 + y \cdot \arctg(x + z) - \sqrt{y} = 3$ б) $ye^x + e^y = 0$
 6. а) $3xz^2 - x^2y \sin z + 4 = 0$ б) $y = 1 + y^x$
 7. а) $3yz^2 - x^2 \sin z + yx = 0$ б) $y = x + \ln y$
 8. а) $\arcsin(xyz) - 3xz^2 + \sin y = 0$ б) $\arctg(xy) + \sqrt{y} = 1$
 9. а) $\cos(x^2 - z^2) - 3zy + x^3 = 0$ б) $e^{x-2y} + y = 2$
 10. а) $y \sin z + x^2y^2z^3 = 1$ б) $\ln(3x^2 - 2y^2) = 1 - y$
 11. а) $x \cos y - y \cos z + z \cos x = 2$ б) $x^2y - \ln(x + y + 2) = 0$

12. a) $z^4 - e^{xyz} = 0$ б) $x \ln y = y + 3$
13. a) $e^{yz} - xy^2z = 1$ б) $\arcsin(x + 2y) = y$
14. a) $\ln(2y - z) = x^3y^2z^2$ б) $e^{x^2y} = y^2$
15. a) $z^3 \cdot \sqrt{y} + x \operatorname{arctg}(y + 2z) = 2$ б) $xe^y = y^2 - 1$
16. a) $2x^2z^3 - xy \sin z - 2 = 0$ б) $\cos y = 1 - y^x$
17. a) $3xz^2 - y^2 \sin z + xy = 0$ б) $y^2 = x + \ln y$
18. a) $\operatorname{arctg}(xyz) - 3yz^2 + \cos x = 0$ б) $\arcsin xy + \sqrt{y} = 2$
19. a) $\sin(y^2 - z^2) - 3xz + y^3 = 0$ б) $e^{y-2x} + y^2 = 3$
20. a) $x \cos z + x^2yz^3 = 3$ б) $\ln\left(2x^2 - \frac{1}{3}y^3\right) = 1 + y$
21. a) $\arcsin(x + z) + yz^3 = 1$ б) $e^{x^2-y} = y^3$
22. a) $\operatorname{arctg}(x - z) + 2xyz^2 = 2$ б) $\ln(x - y) = e^y$
23. a) $x^2e^{-z} + xyz^3 = 4$ б) $\sin(x - y) = 2^y$
24. a) $\cos(z^2) = xy^2z^3$ б) $xy - \operatorname{tg} y = 2$
25. a) $2^z = x^2yz^2$ б) $\operatorname{arctg}(xy) = x + y$
26. a) $3x^2z - xy^2 \cos z = 1$ б) $x^y = 2 + y^x$
27. a) $\sin(x - z^2) - 3x^2z + 2y^2 = 0$ б) $\ln(x + y) = 3^y$
28. a) $y^2z - \ln(x + z^2) + xyz = 0$ б) $e^{2x+y} = y^x$
29. a) $\arccos(xyz) + 2x^2z^2 = \sin y$ б) $xe^y = \operatorname{tg} y$
30. a) $3x^2z^2 + x\sqrt{y} \sin z = 3$ б) $\sin y = x \cdot e^y$

4.2.6 Знайти похідні складених функцій: а) $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$; б) $\frac{dz}{dt}$;

в) $\frac{dz}{dx}$.

1. а) $z = x^2 y - y^2 x,$ $x = u \cdot \operatorname{tg} v,$ $y = v \cdot \cos u$

б) $z = e^{x^2 - 2y},$ $x = \sin 3t,$ $y = 2t^3$

в) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$ $y = \sqrt{x^2 + 1}$

2. а) $z = x^3 y + 4y^2,$ $x = u^2 \cdot \ln v,$ $y = u \cdot v^3$

б) $z = \ln(e^{3x} - e^{-2y}),$ $x = 4t^2 + 1,$ $y = (2 - t)^3$

в) $z = \operatorname{tg}(3 + 2x^2 - y),$ $y = \sqrt{x}$

3. а) $z = e^{2x^2 - 2y^2},$ $z = u \cdot v,$ $y = v \cdot \cos u$

б) $z = y^{2x}$ $x = \ln(t^2 - 1),$ $y = \sqrt[3]{t}$

в) $z = \ln \sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right),$ $y = x^3 + 2$

4. а) $z = \ln(e^{-x} + e^{-2y}),$ $x = u^2 \cdot v,$ $y = u - v^3$

б) $z = e^{y^2 - 2x + 2xy},$ $x = \cos 3t,$ $y = \operatorname{tg} 2t$

в) $z = \sin\left(\frac{x}{y^2}\right),$ $y = \operatorname{tg}^2 x$

5. а) $z = \cos(x^2 + y^3),$ $x = \frac{u^3}{v},$ $y = v^2 / u^3$

б) $z = x^3 e^{2y},$ $x = \ln(t^2 + 2),$ $y = t^3 - 4$

- В) $z = tg(y^2 + x^2),$ $y = \cos 3x$
6. а) $z = x^3 y^3 + \frac{x^2}{y^2},$ $x = \frac{u}{v},$ $y = v^2 + u^2,$
 б) $z = \ln(e^{5y} - e^{2x}),$ $x = t^2 - 1,$ $y = t^3 + 2t$
 В) $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2 x},$ $y = \sqrt[3]{x} + 2x$
7. а) $z = x^y,$ $x = u^2 - 3vu;$ $y = \sqrt{v} - u^2$
 б) $z = x^{3y},$ $x = e^{4t},$ $y = e^{-5t}$
 В) $z = \sin\left(\frac{y}{x^3}\right),$ $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$
8. а) $z = \sqrt{3x - y^3},$ $x = u^2 \cdot v,$ $y = v^3 - 2u^2$
 б) $z = \cos(x^2 + 3y),$ $x = 2 \ln(t + 1)$ $y = \ln(t^2 + 2)$
 В) $z = \cos(x^3 - xy^2)$ $y = e^{3x^2}$
9. а) $z = tg^2(x + \sqrt{y}),$ $x = u \cdot e^v,$ $y = \sqrt{v} \cdot u^3$
 б) $z = y^3 \cdot e^{-3x},$ $x = \sqrt[5]{t + 2}$ $y = \sqrt[3]{t - 1}$
 В) $z = ye^{\frac{x}{y}}$ $y = \ln(x^2 + 3)$
10. а) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2},$ $x = e^{2uv} + v,$ $y = e^{\frac{u}{v}}$
 б) $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right),$ $x = \cos^2 t,$ $y = \sin 2t$
 В) $z = \ln(x^3 - y^2),$ $y = \cos^2 x$

11. a) $z = x^2 \ln y$, $x = \sqrt[3]{u \cdot v}$, $y = u^3 v - uv^3$
 б) $z = x^3 y - 4\sqrt{x}$, $x = t^3 + 2t$, $y = \sqrt[3]{t} - 1$
 в) $z = \operatorname{tg}(xy + y^2)$, $y = \cos 4x$
12. а) $z = \operatorname{tg}^2(x^2 - y^2)$, $x = \cos \sqrt{v} \cdot u^2$, $y = v^3 \cdot u^3$
 б) $z = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right)$, $x = \sin 3t$, $y = \cos 2t$
 в) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$
13. а) $z = \cos^2(yx^2)$, $x = e^u \cdot v$, $y = v^3 \cdot u + u^3$
 б) $z = \frac{x^2}{y^3 + 2}$, $x = 1 - 2t^3$, $y = 3 + t^2$
 в) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}$, $y = e^{-x^2}$
14. а) $z = (x^2 y - y^3 + x^3)^2$, $x = u \cdot v - 2$, $y = v^3 \cdot u^2$
 б) $z = \frac{x^3}{y^2}$, $x = 1 - e^{-3t}$, $y = e^{2t} + 1$
 в) $z = \sin^3(xy^2)$, $y = \sqrt[3]{x}$
- 15 а) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $y = u \cdot e^v$, $x = \sqrt[3]{uv}$
 б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = t^3 + \sqrt{t}$, $y = \sqrt[3]{t} + t$
 в) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $y = x^4 + 2x$
16. а) $z = x^2 \cos y - y^2 \sin x$, $x = e^{uv}$, $y = u^2 v - 3u$

$$\text{б)} \quad z = \frac{y^2}{x}, \quad x = \operatorname{arctg} 2t, \quad y = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\text{в)} \quad z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}, \quad y = x^4 + 3x^2$$

$$17. \quad \text{а)} \quad z = \frac{x + y}{x - y}, \quad x = u^3 v - 3uv^3, \quad y = \sqrt[3]{uv}$$

$$\text{б)} \quad z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad x = \cos 3t, \quad y = \sin 2t$$

$$\text{в)} \quad z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}, \quad y = \sin x^2$$

$$18. \quad \text{а)} \quad z = \arcsin \sqrt{xy}, \quad x = \frac{\ln u}{v^2}, \quad y = \frac{v^3}{u^2}$$

$$\text{б)} \quad z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, \quad x = t^3, \quad y = 2t^2 + 1$$

$$\text{в)} \quad z = \ln(\sqrt{xy} - 1), \quad y = x\sqrt{x^3}$$

$$19. \quad \text{а)} \quad z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = \ln(u^2 - v^2), \quad y = v^3 \cdot u^3$$

$$\text{б)} \quad z = \sqrt{x^2 + y + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^3$$

$$\text{в)} \quad z = \arccos(x - y^2), \quad y = \operatorname{tg} x^3$$

$$20. \quad \text{а)} \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{y^2}\right), \quad x = u^3 - v^3, \quad y = \frac{u}{v}$$

$$\text{б)} \quad z = \arcsin\left(\frac{x}{2y}\right), \quad x = \operatorname{tg} 2t, \quad y = \cos 2t$$

$$\text{в)} \quad z = \sin \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad y = e^{x^2}$$

21. а) $z = ctg(3x^2 - 2y^3), \quad x = \sin\left(\frac{u}{v}\right), \quad y = e^{\frac{v}{u}}$
 б) $z = \frac{x}{y^2}, \quad x = \ln^2 t, \quad y = \frac{1}{t}$
 в) $z = \sin \sqrt{3x^2 - y^3}, \quad y = x^3 + 4x - 5$
22. а) $z = tg(x^3 + y^2), \quad x = \sqrt[3]{u^3 - v^2}, \quad y = \sqrt{v^3 + u^2}$
 б) $z = \arccos \frac{y}{2x}, \quad x = \sin 2t, \quad y = tg^2 t$
 в) $z = \ln(xy - \sqrt{xy}), \quad y = e^{x^3}$
23. а) $z = arctg(y^3 - \sqrt{x}), \quad y = u^2 \cdot v, \quad x = \sqrt{u} \cdot v^3$
 б) $z = \ln(e^{3x} + 2y), \quad x = t^4, \quad y = \sqrt[4]{t}$
 в) $z = e^{xy^3} + x^2, \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$
24. а) $z = \ln(9 - x^2 - y^2), \quad y = uv^3 + 2u^2, \quad x = \cos(u \cdot v)$
 б) $z = arctg(xy), \quad x = t^3 + 2, \quad y = 4 - t^2$
 в) $z = tg\left(\frac{y^2}{x^3}\right), \quad y = \cos(4x^2)$
25. а) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = \ln(u^3 + 2v^2), \quad y = v^4 \cdot u^3$
 б) $z = \sqrt[3]{xy - 4}, \quad x = \ln t, \quad y = t^3$
 в) $z = \ln(x^3 + y^2 x), \quad y = \sin(x^2)$
26. а) $z = e^{x-2y}, \quad x = u \sin v, \quad y = v \cos u$

- 6) $z = \arcsin(x^2 y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt[3]{t}$
 B) $z = \ln \sin(xy)$, $y = tg^2 x$
27. a) $z = y^x$, $x = u^3 - v^2$, $y = \sqrt[3]{u + v}$
 6) $z = e^{xy + x^2 - y^2}$, $x = \ln^2 t$, $y = \ln t$
 B) $z = x^2 e^y$, $y = \cos^2(3x)$
28. a) $z = \arcsin\left(\frac{x + y}{x}\right)$, $x = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, $y = \sqrt{uv}$
 6) $z = y^2 e^x$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$
 B) $z = e^{x - 2y}$, $y = x^3 - 4x^2 + 1$
29. a) $z = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right)$, $x = \ln u + v^3$, $y = v \cdot u^3$
 6) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $x = \frac{1}{t^2 + 1}$, $y = \frac{1}{t}$
 B) $z = \sin(x^2 + y^3)$, $y = x^2 e^x$
30. a) $z = \frac{x^2}{y - x}$, $x = e^u \cdot v$, $y = v^2 \cdot u^3$
 6) $z = \frac{y^3}{x^2 + y}$, $x = 2 + t^3$, $y = t^2 - t$
 B) $z = \sqrt[3]{x^2 y + 2}$, $y = \ln(x^2 - 4x)$

4.2.7 Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в заданій точці.

1. а) $z = x^2 + y^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$,

б) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

2. а) $z = 2x^2 - y^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$,

б) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6 = 0$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

3. а) $z = x^2 + 3y^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$,

б) $3x^2 + y^2 - z^2 - 3 = 0$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

4. а) $z = 4x^2 - y^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$,

б) $x^2 - 4y^2 + z^2 - 4 = 0$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

5. а) $z = x^2 + 5y^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$,

б) $5x^2 + y^2 - z^2 - 5 = 0$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

6. а) $z = 6x^2 - y^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$,

б) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 2 = 0$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

7. а) $z = x^2 + 7y^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$,

б) $7x^2 + y^2 - z^2 - 7 = 0$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

8. а) $z = 8x^2 - y^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$,

б) $x^2 - 8y^2 + z^2 - 5 = 0$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

9. а) $z = x^2 + 9y^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$,

$$\text{б) } 9x^2 + y^2 - z^2 - 9 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$10. \text{ а) } z = 10x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б) } x^2 - 10y^2 + z^2 - 10 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$11. \text{ а) } z = x^2 + 11y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б) } 11x^2 + y^2 - z^2 - 11 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$12. \text{ а) } z = 12x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б) } x^2 - 12y^2 + z^2 - 8 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$13. \text{ а) } z = x^2 + 13y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б) } 13x^2 + y^2 - z^2 - 13 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$14. \text{ а) } z = 14x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б) } x^2 - 14y^2 + z^2 + 6 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$15. \text{ а) } z = x^2 + 15y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б) } 15x^2 + y^2 - z^2 - 15 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$16. \text{ а) } z = 16x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б) } x^2 - 16y^2 + z^2 + 3 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$17. \text{ а) } z = x^2 + 17y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б) } 17x^2 + y^2 - z^2 - 17 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$18. \text{ а) } z = 18x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 18y^2 + z^2 + 5 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$19. \text{ а)} \quad z = x^2 + 19y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б)} \quad 19x^2 + y^2 - z^2 - 19 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$20. \text{ а)} \quad z = 20x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 20y^2 + z^2 + 7 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$21. \text{ а)} \quad z = x^2 + 21y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б)} \quad 21x^2 + y^2 - z^2 - 21 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$22. \text{ а)} \quad z = 22x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 22y^2 + z^2 + 2 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$23. \text{ а)} \quad z = x^2 + 23y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б)} \quad 23x^2 + y^2 - z^2 - 23 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$24. \text{ а)} \quad z = 24x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 24y^2 + z^2 + 4 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$25. \text{ а)} \quad z = x^2 + 25y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б)} \quad 25x^2 + y^2 - z^2 - 25 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$26. \text{ а)} \quad z = 26x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 26y^2 + z^2 - 3 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$27. \text{ а)} \quad z = x^2 + 27y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б)} \quad 27x^2 + y^2 - z^2 - 27 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$28. \text{ а)} \quad z = 28x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 28y^2 + z^2 - 1 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

$$29. \text{ а)} \quad z = x^2 + 29y^2; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1,$$

$$\text{б)} \quad 29x^2 + y^2 - z^2 - 29 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

$$30. \text{ а)} \quad z = 30x^2 - y^2; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 0,$$

$$\text{б)} \quad x^2 - 30y^2 + z^2 + 1 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 1.$$

4.2.8 Знайти екстремуми функції

$$1. \quad z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

$$2. \quad z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$$

$$3. \quad z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 20$$

$$4. \quad z = 3x^3 - xy^2 + y^2$$

$$5. \quad z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 13x + 4y$$

$$6. \quad z = -3x^3 - 3y^3 + 9xy + 5$$

$$7. \quad z = x^3 + y^3 - 15xy$$

$$8. \quad z = xy(6 - x - y)$$

$$9. \quad z = 6xy - x^3 - 8y^3 + 15$$

$$10. \quad z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y$$

$$11. \quad z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$12. \quad z = x^3 + y^2 + 6xy$$

13. $z = \frac{1}{6}x^3 - xy^2 + \frac{1}{4}x^2 + y^2$
14. $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 2xy + 4x - 13y$
15. $z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$
16. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
17. $z = y^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - xy$
18. $z = x^2 - x^2y + 3y^3$
19. $z = 8x^3 - 6xy + y^3 + 10$
20. $z = x^2 + y^3 - 6xy + 18x - 39y + 1$
21. $z = x^2 - x^2y + 5y^5$
22. $z = 6xy - \frac{1}{2}x^2 - xy^2$
23. $z = 7x^7 - xy^2 + y^2$
24. $z = 3x^2 + 3y^2 + 6x - y^3$
25. $z = x^2 + 2y^3 + 4y^2 - 2xy$
26. $z = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 6xy$
27. $z = x^2 - \frac{1}{3}y^3 - x^2y + 5y^2$
28. $z = 3x^3 - xy^2 + y^2$
29. $z = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + xy - y^2$
30. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

4.2.9 Знайти найбільше та найменше значення функції

$z = |a|x^2 + |b|y^2 + 2ax + 2by + k$ в області D_k , де

$D_1: x = 0, y = 0, x + y = 3;$ $D_2: x = 0, y = 0, x + y = -3;$

$D_{-1}: x = 0, y = 0, x - y = -3;$ $D_{-2}: x = 0, y = 0, x - y = 3.$

№ варіанта	a	b	k	№ варіанта	a	b	k
1	-1	-1	1	16	-4	4	-2
2	1	-1	-1	17	-5	-5	1
3	1	1	2	18	5	-5	-1
4	-1	1	-2	19	5	5	2
5	-2	-2	1	20	-5	5	-2
6	2	-2	-1	21	-6	-6	1
7	2	2	2	22	6	-6	-1
8	-2	2	-2	23	6	6	2
9	-3	-3	1	24	-6	6	-2
10	3	-3	-1	25	-7	-7	1
11	3	3	2	26	7	-7	-1
12	-3	3	-1	27	7	7	2
13	-4	-4	1	28	-7	7	-2
14	4	-4	-1	29	-8	-8	1
15	4	4	2	30	8	-8	-1

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Модуль 2. Вступ до математичного аналізу. Диференційне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / Крисак Я.В., Левковська Т.А., Горідько Р.В. [та ін.] – К. : НАУ-друк, 2006. – 284 с.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. Кн. 1 Основні розділи / Г.Й. Призва В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред. Г. Л. Кулініча. – 400 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2006. – 416 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.1. – Х.: Веста, 2008. – 200с., іл.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.2. – Х.: Веста, 2008. – 240с., іл.
7. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення (Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.; За заг. ред. Овчинникова П.П.) – К.: Техніка, 2003. – 600 с.: іл.
8. Пискунов П.С. Дифференциальное и интегральное счисления: Учеб. пособие для вузов. В 2 т. М.: Иитеграл-Пресс, 2004. Т. 1: – 416 с; Т. 2: – 544 с.
9. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в 3 частях). – Минск, «Вышэйшая школа», 1990-1991. Ч. 1 – 270 с.
10. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в 3 частях). – Минск, «Вышэйшая школа», 1990-1991. Ч.2 – 352 с.