

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
та
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
до самостійної роботи
студентів денної форми навчання з дисципліни

**” Теорія границь
та
диференціальне числення
функції однієї змінної ”**

2014

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ та РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ
ЗАВДАННЯ до самостійної роботи студентів денної форми навчання
з дисципліни "Теорія границь та диференціальне числення функції
однієї змінної" / Укладачі: Ю. В. Мастиновський, О.О. Мязін,
Запоріжжя: ЗНТУ, 2014 - 70 с.

Укладачі: Ю. В. Мастиновський, доцент, к.т.н.
 О. О. Мязін, асистент

Рецензент: Н. О. Нечипоренко, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: О. О. Мязін

Затверджено
на засіданні кафедри
Прикладної математики

Протокол № 8
від 30.04.14

ЗМІСТ

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ	4
2. ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ.....	4
3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ	60
4. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ТЕОРЕТИЧНИХ ЗНАНЬ	65
5. ЛІТЕРАТУРА	70

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ.

Метою індивідуальних розрахунково-графічних завдань є перевірка результативності самостійної роботи з дисципліни.

Студент повинен самостійно розв'язати індивідуальні розрахунково-графічні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи.

Розв'язання завдань із поясненнями слід подати у шкільному зошиті, на обкладинці якого необхідно написати назву дисципліни, прізвище студента, його ім'я і по батькові; номер групи; номер варіанта. Кожне завдання необхідно позначати його номером за методичними вказівками. Умову завдання треба повністю переписати.

Якщо після перевірки роботи викладачем зроблені зауваження, студент повинен розв'язати заново неправильно виконані завдання у тому самому зошиті і повторно подати його на перевірку. Після позитивної оцінки викладача робота підлягає захисту.

Індивідуальні розрахунково-графічні завдання складаються з 30 варіантів. Кожний варіант містить 20 завдань: 1 – 10 з теми „Теорія границь”, 11 – 20 з теми „Диференціальне числення функції однієї змінної”.

Зважаючи різницю в кількості часів, відведених за планом для вивчення матеріалу студентами різних спеціальностей, провідний викладач (лектор) може коригувати кількість завдань, які студент повинен виконати.

2. ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Варіант № 1

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^3 - 1} = -3$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8} - 1}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 5}}.$

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}.$

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \arctg x}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 7n - 1}{2n^2 + 3n - 1} \right)^{-n^2}.$

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x^3 - 8}{|x - 2|}.$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \frac{1}{2}.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin px}.$

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3) \text{ в точці } x_0 = 3.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \right|.$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt{4x - 3}, \quad x = 1.78.$$

14. Знайти похідну функції $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[2]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2).$

15. Знайти похідну неявно заданої функції $\sqrt[3]{xy} = \frac{y}{x}$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = e^{\frac{\lg^2 t}{2}}, \quad y = e^{\frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $\sin(3x+1) + \cos 5x$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - 2 \operatorname{arctg}(x+2)}{\ln(1 + \frac{1}{x+2})}.$$

19. Знайти похідну функції $y = x^{\operatorname{ctgx}}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}}$.

Варіант № 2

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+2n}{1-3n} = -\frac{2}{3}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(n+1)^4 + (2n+3)^3}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x + 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin[p(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \log_{k+1} (x^2 - (k-1)x - k), \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \arctg \frac{1}{x-1}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p/2} \frac{\ln 2x - \ln p}{\sin(5x/2) \cos x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0.98.$$

14. Знайти похідну функції $y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$x^3 + y^4 - xy + 3x + y = 4.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = e^{\operatorname{ctg}^2 \frac{t}{6}}, \quad y = e^{\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{6}}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \sqrt{e^{3x} + 1}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{3}{x}}{\sqrt{3/x}}$.
19. Знайти похідну функції $y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x})$.
20. Знайти похідну функції $y = x^{e^{\cos x}}$.

Варіант № 3

- Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+15}{6-n} = -5$.
- Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (2n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$.
- Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[6]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$.
- Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$.
- Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$.
- Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{k-x} + \ln(x^2 + (k+2)x + k+1), \quad k = 2.$$
- Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n+n^3}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \arctg \frac{|x-3|}{x-3}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.
11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$ в точці $x_0 = 1$.
12. Знайти диференціал функції $y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала $y = x^5$, $x = 2.997$.
14. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1}$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції $(xy)^4 + x^2 - y^2 + 5x + y = 2$.
16. Знайти похідну параметрично заданої функції $x = 2^{\arccos \frac{t}{7}}$, $y = 2^{-\arcsin \frac{t}{7}}$.
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{11+12x}{6x+5}$.
18. Знайти границю за правилом Лопіталя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{4}{x}}{\ln(1 + \frac{5}{x})}$.
19. Знайти похідну функції $y = x^{2x} 5^x$.
20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}$.

Варіант № 4

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n^2}{1 + 2n^2} = -\frac{1}{2}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3} + 1 - 5n}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin[p(x+2)]}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{|x - k| - 1}, \quad k = 2.$$
7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{2n^2 + 21n - 7}{2n^2 + 18n + 9} \right)^{2n+1}$.
8. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \arctg \frac{1}{x^3 - 8}.$$
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{e^p - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої
 $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$ в точці $x_0 = 1$.
12. Знайти диференціал функції $y = (\sqrt{x-1} - \frac{1}{2})e^{2\sqrt{x-1}}$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала
 $y = x^4$, $x = 3.998$.
14. Знайти похідну функції $y = \arctg(e^x - e^{-x})$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції $y \ln \frac{3}{2} = (\frac{3}{2})^{xy}$.
16. Знайти похідну параметрично заданої функції
 $x = 4^{\frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}}$, $y = 4^{tg^2 \frac{t}{4}}$.
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = 2^{2kx}$.
18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x-2}{x+2}}{\ln(x^2 + 4)}$$
.
19. Знайти похідну функції $y = (tgx)^{\ln tg \frac{x}{4}}$.
20. Знайти похідну функції $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

Варіант № 5

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 + (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}.$

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}.$

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[5 + (x+p)]}{e^{3x} - 1}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \log_{x+2}(k - |x-1|), \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}.$

8. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \arctg \frac{|x+2|}{x^2 + x - 2}.$$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2px}.$

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} \quad \text{в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \cos x \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0.01.$$

14. Знайти похідну функції $y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^5}.$

15. Знайти похідну неявно заданої функції $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = 2^{\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}}}, y = 2^{\operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{x}{x+1}$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\operatorname{arctg}(x+3) - \frac{p}{4} \right)^{x+3}.$$

19. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{5 + \operatorname{tg} x}{5 - \operatorname{tg} x}$.

20. Знайти похідну функції $y = x^{2e^{\operatorname{arctg} x}}$.

Варіант № 6

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{11n} + \sqrt{25n^4 - 81}}{(n - 7\sqrt{n}) - \sqrt{n^2 - n + 1}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \ln \frac{x+k}{x-k} + k, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 5n + 7} \right)^{n+1}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{1}{x^2 - \frac{1}{4}}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{3x - 2x^3}{3} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt[3]{3 + x^2} - x \ln \left| x + \sqrt{3 + x^2} \right|.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0.01.$$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції $y^x = x^y$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \arctg \frac{t}{2}, \quad y = \ln\left(1 + \frac{t^2}{4}\right).$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \log_8(x + 5)$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1)^{\frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 4})}}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (x^8 + 1)^{thx}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{\ln x}{\sin \frac{1}{x}}$.

Варіант № 7

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{2n + 1} = 2$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n - 1)^3}{(n + 1)^4 - n^4}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \ln \frac{x+k}{x^2 - (k+2)x + k+1}, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}.$

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 6^{\frac{1}{x-1}}.$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$

11. 1 Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x^2}{10} + 3 \text{ в точці } x_0 = 2.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[4]{2x - \sin\left(\frac{px}{2}\right)}, \quad x = 1.02.$$

14. Знайти похідну функції $y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}.$

15. Знайти похідну неявно заданої функції $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = xy.$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \ln\left(1 + \frac{t^2}{25}\right), \quad y = e^{\arcsin \frac{t}{2}}.$$

17. Знайти похідну 2-го порядку ф-ії $y = \frac{1+x}{1-x}$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) \frac{1}{\ln(\sqrt{x^2 + 4} + x)}.$$

19. Знайти похідну функції $y = x^{29^x} 29^x$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \ln^2 \ln^3 x$.

Варіант № 8

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{2 + 4n^2} = -\frac{1}{2}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7 + 5} + \sqrt{n-5}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin\left(p\left(\frac{x}{2} + 1\right)\right)}$.
6. Знайти область визначення функції:
 $y = \arcsin(|x + k + 2| - k), k = 2$.
7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{3n+2}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{tgpx}{x + 2}$.
11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої
 $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}$ в точці $x_0 = 4$.
12. Знайти диференціал функції $y = x \arctg x - \ln \sqrt{1 + x^2}$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала
 $y = \sqrt{x^2 + 5}$, $x = 1.97$.
14. Знайти похідну функції $y = -\frac{1}{2}(e^{-x^2} + 2x^2)$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції
 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \arctg \frac{y}{x}$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = e^{\arcsin \frac{t}{2}}, y = \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}.$$

17. Знайти похідну 2-го порядку ф-ії $y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (\cos 2x)^{\ln \cos \frac{x}{2}}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \ln^3 \ln^2 x$.

Варіант № 9

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{10n-3} = \frac{1}{2}$.

2. Обчислити границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 + (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{\sqrt{n^4 - n + 1}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arccos \frac{2x^2 + x + 2k}{(2(k+1)x + k)}, k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n$.

8. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = 2^{\frac{1}{x^2-4}}.$$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1 - \sin(x/2)}{p - x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} \text{ в точці } x_0 = 64.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \frac{\ln|x|}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2}.$$

13. Обчислити наближено за допомогою

диференціала $y = x^{21}$, $x = 0.998$.

14. Знайти похідну функції

$$y = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx + b \cos bx)$$

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\frac{y}{x} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \left(\frac{t}{2} - 4\right)\left(\frac{t}{15} - 1\right), \quad y = \frac{1}{12} \left(\frac{t}{3} - 6\right)\left(\frac{t}{15} - 1\right).$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = 2^{3x+5}$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)^x - 4^x}{x^2}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{\ln \sin x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

Варіант № 10

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-2n}{3+4n} = -\frac{1}{2}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - 2}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arcsin \sqrt{x^3 + (k+1)^3}, \quad k = 2.$$
7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 18n - 15}{7n^2 + 11n + 15} \right)^{n+2}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 4^{\frac{1}{x^3+8}}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p/3} \frac{1 - 2 \cos x}{p - 3x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2} \text{ в точці } x_0 = 4.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1.03.$$

14. Знайти похідну функції

$$y = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx + b \cos bx).$$

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\arccos \frac{x}{y} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \frac{\cos^3 2t}{\sqrt{\cos^2 2t}}, \quad y = \frac{\sin^3 2t}{\sqrt{\cos^2 2t}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку функції

$$y = \sin(x + 1) + \cos 2x.$$

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (x - 5)^{chx}$.

20. Знайти похідну функції $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} + a^{p^{\sqrt{5}}}$.

Варіант № 11

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{23 - 4n}{2 - n} = 4$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-2)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6 + 9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11 + n^2}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arccos \frac{(2k-3)x + k}{x^2 + (k-1)x - k}, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 5^{\frac{x+3}{x^2+2x-3}}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = 2x^2 + 3 \text{ в точці } x_0 = -1.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = x^6, x = 2.01.$$

14. Знайти похідну функції

$$y = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx + b \cos bx).$$

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$2x^2 + xy + 3y^2 + x - y = 0.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right), \quad y = \frac{t}{4} + \arctg \frac{t}{4}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \sqrt{e^{2x+1}}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 2x)}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (x^3 + 4)^{tgx}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$.

Варіант № 12

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3n}{6-n} = -3$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n - 1}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^4 - 2x + 1}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = (k+3)^{\frac{1}{x^2-k^2}}, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 2} \right)^{2n}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 7^{\left(1 - \frac{2}{x-1}\right)^{-1}}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin px}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sin x}$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8.24.$$

14. Знайти похідну функції $y = x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$x^3 + y^3 + 4xy + 2y - 3x^2 = 0.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}}, \quad y = \arccos \frac{t}{5}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{4x + 15}{5x + 1}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(e^x + 1) - 2(e^x - 1).$$

19. Знайти похідну функції $y = x^{\sin x^3}$.

20. Знайти похідну функції $y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$.

Варіант № 13

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+5} = 2$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8 + 6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8 + 6} + \sqrt{n-6}}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = (k+2)^{\frac{1}{\sqrt{|x|-k-1}}}, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 4^{\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)^{-1}}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(px/2)}{1 - \sqrt{x}}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{2x+1}{x} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = 2x + \ln|\sin x + 2 \cos x|.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = x^7, x = 1.996.$$

14. Знайти похідну функції $y = x - 3 \arctg e^x$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$x^2 y^3 + 3xy + y - 4x^3 = 0.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^t \sin 4t \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cos 4t$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \lg(3x+1)$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{\sin x}}{x^3}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$.

Варіант № 14

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1} = \frac{3}{4}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(p\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x+1)}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{k^2 - x^2}}, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 2n + 1} \right)^{3n^2 - 7}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 3^{\left(1 - \frac{2}{x+4}\right)^{-3}}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = -\frac{2}{3} \frac{x^8 + 2}{x^4 + 1} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{ctgx} - \frac{1}{3} \sqrt{tg^3 x}$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7.64.$$

14. Знайти похідну функції $y = x + \frac{8}{1 + e^{\frac{x}{4}}}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\arctg \frac{y}{x} = 2^4 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \ln(1 - \frac{t^2}{36}), \quad y = \arcsin \frac{t}{6}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = 7^{5x}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - x \ln 3}{2^x - x \ln 2} \right).$$

19. Знайти похідну функції $y = (x^4 + 5)^{ctgx}$.

20. Знайти похідну функції $y = \frac{x(\cos \ln x + \sin \ln x)}{2}$.

Варіант № 15

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2} = -\frac{3}{5}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{px} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{x+k}{\ln(x^2 - k(k+2)x + k+1)}, \quad k = 2.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n/6+1}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = 2^{\left(1 - \frac{4}{x-5}\right)^{-1}}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt{4x - 1}, x = 2.56.$$

14. Знайти похідну функції $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \sqrt[5]{x^2 - y^2}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}, y = e^{\arcsin \frac{1}{2}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{x}{9(4x + 9)}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arccos x)^{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{5\frac{x}{2}}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}$.

Варіант № 16

1. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{x^2 + (k-1)x - k}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}, \quad x = 1.016.$$

14. Знайти похідну функції $y = x - e^{-x} \arcsin e^x$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{2} \sqrt[7]{x^2 + y^2}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = e^{\arccos \frac{t}{3}}, \quad y = \ln\left(1 - \frac{t^2}{9}\right).$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \lg(x+1)$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{p} \arctg x \right).$$

19. Знайти похідну функції $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \lg \ln ctgx$.

Варіант № 17

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 + (2+n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} - \sqrt[4]{n^5+1}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \log_{k+1} (x^2 - (k-1)x - k), \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n^4 + 1}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x+3}{\sqrt{x+7}-2}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x - 1} = 6$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})$ в точці $x_0 = 1$.

12. Знайти диференціал функції $y = \arctg \frac{x^2 - 1}{x}$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8.36$.

14. Знайти похідну функції $y = x - \ln(1 + e^x) - \arctg e^{\frac{x}{2}}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{y}{x}} \ln^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = xy.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = e^{-\arctg \frac{t}{4}}, y = e^{\arctg \frac{t}{4}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{4}{x}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x - 1}{x - 1} \right)^{x-1}.$$

19. Знайти похідну функції $y = x^{3x} 2^x$.

20. Знайти похідну функції $y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

Варіант № 18

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+4}{2n+1} = \frac{7}{2}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 + (2+n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{k-x} + \ln(x^2 + (k+2)x + k+1), \quad k = 1.$$
7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 1/2} = -7$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$.
11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{1}{3x+2} \text{ в точці } x_0 = 2.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x^{2-1}}$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала
 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 4.16$.
14. Знайти похідну функції $y = \frac{e^{x^3}}{1 + x^3}$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції
 $\ln \sqrt{2} \log_2(x^2 + y^2) = xy$.
16. Знайти похідну параметрично заданої функції
 $x = e^{-\arcsin \frac{t}{3}}$, $y = e^{\arccos \frac{t}{3}}$.
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$.
18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\ln(x^2 - 2)}{2x^2(2 - 2\sqrt{3})x - 2\sqrt{3}}$$
.
19. Знайти похідну функції $y = 19^{x^{19}} x^{19}$.
20. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \sqrt{1 + 2tg^2 x}$.

Варіант № 19

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+1} = \frac{2}{3}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 + (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[3]{n^{12} + n + 1} - n}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{|x - k| - 1}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p/4} \frac{1 - \sin 2x}{(p - 4x)^2}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = x - x^3 \text{ в точці } x_0 = -1.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x}).$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \frac{(x + \sqrt{5-x^2})}{2}, \quad x = 0.98.$$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{2} \arctg \frac{e^x - 3}{2}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \arctg \frac{t}{2}, y = \frac{2}{t^2 + 4}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \sqrt{e^{7x-1}}$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - 2\arctg(x+1)}{\ln(1 + \frac{1}{x+1})}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{3x}$.

20. Знайти похідну функції $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$.

Варіант № 20

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-1}{n+1} = 7$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 + (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3} = n}{\sqrt[5]{n} - n}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(p(2+x))}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \log_{x+2}(k - |x-1|), k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}$.

8. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x+3} - 1}{x+2}.$$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos px}{\operatorname{tg}^2 px}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} \text{ в точці } x_0 = 1.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \cos x \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0.01.$$

14. Знайти похідну функції $y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^5}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = 2^{\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}}}, y = 2^{\operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{x}{x+1}$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\operatorname{arctg}(x+3) - \frac{p}{4} \right)^{x+3}.$$

19. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{5 + \operatorname{tg} x}{5 - \operatorname{tg} x}$.

20. Знайти похідну функції $y = x^{2e^{\operatorname{arctg} x}}$.

Варіант № 21

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \frac{4}{3}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} \left[2p \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \ln \frac{x+k}{x-k} + k, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n - 1} \right)^{-n+1}.$

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{\sqrt[3]{x-10} + 2}{x-2}.$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = 2x^2 + 3x - 1 \text{ в точці } x = -2.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \operatorname{tg}(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2}).$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 0,012.$$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції $y \ln 2 = 2^{xy}$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \frac{12t}{1+t^3}, \quad y = \frac{12t^2}{1+t^2}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії

$$y = \sin 2x + \cos(x+1).$$

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}}.$$

19. Знайти похідну функції $y = \sin \sqrt{x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

Варіант № 22

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - n^3}{1 + 2n^3} = -\frac{1}{2}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2n)^3 - 8n^3}{(1 + 2n)^2 + 4n^2}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^3+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \ln \frac{x+k}{x^2 - (k+2)x + k+1}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n/2}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x+3}{\sqrt[3]{x+30}-3}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin^2 x - tg^2 x}{(x-p)^4}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої $y = x - x^3$ в точці $x_0 = -1$.

12. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x})$.

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}, \quad x = 0,98.$$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{2} \arctg \frac{e^x - 3}{2}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = (\arctg) \frac{t}{2}, \quad y = \frac{2}{t^2 + 4}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$.

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - 2\arctg(x+1)}{\ln(1+1/(x+1))}.$$

19. Знайти похідну функції $y = s = (\sin x)^{3x}$.

20. Знайти похідну функції $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$.

Варіант № 23

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+1} = 2$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^4+2} - \sqrt{n-2}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^4 - x - 1}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arcsin(|x+k+2|-k), \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+10}{n+1} \right)^{3n+1}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x-3}-1}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} x}$.
11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої $y = x^2 + 8\sqrt{x}$ в точці $x_0 = 4$.
12. Знайти диференціал функції $y = \{x^2\} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1.97$.
14. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції $x^y = y^x$.
16. Знайти похідну параметрично заданої функції $x = 2^t \cos 2^t$, $y = 2^t \sin 2^t$.
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{x}{2(3x+2)}$.
18. Знайти границю за правилом Лопітала $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} 2/x}{\sqrt{1+2/x}-1}$.
19. Знайти похідну функції $y = (\arcsin x)^{e^x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$

Варіант № 24

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{2+4n^2} = -\frac{1}{2}$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+2x)}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arccos \frac{2x^2 + x + 2k}{(2(k+1)x + k)}, \quad k = 1.$$
7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{|x-5|}{x-5}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$.
11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої $y = x + \sqrt{x^3}$ в точці $x = 1$.
12. Знайти диференціал функції $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала $y = \arcsin x$, $x = 0,08$.
14. Знайти похідну функції $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.
16. Знайти похідну параметрично заданої функції $x = \sqrt{\frac{t^2}{25} + 1}$, $y = \frac{1/25}{\sqrt{t^2/25 + 1}}$.
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \lg(5x + 2)$.
18. Знайти границю за правилом Лопіталя
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\arcsin) \frac{3}{x}}{\ln(1 + 4/x)}$$
.
19. Знайти похідну функції $y = (\ln x)^{3^x}$.
20. Знайти похідну функції $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$.

Варіант № 25

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = -5$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-2)^2 + (n+2)^3}{(4+n)^3}.$

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}.$

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\sin(2p(x+10))}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arcsin \sqrt{x^3 + (k+1)^3}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 4n - 1}{3n^2 + 2n + 7} \right)^{2n+5}.$

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x+2}{|x+2|}.$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2p} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^3} - e^{4p^2}}.$

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 20 \text{ в точці } x_0 = -8.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = x \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 3} \right| - \sqrt{x^2 + 3}.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0.97.$$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{2}{3} \sqrt{(\arctg^x)^3}$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції $xy = \arctg \frac{x}{y}$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2/4}}, \quad y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2/4}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = a^{3x}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

19. Знайти похідну функції $y = x^{\arcsin x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

Варіант № 26

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n}) \sqrt{5-n+n^2}}$.

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(p(x+7))}$.

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \arccos \frac{(2k-3)x+k}{x^2+(k-1)x-k}, \quad k=1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}$.

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{|x-3|}{x^2-4x+3}$.

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7px}{\sin 8px}$.

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \text{ в точці } x_0 = 4.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \arctg(chx) + (chx) \ln chx.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26.46.$$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \arctg e^x$.

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{x}{y}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{x}{2(3x+2)}.$

18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{\ln(x^2+1)}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (ctg 3x)^{e^x}.$

20. Знайти похідну функції $y = \ln^2(x + \cos x).$

Варіант № 27

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-5} = \frac{2}{3}.$

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^2}.$

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}.$

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5p/2) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = (k+3)^{\frac{1}{x^2-k^2}}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5n + 7}{2n^2 + 5n + 3} \right)^n$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5$.
10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$.
11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої $y = 8\sqrt[3]{x} = 70$ в точці $x_0 = 16$.
12. Знайти диференціал функції $y = \arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x = 1.97$.
14. Знайти похідну функції $y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції $y = \frac{\ln|x|}{1 + x^2}$.
16. Знайти похідну параметрично заданої функції $x = \frac{6t}{1 + t^2}$, $y = \frac{6t^2}{1 + t^2}$.
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \lg(x + 4)$.
18. Знайти границю за правилом Лопітала $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\arctg(x + 2) - \frac{p}{4} \right)^{x+1}$.

19. Знайти похідну функції $y = x^{e^{\lg x}}$.
20. Знайти похідну функції $y = \ln^3(1 + \cos x)$.

Варіант № 28

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{n^2 + 3} = -2$.
2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$.
3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n - 3}}{\sqrt[5]{n^5 + 3} + \sqrt{n - 3}}$.
4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$.
5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1 - 2x)}{4 \arctg 3x}$.
6. Знайти область визначення функції:

$$y = (k + 2)^{\frac{1}{\sqrt{|x| - k - 1}}}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$.
8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{|x+4|}{x^2 + 3x - 4}$.
9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1$.

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin px}$.
11. $y = 2x^2 + 3x + 1$ в точці $x_0 = 1$.
12. Знайти диференціал функції
 $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$.
13. Обчислити наближено за допомогою диференціала
 $y = x^{11}$, $x = 1.021$.
14. Знайти похідну функції $y = \frac{\sqrt{2^x - 1} - \arctg \sqrt{2^x - 1}}{\ln 2}$.
15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$\arctg \frac{x}{y} = \sqrt{x^2 - y^2}.$$
16. Знайти похідну параметрично заданої функції
 $x = 2\left(\frac{\cos 2t}{2} + t \sin 2t\right), y = 2\left(\frac{\sin 2t}{2} - t \cos 2t\right).$
17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \sqrt{x}$.
18. Знайти границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)^{\frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}}.$$
19. Знайти похідну функції $y = (tgx)^{4e^x}$.
20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$.

Варіант № 29

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2 - n^2} = -3$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 + (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}.$

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\sin 3x \cos \left[\frac{p(x+1)}{2} \right]}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{k^2 - x^2}}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 3n + 3} \right)^{n^3}.$

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}.$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^2 - p^2}{\sin x}.$

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2} \text{ в точці } x_0 = 3.$$

12. Знайти диференціал функції

$$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x.$$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1.21.$$

14. Знайти похідну функції

$$y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{1+e^2} - 1}{\sqrt{1+e^2} + 1}.$$

15. Знайти похідну неявно заданої функції $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = \ln(1 + \frac{t^2}{9}), \quad y = \frac{t}{3} - \operatorname{arctg} \frac{t}{3}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = \frac{2x+5}{13(3x+1)}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)^{\frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$.

Варіант № 30

1. Довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$.

2. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n+4)^4}$.

3. Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}}.$

4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}.$

5. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + px}.$

6. Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{x+k}{\ln(x^2 - k(k+2)x + k+1)}, \quad k = 1.$$

7. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}.$

8. Дослідити на неперервність функцію: $y = \frac{x+3}{x^3 + 27}.$

9. Довести, що: $\lim_{x \rightarrow -7/2} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\frac{1}{2}.$

10. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^3}}{\operatorname{tg} px}.$

11. Скласти рівняння нормалі та дотичної до кривої

$$y = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ в точці } x_0 = -2.$$

12. Знайти диференціал функції $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right).$

13. Обчислити наближено за допомогою диференціала $y = x^7, \quad x = 2.002.$

14. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{m} \operatorname{arctg}^{mx}.$

15. Знайти похідну неявно заданої функції

$$2e^{xy} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}.$$

16. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$x = e^{\frac{sh^2 t}{5}}, \quad y = e^{\frac{sh^2 t}{5}}.$$

17. Знайти похідну 2ого порядку ф-ії $y = a^{2x+3}$.

18. Знайти границю за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 3x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

19. Знайти похідну функції $y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

20. Знайти похідну функції $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$.

3. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ

Приклад 1.

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^3 - 5x + 4}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 1)}{(x-1)(x^2 + 5)} = \frac{1+1-1}{-2-6} = -\frac{1}{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x-9}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^3-5x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3/x^2+1/x^3}{1-5/x^2+4/x^3} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1+1+1}{(2x-1)} \right)^{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(2x-1)/2} \right)^{\frac{2x-1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} \cdot (x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+2)}{2x-1}} = e. \end{aligned}$$

Приклад 2. Дослідити задану функцію $y = 2^{\frac{1}{1-x}} - 1$ на неперервність у точках $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, у випадку розриву знайти границі функції зліва і справа, визначити характер точки розриву.

Розв'язання.

1) Дослідимо дану функцію у точці $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2^{\frac{1}{1-x}} - 1 \right) = 1; \quad y(x_0) = y(0) = 1.$$

Отже, дана функція в точці $x_0 = 0$ є неперервною.

2) Дослідимо функцію на неперервність у точці $x_1 = 1$.

У точці $x_1 = 1$ функція невизначена, отже, точка $x_1 = 1$ є точкою розриву даної функції.

Визначимо характер точки розриву. Для цього знайдемо:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2^{\frac{1}{1+0-1}} - 1 \right) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2^{\frac{1}{1-0-1}} - 1 \right) = -1.$$

Отже, $x_1 = 1$ -- точка розриву II-го роду.

Приклад 3.

Знайти похідну функції $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + tge^x$

$$\text{Розв'язання: } y' = \frac{2e^{2x}}{2(e^{2x} + 1)} + \frac{e^x}{\cos^2 e^x} = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} + \frac{e^x}{\cos^2 e^x}$$

Відповідь: $\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} + \frac{e^x}{\cos^2 e^x}$

Приклад 4

Для заданої функції $y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{5 - x^2})$, $x = 0.96$ знайти:

а) її диференціал; б) наближене значення в точці x .

Розв'язання: а) $dy = y'(x)dx$; $dy = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}\right)dx$;

б) $y(x) = y(x_0 + x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$,

$x = 0.96$, $x_0 = 1$; $\Delta x = -0.04$. Маємо

$y(0.96) \approx y(1) + y'(1)(-0.04)$, $y(0.96) \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100} = 1.49$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}\right)dx$; б) 1.49

Приклад 5

Знайти границю функції за правилом Лопітальє.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{-2^{\cos^2 x} \ln 2 \cdot 2 \sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} (-1) \sin^2 x \cdot 2^{\cos^2 x + 1} \ln 2 = -2 \ln 2.$$

Відповідь. $-2 \ln 2$.

Приклад 6

Обчислити похідну функції, задану неявно $x^3 + x^2 y + y^2 = b$.

$$3x^2 + 2xy + x^2 y' + 2yy' = 0$$

Розв'язання. $y'(x^2 + 2y) = -3x^2 - 2xy$.

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$

$$\text{Відповідь. } y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$

Приклад 7

Знайти похідну другого порядку функції $y = f(x)$, що задана параметрично: $x = \sqrt{1-t^2}$; $y = \frac{1}{t}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} y_{xx}'' &= \frac{(y_x')'_t}{x_t'}, & y_x' &= \frac{-\frac{1}{t^2}}{-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}, \\ y_{xx}'' &= \frac{-\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} - 3t^2\sqrt{1-t^2}}{t^6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right) = \\ &= \frac{t^4 + 3t^2 - 3t^4}{t^7} = \frac{3-2t^2}{t^5} \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{3-2t^2}{t^5}$$

4. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ТЕОРЕТИЧНИХ ЗНАНЬ

1. Що називається функцією однієї незалежної змінної? Областю визначення функції? Областю значень функції?
2. Наведіть приклади функцій цілочисленого аргументу.
3. Що називається графіком функції в системі декартових координат?
4. Що означає задати функцію? Визначити табличне, аналітичне і графічне задання функції. Описати особливості, переваги і недоліки кожного з цих способів.
5. Яка функція називається складеною? Наведіть приклади складених функцій.
6. Яка функція називається елементарною?
7. Дайте означення алгебраїчної, раціональної, ірраціональної і трансцендентної функцій.
8. Що називається нулем функції?
9. Яка функція називається парною? непарною?
10. Яка функція називається періодичною? Що таке період функції?
11. Яка функція називається зростаючою (спадною) на інтервалі?
12. Що називається інтервалом монотонності функції?
13. Накресліть графіки степеневих функцій для різних показників степеня й опишіть поведінку цих функцій.
14. Накресліть графіки показникових функцій при різних основах і опишіть поведінку цих функцій.
15. Накресліть графіки тригонометричних функцій і опишіть поведінку цих функцій.
16. Накресліть графіки обернених тригонометричних функцій і опишіть поведінку цих функцій.
17. Визначити гіперболічні функції, накреслити їх графіки й описати поведінку цих функцій.
18. Що таке границя послідовності? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.
19. Наведіть приклад послідовності, що має границю; не має границі.
20. Яка величина називається нескінченно малою? нескінченно великою? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричні ілюстрації.

21. Яка послідовність називається обмеженою зверху? знизу?
22. Сформулюйте і доведіть правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.
23. Сформулюйте і поясніть ознаку існування границі монотонної послідовності.
24. Яке число називається числом Ейлера?
25. Що таке границя функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.
26. Наведіть приклад функції $y = f(x)$, що має границю при $x \rightarrow x_0$; не має границі при $x \rightarrow x_0$.
27. 3.Що таке границя функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$? при $x \rightarrow -\infty$?
28. Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.
29. Наведіть приклад функції $y = f(x)$, яка має границю при $x \rightarrow \infty$; не має границі при $x \rightarrow \infty$.
30. Яка функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \rightarrow x_0$? при $x \rightarrow \pm\infty$? Наведіть означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.
31. Наведіть приклад необмеженої, але не нескінченно великої величини.
32. Який найпростіший зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами?
33. Сформулюйте і доведіть правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.
34. Сформулюйте і доведіть ознаку існування границі функції, що обмежена двома функціями, які мають одну й ту саму границю.
35. Виведіть першу визначену границю.
36. Виведіть другу визначену границю.
37. Що означає порівняти дві нескінченно малі величини? В якому випадку одна з них буде вищого порядку, ніж інша?
38. Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними? Наведіть необхідну і достатню умови еквівалентності.

39. Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих величин
40. Наведіть означення неперервності функції $y = f(x)$ у точці a і проілюструйте його геометрично.
41. Що називається точкою розриву функції?
42. Наведіть приклади розривних функцій різного характеру.
43. У чому полягає правило граничного переходу для неперервної функції?
44. Сформулюйте і доведіть теореми про арифметичні дії з неперервними функціями.
45. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність складної функції, що складається з неперервних функцій.
46. Що можна сказати про інтервал неперервності елементарної функції? Які точки можуть бути точками розриву такої функції?
47. Сформулюйте властивості функцій, які неперервні на замкненому інтервалі. Наведіть геометричну ілюстрацію цих властивостей.
48. Числовою послідовністю називають ...
49. Число x_0 називають границею послідовності, якщо ...
50. Чому дорівнює границя сталої?
51. Число A називають границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо ...
52. Чому дорівнює границя суми функцій?
53. Чому дорівнює границя сталої?
54. Чому дорівнює границя суми функцій?
55. Чому дорівнює границя добутку функцій?
56. Чому дорівнює границя частки функцій?
57. Дайте означення границі функції в точці
58. Запишіть першу важливу границю.
59. Нескінченно малою величиною називають...
60. Чому дорівнює сума скінченного числа нескінченно малих величин?
61. Запишіть другу важливу границю.
62. Функція називається неперервною в точці x_0 , якщо ...
63. Якою є функція $f(x) \pm \phi(x)$, якщо функції $f(x)$ і $\phi(x)$ неперервні?
64. Яка функція називається неперервною на відрітку?
65. Сформулюйте теорему Вайєрштрасса.

66. Розрив у точці x_0 називається розривом першого роду, якщо ...
67. Розрив у точці x_0 називається розривом другого роду, якщо ...
68. Дайте означення похідної заданої функції.
69. Що називається дотичною прямою до лінії в заданій її точці?
70. Який геометричний зміст похідної?
71. Як знайти похідну, виходячи з її означення?
72. Вивести рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$
73. Дати означення правої і лівої похідних функції в точці. Який зв'язок між односторонніми похідними і похідною функції в точці?
74. Сформулювати правила диференціювання результатів арифметичних дій.
75. Вивести правило диференціювання складеної функції. Навести приклади.
76. Вивести правило диференціювання оберненої функції.
77. Вивести формули для похідних основних елементарних функцій.
78. У чому суть логарифмічного диференціювання?
79. Вивести правило диференціювання параметрично заданої функції.
80. Що називається похідною n -го порядку заданої функції?
81. Як відшукуються похідні вищих порядків від функцій, що задані явно? неявно? параметрично?
82. Сформулювати правило Лейбніца для диференціювання добутку функцій.
83. Що називається диференціалом функції? Як виражається диференціал функції через її похідну?
84. Який геометричний зміст диференціала заданої функції $y = f(x)$
85. Назвати властивості диференціала. У чому полягає властивість інваріантності форми диференціала?
86. Яка функція називається диференціальною? У чому полягає необхідна умова диференційованості функції?
87. Вказати формулу для наближеного обчислення значень функції за допомогою диференціала функції.

88. Що називається диференціалом n -го порядку даної функції?
89. Чи мають диференціали вищих порядків інваріантну властивість?
90. Як диференціювати неявно задані функції?
91. Сформулювати і довести теорему Ферма. У чому полягає її геометричний зміст?
92. Сформулювати і довести теорему Ролля; вказати її геометричний зміст.
93. Сформулювати теорему Лагранжа; пояснити її геометричний зміст.
94. Сформулювати і довести теорему Коші.
95. У чому суть правила Лопіталя? Довести відповідну теорему для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$. Сформулювати теорему для випадку невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$.
96. Як розкриваються невизначеності $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$
97. Похідною функції називається...
98. Похідна суми дорівнює...
99. Похідна частки дорівнює...
100. Диференціалом d_y функції $y = f(x)$ у точці x називається ...
101. Чому дорівнює диференціал суми?
102. Чому дорівнює диференціал добутку?
103. Що називається похідною другого порядку? У чому полягає механічний зміст її?
104. Як знайти диференціал $d''y$, якщо $y = f(x)$ і x — незалежна змінна?
105. Як знайти другу похідну функції, заданої параметрично?
106. Геометричний зміст теореми Ферма.
107. Сформулюйте теорему Коші.
108. Сформулюйте теорему Лагранжа.
109. Сформулюйте достатні умови монотонності.
110. Сформулюйте другу достатню умову локального екстремуму.
111. Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі, якщо...

5. ЛІТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М: Наука, 1987. — 320 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1983. — 228с.
3. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1985. — 392 с.
4. *Буйвол В. М.* Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії. — К.: КМУЦА, 1996. — 220 с
5. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Наука, 1980. — Т.1. — 135 с.
6. *Ильин В. А., Лозняк Е. Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1981. —183 с.
7. *Коваль О. О., Топольницька К. Ф.* Елементи лінійної алгебри, векторного числення та аналітичної геометрії: Навч. посібник. — К.: КМУЦА, 1996. —150 с.
8. *Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д.* Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії. — К.: КВТІУ, 1997. — 261 с
9. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. — Харьков, 1973.
10. *Денисюк В.П., Ренета В.К.* Висша математика. Модульна технологія навчання: Навчальний посібник: -К, Книжкове видавництво НАУ, 2005, 276с