МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних робіт
і розрахунково-графічних завдань
на тему «Кінематика плоскопаралельного
руху твердого тіла»
для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка»
для всіх форм навчання

2025

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань на тему «Кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла» спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» всіх форм навчання / Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, В.Г. Шевченко, О.С Омельченко – Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2025.– 110 с.

Укладачі:

д-р ф-м. наук, професор	В.І. Пожуєв,
к.т.н., доцент	А.В. Пожуєв,
к.т.н., доцент	В.Г. Шевченко
ст. викладач	О.С Омельченко

Рецензент,

к.т.н., доцент	А.А. Скребцов

Відповідальний
за випуск:,

ст. викладач	О.С Омельченко

Затверджено
на засіданні кафедри
«Теоретична та прикладна механіка»
Протокол № 1 від 3.09.2025 р.

Рекомендовано до видання
НМК ТФ
Протокол № 1 від 11.09. 2025 р.

ЗМІСТ

С.
Введення…………………………..………………………………… 4
1. Основні теоретичні відомості з кінематики плоскопаралельного руху………………………………….. 5
2. Три способи визначення миттєвого кутового прискорення ε. 12
3. Графічний метод визначення швидкостей і прискорень точок плоскої фігури за допомогою плану швидкостей та плану прискорень……………………………………………….... 16
4. Порядок розв'язання задач кінематики плоскопаралельного руху твердого тіла або багатоланкового механізму……….... 25
5. Додаткова інформація про кути і трикутники, яка потрібна для розв'язання задач кінематики плоскопаралельного руху.. 28
6. Приклади розв'язання задач із мініконтрольної К-4 «Кінематичний аналіз плоского трьохланкового механізму».. 31
7. Приклади виконання розрахунково-графічної роботи К-4 «Кінематичний аналіз багатоланкового механізму»………… 70
Перелік джерел посилань……………………………………….110

ВВЕДЕННЯ

Однією з важливих в теоретичному і практичному аспекті тем в курсі теоретичної механіки є кінематичне дослідження плоскопаралельного руху, зокрема аналіз плоского руху механізмів, що складаються з трьох або п'яти елементів. Цей розділ теоретичної механіки є основою для курсу теорії машин і механізмів, а також відіграє важливу роль при подальшому вивченні і застосуванні методів аналітичної механіки, зокрема при застосуванні принципу можливих переміщень при аналізі рівноваги механічних систем. У зв'язку зі сказаним вище студентам важливо навчитися знаходити швидкості і прискорення точок різних елементів механізмів, зокрема знаходити і використовувати миттєвий центр швидкостей, а також освоїти так звані другий і третій методи для визначення миттєвого кутового прискорення (метод проектування векторної формули для прискорення точки на спеціально направлені осі координат).

Дані методичні вказівки присвячені практичним аспектам, які необхідні при виконанні мініконтрольних робіт про плоскопаралельний рух механізму, що складається із трьох тіл, а також детальному аналізу особливостей, які виникають при виконанні розрахунково-графічної роботи про плоскопаралельний рух механізму з п'яти тіл. Викладено необхідні теоретичні відомості, дані оригінальні методичні рекомендації (зокрема так зване «правило підкреслювання»), розглянуті приклади виконання як мініконтрольних, так і розрахунково-графічних робіт.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З КІНЕМАТИКИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ

Нагадаємо, що рух тіла називається плоскопаралельним або плоским, якщо всі точки тіла рухаються, залишаючись у площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

Неважно показати [1], що дослідження такого руху зводиться до аналізу кінематики перерізу тіла площиною, паралельною нерухомій, у своїй площині, тобто з математичної точки зору задача є двомірною, хоча реально ми маємо просторове тіло, що рухається спеціальним способом.

Звернемо увагу на те, що існують **дві механічні трактовки такого руху,** а саме: **перша** полягає в тому, що у кожен момент часу такий рух можна розглядати як поєднання поступального руху разом з полюсом і обертання навколо осі, що проходить через полюс перпендикулярно до площини руху. Саме виходячи з такого підходу стають зрозумілими дві основні формули кінематики плоскопаралельного руху, згідно з якими швидкість довільної точки перерізу дається формулою:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}\,; \quad \bar{v}_{MA} \perp AM\,;$$
$$v_{MA} = AM \cdot \omega, \tag{1}$$

де $\bar{v}_A$ – швидкість обраної нами довільно з якихось міркувань точки, яка в даний момент часу називається полюсом,

$\bar{v}_{MA}$ – швидкість, яку точка M має, обертаючись разом з перерізом навколо осі, що проходить через полюс.

Аналогічно записується формула для визначення прискорення довільної точки перерізу:

$$\bar{W}_M = \bar{W}_A + \bar{W}_{MA}^{\text{об}} + \bar{W}_{MA}^{\text{віс}}, \tag{2}$$

де $\bar{W}_A$ прискорення полюса,

$\bar{W}_{MA}^{\text{об}}$ – обертальне прискорення точки M в її русі разом з перетином навколо полюса,

$\bar{W}_{MA}^{\text{віс}}$ – вісеспрямоване прискорення точки M, яке характеризує зміну швидкості $\bar{v}_{MA}$ за напрямком.

Увага! Для практичного використання формули (1) необхідно попередньо знати такі величини: 1) для заданого моменту часу знати швидкість однієї точки перетину за величиною і за напрямком; 2) знати зі знаком (тобто за напрямком) кутову швидкість обертання перерізу навколо точки A. Тоді за формулою (1) швидкість точки M будується за показаною на рис. 1.1 схемою, а саме переносимо вектор $\bar{v}_A$ в точку M, будуємо вектор $\bar{v}_{MA}$, який перпендикулярний до відрізку AM і направлений у бік, що визначається напрямком кутової швидкості ω, а потім за правилом паралелограма додаємо в точці M $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_{MA}$ і знаходимо $\bar{v}_M$.

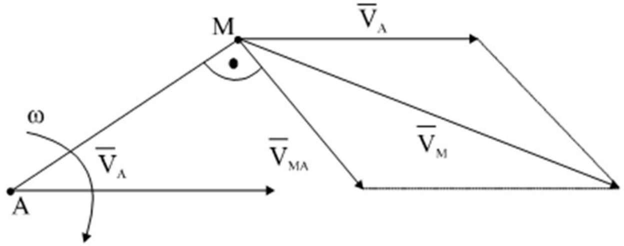

Рисунок 1.1 – Побудова вектора швидкості точки

Увага! Уже в цьому місці треба запам'ятати важливу на майбутнє властивість плоскопаралельного руху, згідно з якою характеристики обертальної частини плоскопаралельного руху не залежить від вибору полюса, тобто для двох довільних точок перерізу A і B справедливі формули:

$$\omega_A = \omega_B, \ \ \varepsilon_A = \varepsilon_B.$$

Увага! Щоб скористатися формулою (2) треба обов'язково знати: 1) для заданого моменту часу для однієї точки перерізу прискорення за величиною і напрямком; 2) величину і напрямок кутової швидкості перетину; 3) алгебраїчне значення кутового прискорення обертання навколо полюса. Тоді геометрична інтерпретація формули (2) має показаний на рис. 1.2 вигляд, тобто побудова вектора $\overline{W}_M$ відбувається в такому порядку:

1) переносимо вектор $\overline{W}_A$, в точку M;

2) будуємо вектор $\overline{W}_{MA}^{\text{віс}}$, який спрямований по прямій MA від M до A, а його модуль знаходиться за формулою:

$$\overline{W}_{MA}^{\text{віс}} = AM \cdot \omega^2;$$

3) будуємо вектор $\overline{W}_{MA}^{\text{об}}$, який направлений перпендикулярно до AM у бік, що визначається знаком кутового прискорення, а модуль знаходимо за формулою:

$$\overline{W}_{MA}^{\text{об}} = AM \cdot \varepsilon.$$

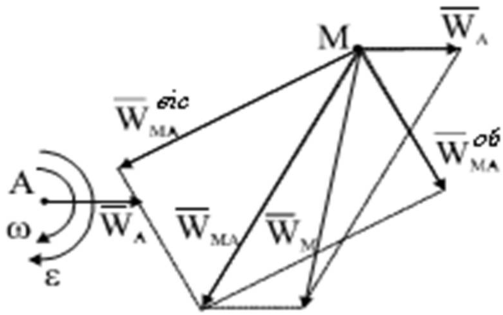

Рисунок 1.2 – Побудова вектора прискорення точки

4) згідно з формулою (2) геометрично додаємо вказані три вектори, при цьому доцільно спочатку знайти:

$$\overline{W}_{MA} = \overline{W}_{MA}^{\text{об}} + \overline{W}_{MA}^{\text{віс}},$$

як діагональ відповідного прямокутника, а потім на векторах $\overline{W}_A$ і $\overline{W}_{MA}$ побудувати паралелограм, діагональ якого і буде прискоренням точки M.

Увага! На практиці більш раціонально використовувати не наведені на рис. 1.1 і рис. 1.2 графічні побудови, а застосовувати до формул (1) і (2) аналітичний **метод проекцій**, спроектувавши обидві частини цих формул на довільно обрані осі прямокутної системи координат, знайти $v_{Mx}, v_{My}, W_{Mx}, W_{My}$, а потім модулі швидкості і прискорення за відомими формулами:

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2}, \quad W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2}.$$

Увага! Зазначимо, що формули (1) і (2) являються основними в кінематиці плоскопаралельного руху, але у той же час не є найбільш зручними для розв'язання задач, зокрема, як ми вже відзначали вище, вони вимагають достатньо великої попередньої інформації, перш за все про кутову швидкість і кутове прискорення. Тому, виходячи в першу чергу з формули (1) в кінематиці такого руху дуже важливу роль відіграє поняття при **миттєвий центр швидкостей (МЦШ).**

Нагадаємо, що МЦШ називається така точка перерізу, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. В книзі [1] показано, що якщо переріз рухається не поступально, то така точка в кожен момент часу існує й при тому єдина.

Увага! Крім окремих випадків, які в [1] розглянуті детально і які в задачах, що розглядаються в даних методичних вказівках не зустрічаються, МЦШ, який за звичай будемо позначати як точку *P*, будемо знаходити за **правилом двох перпендикулярів**, яке полягає в наступному. Для ланки (елементу механізму), що розглядається треба знати напрямки руху двох довільних точок *A* і *B*. Тоді, побудувавши в точці *A* за допомогою прямокутного трикутника перпендикуляр до швидкості точки *A*, а в точці *B* – перпендикуляр до швидкості *B*, на перетині цих двох перпендикулярів знаходимо точку *P* для даної ланки (рис. 1.3).

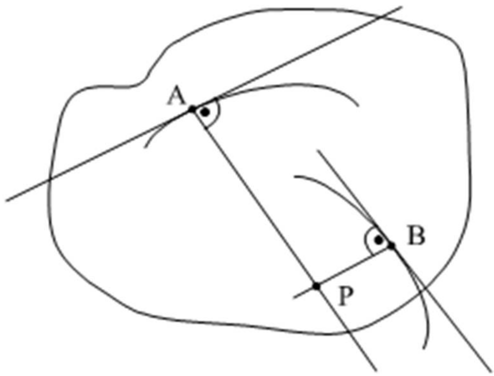

Рисунок 1.3 – Правило двох перпендикулярів

Увага! Досить часто в задачах, які розглядаються в даному посібнику, зустрічаються ситуації, що для якоїсь ланки плоского механізму так побудовані два перпендикуляри є паралельними (не перетинаються). В такому випадку будемо говорити, що дана ланка виконує миттєво поступальний рух і усі точки цього елементу в даний момент часу мають однакові за модулем і напрямком швидкості, а точку P для цієї ланки вважаємо розташованою на нескінченості.

Увага! Завжди треба пам’ятати, що в плоскому механізмі, який складається у нас із трьох або п’яти елементів, **кожен елемент** має свій МЦШ (свою точку P) і свої миттєві кутові швидкості і кутові прискорення, і не можна говорити про МЦШ для всього механізму в цілому.

У зв’язку з введенням поняття про МЦШ нагадаємо, що можлива **друга** механічна інтерпретація плоскопаралельного руху, згідно з якою в даний момент часу такий рух можна розглядати як чисто обертальний навколо осі, що проходить через МЦШ. Зрозуміло, що обидва підходи (і з використанням формул (1), (2), і з використанням МЦШ) однаково описують рух тіла, що добре видно на прикладі циліндру, який котиться без ковзання горизонтальною площиною (рис. 1.4).

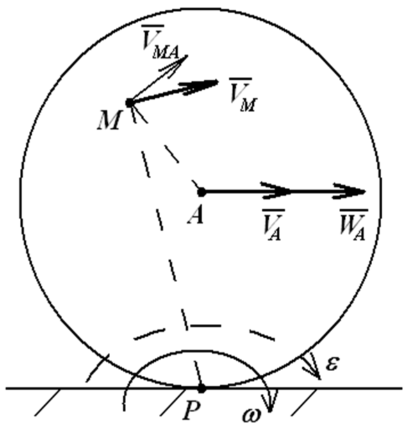

Рисунок 1.4 – Випадок знаходження МЦШ

Тут, наприклад, для швидкості довільної точки M можна записати дві формули. По-перше, виходячи з формули (1) будемо мати:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}, v_{MA} = AM \cdot \omega_A,$$

де і $\bar{v}_{MA} \perp AM$.

З іншого боку за допомогою МЦШ (точки P) за формулою кінематики обертального руху маємо таке:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{MP} \perp MP, \bar{v}_M = MP \cdot \omega_p.$$

Аналогічно для прискорення цієї ж точки із (2) можемо записати:

$$\bar{W}_M = \bar{W}_A + \bar{W}_{MA}^{\text{об}} + \bar{W}_{MA}^{\text{віс}},$$

а з використанням точки P будемо мати:

$$\bar{W}_M = \bar{W}_{MP}^{\text{об}} + \bar{W}_{MP,}^{\text{віс}}$$

де $\bar{W}_{MA}^{\text{об}} \perp MA,\ \bar{W}_{MA}^{\text{об}} = AM \cdot \varepsilon_A, \bar{W}_{MA}^{\text{віс}}$ по МА від М до А,

$W_{MA}^{\text{віс}} = \text{АМ} \cdot \omega_{\text{А}}^2, \bar{W}_{MP}^{\text{віс}}$ по MP від M до P, $W_{MP,}^{\text{віс}} = \text{МР} \cdot \omega_P^2$.

Увага! Важливо пам'ятати і увесь час використовувати той факт, що при плоско паралельному русі кінематичні характеристики обертальної частини руху, тобто кутова швидкість ω і кутове прискорення ε ні за величиною, ні за напрямком не залежать від вибору полюса, тобто в наших формулах $\omega_A = \omega_P$ і $\varepsilon_A = \varepsilon_P$. Тому на практиці ω, як правило, будемо в задачах знаходити за допомогою МЦШ, а що стосується миттєвого кутового прискорення ε, то три способи його визначення ми поговоримо окремо.

Увага! Широке використання в задачах МЦШ пов'язане з двома основними властивостями точки P:

1) швидкість довільної точки перетину перпендикулярна до відрізку, який з'єднує цю точку з точкою P і направлена у той самий бік по відношенню до МЦШ, який вказують використані для знаходження точки P напрямки руху двох відомих точок;

2) за модулем швидкості точок тіла прямо пропорційні відстаням від цих точок до МЦШ:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \cdots = \frac{v_M}{MP} = \omega. \tag{3}$$

При цьому, можна або складати аналогічні пропорції, щоб визначати невідомі швидкості через відомі, або знаючи швидкість однієї точки і її відстань від МЦШ знайти миттєву кутову швидкість ω, через яку потім знаходити швидкості за формулою (3) інших точок даної ланки механізму.

Увага! Акцентуємо увагу на тому, що МЦШ – **точка геометрична**, тобто це точка площини, в якій рухається переріз тіла або плоский механізм і яка може не співпадати з жодною точкою тіла, або ланки механізму, для якої вона є МЦШ. Більше того, в деяких задачах, наприклад, в показаній на рис. 1.5 ситуації, точка P для шатуна AB знаходиться не на кривошипі OA, а на площині під кривошипом, оскільки, якщо припустити, що P одна з точок OA, тоді кривошип не міг би рухатися, оскільки мав би дві нерухомі точки O і P.

Увага! Дуже корисно, особливо при знаходженні прискорень довільних точок і миттєвого кутового прискорення ε за другим і третім з нижче викладених способів, попередньо проводити у формулах виду (2) структурний аналіз, використовуючи наступну методику, яку ми умовно назвали «**правилом підкреслювання**». Суть цього правила в наступному: якщо вектор точно відомий за напрямком, підкреслимо його знизу однією рискою, якщо ж вектор відомий і за величиною, підкреслимо його і другою рискою, а коли вектор відомий лише за напрямком та і то з точністю до знаку, то він буде відзначений знизу хвилястою лінією («хвилькою»). Як буде показано далі на конкретних прикладах, такий структурний аналіз є дуже корисним і прозорим при аналізі векторних рівнянь з двома невідомими.

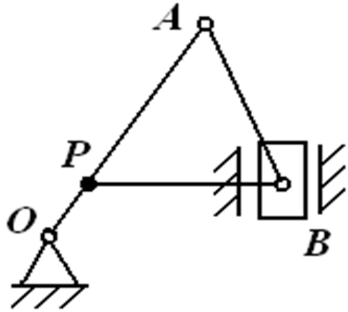

Рисунок 1.5 – Випадок знаходження МЦШ

2. ТРИ СПОСОБИ ВИЗНАЧЕННЯ МИТТЄВОГО КУТОВОГО ПРИСКОРЕННЯ ε

Зазначимо, що при використанні формули (2) в правій частині у нас стоїть вектор $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}}$, який на відміну від двох інших складових $\bar{W}_A$ і $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{віс}}$, які на момент запису в конкретній задачі формули виду (2) є повністю відомими і за величиною, і за напрямком, за модулем завжди невідомий, оскільки знаходиться за формулою:

$$\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}} = MA \cdot \varepsilon,$$

а миттєве кутове прискорення ε найчастіше є величиною невідомою. Що стосується напрямку вектора $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}}$ то він завжди направлений перпендикулярно до відрізку *MA*, але невідомо в який саме бік, який визначається знаком або напрямком миттєвого кутового прискорення ε. Оскільки на момент запису формули виду (2) ε є невідомою величиною, доводиться подумки направляти вектор $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}}$ в довільний бік з наступним уточненням дійсного напрямку в ході розв’язання задачі.

Увага! Доцільно дотримуватися такого **правила**: попередньо вважати в кожному випадку, що ε по відношенню до точки *A* направлене проти годинникової стрілки і у відповідності до цього вважати направленим вектор $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}}$ Тоді зрозумілим буде дійсний напрямок ε після розв’язання задачі і знак мінус означатиме, що і ε, і $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}}$ направлені не в той бік, про який думали попередньо. Рекомендується **нічого не змінювати на рисунку**, а в другому рівнянні, в яке входить величина проекції вектора $\bar{W}_{\text{MA}}^{\text{об}}$, підставляти значення з отриманим знаком. Що стосується значення миттєвого кутового прискорення ε, то тут отриманий знак мінус означатиме напрямок за годинниковою стрілкою.

На відміну від способу визначення миттєвої кутової швидкості ω за допомогою МЦШ не існує універсального методу для знаходження миттєвого кутового прискорення ε. В залежності від типу задачі, що розглядається, існують три основні способи знаходження ε.

Перший спосіб. Застосовується в тих задачах, де відстань від точки з відомою швидкістю і тангенціальним прискоренням до МЦШ залишається незмінною під час усього руху тіла (наприклад, кочення циліндра без ковзання по нерухомій циліндричній поверхні (рис. 1.4), зубчасті передачі і таке подібне). Тоді ε можна визначити безпосередньо через ω шляхом диференціювання, тобто за формулою:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Враховуючи, що за допомогою МЦШ ω знаходиться за формулою:

$$\omega = \frac{v_A}{AP},$$

а в задачах такого виду виконується умова $AP = const$, приходимо до такої формули:

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A}{AP}\right) = \frac{1}{AP}\,\frac{dv_A}{dt} = \frac{W_A^\tau}{AP}.$$

При цьому напрямок (знак) ε визначається напрямком відомого вектора $\overline{W}_A^\tau$.

Другий спосіб. В тих задачах, де відома швидкість і прискорення однієї із точок (полюса) і напрямок швидкості і прискорення другої точки (як правило це трапляється, коли розглядається кривошипно-повзунний механізм, або фрагмент багатоланкового механізму який складається із стержня і повзуна), для визначення ε можна скористатися проектуванням формули виду (2) на вісь, яка перпендикулярна до напрямку вектора $\overline{W}_M$ (рис. 2.1). Якщо тут спроектувати формулу (2) на вісь M_x, будемо мати скалярне рівняння з однією невідомою $W_{\text{МА}}^{\text{об}}$:

$$0 = -W_A \cos\alpha + W_{\text{МА}}^{\text{об}} \cos\beta + W_{MA}^{\text{віс}} \sin\beta.$$

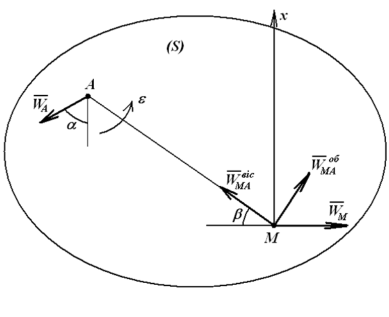

Рисунок 2.1 – Визначення кутового прискорення

Увага! Зазначимо, що на рис. 1.6 ми попередньо показали напрямок ε і відповідно напрямок вектора $\bar{W}_{\mathrm{MA}}^{\text{об}}$ проти годинникової стрілки, як про це вже було сказано вище.

Із отриманого рівняння знаходимо:

$$W_{MA}^{\text{об}} = \frac{W_A \cos\alpha - W_{MA}^{\text{віс}} \sin\beta}{\cos\beta}.$$

Якщо після знаходження $W_{\mathrm{MA}}^{\text{об}}$ виявиться зі знаком плюс це означатиме, що напрямки ε і $\bar{W}_{\mathrm{MA}}^{\text{об}}$ на рис. 2.1 показані вірно, при знаку мінус дійсні напрямки цих величин протилежні показаному на рис. 2.1. Після знаходження $W_{\mathrm{MA}}^{\text{об}}$ миттєве кутове прискорення знаходимо так:

$$\varepsilon = \frac{W_{\mathrm{MA}}^{\text{об}}}{AM},$$

при цьому в чисельник величина $W_{\mathrm{MA}}^{\text{об}}$ підставляється з отриманим вище знаком.

Третій спосіб. Якщо відомі швидкість і прискорення деякої точки A, а також криволінійна траєкторія точки M (рис. 2.2), тобто відомі радіус кривизни траєкторії ρ і напрямки векторів $\bar{v}_M$ і $\bar{W}_M^{\tau}$ (по дотичній до траєкторії), крім того відомий напрямок вектора $\bar{W}_M^{n}$ (по нормалі до траєкторії, то, визначивши за допомогою МЦШ V_M та миттєву кутову швидкість фігури ω, можна спочатку знайти модулі прискорень за формулами:

$$W_M^n = \frac{v_M^2}{\rho}, W_{MA}^{\text{віс}} = AM \cdot \omega^2,$$

а потім записати формулу (2) підставивши в її ліву частину замість вектора $\bar{W}_M$ відоме з кінематики точки розкладання прискорення на тангенціальну і нормальну складові:

$$\bar{W}_M = \bar{W}_M^{\tau} + \bar{W}_M^{n}.$$

Тоді формула (2) приймає такий вигляд:

$$W_M^{\tau} + W_M^{n} = \bar{W}_A + \bar{W}_{\mathrm{MA}}^{\text{об}} + \bar{W}_{MA}^{\text{віс}}. \tag{4}$$

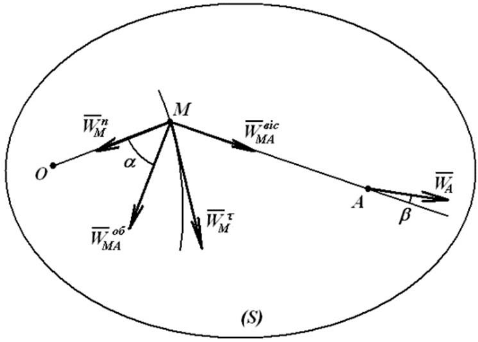

Рисунок 2.2 – Траєкторія точки та відомі вектора

Якщо провести структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання», то ми побачимо, що вектори $\overline{W}_M^\tau$ і $\overline{W}_{\text{МА}}^{\text{об}}$ відомі лише за напрямком з точністю до знаку.

Увага! Як і раніше вважаємо попередньо, що ε для ланки *МА* направлене проти годинникової стрілки і у відповідності до цього припущення у нас побудований попередній напрямок вектора $\overline{W}_{\text{МА}}^{\text{об}}$.

Увага! Векторну формулу (4) спочатку обов'язково треба проектувати на пряму *ОМ*, тобто на нормаль до траєкторії точки, тоді невідомий нам вектор $\overline{W}_M^\tau$ не увійде в отримане рівняння і після проектування будемо мати:

$$-W_A^n = W_A \, cos(90-\alpha-\beta) - W_{MA}^{\text{об}} \, cos\,\alpha + W_{MA}^{\text{віс}} \, sin\,\alpha \,.$$

Звідси знаходимо $W_{MA}^{\text{об}}$, а потім визначаємо миттєве кутове прискорення ланки *АМ*. Якщо потрібно знайти W_A^τ і кутове прискорення ланки, на якій крім ланки *АМ* знаходиться точка *М*, тоді формулу (4) треба спроектувати на пряму, яка перпендикулярна до *ОМ*, тобто на дотичну до траєкторії точки *М*, враховуючи, що вектор $\overline{W}_{\text{МА}}^{\text{об}}$ у формулі (4) ми вже визначили.

Увага! В даних методичних вказівках цей третій спосіб застосовується при аналізі багатоланкового механізму, з числом елементів рівним п'яти, при цьому він є обов'язковим тоді, коли відомі швидкість і прискорення однієї точки, а друга точка відповідної ланки належить кривошипу, що обертається навколо нерухомої осі.

3. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ І ПРИСКОРЕНЬ ТОЧОК ПЛОСКОЇ ФІГУРИ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЛАНУ ШВИДКОСТЕЙ ТА ПЛАНУ ПРИСКОРЕНЬ

Швидкості точок тіла, що рухається плоскопаралельно можна визначати графічно, шляхом побудови **плану швидкостей**, тобто діаграми, на якій з деякого центру відкладені вектори швидкостей точок тіла.

Увага! Оскільки метод є графічним і як ми покажемо нижче тут суттєво використовуються точні напрямки усіх ланок механізму, то, як ми вже підкреслювали раніше, треба обов'язково за допомогою прямокутного трикутника і транспортира в **масштабі довжин** побудувати схему механізму в заданий момент часу.

Теоретичною основою даного графічного методу є формула (1) і той факт, що у цій формулі складова $\bar{v}_{MA}$ **перпендикулярна** до відрізку *AM*, як швидкість у обертанні точки *M* навколо осі, що проходять через точку *A* перпендикулярно до площини.

Нехай для прикладу, нам відомі швидкості точок *A*, *B*, і *C* трикутної пластини *ABC*, яка рухається в площині рисунку (рис. 3.1).

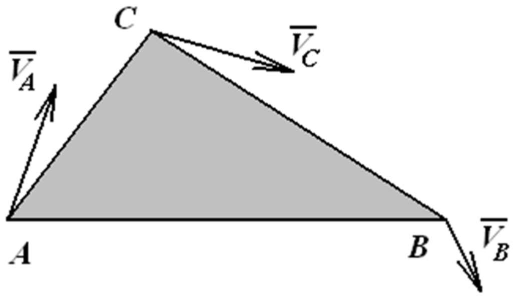

Рисунок 3.1 – Трикутна пластина, що рухається в площині рисунку

Тоді відповідний план швидкостей отримаємо, відклавши від довільного центру O в обраному **масштабі швидкостей** (він відмінний від масштабу довжин, оскільки тут в одному сантиметрі відкладена якась швидкість в м/с) відрізки:

$$\overline{Oa} = \bar{v}_A, \qquad \overline{Ob} = \bar{v}_B, \qquad \overline{Oc} = \bar{v}_c .$$

При цьому відрізки $\overline{Oa}, \overline{Ob}, і\ \overline{Oc}$, (рис. 3.2) називаються **променями,** а точки $a, b,$ і c – **вершинами плану швидкостей**.

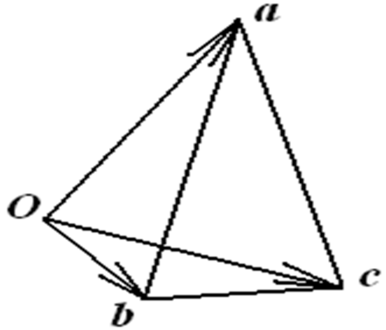

Рисунок 3.2 – План швидкостей

Встановимо властивості і правила побудови плану швидкостей. За відомим з математики **правилом трикутника:**

$$\overline{\mathrm{O}b} = \overline{Oa} + \overline{ab},$$

або

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \overline{ab}.$$

З іншого боку, згідно з формулою (1):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA.}$$

Якщо порівняти ці дві формули, то прийдемо до висновку, що $\overline{ab} = \bar{v}_{BA}$. Аналогічно можемо записати, що $\overline{ac} = \bar{v}_{CA}$ і таке інше.

Оскільки згідно з (1):

$$\overline{ab} \perp AB, \ \ \overline{ac} \perp AC.$$

Крім того із (1) випливає, що $ab = \omega \cdot AB, ac = \omega \cdot AC$і т.д.

Тому:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \cdots = \omega. \quad (6)$$

Увага! Таким чином, відрізки, які з’єднують кінці векторів швидкостей на плані швидкостей, перпендикулярні до відрізків, які з’єднують відповідні точки тіла, а за модулем пропорційні цим відрізкам.

Увага! Фігури, які позначені на плані швидкостей і в перетині тіла однаковими літерами (відповідно – малими і великими), будуть при цьому подібними і повернутими одна відносно іншої на 90° у бік обертання рухомої плоскої фігури.

Увага! Відзначені тут співвідношення (5) і (6) дозволяють побудувати план швидкостей і визначити швидкість довільної точки тіла, якщо відомі модуль і напрямок швидкості однієї точки і напрямок руху другої точки тіла.

Увага! Кутова швидкість тіла при відомому плані швидкостей знаходиться за формулою (6).

Увага! План швидкостей механізму з кількох ланок будується як сукупність планів швидкостей окремих його ланок (тіл), причому усі вектори швидкостей відкладаються від спільного центру O.

Порядок побудови плану швидкостей для плоского багатоланкового механізму наведемо на наступному прикладі (рис. 10).

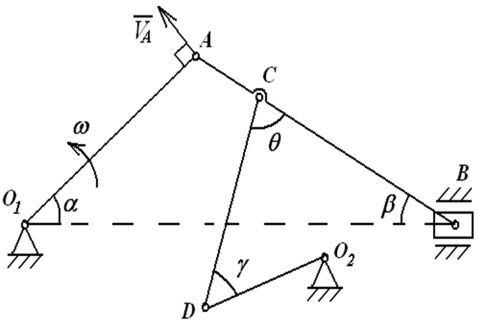

Рисунок 3.3 – План швидкостей для плоского багатоланкового механізму

Увага! Механізм обов’язково треба показувати в масштабі, наприклад взяти такий 1:10 (тобто в 1 см – 0,1 м) і з усіма заданими кутами.

Після цього в задачі подібного виду треба виконати наступні кроки:

1) обираємо масштаб швидкостей, орієнтуючись по заданій швидкості або в даній задачі визначивши v_A за формулою:

$$v_A = O_1A \cdot \omega.$$

2) знаючи $\bar{v}_A$ повністю і напрямок руху повзуна B будуємо **план швидкостей для шатуна AB** (рис. 3.4) відкладаючи $\overline{Oa}$ і через точку a проводячи перпендикуляр до ланки AB, так на перетині горизонтальної прямої і вказаного перпендикуляра знаходимо точку b;

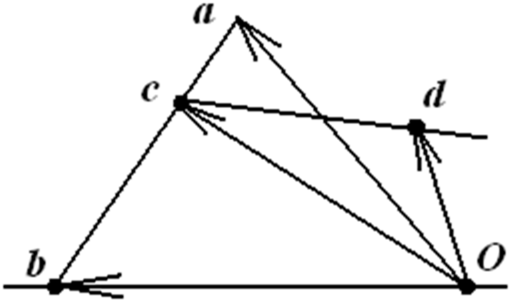

Рисунок 3.4 – План швидкостей для шатуна *AB*

3) щоб знайти точку c ділимо відрізок ab в тому ж відношенні, в якому точка *C* ділить відрізок *AB* і знаходимо $\overline{Oc} = \bar{v}_c$.

4) Щоб побудувати план швидкостей для стержня CD, використовуємо точку c і той факт, що швидкість точки D перпендикулярна до O_2D. Тому проводимо із точки O пряму перпендикулярну до O_2D, а з точки c пряму перпендикулярну до DC і на перетині знаходимо точку d.

Увага! Співвідношення (5) і (6) справедливі лише для **даного твердого тіла**. Тому, наприклад, відрізок *bd* на плані швидкостей не буде перпендикулярним до прямої *BD* на схеми механізму, оскільки точки *B* і *D* належать різним ланкам.

Дамо деякі загальні рекомендації відносно побудови **плану прискорень** в різних ситуаціях в залежності від другого чи третього способу визначення миттєвого кутового прискорення. Попередньо зазначимо, що побудова такого плану завжди розпочинається після побудови (якщо вона відбувається) плану швидкостей і визначення графічним або аналітичним методом миттєвих кутових швидкостей для усіх ланок механізму. Тобто у нас будуть відомими повністю і за напрямком, і за модулем для усіх точок і усіх ланок нормальні або вісеспрямовані прискорення, а невідомими за модулем будуть тангенціальні або обертальні прискорення, про які тільки відомо, що вони перпендикулярні до відповідних нормальних або вісеспрямованих прискорень. До числа повністю невідомих (як правило і за напрямком, і завжди за величиною) будуть повні прискорення заданих точок механізму.

Розглянемо можливі ситуації, які найчастіше зустрічаються при розв'язанні задач і зосередимося на аналізі побудови плану прискорень для однієї ланки механізму, нагадавши, що, як і у випадку побудови плану швидкостей, план прискорень для багатоланкового механізму отримується як сукупність пов'язаних між собою планів прискорень окремих його ланок.

Ситуація 1. Для показаного на рис. 3.5 положення кривошипно-повзунного механізму побудувати план прискорень кривошипу AB, якщо задані $\omega_1, \varepsilon_1, \alpha, \beta, \ell_1, \ell_2$.

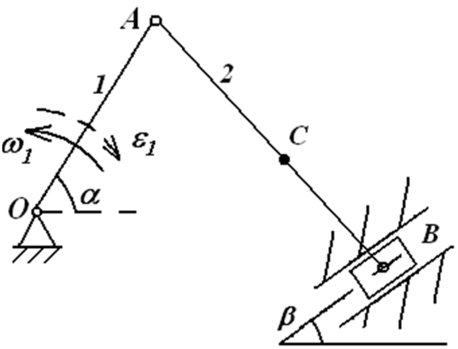

Рисунок 3.5 – Схема кривошипно-повзунного механізму

Побудову треба виконувати в наступному порядку:

1. Обов'язково в масштабі довжин побудувати положення механізму. Це буде в наступному необхідним для проведення напрямків необхідних прискорень і побудови перпендикулярів до заданих прямих.

2. За допомогою МЦШ аналітично або за допомогою плану швидкостей графічно визначити миттєву кутову швидкість стержня $AB \cdot \omega_{AB}$.

3. Обчислити через ω_1 і ω_{AB} нормальне прискорення точки A за формулою:

$$W_A^n = \ell_1 \cdot \omega_1^2,$$

і вісеспрямоване прискорення точки B за формулою:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = \ell_2 \cdot \omega_{AB}^2.$$

4. Якщо ε_1 задане, тоді знайти тангенціальне прискорення точки A за формулою:

$$W_A^\tau = \ell_1 \cdot \varepsilon_1.$$

5. Обираємо масштаб прискорень і від обраної точки O_1 площини в масштабі під кутом α до горизонту і в напрямку від A до O на схемі механізму відкладаємо вектор $\overline{W}_A^n$ (відрізок O_1k на рис. 3.6).

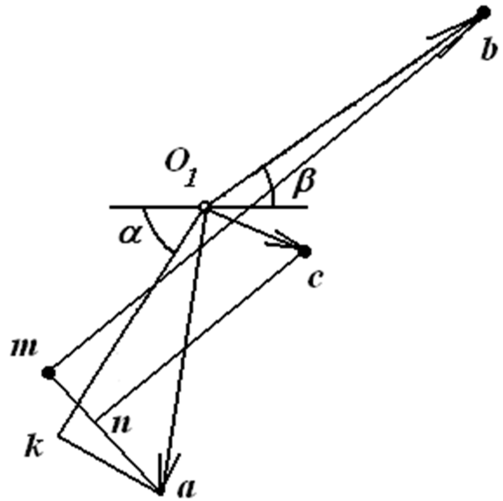

Рисунок 3.6 – План прискорень

6. Із точки k перпендикулярно до O_1k і у напрямку, який визначається знаком або напрямком ε_1 відкладаємо відрізок $\overline{ka} = \overline{W}_A^\tau$.

7. З'єднуємо точку O_1 з точкою a, тоді $\overline{O}_1a = \overline{W}_A$.

8. Із точки O_1 під кутом β до горизонту проводимо промінь, на якому повинна знаходиться точка b, оскільки це напрямок руху повзуна.

9. Із кінця відрізку O_1a відкладаємо по прямій, паралельній стержню AB на схемі і у напрямку, який відповідає руху від B до A відрізок $\overline{am} = \overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$.

10. Із отриманої таким шляхом точки m проводимо пряму, перпендикулярну до ланки AB механізму.

11. На перетині останньої прямої і раніше проведеного із точки O_1 променя у напрямку руху повзуна, знаходиться точка b і $\bar{O}_1 b = \overline{W}_B$, а відрізок $\overline{bm} = \overline{W}_{BA}^{\text{об}}$.

12. Щоб знайти прискорення точки C треба врахувати наступне: вектор $\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}$ направлений у той же бік, що і $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$, а $W_{CA}^{\text{віс}}/W_{CA}^{\text{віс}} = AC/AB$; вектор $\overline{W}_{CA}^{\text{об}}$, як і $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$, перпендикулярний до AC, направлений в той же бік, що і $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$, а модулі цих векторів мають те ж відношення, яке вище записане для вісеспрямованих прискорень точок B і C. Тому на відрізку am, треба знайти точку n, таку, щоб $an/am = AC/AB$. Провести із точки m перпендикуляр до am довжина якого відноситься до довжини відрізку ab, як AC/AB і на кінці останнього відрізку знаходиться точка c і $\overline{O_1c} = \overline{W}_c$.

Увага! Крім того, із плану прискорень ми можемо знайти з врахуванням масштабу прискорення точок B і C, миттєве кутове прискорення визначається графічно, якщо зняти з плану прискорень і схеми механізму довжини відрізків і підставити в формулу:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{mb}{AB}.$$

Увага! Як видно з наведених при побудові плану прискорень міркувань, розглянута тут ситуація за своєю суттю відповідає вище викладеному другому способу визначення миттєвого кутового прискорення ε_{AB}. Оскільки в нижче розглянутих прикладах *МК* і *РГЗ* буде зустрічатися застосування і третього способу, то з цього приводу рекомендації до графічного визначення прискорень точок і миттєвого кутового прискорення розглянемо в наступній ситуації.

Ситуація 2. Для показаного на рис. 3.5 положення кривошипно-повзунного механізму побудувати план прискорень кривошипу AB, якщо задані $\ell_1, \ell_2, \alpha, \beta, \bar{v}_B, \overline{W}_B$.

Тут порядок побудови буде таким.

1. Показати механізм в масштабі довжин, як це і було в попередній ситуації, оскільки нам потрібен точний напрямок стержнів *OA* і *AB*, а також напрямок руху повзуна *B*.

2. За допомогою МЦШ знаходимо ω_{AB} і швидкість точки *A*, а потім за формулою:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{O_1 b}.$$

Знаходимо кутову швидкість кривошипа *OA*, яка буде нам також потрібна для побудови плану прискорень.

3. Проведемо із точки O_1 промінь під кутом β до горизонту і відкладаємо на ньому в масштабі прискорень відрізок $\overline{O_1 b} = \overline{W}_B$ (рис. 3.7).

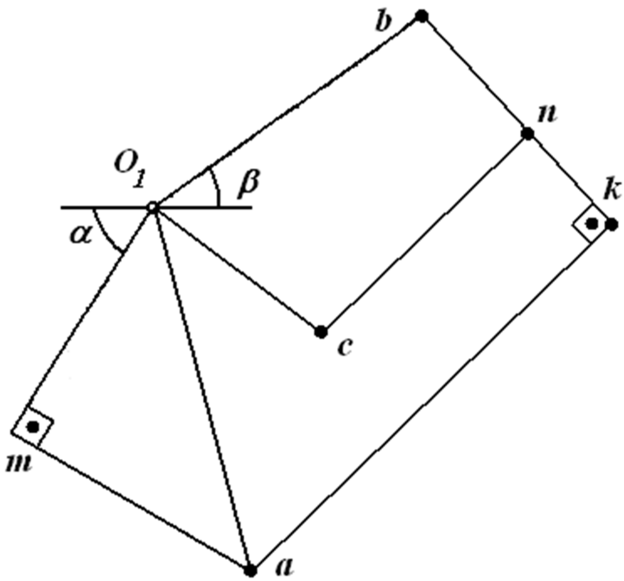

Рисунок 3.7 – План прискорень

4. Проведемо із точки b в напрямку стержня *AB* промінь, на якому відкладемо відрізок *bk*, що зображує $\overline{W}_{AB}^{\text{віс}}$, модуль якого знаходимо за формулою:

$$W_{AB}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2.$$

5. Через точку k проводимо пряму, перпендикулярну до відрізку bk (тобто перпендикулярну до стержня AB) – це напрямок поки що невідомого за модулем прискорення $\overline{W}_{AB}^{\text{об}}$.

6. Із точки O_1 під кутом α до горизонту відкладаємо відрізок O_1m, який на плані прискорень відповідає вектору $\overline{W}_A^n$, при цьому попередньо треба знайти його модуль за формулою:

$$W_A^n = \ell_1 \cdot \omega_1^2.$$

7. В точці m ставимо перпендикуляр до відрізку O_1m - це напрямок поки що невідомого прискорення $\overline{W}_A^\tau$.

8. На перетині двох перпендикулярів, що проходять через точки k і m знаходиться точка a і $\overline{O_1a} = \overline{W}_A$.

9. На відрізку bk знаходимо точку n, таку що виконується умова:

$$\frac{bn}{bk} = \frac{AC}{AB}.$$

Тоді:

$$\overline{bn} = \overline{W}_{CB}^{\text{віс}}, \overline{bk} = \overline{W}_{AB}^{\text{віс}} .$$

10. Із точки n паралельно відрізку ka відкладаємо відрізок nc, такий що:

$$\frac{nc}{ka} = \frac{AC}{AB}.$$

Тоді:

$$\overline{nc} = \overline{W}_{CB}^{\text{об}}, \qquad \overline{ka} = \overline{W}_{AB}^{\text{об}}, \ \ \varepsilon_{AB} = \frac{ka}{\ell_2}.$$

11. З’єднуючи точки O_1 і c, будемо мати $\overline{O_1c} = \overline{W}_c$.

4. ПОРЯДОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА АБО БАГАТОЛАНКОВОГО МЕХАНІЗМУ

Увага! Аналіз задач даного класу доцільно розпочати з того, що за допомогою прямокутного трикутника і транспортира в масштабі намалювати дійсне (для заданих розмірів ланок і кутів) положення механізму. Це дозволяє більш чітко уявити характер руху усіх ланок механізму і знайти положення МЦШ за правилом двох перпендикулярів.

1. Обрати в якості полюса таку точку механізму, швидкість і прискорення якої задані або можуть бути легко визначеними за умовами задачі.

Увага! В різних задачах можливі такі варіанти для початку її розв'язання:

а) задана кутова швидкість обертання, наприклад, стержня OA навколо нерухомого центру O у вигляді $\omega_1 = A$, де A число зі знаком плюс або мінус, а про ε_1 нічого не сказано. Це означає, що в даному випадку слід вважати, що $\varepsilon_1 = 0$. Тоді швидкість і прискорення обраного полюса A знаходимо так:

$$v_A = OA \cdot |\omega_1|, \qquad W_A^\tau = OA \cdot \varepsilon_1 = 0, \quad W_A^n = OA \cdot \omega_1^2.$$

При цьому напрямок $\bar{v}_A$ перпендикулярний до OA, а в який саме бік – визначається знаком ω_1, вектор $\overline{W}_A^n$ завжди направлений від точки A до точки O.

б) якщо задані $\omega_1 = A \; і \; \varepsilon_1 = B$, то все залишиться як у попередньому пункті, але у полюса з'являється ще тангенціальне прискорення, модуль якого знаходиться за формулою:

$$W_A^\tau = OA \cdot |\varepsilon_1|,$$

при цьому вектор $\overline{W}_A^\tau$, як і вектор $\bar{v}_A$, перпендикулярний до OA, а в який саме бік – визначається знаком ε_1.

в) в деяких задачах відомий закон $\varphi = \varphi(t)$ і задається конкретний момент часу t_1, для якого треба провести дослідження. Тоді спочатку шляхом диференціювання треба знайти $\omega_1 \; і \; \varepsilon_1$ за формулами:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}/t = t_1 \ \ \varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi}{dt^2}/t = t_1,$$

а потім виконувати подальші дії згідно з пунктом б).

г) Якщо задані швидкість і прискорення повзуна B у вигляді $v_B = A, W_B = B,$ або закон руху повзуна у вигляді $S = S(t)$, для $t = t_1$ треба спочатку шляхом диференціювання знайти $v_B\ i\ W_B,$ і розпочинати у всіх випадках аналіз, прийнявши в якості полюса точку B.

2. В механізмі, який складається із кількох тіл (ланок), визначити для кожного елементу положення миттєвого центру швидкостей (МЦШ) .

Увага! В даних методичних вказівках ми розглядаємо багатоланкові плоскі механізми або з трьох тіл (для міні контрольної К-4), або із п'яти тіл (для розрахунково-графічної роботи К-4) і у першому випадку (МК К-4) треба за правилом двох перпендикулярів знайти МЦШ для шатуна *AB* (два інших елементи – кривошип *OA* і повзун *B* мають відомі МЦШ), а в РГЗ К-4 правило двох перпендикулярів треба буде застосовувати двічі, для двох стержнів.

3. За допомогою МЦШ знайти швидкості усіх необхідних за умовою задачі точок і миттєві кутові швидкості ланок механізму.

4. Побудувати план швидкостей для заданого положення механізму і за його допомогою перевірити правильність визначення усіх знайдених вище лінійних і кутових швидкостей.

5. В залежності від типу задачі застосувати один із трьох описаних вище способів і визначити миттєве кутове прискорення для кожної ланки.

Увага! В тих задачах і завданнях, які розглядаються в даних вказівках не застосовується перший спосіб, а використовуються лише другий і третій, про що детально буде сказано у розглянутих нижче прикладах.

6. Для кожної із заданих в умові задачі точок визначити $\overline{W}_{MA}^{\text{об}}\ i\ \overline{W}_{MA}^{\text{віс}}$. При цьому, якщо розглядається багатоланковий механізм, то для кожної ланки обирається свій полюс (точка A не може бути полюсом для усіх ланок).

7. Для кожної шуканої точки записати формулу виду (2) і показати на рисунку напрямки векторів $\overline{W}_{MA}^{\text{об}}\ i\ \overline{W}_{MA}^{\text{віс}}$, при цьому після виконання пунктів 5 і 6 напрямок вектора $\overline{W}_{MA}^{\text{об}}$ вже відомий точно.

8. Застосовуючи метод проекцій, обрати осі координат (можливо свої для кожної ланки), спроектувати формулу виду (2) на ці осі, визначити для заданих в умові точок W_{Mx} i W_{My}, а потім знайти модуль і напрямок вектора $\overline{W}_M$ за відомими формулами аналітичної геометрії.

9. Побудувати план прискорень механізму, як сукупність планів для кожної ланки і провести порівняння аналітичних і графічних результатів.

5. ДОДАТКОВА ІНФОРМАЦІЯ ПРО КУТИ І ТРИКУТНИКИ, ЯКА ПОТРІБНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ

5.1 Основні властивості кутів

Визначення 1. Два кути, які мають спільну сторону MN, а інші їх сторони є продовженням одна одної (рис. 5.1) називаються **суміжними.**

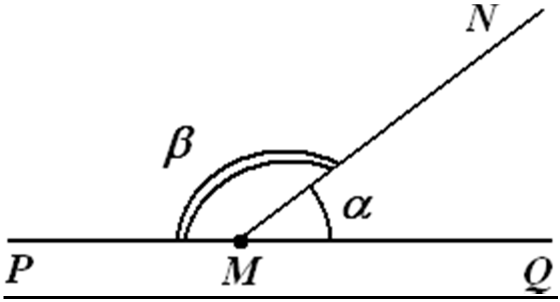

Рисунок 5.1 – Суміжні кути

Увага! При практичному використанні для розв'язання задач треба пам'ятати, що для суміжних кутів справедлива тотожність:

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Визначення 2. Кути, сторони яких продовжують одна одну, називаються **вертикальними** (рис. 5.2).

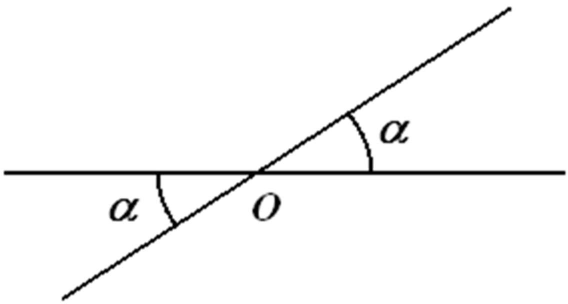

Рисунок 5.2 – Вертикальні кути

Основна властивість вертикальних кутів полягає в тому, що вони **попарно рівні**.

Визначення 3. Кути, які утворені двома прямими і прямою, яка їх перетинає (рис. 5.3) називаються **відповідними**.

Із рис. 5.3 видно, які відповідні кути рівні між собою.

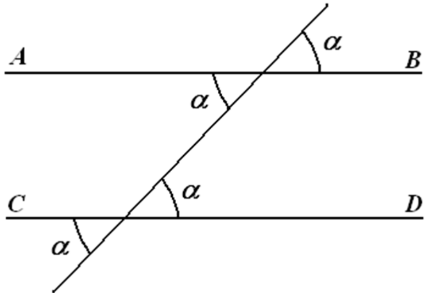

Рисунок 5.3 – Відповідні кути

Увага! Кути із взаємно перпендикулярними сторонами рівні (рис. 5.4).

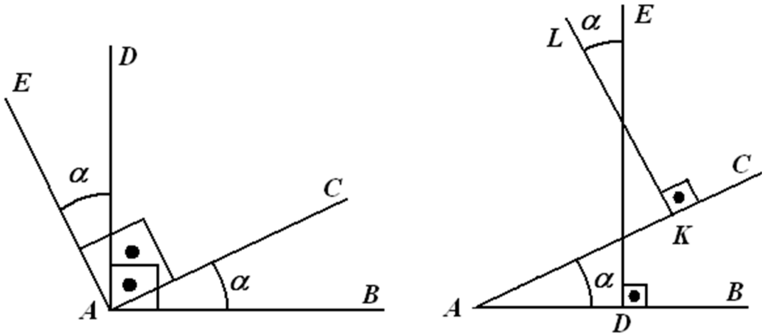

Рисунок 5.4 – Кути із взаємно перпендикулярними сторонами

5.2 Теорема синусів і косинусів для довільного трикутника і їх вид для прямокутного трикутника

Для трикутника довільного виду (рис. 5.5) теорема синусів записується так:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin y}{c}.$$

Зазначимо, що цю теорему можна використовувати, коли в трикутнику відома одна сторона і усі кути.

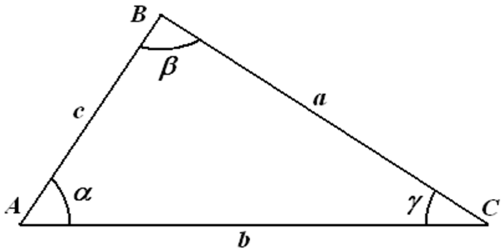

Рисунок 5.5 – Трикутник довільного виду

Теорема косинусів записується так:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,y}.$$

Цю теорему можна використовувати, коли відомі дві сторони і кут між ними.

У випадку прямокутного трикутника (рис. 5.6) теорема косинусів переходить в теорему Піфагора:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2,}$$

а теорема синусів записується в такому вигляді (оскільки $sin\,y = 1$):

$$a = c\,sin\,\alpha \quad b = c\,sin\,\beta.$$

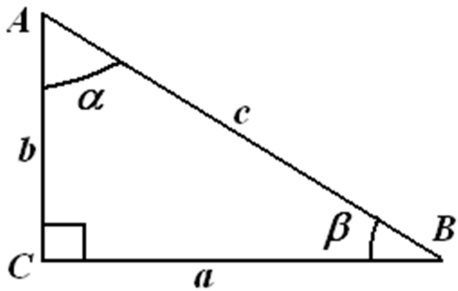

Рисунок 5.6 – Прямокутний трикутник

6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ МІНІКОНТРОЛЬНОЇ К-4 «КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКОГО ТРЬОХЛАНКОВОГО МЕХАНІЗМУ»

Розглянемо спочатку більш прості задачі, коли МЦШ для шатуна AB знаходиться на нескінченності, тобто шатун виконує миттєво-поступальних рух. Тут можливі такі варіанти: 1) для кривошипа OA задана лише кутова швидкість ω; 2) задані і ω, і ε; 3) заданий закон обертання у вигляді $\varphi = \varphi(t)$ і час t_1, для якого треба визначити необхідні параметри; 4) задані швидкість $\bar{v}_B$ і прискорення $\overline{W}_B$ повзуна; 5) задано закон руху повзуна у вигляді $S = S(t)$ і момент часу t_1.

Приклад 1. Для показаного на рис. 6.1 положення кривошипно-повзунного механізму знайти швидкість і прискорення точок B і C, а також миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення шатуна AB, якщо $\omega_1 = 2\text{с}^{-1}, OA = 0{,}5$ м; $AB = 0{,}8$ м; $AC = 0{,}3$ м; $OO_1 = 0{,}1$ м.

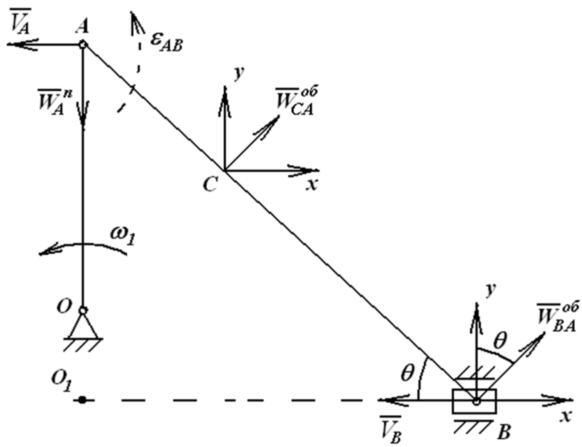

Рисунок 6.1 – Кривошипно-шатунний механізм

Розв'язання.

Увага! В умові задачі могла бути зовсім не така картина, де кривошип OA утворював би кут α з горизонтом, а направляючі повзуна утворювали б кут β з горизонтом.

Але, якщо в числових даних задачі виявилось, що $\alpha = 90°$, а

$\beta = 0,$ то побудувавши механізм для цих значень, ми прийдемо до ситуації, наведеної на рис. 6.1.

Увага! В такій порівняно простій задачі можна не показувати механізм в масштабі, хоча навіть тут не буде зайвим обрати масштаб довжин (лінійних величин), наприклад, взявши масштаб 1:10 ми повинні відкласти відрізок *OA=5* см, відрізок *AB=8* см, відстань $OO_1 = 2$ см.

У відповідності до наведеного вище порядку розв'язання задач необхідно виконати наступні кроки.

1. Основним об'єктом дослідження, до якого відносяться усі задані в умові задачі запитання, у нас є шатун *AB*, про який відомо, що він виконує плоскопаралельний рух і про дві характерні точки якого, а саме про *A* і *B*, відоме наступне: швидкість точки *A*, яка одночасно належить і кривошипу *OA*, направлена перпендикулярно до *OA* у бік, який задається напрямком ω_1 (у нашому випадку вліво), а модуль цієї швидкості, як точки тіла, що обертається, знаходиться за формулою:

$$v_A = OA \cdot \omega_1 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ м/с}.$$

Точка *A* рухається колом проти годинникової стрілки і, як завжди у випадку криволінійного руху, у неї могли виникнути два прискорення: тангенціальне $\overline{W}_A^{\tau},$ яке направлене перпендикулярно до *OA* у бік, визначений напрямком $\varepsilon_{1,}$ а за модулем це прискорення знаходиться так:

$$W_A^{\tau} = OA \cdot \varepsilon_1.$$

Оскільки в умові задачі нічого не сказано про ε_1, то це означає, що в даному випадку кривошип обертається рівномірно зі сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = 2\ c^{-1}$ і треба вважати, що $\varepsilon_1 = 0$. Тому в даній задачі $\overline{W}_A^{\tau}$ не виникає і не показується на рис. 6.1.

Але навіть у випадку рівномірного обертання швидкість точки *A* змінюється за напрямком, а саме за цю зміну швидкості відповідає нормальне прискорення $\overline{W}_A^{n}$, яке завжди направлене до центру кривизни траєкторії, тобто в нашому випадку від точки *A* до точки *O* (див. рис. 6.1), а за величиною воно знаходиться так:

$$W_A^{n} = OA \cdot \omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2 \text{м/с}^2.$$

Що стосується точки B шатуна AB, то вона одночасно належить і повзуну, разом з яким вона виконує зворотно-поступальний рух в направляючих, тобто в даній задачі, згідно з заданим напрямком цих направляючих, і вектор $\bar{v}_B$, і вектор $\overline{W}_B$ направлені горизонтально, але поки що невідомо в який бік.

З проведеного аналізу випливає, що в якості полюса для шатуна AB треба обирати точку A і ми знаходимося в описаній вище в теорії ситуації, коли для тіла, що рухається плоско-паралельно повністю відомі (і за модулем і за напрямком) швидкість і прискорення однієї точки, а для другої точки відомі з точністю до знаку напрямки швидкості і прискорення.

2. Якщо застосовувати тут до шатуна AB правило двох перпендикулярів, то побачимо, що МЦШ цієї ланки механізму знаходиться в нескінченності, а такий випадок в теорії називається «миттєво-поступальним рухом». На практиці це означає, що в даний момент часу у всіх точок стержня AB однакові за величиною і напрямком швидкості (див. рис. 6.1), миттєва кутова швидкість шатуна AB дорівнює нулю, тобто будемо мати:

$$v_B = v_c = v_A = 1 \text{ м/с},$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Увага! Звернемо увагу на те, що тут мова йде саме про миттєво – поступальний рух кривошипа AB, який принципово відрізняється від просто поступального руху, наприклад, повзуна B. Справа в тому, що згідно з відповідною теоремою при **поступальному русі у всі моменти часу** у всіх точок тіла однакові за величиною і напрямком не лише швидкості, а і прискорення і увесь час руху не виникають у тіла ні кутова швидкість, ні кутове прискорення.

У нас же при миттєво-поступальному русі, як це ми покажемо нижче, різні точки шатуна AB, зокрема A, B, і C, мають різні прискорення (це вже видно із рис. 6.1 для точок A і B прискорення різні за напрямком, у A – вертикальне, у B – горизонтальне), а також буде показаний той факт, що хоча $\omega_{AB} = 0$, ε_{AB} буде відмінним від нуля.

У зв’язку з цим треба попереджати студентів про цей важливий момент, тому що нерідко, побачивши, що для якоїсь ланки механізму в **даний момент часу** МЦШ знаходиться в нескінченності і, що $\omega_{AB} = 0$, вони роблять помилковий висновок про те, що у всіх точок цієї ланки одинакові прискорення, а миттєве кутове прискорення рівне нулю.

5. Пункт 3 ми виконали, в пункті 2, аналізуючи ситуацію з миттєво-поступальним рухом, у зв'язку з яким також відпадає необхідність у побудові плану швидкостей для перевірки результатів. Як видно із проведеного вище детального механічного аналізу даного положення механізму і відомостей про прискорення точок A і B , тут для визначення ε_{AB} треба застосовувати другий спосіб. Приймаючи в якості полюса точку A згідно з формулою (2) для точки B будемо мати:

$$\utilde{\overline{W}_B} = \underline{\underline{\overline{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\overline{W}_A^{n}}} + \utilde{\overline{W}_{BA}^{\text{об}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}}} \qquad (7)$$

Обов'язково треба провести структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання», який в нашому випадку дає такі результати: вектор $\utilde{\overline{W}_B}$ направлений горизонтально але невідомо поки що вліво чи вправо (підкреслити «хвилькою»); вектор $\underline{\underline{\overline{W}_A^{\tau}}}$ в таких задачах, де в якості заданих виступають кінематичні характеристики OA завжди буде відомим і за модулем, і за напрямком (підкреслено знизу двома рисками), у нас за умовою $\varepsilon_1 = 0$ і цей вектор відсутній, вектор $\underline{\underline{\overline{W}_A^{n}}}$, коли вихідні дані наведені для кривошипа також повністю відомий (дві риски внизу), вище ми знайшли його значення і показали на рис. 6.1; вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ завжди направлений перпендикулярно до відрізку AB, але наперед невідомо в який саме бік, згідно з записаними вище рекомендаціями попередньо вважаємо, що миттєве кутове прискорення ε_{AB} направлене проти годинникової стрілки (див. рис. 6.1) і у відповідності до цього пунктиром (тобто попередньо) показуємо вектор $\utilde{\overline{W}_{BA}^{\text{об}}}$ (див. рис. 6.1) (такий вектор заслуговує «хвильки» внизу у формулі (7); вектор $\underline{\underline{\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}}}$ завжди в таких задачах відомий за напрямком (від точки B до точки A) і якщо за допомогою МЦШ знайдена миттєва кутова швидкість ω_{AB}, то він відомий і за величиною (два підкреслювання знизу).

Оскільки у нас $\omega_{AB} = 0,$ то:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0.$$

Згідно з другим способом для визначення ε_{AB} спроектуємо спочатку векторне рівняння (7) на вісь, яка перпендикулярна до напрямку вектора $\overline{W}_B$, тобто в даному випадку на вісь By (див. рис. 6.1), попередньо ввівши у розгляд допоміжний кут θ між шатуном і горизонтом.

Тоді будемо мати таке скалярне рівняння з однією невідомою:

$$0 = -W_A^n + W_{BA}^{\text{об}} \cos\theta.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = \frac{W_A^n}{\cos\theta}.$$

Із прямокутного трикутника AO_1B знаходимо:

$$\sin\theta = \frac{O_1A}{AB} = \frac{O_1O + OA}{AB} = \frac{0{,}1 + 0{,}5}{0{,}8} = \frac{3}{4};$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66.$$

Тоді

$$W_{BA}^{\text{об}} = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7} = \frac{8 \cdot 2{,}66}{7} = 3{,}04 \text{ м/с}.$$

Знак плюс тут означає, що попередньо показаний на рис. 6.1 напрямок вектора $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ є дійсним, також правильно показано напрямок миттєвого кутового прискорення ε_{AB}, яке тепер знаходиться за формулою:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{AB} = \frac{3{,}04}{0{,}8} = 3{,}7\ c^{-2}.$$

Для знаходження прискорення точки *B* спроектуємо формулу (7) на вісь *Bx* і, оскільки ми не знаємо точного напрямку вектора $\overline{W}_B$, то в лівій частині такого проектування буде стояти не модуль цього вектора з якимось знаком, а просто проекція $\overline{W}_B$, знак якої визначиться після проведення обчислень, оскільки після знаходження

$W_{BA}^{\text{об}}$ в правій частині формули (7) уже усі доданки мають дві риски внизу.

Будемо мати:

$$W_{Bx} = W_{BA}^{об} \cdot \sin\theta = 3{,}04 \cdot 0{,}75 = 2{,}3 \ \text{м/с}^2.$$

Для знаходження прискорення точки *C* запишемо формулу (2) таким чином

$$\overline{W}_C = W_A^{\tau} + \overline{W}_A^{n} + \overline{W}_{CA}^{\text{об}} + \overline{W}_{CA}^{\text{віс}}. \tag{8}$$

Тут у правій частині на даний момент усі вектори відомі повністю, оскільки після знаходження $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ ми знаємо напрямок вектора $\overline{W}_{CA}^{\text{об}}$ (перпендикулярно до *AB* вгору), а модуль цього прискорення знаходимо так:

$$W_{CA}^{\text{об}} = AC \cdot \varepsilon_{AB} = 0{,}3 \cdot 3{,}04 = 0{,}91 \ \text{м/с}^2.$$

Оскільки вектор $\overline{W}_C$ невідомий за напрямком, то спроектуємо формулу (8) послідовно на осі *Cx* і *Cy*, будемо мати:

$$W_{Cx} = W_{CA}^{\text{об}} \cdot \sin\theta = 0{,}91 \cdot 0{,}75 = 0{,}68 \ \text{м/с}^2,$$

$$W_{Cy} = -W_A^{n} + W_{CA}^{\text{об}} \cdot \cos\theta = -2 + 0{,}91 \cdot 0{,}66 = -1{,}4 \ \text{м/с}^2,$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \sqrt{0{,}48 + 1{,}96} = 1{,}6 \ \text{м/с}^2.$$

Для порівняння з аналітичними результатами побудуємо план прискорень для ланки *AB*. Для цього обираємо масштаб прискорень 1:40 (тобто в 1 см даного плану знаходиться 0,4 м/с^2) і відкладаємо від довільного центру O_1 на площині вертикально вниз відрізок O_1a довжиною 5 см, який відповідає прискоренню точки *A* (рис. 6.2), оскільки $\overline{W}_A = \overline{W}_A^{n}$ і $W_A^{n} = \frac{2\text{м}}{\text{с}^2}$. Потім із точки O_1 проводимо горизонтальний промінь, на якому повинна знаходиться точка *b*, оскільки повзун *B* рухається горизонтально. Із точки a проводимо пряму, яка перпендикулярна до ланки AB механізму, тобто утворює кут θ з вертикальною прямою, і саме на цій прямій знаходиться вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$. Тоді точка *b* знаходиться на перетині даного перпендикуляра до *AB* і раніше проведеного із O_1 горизонтального променю і $\overline{Ob} = \overline{W}_B$, а

$\overline{ab} = \overline{W}_{BA}^{\text{об}}$.

Звернемо увагу на те, що точна графічна побудова відразу вказує дійсні напрямки векторів $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_B$.

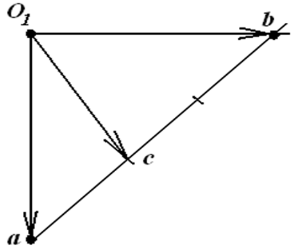

Рисунок 6.2 – План прискорень для ланки *AB*

Щоб побудувати на даній діаграмі точку c і знайти графічно прискорення точки C зазначимо, що оскільки $W_{CA}^{\text{віс}} = 0$, то достатньо додати геометрично до відрізку $\overline{Oa}$ обертальне прискорення, яке направлене прямою $\overline{ab}$ і точка c ділить довжину відрізку ab у тій же пропорції, що точка C ділить відрізок AB. Тоді $O_1c = \overline{W}c$. Як видно графічні і аналітичні значення практично співпадають.

Приклад 2. Нехай при всіх тих же геометричних параметрах, що були в попередній задачі, задана не кутова швидкість кривошипа *OA*, а закон його обертання у вигляді:

$$\varphi = \varphi_1(t) = t^2 - 2t,$$

і необхідно знайти ті ж невідомі для моменту часу $t_1 = 2c$.

Розв'язання.

Відмінність від попередньої задачі полягає в двох моментах. По-перше, кутова швидкість кривошипа не задана, а її треба знайти шляхом диференціювання закону обертального руху з наступним підставлянням замість змінної t її заданого числового значення. Можливі два варіанти остаточної відповіді на ці дії, а саме, ω_1 може бути або додатнім, або від'ємним числом і це буде треба показати відповідно на схемі механізму. У нас будемо мати таке:

$$\omega_1 = \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_1} = 2t - 2|_{t=2} = 2c^{-1}.$$

По-друге, на відміну від попередньої задачі кривошип обертається з кутовим прискоренням, яке також треба спочатку знайти ще раз продиференціювавши φ і тоді знаходимо:

$$\varepsilon_1 = \left.\frac{d\omega_1}{dt}\right|_{t=t_1} = 2\ c^{-2}.$$

Знаки плюс і у ω_1 і у ε_1, означають, що обидві характеристики обертального руху направлені проти годинникової стрілки (рис. 6.3).

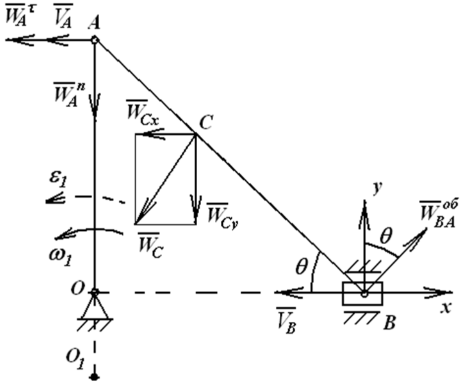

Рисунок 6.3 – Визначення напряму характеристик обертального руху

Зазначимо, що наявність ε_1 ніяк не впливає на міркування відносно швидкостей і ця частина задачі повністю повторює результати попереднього прикладу. Відмінність полягає у тому, що тепер у точки *A* з'являється тангенціальне прискорення, напрямок якого показаний на рис. 6.3, а модуль знаходиться так:

$$W_A^\tau = OA \cdot \varepsilon_1 = 0{,}5 \cdot 2 = 1\ \text{м/с}^2.$$

Тепер в рівнянні (7) $\overline{W}_A^\tau$ відомий ненульовий вектор, який треба враховувати при проектуванні цього векторного рівняння на осі координат. Але оскільки $\overline{W}_A^\tau$ перпендикулярний до осі *By*, то в рівняння, з якого ми визначили вище $W_{BA}^{об}$, а потім і ε_{AB} , він не входить, а значить не впливає в даній задачі на миттєве кутове прискорення ε_{AB}, яке залежить лише від W_A^n, тобто від ω_1.

Але наявність ε_1 суттєво впливає на значення $\overline{W}_B$ і $\overline{W}_c$. Дійсно, проектуючи (7) на вісь *Bx*, будемо мати:

$$W_{Bx} = -W_A^{\tau} + W_{BA}^{\text{об}} \, sin\,\theta = -1 + 3{,}04 \cdot 0{,}75 = 1{,}28 \text{ м/с}^2,$$

тобто для таких значень параметрів у повзуна B в даний момент часу прискорення знову направлене вправо, але зменшилось на величину модуля $\overline{W}_A^{\tau}$.

В рівнянні (8) тепер також перший доданок в правій частині відмінний від нуля і тоді змінюються проекції на осі *Cx* і *Cy*:

$$W_{cx} = -W_A^{\tau} + W_{CA}^{\text{об}} \cdot \sin\theta = -1 + 0{,}91 \cdot 0{,}75 = -0{,}32;$$

$$W_{cy} = -W_A^{n} + W_{CA}^{\text{об}} \cdot \cos\theta = -2 + 0{,}91 \cdot 0{,}66 = -1{,}4.$$

Тоді суттєво змінюється напрямок вектора $\overline{W}_c$ (дивись з порівнянням рис. 6.1 і рис. 6.3), а модуль цього прискорення приймає таке значення:

$$W_c = \sqrt{0{,}09 + 1{,}96} = 1{,}43 \text{ м/с}^2.$$

Побудуємо для порівняння з аналітичними результатами план прискорень для шатуна *AB* в даній задачі (рис. 6.4). Для цього із точки O_1 відкладаємо в масштабі прискорень 1:40 (тобто в 1 см діаграми 0,4 м/с^2 прискорення) горизонтально вліво відрізок O_1m, який зображує прискорення $\overline{W}_A^{\tau}$, потім із точки m відкладаємо вертикально вниз (тобто від *A* до *O* на схемі механізму – рис. 6.3) відрізок *ma*, що відповідає вектору $\overline{W}_A^{n}$ і з’єднуючи точку O_1 з точкою a, будемо мати $O_1a = \overline{W}_A$. Із точки O_1 проводимо горизонтальний промінь, на якому повинна знаходитися точка *b*, оскільки повзун *B* рухається горизонтально. Тоді провівши через точку *a* пряму, перпендикулярну до відрізку *AB* на схемі механізму, на перетині цієї прямої і раніше проведеного горизонтального променю знаходимо точку b, так що $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$, а $\overline{ab} = \overline{W}_{BA}^{\text{об}}$.

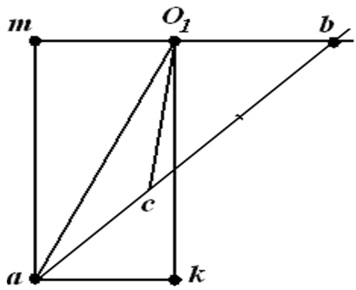

Рисунок 6.4 – План прискорень для шатуна *AB*

Щоб знайти точку *c* треба враховувати, що ця точка ділить відрізок *ab* на плані прискорень у тому ж відношенні, як це робить точка *C* на схемі механізму по відношенню до відрізку *AB* тобто:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB}.$$

З’єднуючи точку O_1 з так побудованого точкою *C* будемо мати:

$$\overline{O_1 c} = \overline{W_C}.$$

Приклад 3. Для механізму, показаного в заданому положенні на рис. 6.1 і рис. 6.3 відомим є закон руху повзуна у вигляді:

$$S = 3t^3 - t^2 + t.$$

Знайти швидкості і прискорення точок *A* і *C*, а також кутову швидкість і кутове прискорення шатуна *AB* і кривошипа *OA* для моменту часу $t_1 = 1\ c$.

Розв’язання.

На відміну від двох попередніх задач тут в якості полюса для шатуна *AB* треба обирати не точку *A*, а точку *B*, оскільки саме для неї шляхом диференціювання можна знайти величини і напрямки швидкості і прискорення.

Будемо мати такі значення:

$$v_B = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_1} = (3t^2 - 2t + 1)|_{t=1} = 2\ \text{м/с},$$

$$W_B = \left.\frac{dv_B}{dt}\right|_{t=t_1} = (6t - 2)|_{t=1} = 4\ \text{м/с}^2.$$

Знаки плюс тут означають, що і вектор $\bar{v}_B$ і вектор $\overline{W}_B$ направлені по горизонталі вправо (рис. 6.5). Оскільки, як і у двох попередніх задачах МЦШ для стержня AB знаходиться в нескінченності, то ми маємо справу з миттєво-поступальним рухом шатуна AB, а значить усі точки мають однакові за величиною і напрямком швидкості $v_A = v_C = v_B = 2$ м/с вправо, а миттєва кутова швидкість ланки *AB* дорівнює нулю.

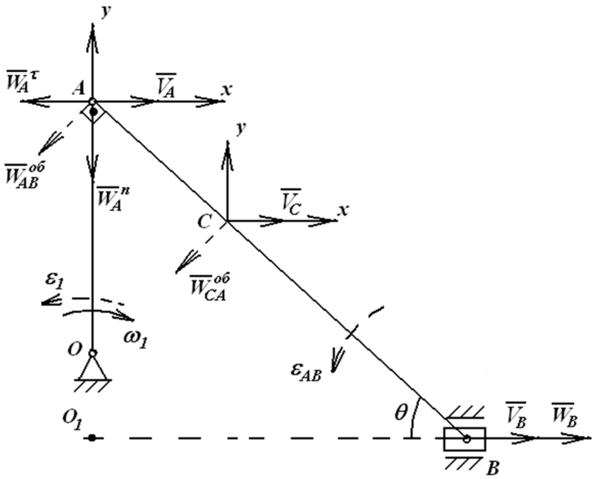

Рисунок 6.5 – Схема векторів швидкостей та прискорень точок механізму

Крім того за відомою швидкістю точки *A* можемо знайти кутову швидкість у даному положенні для кривошипа *OA* за формулою:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{OA} = \frac{2}{0{,}5} = 4\ c^{-1},$$

а також нормальне прискорення цієї точки за формулою:

$$W_A^n = OA \cdot \omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 16 = 8\ \text{м/с}^2.$$

Для знаходження миттєвого кутового прискорення шатуна *AB* в даній задачі треба використовувати раніше описаний **третій спосіб**. Для цього, вважаючи точку *B* полюсом для точки *A* запишемо формулу (2) в такому вигляді:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_B + \overline{W}_{AB}^{\text{об}} + \overline{W}_{AB}^{\text{віс}}.$$

З іншого боку з кінематики точки прискорення $\bar{W}_A$ можна подати таким чином:

$$\underset{\sim}{\bar{W}_A^{\tau}}+\underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}}=\underline{\underline{\bar{W}_B}}+\underset{\sim}{\bar{W}_{AB}^{\text{об}}}+\underline{\underline{\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}}}. \qquad (9).$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання».

Вектор $\bar{W}_A^{\tau}$ направлений по тій же прямій, що і вектор $\bar{v}_A$, але невідомо в який саме бік, за модулем він невідомий, оскільки знаходиться за формулою:

$$W_A^{\tau} = OA \cdot \varepsilon_1,$$

а ε_1 на даний момент часу є невідомою величиною, тому цей вектор в лівій частині формули (9) підкреслюємо «хвилькою»; вектор $\underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}}$ направлений від точки A до точки O (див. рис. 6.5) і його модуль ми знайшли після визначення ω_1, тому цей вектор підкреслюємо двома рисками знизу; вектор $\bar{W}_B$ повністю відомий, тому у нього дві риски внизу, вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ завжди перпендикулярний до відрізку AB, але в який саме бік залежить від напрямку поки що не знайденого миттєвого кутового прискорення ε_{AB} направлено проти годинникової стрілки і відповідно до цього показуємо на рис. 6.5 пунктиром попередній напрямок вектора $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$, модуль цього вектора знаходиться за формулою:

$$\bar{W}_{AB}^{\text{об}} = AB \cdot \varepsilon_{AB},$$

і тому на даний момент часу є величиною невідомою, тому вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ підкреслюємо «хвилькою»; вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}$ завжди направлений від точки A до точки B і його модуль знаходиться за формулою:

$$\bar{W}_{AB}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB},$$

де ω_{AB} на даний момент у всіх задачах буде визначеною величиною, тому $\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}$ у всіх подібних задачах заслуговує двох рисок внизу. В нашому випадку шатун AB виконує миттєво-поступальний рух і оскільки $\omega_{AB} = 0$, то в даній задачі прискорення $\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}$ відсутнє.

У векторній формулі (9) два невідомих вектори, тому згідно з третім способом для знаходження ε_{AB} треба спроектувати цю формулу на напрямок, який перпендикулярний до невідомого вектора $\bar{W}_A^{\tau}$, тобто на вісь *Ay* (див. рис. 6.5). Тоді будемо мати таке скалярне рівняння:

$$-W_A^n = -W_{AB}^{\text{об}} \cos\theta.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{AB}^{\text{об}} = \frac{W_A^n}{\cos\theta} = \frac{8}{0{,}66} = 12{,}1\ \text{м/с}^2,$$

і тоді миттєве кутове прискорення стержня *AB* знаходиться так:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^{\text{об}}}{AB} = \frac{12{,}1}{0{,}8} = 15{,}1\ c^{-2}.$$

Увага! Знаки плюс в обох результатах означають, що попередньо показані на рис. 6.5 напрямки ε_{AB} і $\frac{\bar{W}_{AB}^{\text{об}}}{AB}$ відповідають дійсності.

Знаючи $\frac{\bar{W}_{AB}^{\text{об}}}{AB}$ повністю, можемо для визначення $\bar{W}_A^\tau$ і ε_1 спроектувати формулу (9) на вісь *Ax*, залишаючи для вектора $\bar{W}_A^\tau$ невідому за знаком проекцію, тобто замість нього пишемо просто W_{Ax}^τ:

$$W_{Ax}^\tau = W_B - W_{AB}^{\text{об}} \sin\theta\,;$$

$$W_{Ax}^\tau = 4 - 12{,}1 \cdot 0{,}75 = 4 - 9{,}1 = -5{,}1\ \text{м/с}^2.$$

Знак мінус тут означає, що вектор $\bar{W}_A^\tau$ направлений вліво, тобто протилежно вектору $\bar{v}_A$ (рис. 6.5). Тепер можемо знайти кутове прискорення кривошипу *OA* за формулою:

$$\varepsilon_1 = \frac{W_A^\tau}{OA} = \frac{5{,}1}{0{,}5} = 10{,}2\ c^{-2},$$

причому згідно з отриманим вище напрямком вектора $\bar{W}_A^\tau$ ε_1 направлено проти годинникової стрілки (див. рис. 6.5).

Прискорення будь-якої точки шатуна після знаходження ω_{AB} і ε_{AB} знаходиться наступним чином. Наприклад, для заданої точки *C* формула (2) приймає такий вигляд:

$$\bar{W}_C = \underline{\underline{\bar{W}_B}} + \underline{\underline{\bar{W}_{CB}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{CB}^{\text{віс}}}}\,, \tag{10}$$

причому згідно з «правилом підкреслювання» у правій частині усі вектори повністю відомі, зокрема вектор $\bar{W}_{CB}^{об}$ перпендикулярний до CB, направлений в той бік, що і $\bar{W}_{CB}^{об}$, а за модулем знаходиться так:

$$W_{CB}^{об} = CB \cdot \varepsilon_{AB} = (AB - AC) \cdot \varepsilon_{AB} = 0{,}5 \cdot 15{,}1 = 7{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Проектуючи формулу (10) на осі Cx і Cy, будемо мати:

$$W_{Cx} = W_B - W_{CA}^{об} \cdot \sin\theta = 4 - 7{,}5 \cdot 0{,}75 = -1{,}6 \text{ м/с}^2 ,$$

$$W_{Cy} = -W_{CA}^{об} \cdot \cos\theta = -7{,}5 \cdot 0{,}66 = -4{,}95 \text{ м/с}^2,$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \sqrt{2{,}56 + 24{,}5} = \sqrt{27{,}1} = 5{,}2 \text{ м/с}^2.$$

План прискорень для шатуна AB в даному випадку будуємо в такому порядку. Із точки O_1 в масштабі 1:100 (тобто в 1 см діаграми маємо 1 м/с^2 прискорення) відкладаємо горизонтально вправо відрізок $\overline{O_1 b} = \bar{W}_B$ (рис. 6.6).

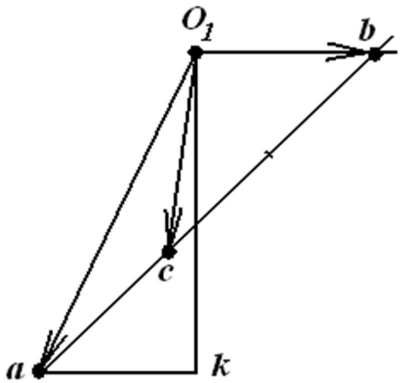

Рисунок 6.6 – План прискорень для шатуна *AB*

Після цього із точки O_1 вертикально вниз, тобто по кривошипу OA від точки A до точки O, відкладаємо відрізок $O_1 k$, так що $\overline{O_1 k} = \bar{W}_A^n$. Із точки k перпендикулярно до $O_1 k$, тобто перпендикулярно до кривошипу OA, проводимо в даному випадку горизонтальну пряму, яка відповідає напрямку вектора $\bar{W}_A^\tau$. Із точки b перпендикулярно до шатуна AB, тобто під кутом 90° до горизонту проводимо промінь, який співпадає з напрямком прискорення $\bar{W}_{AB}^{об}$. На перетині цього променю і проведеної через точку k горизонтальної прямої знаходиться точка a $\overline{O_1 a} = \overline{W}_A$.

Щоб знайти прискорення точки C врахуємо два моменти. По-перше, обидва прискорення для точки C, модуль яких знаходиться за формулами:

$$W_{CB}^{\text{об}} = BC \cdot AB,\;\; W_{CB}^{\text{віс}} = BC \cdot \omega_{AB}^2,$$

становлять таку частину від відповідних прискорень для точки A, яку частину від AB становить AC. Тому точку c (у нас $W_{CA}^{\text{віс}} = 0$) на відрізку ab знаходимо із умови:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB},$$

і тоді $\overline{\mathrm{O}_1 c} = \overline{\mathrm{W}}_{\mathrm{C}}$.

Приклад 4. Для заданого положення механізму (рис. 6.7). знайти швидкості і прискорення точок B і C, а також миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення шатуна AB, якщо $\omega_1 = 2c^{-1}$;
$\varepsilon_1 = 3\ c^{-2}$; $OA = 0{,}6$ м ; $AB = 0{,}4$ м ; $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; $AC = 0{,}2$ м.

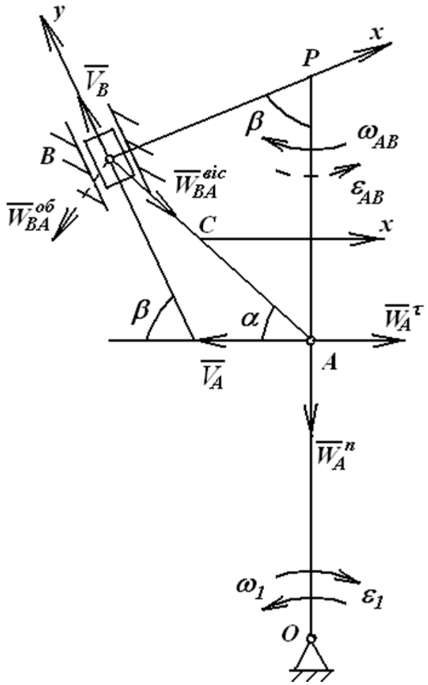

Рисунок 6.7 – Положення механізму

Розв'язання.

Принципова відмінність цієї і наступних задач від трьох розглянутих раніше полягає в тому, що тут МЦШ (точка P для стержня AB) є скінченою точкою площини і шатун AB не виконує миттєво-поступального руху, як це було у попередніх задачах.

1. В якості полюса для ланки AB приймаємо точку A, для якої легко знайти швидкість і обидва прискорення (див. рис. 6.7).

$$v_A = OA \cdot \omega_1 = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2 \text{ м/с};$$

$$W_A^{\tau} = OA \cdot \varepsilon_1 = 0{,}6 \cdot 3 = 1{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$W_A^{n} = OA \cdot \omega_1^2 = 0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4 \text{ м/с}^2.$$

2. За правилом двох перпендикулярів знаходимо точку P і відразу методами геометрії аналізуємо отриманий трикутник ABP. В ньому відома сторона AB, відомий кут BPA, який дорівнює куту β (за властивістю кутів із взаємно перпендикулярними сторонами), відомий кут BAP, який дорівнює $90° - \alpha$. Таким чином в цьому трикутнику відома сторона і усі три кути, тому для знаходження необхідних нам відстаней від точок A і B до МЦШ треба двічі застосувати теорему синусів, будемо мати:

$$\frac{AB}{sin\,\beta} = \frac{AP}{sin(180° - \beta - 90° + \alpha)};$$

$$AP = \frac{sin\,75°}{sin\,60°} \cdot AB = \frac{0{,}97}{0{,}87} \cdot 0{,}4 = 0{,}45 \text{ м};$$

$$BP = \frac{cos\,45°}{sin\,60°} \cdot AB = \frac{0{,}71}{0{,}87} \cdot 0{,}4 = 0{,}33 \text{ м}.$$

Тепер знаходимо ω_{AB} i v_B за формулами :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{1{,}2}{0{,}45} = 2{,}66\ c^{-1};$$

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = 0{,}33 \cdot 2{,}66 = 0{,}88 \text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки C необхідно за теоремою косинусів знайти відстань PC:

$$PC = \sqrt{AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cdot cos(90° - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}45^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}45 \cdot cos\,45°} = 0{,}35 \text{ м};$$

$$v_c = PC \cdot \omega_{AB} = 0{,}35 \cdot 2{,}66 = 0{,}93 \text{ м/с}.$$

Побудуємо для перевірки план швидкостей для шатуна AB , для чого оберемо масштаб швидкостей, наприклад, 1:20 (тобто в 1 см рисунку $20\,\text{см/с} = 0{,}2\,\text{м/с}$ швидкостей). Відкладемо в такому масштабі із довільного центру O відрізок $\overline{Oa} = \bar{v}_A$ горизонтально вліво і проведемо також із точки O промінь у напрямку руху повзуна тобто під кутом 60° до горизонту.

Якщо тепер провести із точки a пряму перпендикулярно до шатуна AB, тобто під кутом $45°$ до горизонту, то на перетині цих двох прямих і знайдемо точку b і $\overline{Ob} = \bar{v}_B$ (рис. 6.8).

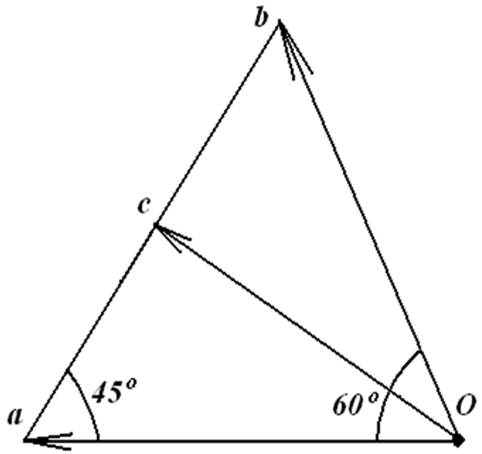

Рисунок 6.8 – План швидкостей для шатуна AB

Точка c лежить на відрізку ab плану швидкостей і ділить цей відрізок у тому ж відношенні, в якому точка C ділить відрізок AB, тобто виконується пропорція:

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB}$$

і оскільки за умовою задачі $AC = CB = 0{,}2$ м, то на плані швидкостей точка c лежить посередині відрізку ab і тоді $\overline{Oc} = \bar{v}_c$.

Вимірюючи відрізки Ob і Oc і враховуючи масштаб графічно визначаємо модулі швидкостей:

$$v_B = Ob \cdot 0{,}2 = 4{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}88 \text{ м/с};$$

$$v_C = Oc \cdot 0{,}2 = 4{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}94 \text{ м/с}.$$

Ці наближені (графічні) результати практично співпадають з отриманими вище точними аналітичними, що є перевіркою обох методів.

3. Оскільки у нас повністю відоме прискорення полюса A і напрямок руху точки B, то миттєве кутове прискорення ε_{AB} знаходимо

другим способом, для чого записуємо для точки B формулу (2) в такому вигляді:

$$\underset{\sim\sim}{\bar{W}_B} = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} + \underset{\sim\sim}{\bar{W}_{BA}^{\text{об}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}}} \qquad (11)$$

і проводимо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання»: вектор $\bar{W}_B$ відомий за напрямком з точністю до знаку (вздовж направляючих) і є шуканим за величиною, тому його підкреслюємо «хвилькою» знизу, $\bar{W}_A^{\tau}$ відомий за величиною і напрямком (див. рис. 6.7) – має дві риски, як і вектор $\bar{W}_A^{n}$, а вектор $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ направлений перпендикулярно до AB, попередньо у бік, який відповідає додатному напрямку ε_{AB} (див. рис. 6.7), але це ще не точний його напрямок, тому ми показуємо пунктирними лініями, і оскільки модуль вектора $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ до визначення ε_{AB} невідомий, то підкреслюємо цей вектор «хвилькою», напрямок вектора $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}$ відомий (від точки B до точки A), а його модуль після визначення ω_{AB} знаходимо так:

$$\bar{W}_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}4 \cdot 2{,}66^2 = 2{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином у вектора $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}$ два підкреслювання.

Для знаходження миттєвого кутового прискорення ланки AB проектуємо векторну формулу (11) на вісь Bx, яка перпендикулярна за напрямком руху повзуна B (див. рис. 6.7). Будемо мати

$$0 = W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^{n} \sin 30° + W_{BA}^{\text{об}} \sin 75° + W_{BA}^{\text{віс}} \cos 75°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = \frac{W_A^{\tau} \cdot \cos 30° - W_A^{n} \cdot \sin 30° + W_{BA}^{\text{віс}} \cdot \cos 75°}{\sin 75°} =$$

$$= \frac{1{,}8 \cdot 0{,}86 - 2{,}4 \cdot 0{,}5 + 2{,}8 \cdot 0{,}26}{0{,}97} = 1{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{AB} = \frac{1{,}1}{0{,}4} = 2{,}75\ \ c^{-2}.$$

Знаки плюс у $W_{BA}^{\text{об}}$ і у ε_{AB} означають, що попередньо показані на рис. 6.7 напрямки є дійсними.

Тепер у правій частині формули (11) усі вектори є відомими і проектуючи формулу на вісь *By*, знайдемо проекцію вектора $\overline{W}_B$ на напрямок руху:

$$W_{By} = -W_A^{\tau} \cdot sin\,30° - W_A^{n} \cdot cos\,30° - W_{BA}^{\text{об}} \cdot cos\,75° - W_{BA}^{\text{віс}} \cdot sin\,75° =$$

$$= -1{,}8 \cdot 0{,}5 - 2{,}4 \cdot 0{,}86 - 1{,}1 \cdot 0{,}26 - 2{,}8 \cdot 0{,}97 = -6\ \text{м/с}^2.$$

Знак мінус тут означає, що вектор $\overline{W}_B$ направлений у від'ємному напрямку осі *By*, тобто вниз (див. рис. 6.7).

Для знаходження вектора $\overline{W}_C$ запишемо формулу (2) для цієї точки так:

$$\overline{W}_C = \underline{\underline{\overline{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\overline{W}_A^{n}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}}}. \tag{12}$$

Після знаходження ε_{AB} усі вектори в правій частині (12) відомі і за величиною, і за напрямом, оскільки:

$$W_{CA}^{\text{об}} = AC \cdot \varepsilon_{AB} = 0{,}2 \cdot 2{,}75 = 0{,}55\ \text{м/с}^2;$$

$$W_{CA}^{\text{віс}} = AC \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}2 \cdot (2{,}66)^2 = 1{,}4\ \text{м/с}^2.$$

Проектуємо формулу (12) на осі *Cx* і *Cy* і знаходимо проекції прискорення так:

$$W_{Cx} = W_A^{\tau} - W_{CA}^{\text{об}}\,cos\,45° + W_{CA}^{\text{віс}}\,cos\,45° =$$
$$= 1{,}8 - 0{,}55 \cdot 0{,}7 + 1{,}4 \cdot 0{,}7 = 2{,}4\ \text{м/с}^2$$

$$W_{Cy} = -W_A^{n} - W_{CA}^{\text{об}}\,sin\,45° - W_{CA}^{\text{віс}}\,sin\,45° = \ 2{,}4 - 0{,}55 \cdot 0{,}7 - 1{,}4 \cdot 0{,}7 = \ -3{,}8\ \text{м/с}^2$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \sqrt{2{,}6^2 + 3{,}6^2} = 4{,}6\ \text{м/с}^2.$$

Побудуємо для порівняння план прискорень для шатуна *AB* (рис. 6.9). Оберемо масштаб прискорень 1:60 (тобто в 1 см діаграми – 0,6 м/с^2). Відкладаємо від довільно обраного центру O_1 площини горизонтально вправо відрізок O_1k, такий що $\overline{O_1k} = \overline{W}_A^{\tau}$. З кінця цього відрізку вертикально вниз відкладаємо відрізок ka, при цьому $\overline{ka} = \overline{W}_A^n$. З'єднуємо точку O_1 з точкою a, отримуємо на діаграмі прискорення точки A, тобто $\overline{O_1a} = \overline{W}_A$. З точки a під кутом 45° до горизонту вправо і вниз відкладаємо відоме прискорення $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}} = \overline{am}$. Із точки m проводимо пряму, перпендикулярну до шатуна AB механізму (це напрямок поки що невідомого вектора $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$). Через точку O_1 під кутом 30° до вертикалі проводимо промінь, який відповідає напрямку руху повзуна B і на якому повинна знаходитися точка b. На перетині перпендикуляра, проведеного через точку m і даного променю і знайдемо точку b, тоді $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Щоб знайти на плані прискорень точку c врахуємо, що точка C середина відрізку AB, а тому:

$$W_{CA}^{\text{об}} = \frac{1}{2}\overline{W}_{BA}^{\text{об}};\ \ \overline{W}_{CA}^{\text{віс}} = \frac{1}{2}\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}.$$

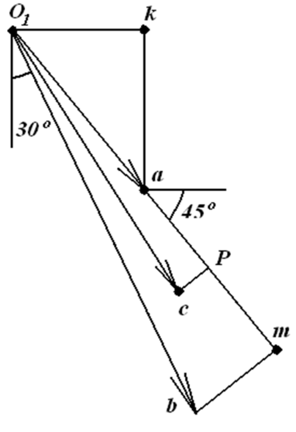

Рисунок 6.9 – План прискорень

Тому знаходимо середину відрізку am і позначаємо цю точку як p, далі проводимо із p паралельно mb і в той же бік відрізок, рівний половині довжини mb і на кінці цього відрізку знаходиться точка c, так що $\overline{O_1c} = \overline{W}_c$. Вимірюючи необхідні довжини і враховуючи масштаб, легко переконатися у практичному співпадінні аналітичних і графічних результатів для усіх прискорень, при цьому, використовуючи формулу:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{mb}{AB},$$

можна перевірити і миттєве кутове прискорення.

Приклад 5. Для заданого положення механізму (рис. 6.10) знайти швидкості і прискорення точок B і C, а також миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення шатуна AB, якщо

$$OA = 0{,}5 \text{ м}, AB = 0{,}7 \text{ м}, \alpha = 45°, \beta = 30°, AC = 0{,}4 \text{ м},$$
$$\omega_1 = 2 \text{ с} - 1, \varepsilon_1 = 4 \text{ с}^{-2}.$$

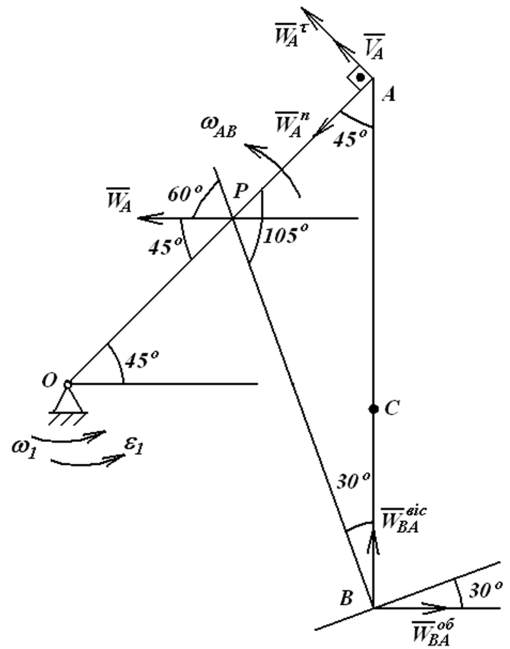

Рисунок 6.10 – Положення механізму

Розв'язання.

1. Обравши масштаб довжини 1:10 (в 1 см рисунку 10 см механізму) покажемо механізм в масштабі. В якості полюса для шатуна AB беремо точку A, тоді знаходимо і показуємо на рисунку швидкості і прискорення цієї точки:

$$v_A = OA \cdot \omega_1 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ м/с};$$

$$W_A^{\tau} = OA \cdot \varepsilon_1 = 0{,}5 \cdot 4 = 2 \text{ м/с}^2;$$

$$W_A^{n} = OA \cdot \omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Для знаходження МЦШ застосовуємо правило двох перпендикулярів до напрямку рухів точок A і B і бачимо, що в даному випадку точка P знаходиться геометрично на напрямку прямої OA.

Увага! Доцільно тут нагадати, що МЦШ – це точка геометрична, а не якась точка реального тіла, тобто це точка площини, якою в даній задачі рухається шатун AB. Тобто, показана на рисунку точка P не лежить на кривошипі OA (якби це було так, то механізм не зміг би рухатися, оскільки тоді б на кривошипі були дві нерухомі точки O і P), а знаходиться в тій точці площини, яку в даний момент часу «прикриває» стержень OA.

Визначаємо усі кути трикутника APB. Легко бачити, що $\angle ABP = \beta$, як кут, сторони якого перпендикулярні до горизонту і напрямку руху повзуна, $\angle PAB = 90 - \alpha$, оскільки за умовою стержень AB розташований вертикально.

Таким чином, в даному трикутнику відома сторона AB і усі кути, що дає нам можливість знаходити відстані від точок A і B до точки P за допомогою теореми синусів:

$$\frac{AP}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(180 - 90° + \alpha - \beta)}; \;\; AP = \frac{\sin 30°}{\sin 105°} \cdot 0{,}7 = 0{,}36 \text{ м};$$

$$\frac{BP}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{AB}{\sin 105°}; \;\; BP = \frac{\sin 45°}{\sin 105°} \cdot 0{,}7 = 0{,}5 \text{ м}.$$

Тепер за допомогою МЦШ знаходимо:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{1}{0{,}36} = 2{,}8 \; c^{-1},$$

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = 0{,}5 \cdot 2{,}8 = 1{,}4 \text{ м/с}.$$

Щоб знайти швидкість точки, запишемо для ΔPAC теорему косинусів:

$$PC = \sqrt{AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos(90 - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{(0{,}36)^2 + (0{,}4)^2 - 2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7} = 0{,}3 \text{ м};$$

$$v_c = CP \cdot \omega_{AB} = 0{,}3 \cdot 2{,}8 = 0{,}84 \text{ м/с}.$$

Для порівняння знайдемо $\bar{v}_B$ і $\bar{v}_c$ графічним методом, побудувавши план швидкостей. Візьмемо масштаб швидкостей 1:20 (тобто в 1 см рисунку 0,2 м/с) і відкладемо в цьому масштабі від довільного центру *O* під кутом 45° градусів до горизонту відрізок Oa, так що $\overline{Oa} = \bar{v}_A$ (рис. 6.11). Проводимо також із точки *O* під кутом 30° до горизонту напрямок руху повзуна, а із точки a пряму, перпендикулярну до шатуна *AB* (в даному випадку це горизонтальний промінь) і на перетині двох прямих знаходимо точку *b*, тоді $\overline{Ob} = \bar{v}_B$.

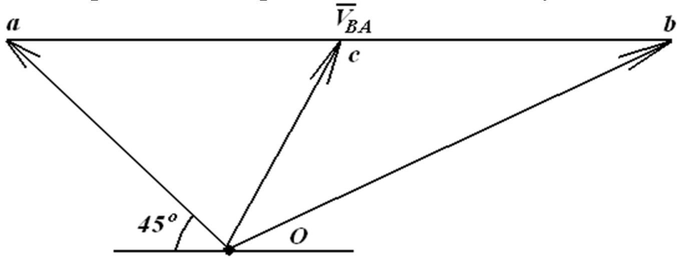

Рисунок 6.11 – План швидкостей

Щоб знайти точку *C* треба, щоб ця точка розділила відрізок *ab* у тому ж відношенні, в якому точка С ділить шатун *AB*, тоді $\overline{OC} = \bar{v}_c$. Порівняння графічних і аналітичних результатів показує майже повне їх співпадіння.

Для знаходження ε_{AB} тут треба застосовувати другий метод. Запишемо для точки *B* формулу (2) в такому вигляді:

$$\bar{W}_B = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} + \bar{W}_{CA}^{\text{об}} + \underline{\underline{\bar{W}_{CA}^{\text{віс}}}} \qquad (13)$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання»: вектор $\bar{W}_B$ відомий за напрямком з точністю до знаку, тому йому відповідає «хвилька» внизу; вектори $\bar{W}_A^{\tau}$ і $\bar{W}_A^{n}$ відомі повністю – дві риски внизу у кожного, $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ направлений перпендикулярно до *AB*, але невідомо в який бік, за нашою методикою вважаємо попередньо, що ε_{AB} направлене проти годинникової стрілки і пунктирами показуємо і ε_{AB} і $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ (рис. 6.10), тому підкреслюємо в (13) $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ ”хвилькою” знизу; вектор $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}$ завжди направлений від *B* до *A*, а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}7 \cdot 2{,}8^2 = 5{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Тому вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$ заслуговує двох підкреслювань знизу.

Проектуємо векторну формулу на вісь *By*, яка перпендикулярна до напрямку руху повзуна *B:*

$$0 = W_A^\tau \cos 15° - W_A^n \cos 75° - W_{BA}^{\text{об}} \sin 30° + W_{BA}^{\text{віс}} \cos 30°;$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = \frac{W_A^\tau \cos 15° - W_A^n \cos 75° + W_{BA}^{\text{віс}} \cos 30°}{\sin 30°} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 0{,}97 - 2 \cdot 0{,}25 + 5{,}5 \cdot 0{,}86) = 12{,}4 \text{ м/с}^2,$$

Тоді:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{AB} = \frac{6{,}2}{0{,}7} = 17{,}7\ c^{-2}.$$

Знаки плюс в обох останніх результатах означають, що попередньо показані на рис. 6.10 пунктиром напрямки ε_{AB} і $W_{BA}^{\text{об}}$ є дійсними.

Для знаходження прискорення $\overline{W}_B$ проектуємо формулу (13) на вісь *Bx*, при цьому в лівій частині пишемо вираз без знаку (ми його ще не знаємо, просто позначку проекції прискорення точки *B* на цю вісь)

$$W_{Bx} = -W_A^\tau \cos 75° - W_A^n \cos 15° + W_{BA}^{\text{об}} \cos 30° + W_{BA}^{\text{віс}} \sin 30° =$$

$$= -2 \cdot 0{,}25 - 2 \cdot 0{,}97 + 12{,}4 \cdot 0{,}86 + 5{,}5 \cdot 0{,}5 = 11 \text{м/с}$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\overline{W}_B$ направлений у додатному напрямку осі *Bx* (рис. 6.10).

Тепер очевидним способом можемо знайти прискорення точки *C*, для якої формула (2) записується так:

$$\overline{W}_C = \underline{\underline{\overline{W}_A^\tau}} + \underline{\underline{\overline{W}_A^n}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}}}. \tag{14}$$

Оскільки модулі $W_{CA}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}$ знаходяться за формулами:

$$W_{CA}^{\text{об}} = AC \cdot \varepsilon_{AB} = 0{,}4 \cdot 17{,}7 = 7{,}1 \text{ м/с}^2,$$

$$W_{CA}^{\text{віс}} = AC \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}4 \cdot 2{,}8^2 = 3{,}1 \text{ м/с}^2,$$

а напрямки цих векторів відомі (рис. 6.10), то в правій частині формули (14) усі вектори відомі повністю і проектуючи формулу (14) на осі *Cx* і *Cy* (рис. 6.10), знаходимо проекції прискорення точки *C*:

$$W_{Cx} = -W_A^{\tau} \cos 45° - W_A^{n} \sin 45° + W_{CA}^{\text{об}} =$$

$$= -2 \cdot 0{,}7 - 2 \cdot 0{,}7 + 7{,}1 = 4{,}3;$$

$$W_{Cy} = -W_A^{\tau} \sin 45° - W_A^{n} \cos 45° + W_{CA}^{\text{віс}} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}7 - 2 \cdot 0{,}7 + 3{,}1 = 3{,}1;$$

$$W_C = \sqrt{W_{cx}^2 + W_{cy}^2} = \sqrt{4{,}3^2 + 3{,}1^2} = 5{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Направляючі косинуси вектора $\overline{W}_C$, тобто косинуси кутів, які цей вектор утворює відповідно з осями *Ox* і *Oy*, знаходимо так:

$$\cos(x, \overline{W}_C) = \frac{4{,}3}{5{,}3} = 0{,}8; \quad \cos(y, \overline{W}_C) = \frac{3{,}1}{5{,}3} = 0{,}6.$$

Тобто $\overline{W}_C$ направлений вгору і утворює з віссю *Cx* кут біля $36°$.

Для порівняння з аналітичними результатами знайдемо прискорення точок *B* і *C* графічним методом, побудувавши план прискорень для шатуна *AB* (рис. 6.12). Оскільки вектори $\overline{W}_A^{\tau}$ і $\overline{W}_A^{n}$ однакові за модулем і обидва направлені ліворуч, утворюючи кути по $45°$ з горизонтальною прямою, то вектор $\overline{W}_A$ направлений горизонтально вліво і за модулем рівний $2\sqrt{2}\,\text{м/с}^2$. Обираємо масштаб 1:100 (тобто в 1 см діаграми – 1 м/с^2) і відкладаємо із обраної точки O_1 горизонтально вліво відрізок O_1a, так що $\overline{O_1 a} = \overline{W}_A$. Із точки *a* вертикально вгору відкладаємо відрізок ak, такий що $\overline{ak} = \overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$, і проводимо через точку *k* горизонтальну пряму, яка відповідає напрямку поки що невідомого вектора $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ (рис. 6.10).

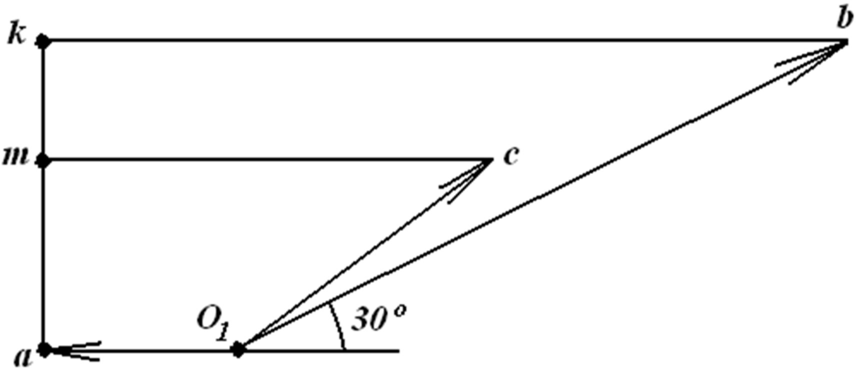

Рисунок 6.12 – План прискорень

Проводимо через точку O_1 промінь під кутом 30°, який відповідає напрямку руху повзуна B і на перетині цього променю і раніше проведеної з точки $к$ горизонтальної прямої знаходимо точку b і $\overline{O_1 b} = \overline{W}_B$. Ділимо відрізок ak точкою m так, щоб виконувалася пропорція:

$$\frac{am}{ak} = \frac{AC}{AB},$$

і на прямій, паралельній kb відкладаємо відрізок mc, довжина якого знаходиться із умови:

$$\frac{mc}{kb} = \frac{AC}{AB}.$$

Тоді $\overline{O_1 C} = \overline{W}_c$. Миттєве кутове прискорення тепер легко обчислити, якщо взяти з врахуванням масштабів прискорень і довжини для відрізка з рис. 6.12 і рис. 6.10 і застосувати формулу:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{kb}{AB}.$$

Приклад 6. Для заданого положення механізму (рис. 6.13) знайти швидкості і прискорення точок B і C, а також миттєві кутові швидкості і прискорення шатуна AB, якщо $\omega_1 = 3\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 2c^{-2}$;

$\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; $OA = 0{,}7$ м ; $AB = 0{,}6$ м ; $AC = 0{,}2$ м.

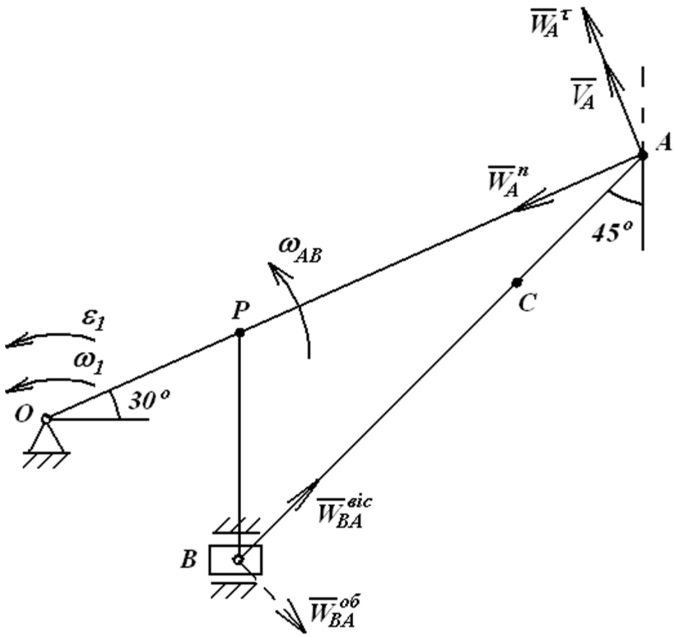

Рисунок 6.13 – Положення механізму

Розв'язання.

Обираємо масштаб довжин 1:10 (в 1 см рисунку 10 см довжин елементів механізму) і показуємо дійсне положення механізму на рис. 6.13.

В якості полюса для шатуна AB беремо точку A, швидкості і прискорення для якої показані на рисунку, а модулі цих векторів знаходяться так:

$$v_A = OA \cdot \omega_1 = 0{,}7 \cdot 3 = 2 \text{ м/с};$$

$$W_A^\tau = OA \cdot \varepsilon_1 = 0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$W_A^n = OA \cdot \omega_1^2 = 0{,}7 \cdot 9 = 6{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Використовуючи правило двох перпендикулярів, бачимо, що точка P знаходиться в точці площини під кривошипом OA.

Детальніше про таку ситуацію мова йшла у відповідному зауваженні попереднього прикладу.

Проведемо аналіз трикутника *ABP*. В ньому відома сторона AB, кут $\angle PAB = 90° - \alpha - \beta = 15°, \angle PBA = \beta$, як відповідний до заданого кута β, тоді кут $\angle APB = 180° - 15° - 45° = 120°$. Таким чином є всі умови для застосування теореми синусів для визначення відстаней від точок *A* і *B* до точки *P*:

$$\frac{AP}{sin\,45} = \frac{AB}{sin\,120\,°};\; AP = \frac{sin\,45°}{sin\,120°};\; AB = \frac{0{,}7}{0{,}86} \cdot 0{,}6 = 0{,}49 \text{ м};$$
$$\frac{BP}{sin\,15°} = \frac{AB}{sin\,60°};\; BP = \frac{sin\,15°}{sin\,120°};\;\; AB = \frac{0{,}25}{0{,}86} \cdot 0{,}6 = 0{,}17 \text{ м}.$$

Тоді:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{2}{0{,}49} = 4{,}1\; c^{-1};$$

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = 0{,}17 \cdot 4{,}1 = 0{,}7 \text{ м/с}.$$

Щоб знайти швидкість точки *C* треба спочатку в ΔAPC застосувати теорему косинусів:

$$CP = \sqrt{AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot cos\,15°} =$$
$$= \sqrt{0{,}49^2 + 0{,}2^2 - 2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}97} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Тоді:

$$v_c = CP \cdot \omega_{AB} = 0{,}3 \cdot 4{,}1 = 1{,}23 \text{ м/с}.$$

План швидкостей (рис. 6.14) будуємо, обравши довільну точку і відклавши від неї під кутом $\alpha = 30°$ до вертикалі в масштабі 1:40 (в 1см – 0,4 м/с) відрізок *Oa*. Після цього із точки *O* проводимо горизонтальну пряму, а із точки *a* під кутом 135^o до горизонту проводимо промінь, який перпендикулярний до шатуна *AB* на рис. 6.13. На перетині цих двох прямих знаходимо точку *b*, тоді $Ob = \bar{v}_B$. Оскільки на рис. 6.13 $AC = \frac{1}{3}AB$, тоді точка *c* знаходиться на відрізку *ab* плану швидкостей і $ac = \frac{1}{3}ab$, тоді $\overline{Oc} = \bar{v}_c$. Вимірюючи отримані відрізки *Ob* і *Oc* і врахувавши масштаб швидкостей, бачимо, що графічні і аналітичні результати практично співпадають.

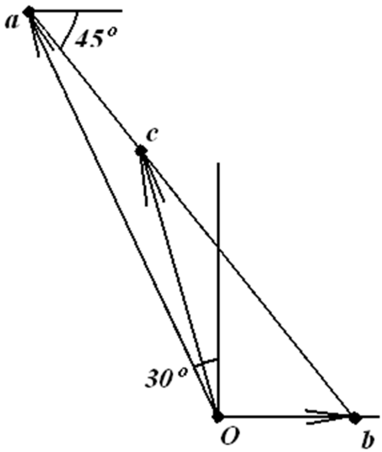

Рисунок 6.14 – План швидкостей

3. Для знаходження ε_{AB} тут треба застосовувати другий спосіб, оскільки в даний момент розв’язання задачі ми знайшли ω_{AB}, для точки A повністю відомі обидва прискорення і відомий напрямок руху точки B.

На основі формули (2) для точки B запишемо прискорення у такому вигляді:

$$\utilde{\overline{W}_B}=\underline{\underline{\overline{W}_A^{\tau}}}+\underline{\underline{\overrightarrow{W}_A^{n}}}+\utilde{\overline{W}_{BA}^{\text{об}}}+\underline{\underline{\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}}}. \qquad (15)$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання»: вектор $\overline{W}_B$ направлений горизонтально, але невідомо в який бік і невідомий за величиною – підкреслимо знизу «хвилькою», обидва вектори $\overline{W}_A^{\tau}$ і $\overline{W}_A^{n}$ відомі і за величиною і за напрямком (рис. 6.13) – підкреслюємо двома рисками знизу; вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ перпендикулярний до відрізку AB, але невідомо в який бік, тому попередньо вважаючи, що ε_{AB} направлене проти годинникової стрілки пунктиром показуємо і ε_{AB}, і у відповідності до цього $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ (рис. 6.13), але при цьому вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ у формулі (15) заслуговує лише „хвильку”; вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$ відомий повністю тому що він завжди направлений від B до A, а за модулем його знаходиться так:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}6 \cdot 4{,}1^2 = 10{,}1\text{м/с}^2.$$

Спочатку проектуємо формулу (15) на вісь By, яка перпендикулярна до вектора $\overline{W}_B$ (рис. 6.13):

$$0 = W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^{n} \cos 60° - W_{BA}^{\text{об}} \sin 45° + W_{BA}^{\text{віс}} \cos 45°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = \frac{W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^{n} \cos 60° + W_{BA}^{\text{віс}} \cos 45°}{\sin 30°} =$$
$$= \frac{1{,}4 \cdot 0{,}86 - 6{,}3 \cdot 0{,}5 + 10{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}7} = 7{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Тепер ε_{AB} знаходимо за формулою:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{AB} = \frac{7{,}9}{0{,}6} = 13{,}2\ c^{-2}.$$

Знаки плюс в обох результатах означають, що попередні напрямки ε_{AB} і $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ це і є дійсні їх напрямки.

Для знаходження прискорення точки B проектуємо формулу (15) на вісь Bx (рис. 6.13), залишаючи в лівій частині поки що невідому за знаком проекцію вектора $\overline{W}_B$:

$$W_{Bx} = -W_A^{\tau} \sin 30° - W_A^{n} \sin 60° + W_{BA}^{\text{об}} \cos 45° + W_{BA}^{\text{віс}} \sin 45° =$$
$$= -1{,}4 \cdot 0{,}5 - 6{,}3 \cdot 0{,}86 + 7{,}9 \cdot 0{,}7 + 10{,}1 \cdot 1{,}7 = 6{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс означає, що $\overline{W}_B$ направлений в додатному напрямку осі Bx, тобто вправо (рис. 6.13).

Для знаходження прискорення точки C запишемо для неї формулу (2) таким чином:

$$\overline{W}_C = \underline{\underline{\overline{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\overrightarrow{W}_A^{n}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}}}\ . \qquad (16)$$

Тут уже усі чотири вектори в правій частині відомі повністю, оскільки $\overline{W}_{CA}^{\text{об}}$ колінеарне $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ і направлене в той же бік, а $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$ направлене від C до A, модулі цих векторів знаходимо так:

$$W_{CA}^{\text{об}} = AC \cdot \varepsilon_{AB} = 0{,}2 \cdot 13{,}2 = 2{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{CA}^{\text{віс}} = \mathrm{AC} \cdot \omega_{\mathrm{AB}}^2 = 0{,}2 \cdot 4{,}1^2 = 3{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Про напрямок вектора $\overline{W}_C$ нічого не відомо, тому він у формулі (16) ніяк не підкреслюється, і ми знайдемо обидві його проекції на осі *Bx* і *By*, проектуючи (16) на ці осі:

$$W_{Cx} = -W_A^{\tau} \sin 30° - W_A^n \sin 60° + W_{CA}^{\text{об}} \cos 45° + W_{CA}^{\text{віс}} \sin 45° =$$

$$= -1{,}4 \cdot 0{,}5 - 6{,}3 \cdot 0{,}86 + 2{,}6 \cdot 0{,}7 + 3{,}2 \cdot 0{,}7 = -2;$$

$$W_{Cy} = W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^n \cos 60° - W_{CA}^{\text{об}} \sin 45° + W_{CA}^{\text{віс}} \cos 45° =$$

$$= 1{,}4 \cdot 0{,}86 - 6{,}3 \cdot 0{,}5 - 2{,}6 \cdot 0{,}7 + 3{,}2 \cdot 0{,}7 = -1{,}6;$$

$$W_C = \sqrt{W_{cx}^2 + W_{cy}^2} = \sqrt{2^2 + 1{,}6^2} = 2{,}6\ \text{м/с}^2;$$

$$\cos(x, \overline{W}_c) = -\frac{2}{2{,}6} = -0{,}77 \quad \cos(y, \overline{W}_c) = -\frac{1{,}6}{2{,}6} - \frac{1{,}6}{2{,}6} = -0{,}62.$$

Звідси бачимо, що вектор $\overline{W}_C$ утворює кут $220°$ з додатнім напрямком осі *Bx*, тобто направлений вліво і вниз, що видно із значень W_{Cx} і W_{Cy}.

План прискорень для шатуна *AB* в даній задачі будується в наступному порядку (рис. 6.15). Обираємо масштаб 1:100 (в 1 см – 1 м/с^2 прискорення). Із довільно обраної на площині точки O_1 під кутом 30° до горизонту і вниз відкладаємо відрізок O_1k, такий, що $\overline{O_1k} = \overline{W}_A^n$. Із точки *k* перпендикулярно до ланки *OA* механізму відкладаємо відрізок ka, такий що $\overline{ka} = \overline{W}_A^{\tau}$. Тоді, з'єднуючи точки O_1 і *a*, будемо мати $\overline{O_1a} = \overline{W}_A$. Проводимо із точки a під кутом 45° до горизонту вгору пряму, на якій відкладаємо відрізок am, такий що $\overline{am} = \overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$, а потім проводимо через точку m перпендикуляр, до ланки *AB* механізму, напрямок якого співпадає з напрямком поки що невідомого прискорення $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$. На перетині цього перпендикуляра і проведеного із O_1 горизонтального променю знаходимо точку *b*, $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Далі на відрізку am із умови:

$$\frac{ap}{am} = \frac{AC}{AB};$$

знаходимо точку p, з якої паралельно mb відкладаємо відрізок pc, такий, що:

$$\frac{pc}{mb} = \frac{AC}{AB};$$

і тоді $\overline{O_1c}$.

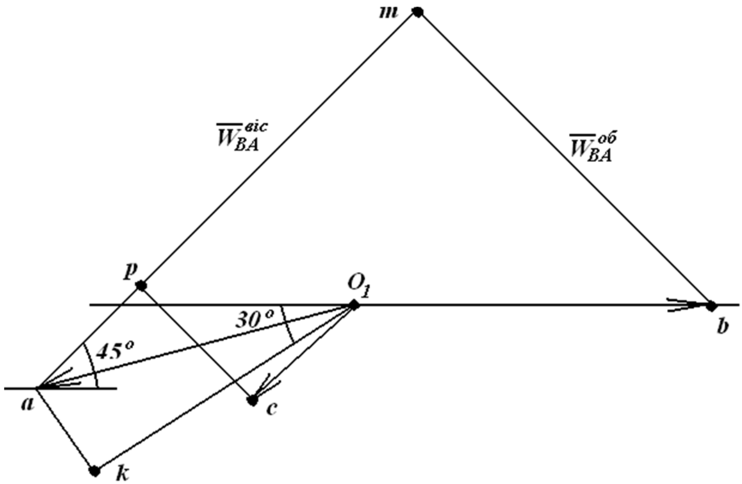

Рисунок 6.15 – План прискорень для шатуна

Приклад 7. Залишаючи кути і розміри крім $AB = 0{,}8$ м, $AC = 0{,}3$ м такими, як у попередньому прикладі, але на відміну від нього вважаючи, що направляючі повзуна розташовані вертикально і заданий закон руху повзуна у вигляді $S = 3t^2 - 5{,}5t$, знайти швидкості і прискорення точок B і C, а також $\omega_{AB,}$ ε_{AB} , для моменту часу $t_1 = 1c$.

Розв'язання.

На рис. 6.16 в масштабі довжини 1:10 (в 1 см рисунку 0,1 м довжин OA і AB) побудоване положення механізму для заданого моменту часу $t_1 = 1c$. Оскільки заданим є рух повзуна B, то швидкість і прискорення прямолінійного руху точки B легко знаходяться за формулами:

$$v_B = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_1} = (6t - 5{,}5)|_{t=t_1} = 0{,}5\text{м/с},$$

$$W_B = \frac{dv_B}{dt}\bigg|_{t=t_1} = 6\ \text{м/с}^2,$$

причому знаки плюс в обох результатах означають, що і швидкість і прискорення направлені вертикально догори (див. рис. 6.16). Зрозуміло, що точка B в даній задачі обирається в якості полюса для шатуна AB.

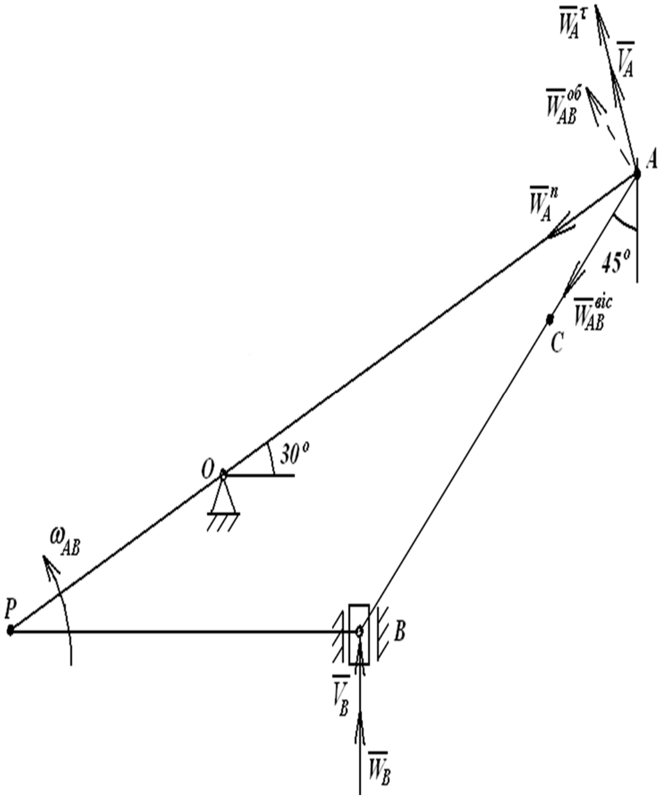

Рисунок 6.16 – Положення механізму для заданого моменту часу

За правилом двох перпендикулярів знаходимо МЦШ (точку P) для ланки AB і проводимо аналіз трикутника ABP. Відома сторона AB, $\angle PAB = 90 - \alpha - \beta = 15°, < \angle APB = \alpha = 30°,$ тоді $\angle PBA = 135°.$

За теоремою синусів знаходимо відстані до МЦШ:

$$\frac{PB}{sin\,15°} = \frac{AB}{sin\,30°};\ \ PB = \frac{sin\,15°}{sin\,30} \cdot AB = \frac{0,25}{0,5} \cdot 0,8 = 0,4 \text{ м};$$

$$\frac{PA}{sin\,135°} = \frac{AB}{sin\,30°};\ PA = \frac{sin\,135°}{sin\,30°} \cdot AB = \frac{0,7}{0,5} \cdot 0,8 = 1,1 \text{ м}.$$

Тоді миттєва кутова швидкість шатуна *AB* знаходиться так:

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{PB} = \frac{0,5}{0,4} = 1,2\ c^{-1},$$

а швидкість точки *A:*

$$v_A = AP \cdot \omega_{AB} = 1,1 \cdot 1,2 = 1,3 \text{ м/с}.$$

Увага! Для подальшого при визначенні W_A^n нам знадобиться миттєва кутова швидкість ω_1 кривошипа навколо точки *O*, яку тепер знайдемо так:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{OA} = \frac{1,3}{0,7} = 1,9\ c^{-1}.$$

Щоб знайти швидкість точки *C*, визначимо спочатку за теоремою косинусів відстань від цієї точки до МЦШ із ΔPBC:

$$PC = \sqrt{PB^2 + BC^2 - 2PB \cdot PC \cdot cos\,135°} =$$

$$= \sqrt{0,4^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7} = 0,83 \text{ м}.$$

Тоді

$$v_c = PC \cdot \omega_{AB} = 0,83 \cdot 1,2 = 1 \text{ м/с}.$$

Побудуємо для порівняння план швидкостей для шатуна *AB*, обравши масштаб швидкостей 1:20 (в 1 см рисунку 0,2 м/с швидкості). Відкладаємо від довільного центру *O* вертикально вгору відрізок *Ob* довжиною 2,5 см, тоді $\bar{O}b = \bar{v}_B$ (рис. 6.17).

Потім проводимо із точки під кутом 30° до вертикалі (див. рис. 6.16) промінь, вздовж якого направлена швидкість точки А, а із точки *b* під кутом 45° до вертикалі промінь, напрямок якого перпендикулярний до стержня *AB* (див. рис. 6.16) і тоді на перетині цих двох променів знаходиться точка ***a*** і $\overline{Oa} = \bar{v}_A$.

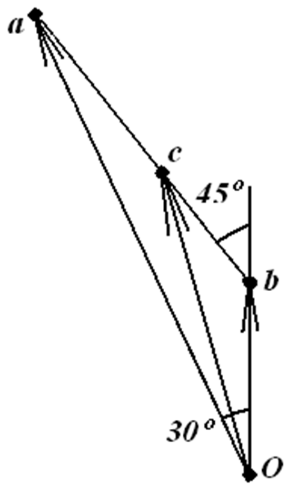

Рисунок 6.17 – План швидкостей

Щоб знайти точку ***c*** зазначимо, що вона знаходиться на відрізку ***ab*** і ділить цей відрізок так, щоб виконувалася умова:

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB}.$$

Вимірюючи довжини відрізків *Oa*, *Ob* і враховуючи масштаб, бачимо, що графічні і аналітичні результати практично співпадають.

Для визначення ε_{AB} застосовуємо третій спосіб, згідно з яким прискорення точки з одного боку знаходиться за відомою формулою кінематики обертального руху навколо точки *O*:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_A^{\tau} + \overline{W}_A^{n}.$$

Припустимо, що поки що невідоме прискорення ε_1 направлене проти годинникової стрілки і покажемо ε_1 пунктиром (рис. 6.16), тоді попередньо вважаємо $\overline{W}_A^{\tau}$ направленим перпендикулярно до *OA* вгору (див. рис. 6.16). З іншого боку на основі формули (2), приймаючи точку *B* в якості полюса, для точки *A* можемо записати:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_B + \overline{W}_{AB}^{\text{об}} + \overline{W}_{AB}^{\text{віс}}.$$

Об'єднуючи дві формули, будемо мати наступну залежність:

$$\bar{W}_A^{\tau} + \bar{W}_A^{n} = \bar{W}_B + \bar{W}_{AB}^{\text{об}} + \bar{W}_{AB}^{\text{віс}}. \quad (17)$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання»: вектор $\bar{W}_A^{\tau}$ відомий лише за напрямком з точністю до знаку (по тій же прямій перпендикулярній до OA, що і вектор $\bar{v}_A$, але невідомо в який бік), тому підкреслюємо його хвилькою; вектор $\bar{W}_A^{n}$направлений від A до O (рис. 6.16) і після визначення ω_1 його модуль знаходимо за формулою:

$$W_A^n = OA \cdot \omega_1^2 = 0{,}7 \cdot 1,9^2 = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Тому вектор $\bar{W}_A^{n}$ підкреслюємо знизу двічі; вектор $\bar{W}_B$ відомий повністю – дві риски; вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ за напрямком відомий з точністю до знаку (він перпендикулярний до AB), але невідомо в який бік, згідно з правилом, яке ми використовуємо у всіх задачах, попередньо вважаємо ε_{AB} направленим проти годинникової стрілки і відповідно до цього показуємо пунктирами на рис. 6.16 і ε_{AB}, і $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$, тому вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ підкреслюємо «хвилькою», вектор$\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}$ направлений по шатуну від точки A до точки B (рис. 6.16), а його модуль після знаходження ω_{AB} обчислюємо так:

$$W_{AB}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0{,}8 \cdot 1,2^2 = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Тому вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}$ має дві риски знизу.

Спочатку проектуємо формулу (17) на напрямок, перпендикулярний до вектора $\bar{W}_A^{\tau}$, тобто пряму AP (рис. 6.16):

$$W_A^n = -W_B \cos 60° + W_{AB}^{\text{об}} \cdot \cos 75° + W_{AB}^{\text{віс}} \cos 15°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{AB}^{\text{об}} = \frac{W_A^n + W_B \cos 60° - W_{AB}^{\text{віс}} \cos 15°}{\cos 75°} =$$

$$= \frac{2{,}5 + 6 \cdot 0{,}5 - 1{,}2 \cdot 0{,}77}{0{,}25} = 18 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^{\text{об}}}{AB} = \frac{18}{0,8} = 22,5\ c^{-2}.$$

Знаки плюс означають, що попередні напрямки ε_{AB} і $\overline{W}_{AB}^{\text{об}}$ показані правильно.

Щоб знайти:

$$W_A^{\tau} = W_B \sin 60° + W_{AB}^{\text{об}} \cdot \sin 75° - W_{AB}^{\text{віс}} \sin 15° =$$

$$= 6 \cdot 0,86 + 18 \cdot 0,97 - 1,2 \cdot 0,25 = 22,4\ \text{м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_1 = \frac{W_A^{\tau}}{OA} = \frac{22,4}{0,7} = 32\ c^{-1};$$

$$W_A = \sqrt{(W_A^{\tau})^2 + (W_A^{n})^2} = 22,6\ \text{м/с}^2.$$

Щоб знайти швидкість точки *C* запишемо для неї формулу (2), яка тут має такий вигляд:

$$\overline{W}_C = \underline{\underline{\overline{W}_B}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CB}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CB}^{\text{віс}}}}\ . \tag{18}$$

Тут у правій частині усі вектори відомі і за напрямком (рис. 6.16) і за величиною, оскільки:

$$W_{CB}^{\text{віс}} = CB \cdot \omega_{AB}^2 = 0,5 \cdot 1,44 = 0,7\ \text{м/с}^2;$$

$$W_{CB}^{\text{об}} = CB \cdot \varepsilon_{AB} = 0,5 \cdot 22,5 = 11,2\ \text{м/с}^2.$$

Проектуємо формулу (18) на осі *Cx* і *Cy* (рис. 6.16):

$$W_{cx} = -W_{CB}^{\text{об}} \cdot \cos 45° - W_{CB}^{\text{віс}} \cdot \sin 45° = -11,2 \cdot 0,7 - 0,7 = -8,3;$$

$$\text{W}_{\text{cy}} = \text{W}_{\text{B}} + \text{W}_{\text{CB}}^{\text{об}} \cdot \sin 45° - \text{W}_{\text{CB}}^{\text{віс}} \cdot \cos 45° =;$$

$$= 6 + 11,2 \cdot 0,7 - 0,7 = 13,3;$$

$$W_C = \sqrt{W_{cx}^2 + W_{cy}^2} = \sqrt{8,3^2 + 13,3^2} = 15,8\ \text{м/с}^2.$$

Для порівняння побудуємо план прискорень для кривошипа *AB* в даній задачі (рис. 6.18). Обираємо масштаб прискорень 1:100 (тобто в 1 см діаграми знаходиться 1 м/с^2 прискорення). Відкладаємо від довільно обраного центру O_1 площини вертикально вгору відрізок O_1b, так що $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Проводимо через точку b під кутом $45°$ до вертикалі пряму, яка відповідає напрямку AB на рис. 6.16 і відкладаємо на цій прямій відрізок bm, такий, що $\overline{bm} = \overline{W}_{AB}^{\text{віс}}$.

Потім проводимо через точку m перпендикуляр до bm (він же перпендикуляр до AB) – це напрямок, на якому знаходиться поки що невідомий вектор $\overline{W}_{AB}^{\text{об}}$. Після цього під кутом 60^{o} до вертикалі відкладаємо вниз відрізок O_1k, такий що $\overline{O_1k} = \overline{W}_A^n$. Проводимо із точки k промінь, перпендикулярний до OA – це напрямок поки що невідомого прискорення $\overline{W}_A^{\tau}$.

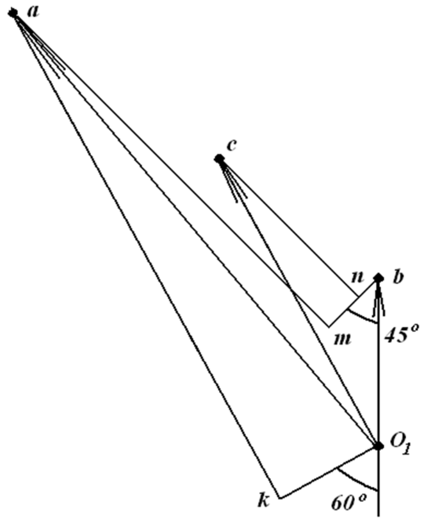

Рисунок 6.18 – План прискорень для кривошипа AB

На перетині двох перпендикулярів, проведених із точок m і k відповідно знаходиться точка a і тоді:

$$\overline{O_1a} = \overline{W}_A;\ \overline{ma} = \overline{W}_{AB}^{\text{об}};\ \overline{ka} = \overline{W}_A^{\tau}.$$

Щоб знайти точку c на плані прискорень знаходимо на відрізку bm точку n із умови:

$$\frac{bn}{bm} = \frac{BC}{BA};$$

а потім проводимо із точки *n* пряму, паралельну відрізку *ma* і відкладаємо на ній відрізок *nc*, довжина якого знаходиться із умови:

$$\frac{nc}{ma} = \frac{BC}{BA}.$$

Тоді $\overline{O_1 c} = \overline{W}_c$.

Легко переконатися, що значення $\overline{W}_A, \overline{W}_c, \overline{W}_{AB}^{\text{об}}$, знайдені геометрично і аналітично, практично співпадають.

7. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ К-4 «КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ БАГАТОЛАНКОГО МЕХАНІЗМУ»

Спочатку дамо деякі загальні рекомендації відносно виконання даної розрахунково-графічної роботи. Оскільки у всіх завданнях плоский багатоланковий механізм складається з п’яти елементів, то на відміну від розглянутих вище прикладів виконання мініконтрольних робіт з даної тематики тут, по-перше, виникають складнощі з показом положення механізму в даний момент часу оскільки задається значна кількість кутів, які ланки механізму утворюють з горизонтом і одна з одною і в багатьох випадках знаходження миттєвих центрів швидкостей для різних ланок за правилом двох перпендикулярів не виглядає очевидним. Але усе це можна суттєво спростити, якщо обов’язково на початку аналізу **побудувати в масштабі** схему механізму за допомогою трикутника і транспортира в оптимальному для аналізу масштабі. По-друге, перед виконанням завдання необхідно проглянути приклади наведені вище для міні контрольної, де розглядаються плоскі механізми із трьох тіл і де у більш простих ситуаціях детально проаналізовані способи визначення швидкостей і прискорень окремих точок механізму, а також миттєвих кутових швидкостей і миттєвих кутових прискорень усіх ланок механізму. По-третє, побудову механізму треба починати з тієї ланки, положення якої однозначно визначається заданим кутом, а потім послідовно домальовувати одна до одної за заданими кутами і розмірами усі інші елементи механізму. По-четверте, в різних задачах заданими можуть бути; а) кутова швидкість і кутове прискорення обертання одного із стержнів навколо нерухомої осі; б) те ж саме, але заданим буде закон обертання $\varphi = \varphi(t)$ і треба спочатку для заданого моменту часу із цього закону знайти ω і ε; в) лінійна швидкість і прискорення повзуна; г) закон руху повзуна у вигляді $S = S(t)$ і момент часу t_1. В залежності від того, що задається, обирається початкова точка (полюс), з якої розпочинається розрахунок. По-п’яте, більш цікавим ніж для трьохланкового механізму є побудова в такому РГЗ плану швидкостей механізму в цілому як суперпозиції (накладення або об’єднання) планів швидкостей його окремих ланок, а особливо важливим є побудова плану прискорень.

Приклад 1. Плоский механізм складається з п'яти ланок, які з'єднані між собою і нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис. 7.1). Задані довжини стержнів $\ell_1 = 0{,}5$ м; $\ell_2 = 1{,}0$ м; $\ell_3 = 0{,}8$ м; $\ell_4 = 0{,}8$ м.

Положення механізму визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ і θ, які відкладаються у відповідності до показаних на рис. 7.1 напрямків і в даній задачі приймають такі значення $\alpha = 0$, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$, $\varphi = 45°$, $\theta = 0$. Точка C знаходиться посередині відповідного стержня. За заданим законом руху ланки O_1A або повзуна B знайти в момент часу t_1 кутові швидкості і прискорення усіх ланок механізму, а також лінійні швидкості і прискорення точок A, B, C, D, якщо заданий закон обертання стержня 1 у вигляді $\varphi = t^2 - t$ і момент часу $t_1 = 2c$.

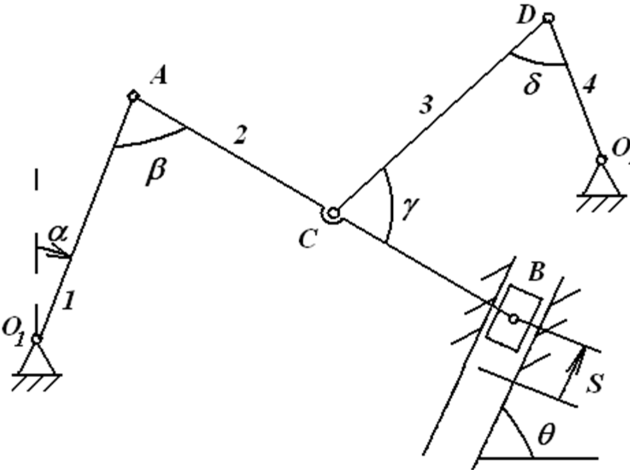

Рисунок 7.1 – Схема плоского механізму

Розв'язання.

Обираємо масштаб довжин 1:10 (тобто в 1см розмірів схеми 10 см довжин ланок механізму) і враховуючи усі задані довжини і кути показуємо дійсне положення плоского багатоланкового механізму (рис. 7.2).

При цьому побудову схему розпочинали з відкладання кута α і показу положення стержня 1, а потім до нього прибудовували усі інші елементи послідовно. У нас за умовою заданим є закон руху стержня 1, тому кінематичний аналіз руху механізму розпочинаємо з визначення швидкості і прискорення точки *A*, яка таким чином стає полюсом для ланки *AB*.

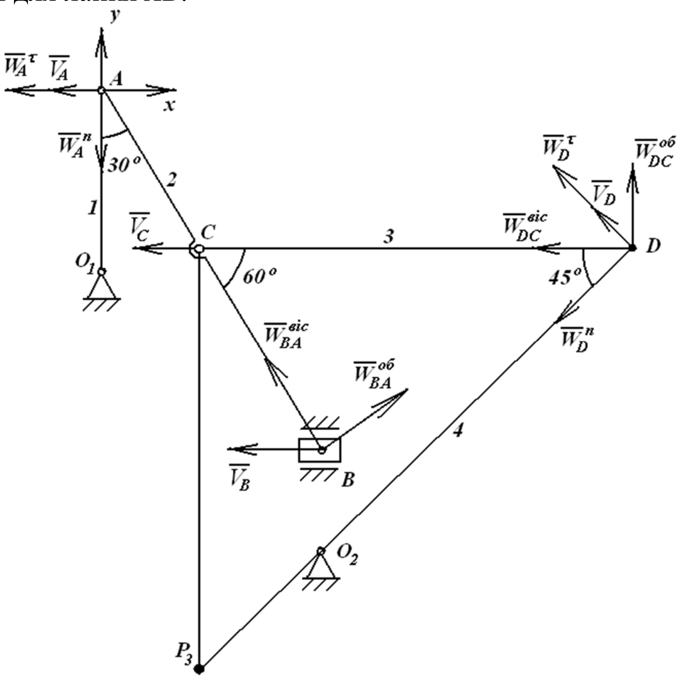

Рисунок 7.2 – Дійсне положення плоского багатоланкового механізму

Вище в прикладах МК К-4 ми вже показували, що за формулами кінематики обертального руху і кінематики точки будемо мати:

$$\omega_1 = \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_1} = (2t-1)|_{t=2} = 3\ c^{-1},$$

$$\varepsilon_1 = \left.\frac{d\omega_1}{dt}\right|_{t=t_1} = 2\ c^{-2};$$

$$v_A = O_1A \cdot \omega_1 = \ell_1 \cdot \omega_1 = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5\ \text{м/с};$$

$$W_A^\tau = O_1A \cdot \varepsilon_1 = \ell_1 \cdot \varepsilon_1 = 0{,}5 \cdot 2 = 1\ \text{м/с}^2;$$

$$W_A^n = O_1A \cdot \varpi_1^2 = \ell_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 9 = 4{,}5\ \text{м/с}^2.$$

2. Оскільки для ланки *AB* відомі напрямки швидкостей точок *A* і *B*, то за правилом двох перпендикулярів можна знайти миттєвий центр

швидкостей P_2 для другої ланки. Оскільки в даному випадку $\bar{v}_A // \bar{v}_B$, то точка P_2 знаходиться в нескінченності, а ланка AB виконує так званий миттєво-поступальний рух. Аналогічна ситуація уже була нами детально розглянута у перших трьох прикладах розділу 6. Тоді у всіх точок ланки AB в даний момент часу однакові за величиною і напрямком швидкості, але як ми вже це показували в прикладах 1-3 розділу 6, різні прискорення. Таким чином і швидкість точки A, і швидкість точки C направлені горизонтально вліво і мають такі модулі:

$$v_A = v_C = v_B = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Миттєва кутова швидкість для ланки 2 буде нульовою, оскільки:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{1{,}5}{\infty} = 0.$$

3. Для стержня CD МЦШ (точка P_3) за відомими напрямками швидкостей точок C (горизонтальна) і D (перпендикулярна до стержня O_2D) знаходиться на перетині продовження відрізку O_2D і вертикальної прямої, проведеною через точку C. Зазначимо, що згідно з заданими кутами α і β пряма CD проведена горизонтально і тоді прямокутний трикутник P_3CD рівнобедрений, а значить:

$$CP_3 = CD = \ell_3 = 0{,}8 \text{ м};\ DP_3 = \sqrt{2\ell_3} = 0{,}8\sqrt{2} = 1{,}12 \text{ м}.$$

Тоді:

$$v_D = v_c\sqrt{2} = 1{,}5 \cdot 1{,}4 = 2{,}1 \text{ м/с},$$

$$\omega_3 = \frac{v_c}{CP_3} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = 1{,}9\ c^{-2},$$

$$\omega_4 = \frac{v_D}{\ell_4} = \frac{2{,}1}{0{,}8} = 2{,}5\ c^{-1}.$$

План швидкостей для усього механізму будуємо як сукупність планів швидкостей кожної окремої ланки. Починаємо із стержня AB, у якого усі точки мають однакові швидкості і тоді на плані швидкостей точки a, b і c, співпадають. Обираємо масштаб швидкостей 1:100 (тобто в 1 см рисунку – 1 м/с швидкостей). Відкладаємо від точки O відрізок Oa і проводимо через точку O під кутом 45° до горизонту промінь, вздовж якого направлена швидкість $\bar{v}_D$, а із точки a – перпендикуляр до ланки CD (в даному випадку вертикальну пряму) і на перетині двох прямих знаходимо точку d, тоді $\overline{Od} = \bar{v}_D$.

4. Для знаходження миттєвого кутового прискорення другої ланки тут треба застосовувати другий спосіб, оскільки прискорення точки A повністю відоме, а також відомий напрямок прискорення точки B (горизонтальна пряма). Формула (2) для цього випадку записується так:

$$\bar{W}_B = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} + \bar{W}_{BA}^{\text{об}} + \underline{\underline{\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}}}\,. \tag{19}$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання», зазначивши наступне: вектор $\bar{W}_B$ відомий лише за напрямком (горизонтальний) і то з точністю до знаку; вектори $\bar{W}_A^n$ і $\bar{W}_A^{\tau}$ відомі повністю; вектор $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ відомий лише за напрямком і то з точністю до знаку (перпендикулярний до AB) і попередньо вважаючи, що ε_2 направлена проти годинникової стрілки показуємо його на рис. 7.2 пунктиром; вектор $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}$ у всіх подібних випадках відомий повністю і направлений завжди від B до A, а за модулем після знаходження ω_2 за допомогою МЦШ, знаходиться як добуток $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_2$ і оскільки у нас $\omega_2 = 0$, то $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}} = 0$.

Проектуємо формулу (19) на вісь By:

$$0 = -\mathrm{W_A^n} + \mathrm{W_{BA}^{об}} \cos 60°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = 2W_A^n = 9 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{\ell} = \frac{9}{1} = 9\ c^{-2}.$$

Знаки плюс означають, що напрямок $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ на рис. 40 відповідає дійсності.

Проектуючи (19) на вісь Bx, знаходимо проекцію прискорення на цю вісь:

$$W_{Bx} = -W_A^{\tau} + W_{BA}^{\text{об}} \sin 60° = -1 + 9 \cdot 0{,}86 = 6{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\bar{W}_B$ направлений горизонтально вправо.

5. Для переходу до третьої ланки нам необхідно спочатку знайти прискорення точки *C* другої ланки. Враховуємо, що оскільки точка *C* є серединою ланки *AB*, то для неї вектор $\overline{W}_{CA}^{\text{об}}$ направлений у той же бік, що і $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$, а за модулем вдвічі менший:

$$W_{CA}^{\text{об}} = \frac{1}{2} W_{BA}^{\text{об}} = 4{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Запишемо для точки *C* формулу (2) так:

$$\overline{W}_C = \underline{\underline{\overline{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{n}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}}}\,. \qquad (20)$$

і провівши структурний аналіз цієї формули за „правилом підкреслювання” бачимо, що усі вектори в правій частині відомі повністю. Тоді, проектуючи (20) на осі *Cx* і *Cy*, знаходимо:

$$W_{cx} = -W_A^{\tau} + W_{CA}^{\text{об}} \sin 60° = -1 + 4{,}5 \cdot 0{,}86 = 2{,}9\,;$$

$$W_{cy} = -W_A^{n} + W_{CA}^{\text{об}} \cos 60° = -4{,}5 + 4{,}5 \cdot 0{,}5 = -2{,}3;$$

$$W_c = \sqrt{W_{cx}^2 + W_{cy}^2} = 3{,}7 \text{ м/с}^2.$$

6. Для визначення миттєвого кутового прискорення третьої ланки тут треба використовувати третій спосіб. Для цього запишемо для $\overline{W}_D$ дві формули. По-перше, вважаючи точку належною до ланки *CD* можемо записати:

$$\overline{W}_D = \overline{W}_C + \overline{W}_{DC}^{\text{об}} + \overline{W}_{DC}^{\text{віс}}.$$

По друге, точка *D* належить кривошипу O_2D і тоді:

$$\overline{W}_D^{\tau} + \underline{\underline{\overline{W}_D^{n}}} = \underline{\underline{\overline{W}_C}} + \overline{W}_{DC}^{\text{об}} + \underline{\underline{\overline{W}_{DC}^{\text{віс}}}}. \qquad (21)$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання»: $\overline{W}_D^{\tau}$ відомий з точністю до знаку за напрямком (перпендикулярно до O_2D) і вважаючи попередньо, що ε_4 направлене проти годинникової стрілки показуємо $\overline{W}_D^{\tau}$ пунктиром на рис. 7.2; вектор $\overline{W}_D^{n}$ відомий повністю (від *D* до O_2), модуль знаходимо так:

$$W_D^{n} = \ell_4 \cdot \omega_4^2 = 0{,}8 \cdot 2{,}5^2 = 5 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{W}_c$ відомий повністю, оскільки в попередньому пункті ми знайшли його проекції, вектор $\overline{W}_{DC}^{\text{об}}$ відомий лише за напрямком з точністю до знаку (перпендикулярний до *DC*) і, вважаючи попередньо ε_3 направленим проти годинникової стрілки показуємо його пунктиром на рис. 7.2; вектор $\overline{W}_{DC}^{\text{віс}}$ направлений від *D* до *C*, а його модуль знаходиться за формулою:

$$\overline{W}_{DC}^{\text{віс}} = \ell_3 \cdot \omega_3^2 = 0{,}8 \cdot 1,9^2 = 2{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Проектуємо формулу (21) на вісь *Cx:*

$$-W_D^\tau \cos 45° - W_D^n \cos 45° = W_{cx} - W_{DC}^{\text{віс}}.$$

Звідси знаходимо :

$$W_D^\tau = \frac{-W_D^n \cos 45° - W_{cx} + W_{DC}^{\text{віс}}}{\cos 45°} = \frac{-5 \cdot 0{,}7 - 2{,}9 + 2{,}9}{0{,}7} = -5 \text{ м/с}^2.$$

На вісь *Cy* будемо мати таке:

$$W_D^\tau \cos 45° - W_D^n \cos 45° = W_{cy} + W_{DC}^{\text{об}}.$$

Звідси:

$$W_{DC}^{\text{об}} = (W_D^\tau - W_D^n) \cdot 0{,}7 - W_{cy} = -7 + 2{,}3 = -4{,}7\ c^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_3 = \frac{W_{DC}^{\text{об}}}{\ell_3} = -\frac{4{,}7}{0{,}8} = -6\ c^{-2};$$

$$\varepsilon_4 = \frac{W_D^\tau}{\ell_4} = -\frac{5}{0{,}8} = -6{,}3\ c^{-2};$$

$$W_D = \sqrt{(W_D^\tau)^2 + (W_D^n)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2} = 7 \text{ м/с}^2.$$

7. Детально опишемо порядок побудови плану прискорень для такого механізму (рис. 7.3).

Спочатку обираємо масштаб прискорень. Це може вдатися не відразу, треба зробити спробу і побачити, чи не є такий масштаб занадто малим або великим, а потім вже обрати оптимальний. Тут обирається масштаб 1:50 (тобто в 1 см креслення – 0,5 м/с^2

прискорення). Обираємо довільний центр O_1 і відкладаємо від нього в обраному масштабі відомі вектори $\overline{W}_A^{\tau}$ і $\overline{W}_A^{n}$.

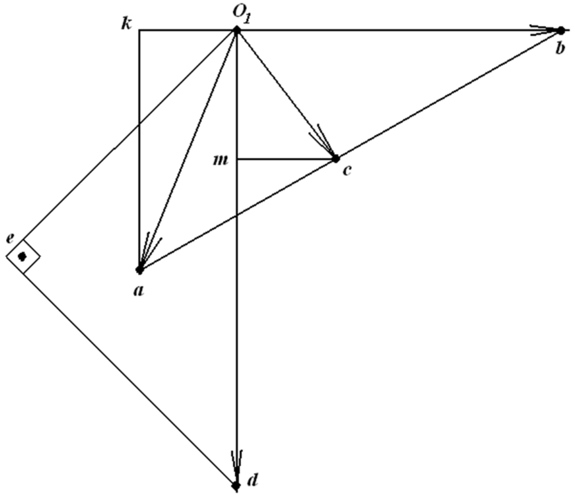

Рисунок 7.3 – План прискорень плоского механізму

Нагадаємо, що план прискорень всього механізму – це сукупність таких планів для кожної окремої ланки. Зараз ми почали будувати план для ланки 2. Відрізок $\overline{Ok} = \overline{W}_A^{\tau}$, з його кінця перпендикулярно до Ok проводимо відрізок $\overline{ka} = \overline{W}_A^{n}$ і з'єднуючи O_1 і a, знаходимо $\overline{O_1a} = \overline{W}_A$. Оскільки напрямок прискорення $\overline{W}_B$ відомий, то проводимо із точки O_1 горизонтальну пряму, на якій знаходиться точка b, а із точки a проводимо пряму перпендикулярну до відрізку AB (як видно із рис. 7.2 – це напрямок невідомого вектора $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$, який утворює кут 30° з горизонтом). На перетині цього променя з раніше проведеною від точки O_1 горизонтальною прямою знаходиться точка b і $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Точка c знаходиться посередині відрізку ab, який відповідає вектору $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ і тоді $\overline{O_1c} = \overline{W}_C$. На цьому закінчується побудова плану прискорень для ланки 2 і починається побудова для ланки 3. Як відомо (дивись формулу (21)), прискорення точки D можна побудувати або із двох векторів $\overline{W}_D^{\tau}$ і $\overline{W}_D^{n}$, або із трьох $\overline{W}_c, \overline{W}_{Dc}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_{Dc}^{\text{віс}}$. Але в обох випадках один із двох (трьох) векторів відомий лише за напрямком. Тому відкладаємо із точки O_1 під кутом 45° до горизонту відрізок $\overline{O_1e} = \overline{W}_D^{n}$ і з кінця цього відрізку, тобто із точки $\boldsymbol{e}$ проводимо промінь перпендикулярний до O_1e (це напрямок вектора $\overline{W}_D^{\tau}$). Із точки $\boldsymbol{c}$ відкладаємо відрізок $\boldsymbol{cm}$, такий , що $\overline{\boldsymbol{cm}} = \overline{W}_{Dc}^{\text{віс}}$ і з точки $\boldsymbol{m}$ проводимо перпендикуляр до $\boldsymbol{cm}$. На перетині перпендикулярів $\boldsymbol{ed}$ і $\boldsymbol{md}$ знаходиться точка $\boldsymbol{d}$ і $\overline{O_1d} = \overline{W}_D$. Вимірюючи відповідні відрізки і враховуючи масштаб, бачимо, що графічні і аналітичні результати практично співпадають.

Приклад 2. Плоский багатоланковий механізм із п'яти елементів, які з'єднанні між собою і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис. 7.4). Довжини стержнів $\ell_1 = 0{,}4$ м, $\ell_2 = 1$ м, $\ell_3 = 0{,}8$м, $\ell_4 = 0{,}2$м. Положення механізму визначається такими заданими кутами $\alpha = 30°, \beta = 60°, \delta = 120°, \theta = 30°$.

Точка C знаходиться на середині відповідного відрізку. За даним рівнянням руху ланки O_1A $\varphi = 2t - 0{,}5t^2$ для моменту часу t_1 = 1 с знайти швидкості і прискорення точок A, B, C, D, а також кутові швидкості і прискорення усіх ланок механізму.

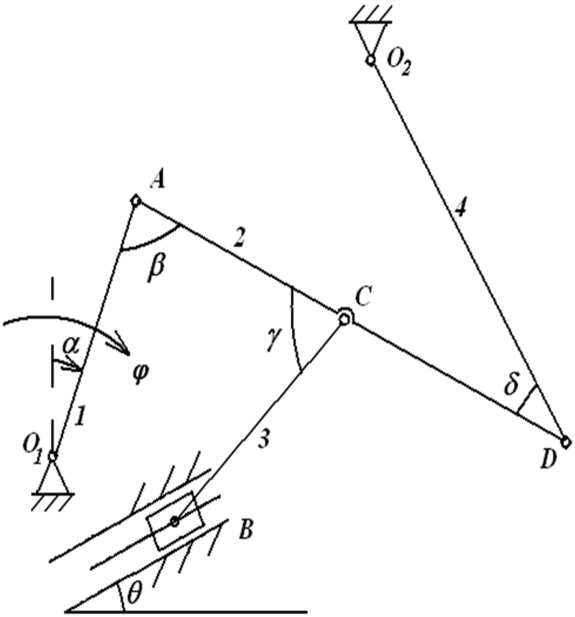

Рисунок 7.4 – Плоский багатоланковий механізм

Розв’язання.

1. Обираючи масштаб довжин 1:10 (тобто в 1 см рисунку 0,1 м довжини ланок механізму) і відкладаючи задані кути, показуємо в масштабі положення механізму в даний момент часу (рис. 7.5).

Оскільки заданим є закон обертання стержня O_1A, то спочатку знаходимо кутову швидкість і кутове прискорення першого стержня:

$$\omega_1 = \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_1} = (2-t)|_{t=t_1} = 1\ c^{-1};$$

$$\varepsilon_1 = \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{t=t_1} = -1\ c^2.$$

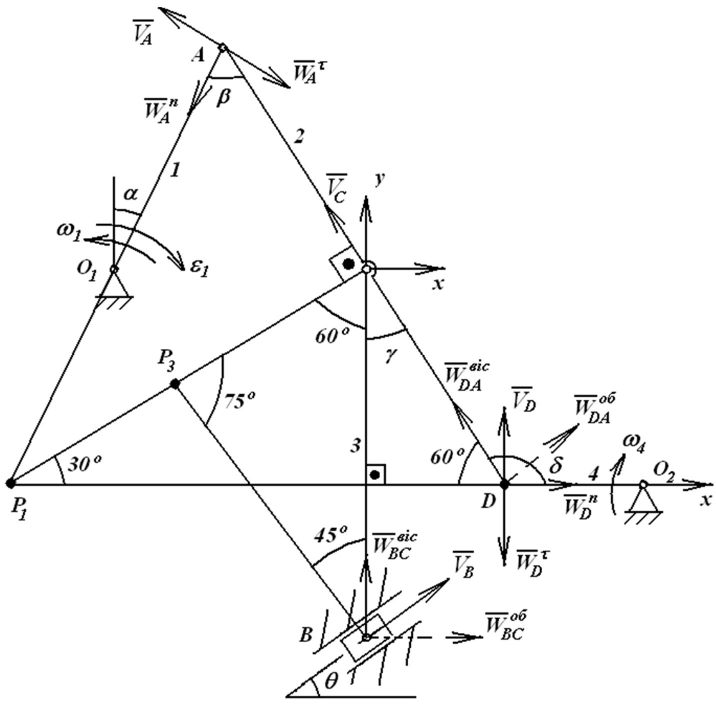

Рисунок 7.5 – Положення механізму в даний момент часу

Знаки в цих результатах означають, що ω_1 направлене проти, а ε_1 – за годинниковою стрілкою і у відповідності до цього показуємо на рис. 7.5 швидкість $\bar{v}_A$ і тангенціальне прискорення точки *A*, яку ми обираємо в якості полюса для ланки *AD*, при цьому:

$$v_A = O_1A \cdot \omega_1 = \ell_1 \cdot \omega_1 = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4\ \text{м/с};$$

$$W_A^\tau = O_1A \cdot \varepsilon_1 = \ell_1 \cdot \varepsilon_1 = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4\ \text{м/с}^2;$$

$$W_A^n = O_1A \cdot \omega_1^2 = \ell_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4\ \text{м/с}^2.$$

Оскільки з побудови видно, що стержень O_2D розташовується горизонтально, а швидкість точки *D* перпендикулярна до O_2D, то за правилом двох перпендикулярів бачимо, що МЦШ для ланки *AD*, тобто точка P_2 знаходиться на перетині продовжень відрізків O_1A і O_2D (рис. 7.5). При цьому в трикутнику AP_2D усі кути рівні 60°, тобто це рівнобічний трикутник, і тоді:

$$AP_2 = DP_2 = AD = \ell_2 = 1\text{м};$$

таким чином:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_A}{\ell_2} = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4\ c^{-1};$$

$$v_D = v_A = 0{,}4\ \text{м/с};$$

$$\omega_4 = \frac{v_D}{O_2D} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2\ c^{-1}.$$

Відстань від точки *C* до P_2 – це висота рівнобічного трикутника і тоді:

$$CP_2 = \ell_2 \sin 60° = 1 \cdot 0{,}86 = 0{,}86\ \text{м};$$

$$v_c = CP_2 \cdot \omega_2 = 0{,}86 \cdot 0{,}4 = 0{,}35\ \text{м/с}.$$

при цьому $\bar{v}_c$ направлена по прямій *CA* (див. рис. 7.5).

2. Тепер для стержня *CB* відомі напрямки швидкостей точок *C* і *B* і за правилом двох перпендикулярів точка P_3 знаходиться на перетині прямої PC_2 і прямої, що проходить через точку *B* під кутом 45° до вертикалі (див. рис. 7.5). В трикутнику CP_3B відомі усі три кути і сторона *BC*, тоді за теоремою синусів знаходимо відстані від точок *B* і *C* до точки P_3:

$$\frac{CP_3}{sin\,45°} = \frac{BC}{sin\,75°};\ \ CP_3 = \frac{sin\,45°}{sin\,75°} \cdot \ell_3 = 0{,}58\ \text{м};$$

$$\frac{BP_3}{sin\,60°} = \frac{BC}{sin\,75°};\ \ BP_3 = \frac{sin\,60°}{sin\,75°} \cdot \ell_3 = 0{,}7\ \text{м}.$$

Тепер знаходимо:

$$\omega_3 = \frac{v_c}{CP_3} = \frac{0{,}35}{0{,}58} = 0{,}6\ c^{-1};$$

$$v_B = BP_3 \cdot \omega_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42\ \text{м/с}.$$

3. Побудуємо план швидкостей для усього механізму (рис. 7.6), як сукупність планів швидкостей окремих ланок. Починаємо з ланки AD і в масштабі швидкостей 1:5 (в 1 см рисунку 0,05 м/с) відкладаємо від довільної точки *O* під кутом 30^{o} до горизонту відрізок довжиною 8 см, і тоді $\overline{Oa} = \bar{v}_A$. Далі проводимо із точки *O* вертикальний промінь, а із точки a промінь, перпендикулярний до ланки AD на схемі механізму. На перетині цих двох прямих знаходиться точка d і $\overline{Od} = \bar{v}_D$.

Точка ***c*** ділить відрізок *Od* плану швидкостей пополам, оскільки точка *C* це середина відрізку *AD* і $\overline{Oc} = v_c$.

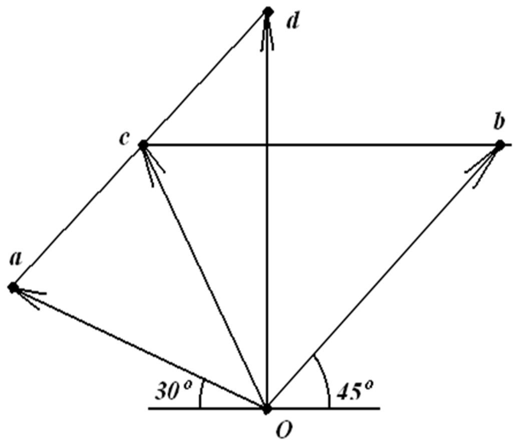

Рисунок 7.6 – План швидкостей для усього механізму

Для знаходження точки b проводимо через точку O промінь під кутом 45° до горизонту, а із точки c пряму, перпендикулярну до стержня CB на схемі механізму і на перетині знаходимо точку b і $\overline{Ob} = \bar{v}_B$. Легко перевірити, що графічні і аналітичні результати практично співпадають.

4. Для знаходження ε_{AD} тут знову, як і у першому прикладі, треба застосовувати третій спосіб.

Запишемо для точки D формулу (2) у такому вигляді:

$$\bar{W}_D = \bar{W}_A^{\tau} + \bar{W}_A^{n} + \bar{W}_{DA}^{\text{об}} + \bar{W}_{DA}^{\text{віс}}.$$

З іншого боку точка D належить кривошипу O_2D і разом з ним обертається навколо нерухомого центру O_2, описуючи коло радіуса ℓ_4 і тоді згідно з формулою кінематики точки можемо записати:

$$\bar{W}_D = \bar{W}_D^{\tau} + \bar{W}_D^{n}.$$

Об'єднуючи ці дві залежності, приходимо до такої формули:

$$\bar{W}_D^{\tau} + \underline{\underline{\bar{W}_D^{n}}} = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} + \bar{W}_A^{n} + \bar{W}_{DA}^{\text{об}} + \underline{\underline{\bar{W}_{DA}^{\text{віс}}}}\,. \tag{22}$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання»: вектор $\bar{W}_D^{\tau}$ відомий лише за напрямком (перпендикулярно до O_2D) з точністю до знаку, але попередньо вважаючи, що ε_4 направлено проти годинникової стрілки показуємо його пунктиром (див. рис. 7.5) і підкреслюємо «хвилькою», вектор $\bar{W}_A^{n}$ відомий повністю – направлений від D до O_2, а за модулем знаходиться так:

$$W_D^{n} = \ell_4 \cdot \omega_4^2 = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8 \text{ м/с}^2;$$

вектори $\bar{W}_A^{\tau}, \bar{W}_A^{n}$, відомі повністю, їх напрямки показані на рис.7.5, а модулі знайдені в пункті 1; вектор $\bar{W}_{DA}^{\text{об}}$ відомий лише за напрямком з точністю до знаку (перпендикулярний до стержня AD) і попередньо вважаючи ε_2 додатнім показуємо цей вектор пунктиром на рис. 7.5 і підкреслюємо «хвилькою» у формулі (22); вектор $\bar{W}_{DA}^{\text{віс}}$ відомий повністю – він направлений від D до A, а його модуль знаходимо так:

$$W_{DA}^{\text{віс}} = \ell_2 \cdot \omega_2^2 = 1 \cdot 0{,}16 = 0{,}16 \text{ м/с}^2.$$

Щоб знайти ε_2, проектуємо векторну рівність (22) на вісь, перпендикулярну до $\bar{W}_A^{\tau}$ – в даному випадку це горизонтальна вісь *Dx* (рис. 7.5):

$$W_D^n = W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^n \cos 60° + W_{DA}^{\text{об}} \cos 30° - W_{DA}^{\text{віс}} \cos 60°,$$

Звідси знаходимо:

$$W_{DA}^{\text{об}} = \frac{W_D^n - W_A^{\tau} \cos 30° + W_A^n \cos 60° + W_{DA}^{\text{віс}} \cos 60°}{\cos 30°} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}4 \cdot 0{,}86 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}16 \cdot 0{,}5}{0{,}86} = \frac{0{,}74}{0{,}86} = 0{,}88 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{W_{DA}^{\text{об}}}{\ell_2} = 0{,}88\ c^{-2}.$$

Знаки плюс в обох результатах означають, що попередньо показаний напрямок вектора $\bar{W}_{DA}^{\text{об}}$ відповідає дійсності, а ε_2 направлене проти ходу годинника.

Тепер проектуємо формулу (22) на вісь *Dy*:

$$W_D^{\tau} = W_A^{\tau} \sin 30° - W_A^n \sin 60° + W_{DA}^{\text{об}} \sin 30° - W_{DA}^{\text{віс}} \sin 60° =$$

$$= -0{,}4 \cdot 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}86 + 0{,}88 \cdot 0{,}5 + 0{,}16 \cdot 0{,}86 = 0{,}02 \text{ м/с}^2;$$

$$W_D = \sqrt{(W_D^{\tau})^2 + (W_D^n)^2} = \sqrt{(0{,}8)^2 + (0{,}02)^2} = 0{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{W_D^{\tau}}{\ell_4} = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1\ c^{-2}.$$

5 Для знаходження прискорення точки *C* запишемо для неї формулу (2) так:

$$\bar{W}_C = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^n}} + \underline{\underline{\bar{W}_{CA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{CA}^{\text{віс}}}}. \qquad (23)$$

І врахуємо, що в правій частині усі вектори – відомі повністю, оскільки вектори $\bar{W}_{CA}^{\text{об}}$ і $\bar{W}_{CA}^{\text{віс}}$ колінеарні векторам $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ і $\bar{W}_{DA}^{\text{віс}}$ відповідно, а за модулем ці нові вектори рівно вдвічі менші ніж вектори для точки *D*, оскільки точка *C* – середина відрізку *AD*.

Проектуючи формулу (23) на горизонтальну і вертикальну вісь, знаходимо:

$$W_{Cx} = W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^{n} \cos 60° + W_{CA}^{\text{об}} \cos 30° - W_{CA}^{\text{віс}} \cos 60° =$$

$$= -0{,}4 \cdot 0{,}86 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}44 \cdot 0{,}86 - 0{,}08 \cdot 0{,}5 = 0{,}48;$$

$$W_{Cy} = -W_A^{\tau} \sin 30° - W_A^{n} \sin 60° + W_{CA}^{\text{об}} \sin 30° + W_{CA}^{\text{віс}} \sin 60° =$$

$$= -0{,}4 \cdot 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}86 + 0{,}44 \cdot 0{,}5 + 0{,}08 \cdot 0{,}86 = -0{,}25;$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \sqrt{0{,}22 + 0{,}06} = 0{,}53 \text{ м/с}^2.$$

6. Для ланки *CB* тепер нам повністю відоме прискорення точки *C* і напрямок руху точки *B*, тому тут треба застосовувати другий спосіб визначення миттєвого кутового прискорення ε_3. Для цього записуємо формулу (2) для точки *B* в такому вигляді:

$$\bar{W}_B = \underline{\underline{\bar{W}_C}} + \underline{\underline{\bar{W}_{BC}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{BC}^{\text{віс}}}}\,. \qquad (24)$$

Проведемо структурний аналіз цієї формули: $\bar{W}_B$ – відомий лише за напрямком з точністю до знаку (під кутом $45°$ до горизонту) і його треба підкреслити «хвилькою», вектор $\bar{W}_C$ відомий повністю, оскільки відомі його горизонтальна і вертикальна складові і справедлива формула:

$$\bar{W}_C = W_{Cx}\bar{\imath} + W_{Cy}\bar{\jmath}.$$

Зазначимо, що тут $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$ – орти горизонтальної і вертикальної осі відповідно і це треба буде враховувати в подальшому при проектуванні формули (24) на інші осі, при цьому треба також пам'ятати про знаки отриманих вище проекцій W_{Cx} і W_{Cy}; вектор $\bar{W}_{BC}^{\text{об}}$ відомий лише за напрямком з точністю до знаку (перпендикулярно до *BC*), попередньо вважаємо, що ε_3 направлене проти годинникової стрілки і відповідно до цього пунктиром показуємо попередній напрямок вектора $\bar{W}_{BC}^{\text{об}}$ (див. рис. 7.5); вектор $\bar{W}_{BC}^{\text{віс}}$ відомий повністю – він направлений від *B* до *C* (див. рис. 7.5), а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_{BC}^{\text{віс}} = \ell_3 \cdot \omega_3^2 = 0{,}8 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}29 \text{ м/с}^2.$$

Тепер для знаходження ε_3 проектуємо векторну рівність (24) на вісь BP_3, яка утворює з горизонтом кут 45°, будемо мати:

$$0 = -W_{Cx} \cdot \cos 45° + W_{Cy} \cdot \sin 45° + W_{BC}^{\text{віс}} \cos 45° - W_{BC}^{\text{об}} \cdot \cos 45°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BC}^{\text{об}} = -W_{Cx} + W_{Cy} + W_{BC}^{\text{віс}} = -0{,}48 - 0{,}25 + 0{,}29 = -0{,}44 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_3 = \frac{W_{BC}^{\text{об}}}{\ell_3} = -\frac{0{,}44}{0{,}8} = -0{,}55\, c^{-2}.$$

Знаки мінус тут означають, що насправді дійсні напрямки $W_{BC}^{\text{об}}$ і ε_3 протилежні тим, які ми попередньо показали, але на рис. 43 ми нічого не змінюємо, лише при проектуванні формули (24) на вісь руху повзуна для якої додатнім напрямком вважаємо рух вгору, це будемо враховувати. Тоді будемо мати наступне:

$$W_{Bx_1} = W_{Cx} \cdot \cos 45° + W_{Cy} \cdot \sin 45 + W_{BC}^{\text{об}} \cdot \cos 45° + W_{BC}^{\text{віс}} \sin 45° =$$
$$= 0{,}7 \cdot (0{,}48 - 0{,}25 - 0{,}44 + 0{,}29) = 0{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що прискорення точки *B* направлене під кутом 45° вгору.

7. Опишемо процедуру побудови плану прискорень для даного механізму (рис. 7.7). Обираємо масштаб прискорень 1:5 (в 1см діаграми – 0,05 м/с^2 прискорення). Відкладаємо від точки O_1 під кутом 60° до горизонту вниз відрізок $\overline{O_1 k}, \overline{O_1 k} = \bar{W}_A^n$. З точки *k* перпендикулярно до $\overline{O_1 k}$ відкладаємо вправо відрізок *ka*, такий що $\overline{ka} = \bar{W}_A^\tau$. З'єднаємо точки O_1 і *a*, тоді $\overline{O_1 a} = \bar{W}_A$. З точки *a* під кутом 60° до горизонту відкладаємо вгору відрізок *am*, при цьому $\overline{am} = \bar{W}_{DA}^{\text{віс}}$. Із точки *m* проводимо промінь, перпендикулярний до ланки *AD* механізму – це напрямок поки що невідомого вектора $\bar{W}_{DA}^{\text{об}}$.

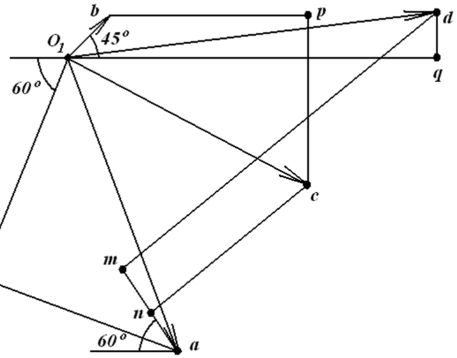

Рисунок 7.7 – Побудова плану прискорень

Із точки O_1 горизонтально вправо відкладаємо відрізок O_1q, який зображає вектор $\overline{W}_D^n$, тобто $\overline{O_1q} = \overline{W}_D^n$. Із точки q проводимо пряму перпендикулярну до ланки O_2D механізму – це напрямок вектора $\overline{W}_D^\tau$. На перетині цього перпендикуляра і проведеного із точки m променя знаходиться точка d, і тоді $\overline{O_1d} = \overline{W}_D$. Щоб побудувати точку C врахуємо, що вектори $\overline{W}_{CA}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_{CA}^{\text{віс}}$ колінеарні векторам $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$ і, оскільки точка C ділить стержень CD пополам, то модулі векторів прискорень для точки C вдвічі менші відповідних векторів для точки D. Тому знаходимо середину відрізку am і позначаємо цю точку як n. Проводимо через точку n пряму паралельну відрізку md і відкладаємо на цій паралелі відрізок $nc = 0{,}5md$. Тоді відрізок O_1c і є прискоренням точки C, тобто $\overline{O_1c} = \overline{W}_c$. Щоб побудувати прискорення точки B відкладаємо від точки c по прямій BC відрізок cp, такий що $\overline{cp} = \overline{W}_{BC}^{\text{віс}}$. Із точки O_1 під кутом 45° до горизонту проводимо промінь, який відповідає напрямку вектора $\overline{W}_B$, а із точки p проводимо пряму, перпендикулярну до відрізку BC (це напрямок вектора $\overline{W}_{BC}^{\text{об}}$) і на перетині цього перпендикуляра і променя з кутом 45° знаходиться точка b, і $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Легко переконатися, що графічні і аналітичні результати практично співпадають, зокрема, вектор $\overline{pb}$ направлений вліво, а на рис. 43 ми попередньо малювали його вправо, але аналітичні розрахунки дали відповідь зі знаком мінус. До речі, якщо побудову плану швидкостей, звичайно, в масштабі виконати перед проведенням аналітичних розрахунків, то ми наперед будемо знати дійсні напрямки усіх прискорень, а аналітичні розрахунки дозволять уточнити числові значення усіх невідомих векторів.

Приклад 3. Для заданого положення плоского багатоланкового механізму (рис. 7.8) знайти швидкості і прискорення точок *A, B, D, E*, а також миттєві кутові швидкості і миттєві кутові прискорення ланок 2, 3 і 4, якщо відомі кутова швидкість $\omega_1 = -2c^{-1}$ і миттєве кутове прискорення $\varepsilon_1 = -3c^{-2}$ кривошипа O_1A. Задані наступні параметри механізму:

$$\ell_1 = 0{,}5\text{ м}, \ell_2 = 0{,}6\text{ м}, \ell_3 = 1\text{ м}, \ell_4 = 0{,}6\text{ м},$$

$$\alpha = 30°, \beta = 30°,$$

$$\gamma = 60°, \varphi = 0,\ \theta = 150°, AD = DB.$$

Розв'язання.

Виходячи із рисунку 7.8 треба спочатку обрати масштаб довжин і відклавши задані кути показати конкретне положення даного механізму. На рис. 7.9 в масштабі 1:10 (тобто в 1 см діаграми знаходиться 0,1 м довжин ланок механізму) побудоване те положення механізму, для якого нам треба провести повне кінематичне дослідження.

Зазначимо, що в даному механізмі є два кривошипи O_1A і O_2B, які обертаються навколо нерухомих центрів O_1 і O_2 відповідно, два стержня *AB* і *DE*, які виконують плоскопаралельний рух і повзун *B*, який рухається зворотно – поступально в своїх направляючих.

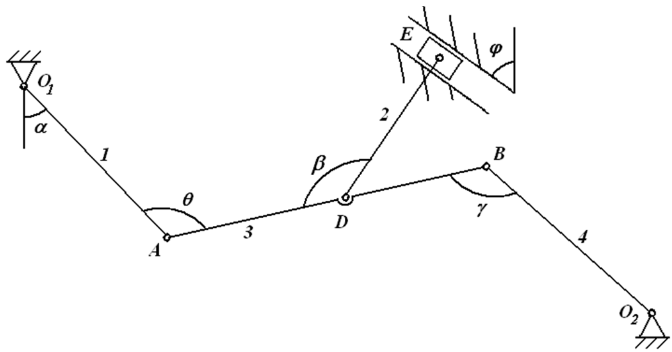

Рисунок 7.8 – Плоский багатоланковий механізм

На відміну від двох попередніх прикладів будемо перед проведенням аналітичних розрахунків будувати план швидкостей і план прискорень. Для цього треба спочатку для точки A з відомою кутовою швидкістю і кутовим прискоренням обчислити і показати на рис. 7.9 швидкість і два її прискорення. Будемо мати:

$$v_A = O_1A \cdot \omega_1 = \ell_1 \cdot \omega_1 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ м/с};$$

$$W_A^\tau = O_1A \cdot \varepsilon_1 = \ell_1 \cdot \varepsilon_1 = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$W_A^n = O_1A \cdot \omega_1^2 = \ell_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2 \text{ м/с}^2.$$

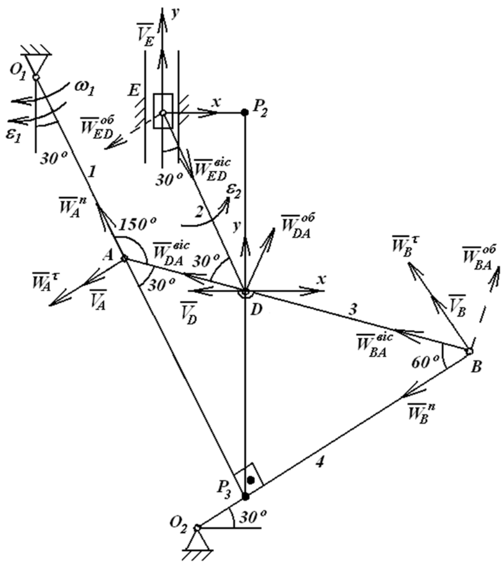

Рисунок 7.8 – Положення механізму для кінематичного дослідження

Зрозуміло, що при знаходженні модулів швидкостей і прискорень ми брали абсолютні величини ω_1 і ε_1, а той факт, що за умовою задачі ці величини задані зі знаком мінус означає, що і кутова швидкість і кутове прискорення направлені за годинниковою стрілкою і у відповідності до цього побудовані вектори $\bar{v}_A$ і $\overline{W}_A^\tau$ на рис. 7.9.

1. План швидкостей будуємо в наступному порядку. Обираємо масштаб швидкостей 1:20 (тобто в 1 см діаграми – 0,2 м/с швидкостей). Із довільної точки O під кутом 30° до горизонту вниз відкладаємо відрізок Oa, такий що $\overline{Oa} = \bar{v}_A$. Далі з точки O під кутом

$120°$ до горизонту проводимо вгору промінь, який відповідає напрямку швидкості точки *B*, тобто перпендикулярний до ланки O_2D механізму (рис. 7.10), а із точки a плану швидкостей проводимо промінь, який перпендикулярний до ланки *AB* механізму, тобто утворює кут $30°$ з вертикаллю, і відповідає напрямку вектора $\bar{v}_{BA}$.

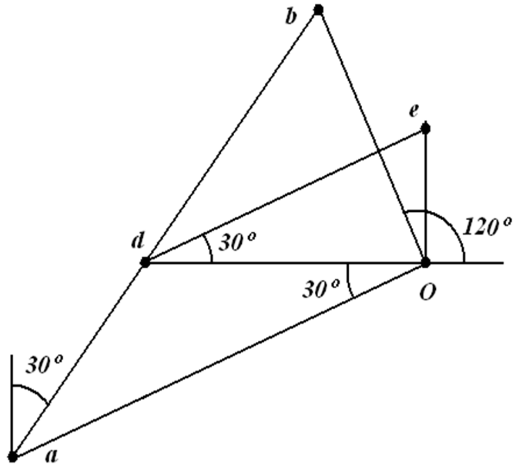

Рисунок 7.10 – План швидкостей

На перетині таких двох променів із *O* і до a знаходиться точка b (рис. 7.10) і $\overline{Ob} = \bar{v}_B$. Оскільки *AD* = *DB*, то точка d знаходиться посередині відрізку ab на плані швидкостей і $\overline{Od} = \bar{v}_D$. Для знаходження швидкості точки *E* проводимо із точки *O* вертикальну пряму, а із точки d промінь, який перпендикулярний, до ланки *DE* тобто утворює кут $30°$ з горизонтом.

На перетині останніх двох прямих знаходиться точка e і $\overline{Oe} = \bar{v}_E$. Миттєві кутові швидкості усіх ланок з використанням побудованого плану швидкостей тепер можна знайти за формулами:

$$\omega_3 = \frac{ab}{\ell_3} \cdot \omega_2 = \frac{de}{\ell_2} \cdot \omega_4 = \frac{Ob}{\ell_4}.$$

2. Щоб знайти швидкості точок і кутові швидкості ланок аналітичним способом, побудуємо за правилом двох перпендикулярів миттєві центри швидкостей для третьої і другої ланки, на рис. 7.9 вони показані як P_3 і P_4. Проаналізуємо отримані трикутники ABP_3 і DP_2E.

Як легко бачити, обидва трикутники є прямокутними, причому в обох випадках прямим буде кут при вершині P_3 і P_2 відповідно. Тоді:

$$AP_3 = AB \cdot cos\,30° = \ell_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot 0{,}86 = 0{,}86 \text{ м};$$

$$BP_3 = AP \cdot sin\,30° = \ell_3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ м};$$

$$\omega_3 = \frac{v_A}{AP_3} = \frac{1}{0{,}86} = 1{,}2\ c^{-1};$$

$$v_B = \omega_3 \cdot BP_3 = 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6 \text{ м/с}.$$

Легко бачити, що трикутник BP_3D є рівнобічним, оскільки у нього усі кути по 60°, але тоді:

$$v_D = v_B = 0{,}6 \text{ м/с}.$$

В прямокутному трикутнику DP_2E кут P_2DE рівний 30°, тоді:

$$P_2E = DE \cdot sin\,30° = \ell_2 \cdot 0{,}5 = 06 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 \text{ м};$$

$$P_2D = DE \cdot cos\,30° = \ell_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}6 \cdot 0{,}86 = 0{,}52 \text{ м};$$

$$\omega_2 = \frac{v_D}{P_2D} = \frac{0{,}6}{0{,}52} = 1{,}2\ c^{-1};$$

$$v_E = P_2E \cdot \omega_2 = 0{,}3 \cdot 1{,}2 \text{ м/с}.$$

Крім того, знаючи v_B, знайдемо кутову швидкість ланки O_2B, яка знадобиться нам при визначенні прискорень:

$$\omega_4 = \frac{v_B}{\ell_4} = \frac{0{,}6}{0{,}6} = 1\ c^{-1}.$$

3. Для визначення прискорень точок механізму і миттєвих кутових прискорень ланок графічним методом побудуємо план прискорень, попередньо обчисливши за допомогою знайдених вище двома методами кутових швидкостей вісеспрямовані прискорення, будемо мати:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = \ell_3 \cdot \omega_3^2 = 1{,}44 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{ED}^{\text{віс}} = \ell_2 \cdot \omega_2^2 = 0{,}86 \text{ м/с}^2;$$

$$W_B^n = \ell_4 \cdot \omega_4^2 = 0{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Обираємо масштаб прискорень 1:40 (тобто в 1 см діаграми знаходиться 0,4 м/с^2 прискорення). Відкладаємо із точки O_1 під кутом 30^o до вертикалі відрізок $\overline{O_1k} = \overline{W}_A^n$. Із точки k перпендикулярно до O_1k вліво відкладаємо відрізок ka, такий що $\overline{ka} = \overline{W}_A^\tau$. З’єднуємо точку O_1 з точкою a. Тоді $\overline{O_1a} = \overline{W}_A$ (рис. 7.11).

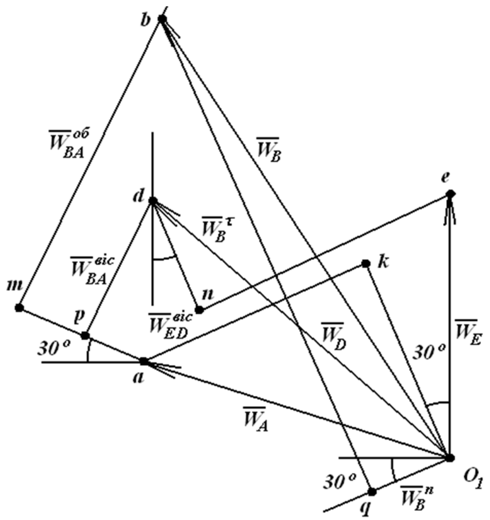

Рисунок 7.11 – План прискорень

Із точки a під кутом 30^o до горизонту вліво відкладаємо відрізок am, такий, що $a\overline{m} = \overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$, а потім проводимо через точку m перпендикуляр до ланки AB механізму (це напрямок поки що невідомого вектору $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$). Із точки O_1 під кутом 30^o до горизонту вліво і вниз відкладемо відрізок O_1q, такий що $\overline{O_1q} = \overline{W}_B^n$, а через точку q проведемо перпендикуляр до ланки O_2D механізму (це напрямок поки що невідомого вектора $\overline{W}_B^\tau$). На перетині останніх двох перпендикулярів знаходиться точка b, така що $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Щоб знайти точку d на плані прискорень, враховуємо що у нас $AD = DB$, тоді вектори $\overline{W}_{DA}^{\text{віс}}$ і $\overline{W}_{DA}^{\text{об}}$ колінеарні вектором $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$ відповідно, а їх модулі вдвічі менші. Позначаємо через *p* середину відрізку *am* і проводимо через *p* відрізок *pd*, паралельний *mb* і вдвічі коротший, тоді $\overline{O_1 d} = \overline{W}_D$.

Щоб знайти точку *e* проводимо із точки O_1 вертикальну пряму, відкладаємо із точки *d* під кутом 30° до вертикалі вниз відрізок *dn*, такий що $\overline{dn} = \overline{W}_{ED}^{\text{віс}}$, а потім проводимо через точку *n* перпендикулярно до ланки *DE* механізму до його перетину з проведеною через точку O_1 вертикальною прямою в точці *e*, і тоді $\overline{O_1 e} = \overline{W}_E$. Знімаємо з плану прискорень усі необхідні нам довжини в сантиметрах, множимо на 0,4 і отримуємо прискорення точок, а також $W_{BA}^{\text{об}}$, $W_{DE}^{\text{об}}$ і W_D^{τ}, в метрах за секунду в квадраті. Після цього знаходимо кутові прискорення усіх ланок за формулами:

$$\varepsilon_3 = \frac{mb}{\ell_3}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{ne}{\ell_2}, \qquad \varepsilon_4 = \frac{qb}{\ell_4}.$$

4. Отримаємо усі прискорення аналітичним методом. Запишемо для точки *B* формулу (2) в такому вигляді:

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A^{\tau} + \overline{W}_A^{n} + \overline{W}_{BA}^{\text{об}} + \overline{W}_{BA}^{\text{віс}}.$$

З іншого боку прискорення тієї ж точки можна подати у такому вигляді:

$$\overline{W}_B = \overline{W}_B^{\tau} + \overline{W}_B^{n}.$$

Об'єднуючі ці дві формули, приходимо до такої векторної залежності:

$$\underset{\sim}{\overline{W}_B^{\tau}} + \underline{\underline{\overline{W}_B^{n}}} = \underset{\sim}{\overline{W}_A^{\tau}} + \underset{\sim}{\overline{W}_A^{n}} + \underline{\underline{\overline{W}_{BA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}}}. \qquad (25)$$

Проведемо структурний аналіз формули (25) за «правилом підкреслювання»: вектор $\overline{W}_B^{\tau}$ відомий за напрямком з точністю до знаку (він перпендикулярний до кривошипу O_2B, але невідомо вгору чи вниз направлений), попередньо вважаючи ε_4 направленим проти годинникової стрілки відповідно на рис. 7.9 попередньо показуємо $\overline{W}_A^{\tau}$ вгору, модуль цього вектора невідомий, тому підкреслюємо $\overline{W}_A^{\tau}$ «хвилькою», вектор $\overline{W}_B^{n}$ відомий повністю, його точний напрямок показано на рис. 7.9, а модуль знаходиться за формулою:

$$W_B^n = O_2B \cdot \omega_4^2 = \ell_4 \cdot \omega_4^2 = 0{,}6 \cdot 1^2 = 0{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вектори $\bar{W}_A^{\tau}$ і $\bar{W}_A^{n}$ відомі повністю (рис. 7.9); вектор $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ невідомий за величиною, а за напрямком відомий з точністю до знаку – показуємо його пунктиром, перпендикулярно до АВ у бік додатного напрямку миттєвого кутового прискорення ε_{AB}; Вектор $\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}$ направлений від *B* до *A* (рис. 7.9), а його модуль обчислюємо так:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \ell_3 \cdot \omega_3^2 = 1 \cdot 1{,}2^2 = 1{,}44 \text{ м/с}^2.$$

Тепер спроектуємо векторну формулу (25) на пряму O_2B, будемо мати:

$$-W_B^n = -W_A^{\tau} + W_{BA}^{\text{об}} \cdot sin\,60° - W_{BA}^{\text{віс}} \cdot cos\,60°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = \frac{-W_B^n + W_A^{\tau} + W_{BA}^{\text{віс}} \cdot cos\,60°}{sin\,60°} =$$

$$= \frac{-0{,}6 + 1{,}5 + 1{,}44 \cdot 0{,}5}{0{,}86} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_3 = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{AB} = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{\ell_3} = \frac{2}{1} = 2c^{-2}.$$

Знаки плюс в обох результатах означають, що наші попередні припущення про напрямки $\bar{W}_{BA}^{\text{об}}$ і ε_3 відповідають дійсності.

Тепер проектуємо формулу (25) на пряму P_3O_1, будемо мати :

$$W_B^{\tau} = W_A^n + W_{BA}^{\text{об}} \cdot cos\,60° + W_{BA}^{\text{віс}} \cdot sin60° =$$

$$= 2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1{,}44 \cdot 0{,}86 = 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_4 = \frac{W_B^{\tau}}{O_2B} = \frac{W_B^{\tau}}{\ell_4} = \frac{4{,}2}{0{,}6} = 7\ c^{-2};$$

$$W_B = \sqrt{(W_B^{\tau})^2 + (W_B^n)^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{18} = 4{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Щоб знайти прискорення точки D, запишемо для неї формулу (2) в такому вигляді:

$$\bar{W}_D = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{DA}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{DA}^{\text{віс}}}}\,. \qquad (26)$$

У цій формулі вже всі вектори в правій частині відомі і за величиною, і за напрямком (рис. 7.9), оскільки:

$$W_{DA}^{\text{об}} = AD \cdot \varepsilon_3 = 0{,}5\ell_3 \cdot \varepsilon_3 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{DA}^{\text{віс}} = AD \cdot \omega_3^2 = 0{,}5\ell_3 \cdot \omega_3^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}2 = 0{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Тоді проектуючи формулу (26) на показані на рис.7.9 осі Dx і Dy, будемо мати:

$$W_{Dx} = -W_A^{\tau} \cos 30° - W_A^{n} \sin 30° + W_{DA}^{\text{об}} \sin 30° - W_{DA}^{\text{віс}} \cos 30° =$$

$$= -1{,}5 \cdot 0{,}86 - 2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 - 0{,}7 \cdot 0{,}86 = -2{,}4;$$

$$W_{Dy} = -W_A^{\tau} \sin 30° + W_A^{n} \cos 30° + W_{DA}^{\text{об}} \cos 30° + W_{DA}^{\text{віс}} \sin 30° =$$

$$= -1{,}5 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}86 + 1 \cdot 0{,}86 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 2{,}2;$$

$$W_D = \sqrt{W_{Dx}^2 + W_{Dy}^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 2{,}2^2} = 3{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Щоб знайти прискорення точки E і миттєве кутове прискорення ε_2 ланки DE запишемо тут формулу (2) таким чином:

$$\utilde{\bar{W}_E} + \underline{\underline{\bar{W}_D}} + \utilde{\bar{W}_{ED}^{\text{об}}} + \underline{\underline{\bar{W}_{ED}^{\text{віс}}}}. \qquad (27)$$

Структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання» дає такі результати: вектор $\bar{W}_E$ буде направленим вертикально, але невідомо догори чи донизу, його модуль також невідомий (підкреслюється «хвилькою»); вектор $\bar{W}_D$ визначили вище повністю за допомогою його проекцій; вектор $\bar{W}_{ED}^{\text{об}}$ знаємо лише за напрямком з точністю до знаку («хвилька») і, як завжди, попередньо вважаємо ε_2 додатнім (направленим проти годинникової стрілки) і відповідно пунктиром показуємо попередній напрям вектора $\bar{W}_{ED}^{\text{об}}$ (рис. 7.9); вектор $\bar{W}_{ED}^{\text{віс}}$ направлений від точки E до точки D (рис. 7.9), а модуль знаходимо так:

$$\bar{W}_{ED}^{\text{віс}} = DE \cdot \omega_2^2 = \ell_2 \cdot \omega_2^2 = 0{,}6 \cdot 1{,}2^2 = 0{,}85 \text{ м/с}^2.$$

Послідовно проектуючи векторну рівність (27) на показані на рис. 7.9 осі *Ex* і *Ey*, будемо мати:

$$0 = W_{Dx} - W_{ED}^{\text{об}} \cos 30° + W_{ED}^{\text{віс}} \sin 30°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{ED}^{\text{об}} = \frac{W_{Dx} + W_{ED}^{\text{віс}} \sin 30°}{\cos 30°} = \frac{-2{,}4 + 0{,}85 \cdot 0{,}5}{0{,}86} = -2{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_2 = \frac{W_{ED}^{\text{об}}}{ED} = \frac{W_{ED}^{\text{об}}}{\ell_2} = -\frac{2{,}3}{0{,}6} = -3{,}8\, c^{-2}.$$

Знаки мінус в обох результатах означають, що попередньо показані на рис. 7.9 напрямки ε_2 і $\overline{W}_{ED}^{\text{об}}$ не відповідають дійсності і насправді ε_2 направлене за годинниковою стрілкою, а $\overline{W}_{ED}^{\text{об}}$ перпендикулярно до *ED* але вгору, а не вниз. Але ми не будемо нічого змінювати на рис. 7.9, лише при проектуванні формули (27) на вісь *Ey* будемо брати числове значення для $W_{ED}^{\text{об}}$ зі знаком мінус :

$$W_{Ey} = W_{Dy} - W_{ED}^{\text{об}} \cdot \sin 30° - W_{ED}^{\text{віс}} \cdot \cos 30° =$$

$$= 2{,}2 + 2{,}3 \cdot 0{,}5 - 0{,}85 \cdot 0{,}86 = 2{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\overline{W}_E$ направлений, як і вектор $\overline{V}_E$, догори, тобто рух повзуна є прискореним.

Приклад 4. Для заданого положення плоского багатоланкового механізму (рис. 7.12) знайти швидкості і прискорення точок *A, B, D, E*, а також миттєві кутові швидкості і миттєві кутові прискорення 1, 2 і 3, якщо відомі швидкість і прискорення повзуна *B* $v_B = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $W_B = 1{,}5 \text{ м/с}^2$. Задані наступні параметри механізму:

$$\ell_1 = 0{,}6 \text{ м}, \ell_2 = 0{,}8 \text{ м}, \ell_3 = 1\text{м}, \alpha = 60°;\ \beta = 60°;\ \gamma = 60°;$$
$$\varphi = 90°;\ \theta = 30°;\ AD = DB.$$

Розв'язання.

Виходячи із заданих лінійних розмірів механізму і рис. 7.12 необхідно обрати масштаб довжин і відклавши конкретні задані кути і довжини показати положення механізму в даний момент часу.

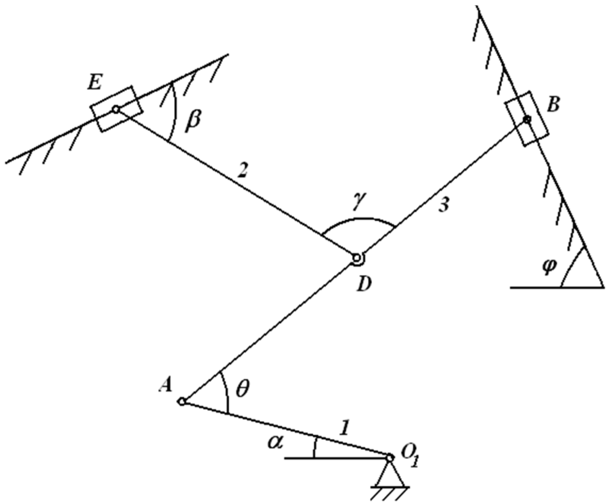

Рисунок 7.12 – Схема механізму

В даній задачі доцільно обрати масштаб 1:10 (тобто в 1 см рисунку знаходиться 0,1 м довжин ланок механізму) і тоді на рис. 7.13 показане те положення механізму, для якого нам треба провести повне кінематичне дослідження.

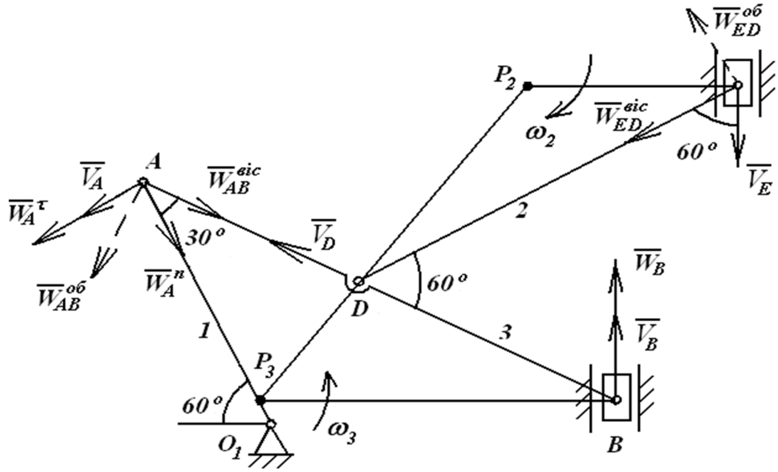

Рисунок 7.13 – Положення механізму для повного кінематичного дослідження

Зазначимо, що на відміну від трьох попередніх прикладів, в даному випадку із п’яти ланок механізму лише три стержні, зате вперше не один, а два повзуни, причому в якості заданих кінематичних характеристик виступають швидкість і прискорення одного із повзунів, а саме повзуна B.

Крім того, під час побудови виявилося, що обидва повзуни рухаються у вертикальних направляючих. Стержень O_1A обертається навколо нерухомого центру O_1, а стержні AB і DE виконують плоскопаралельний рух.

1. Для знаходження лінійних і кутових швидкостей елементів механізму за правилом двох перпендикулярів знаходимо МЦШ для другого і третього стержнів (точки P_2 і P_3 на рис. 7.13). При цьому легко показати, що трикутник BP_3A рівнобедрений з кутом при вершині P_3 рівним 120° і, оскільки $AD = 0{,}5$ м, $\ell_3 = 0{,}5$ м:

$$AP_3 = BP_3 = \frac{\ell_3}{2\,cos\,30°} = \frac{\ell_3}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \text{ м};$$

$$v_A = v_B = 1 \text{ м/с},\;\; v_D = 0{,}5 v_B = 0{,}5 \text{ м/с};$$

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BP_3} = \frac{1}{0{,}58} = 1{,}72\; c^{-1};$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{O_1A} = \frac{v_A}{\ell_1} = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}66\; c^{-1}.$$

2. Трикутник DP_2E також рівнобедрений, з кутом при вершині P_2 рівним 120°. Тоді:

$$DP_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\ell_2}{cos\,30°} = \frac{\ell_2}{\sqrt{3}} = \frac{\ell_2\sqrt{3}}{3} = \frac{0{,}8\sqrt{3}}{3} = 0{,}46 \text{ м};$$

$$v_E = v_D = 0{,}5 \text{ м/с};\; \omega_2 = \frac{v_D}{DP_2} = \frac{0{,}5}{0{,}46} = 1{,}1\; c^{-1};$$

Для порівняння з цими аналітичними результатами на рис. 7.14 в масштабі 1:20 (тобто в 1 см рисунку – 0,2 м/с) побудовано план швидкостей. Для цього із точки O площини відкладаємо вертикально вгору відрізок Ob такий, що $\overline{Ob} = \bar{v}_B$. Потім із точки O під кутом 30° до горизонту проводимо промінь, який відповідає напрямку невідомої за величиною швидкості точки A, а із точки b проводимо пряму, яка перпендикулярна до стержня *AB* на схемі механізму (під кутом 30° до вертикалі).

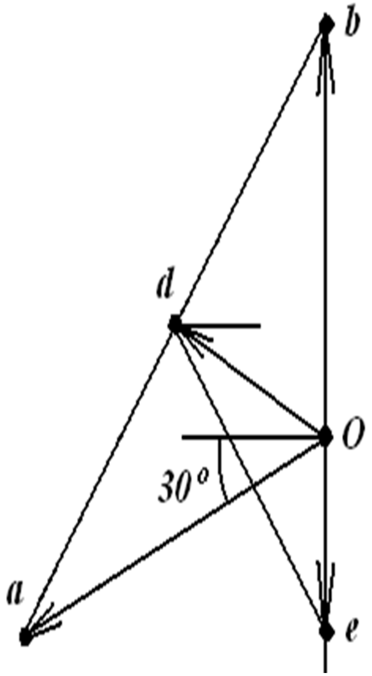

Рисунок 7.14 – План швидкостей

На перетині таких двох прямих знаходиться точка *a* і тоді $\overline{Oa} = \bar{v}_A$. Як це відомо із теорії і видно тепер із порівняння рис. 7.13 і 7.14, трикутники AP_3B і *aOb* подібні. Точка *d* знаходиться посередині відрізку *ab*, тоді. $\overline{Od} = \bar{v}_D$ Тепер із точки *O* проводимо вертикальну пряму, а із точки *d* – промінь, який перпендикулярний до прямої *DE* на рис. 7.13 і на перетині двох прямих знаходимо точку *e* (рис. 7.14). Знову очевидною є подібність трикутників *dOe* і DP_2E. Бачимо, що графічні і аналітичні результати практично співпадають.

3. Для знаходження прискорення точки *A* і миттєвого кутового прискорення ланок 1 і 3 запишемо для точки *A* формулу (2) в такому вигляді:

$$\bar{W}_A = \bar{W}_B + \bar{W}_{AB}^{\text{об}} + \bar{W}_{AB}^{\text{віс}}.$$

З іншого боку справедлива формула:

$$\bar{W}_A^{\tau} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} = \underline{\underline{\bar{W}_B}} + \bar{W}_{AB}^{\text{об}} + \underline{\underline{\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}}}\,. \qquad (27)$$

Структурний аналіз цієї формули за «правилом підкреслювання» показує, що тут два вектори $\bar{W}_A^{\tau}$ і $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ відомі лише за напрямком і то з точністю до знаку, тому, попередньо вважаючи, що і ε_1, і ε_3 направлені проти годинникової стрілки, показуємо їх на рис. 7.13 пунктирами в точці A. Напрямки трьох інших векторів $\bar{W}_A^{n}, \bar{W}_B$ і $\bar{W}_{AB}^{\text{віс}}$ відомі точно, показані на рис. 7.13 суцільними лініями, при цьому за умовою задачі відомо, що $W_B = 1{,}5$ м/с^2, а модулі двох інших векторів після знаходження ω_1 і ω_3 обчислюємо так:

$$W_A^{n} = OA \cdot \omega_1^2 = \ell_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}6 \cdot (1{,}66)^2 = 1{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{AB}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_3^2 = \ell_3 \cdot \omega_3^2 = 1 \cdot (1{,}72)^2 = 2{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Тепер для знаходження $W_{AB}^{\text{об}}$ проектуємо векторну формулу на напрямок, який перпендикулярний до вектора $\bar{W}_A^{\tau}$, тобто на пряму AO_1:

$$W_A^{n} = -W_B \cdot \cos 30° + W_{AB}^{\text{об}} \cdot \cos 60° + W_{AB}^{\text{віс}} \cdot \sin 60°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{AB}^{\text{об}} = 2\left(W_A^{n} + W_B \cdot \cos 30° - W_{AB}^{\text{віс}} \cdot \sin 60°\right) =$$

$$= 2 \cdot (1{,}6 + 1{,}5 \cdot 0{,}86 - 2{,}96 \cdot 0{,}86) = 0{,}68 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{W_{AB}^{\text{об}}}{AB} = \frac{W_{AB}^{\text{об}}}{\ell_3} = \frac{0{,}68}{1} = 0{,}68\ c^{-2}.$$

Зазначимо, що знаки плюс, які ми тут отримали свідчать про те, що наші попередні припущення про напрямки $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ і ε_3 відповідають дійсності. Тепер з врахуванням отриманої повної інформації про вектор $\bar{W}_{AB}^{\text{об}}$ спроектуємо векторну формулу (27) на напрямок вектора $\bar{v}_A$, тобто перпендикулярний до напрямку AO_1. Будемо мати:

$$\varepsilon_1 = \frac{W_A^{\tau}}{O_1A} = \frac{W_A^{\tau}}{\ell_1} = \frac{1{,}65}{0{,}6} = -2{,}6\ c^{-2}.$$

Знаки мінус тут означають, що насправді ε_1 направлене за годинниковою стрілкою, а показаний пунктиром на рис. 7.13 напрямок вектора $\overline{W}_A^{\tau}$ треба змінити на протилежний. Насправді на рисунку можна нічого не змінювати, тому що все уже враховано знаком мінус у числових результатах.

4. Для знаходження прискорення точки *D* запишемо для неї формулу (2) так:

$$\overline{W}_D = \underline{\underline{\overline{W}_B}} + \underline{\underline{\overline{W}_{DB}^{\text{об}}}} + \underline{\underline{\overline{W}_{DB}^{\text{віс}}}}\,. \qquad (28)$$

При цьому врахуємо, що вектори $\overline{W}_{DB}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_{DB}^{\text{віс}}$ повністю визначаються із таких залежностей:

$$\overline{W}_{DB}^{\text{об}} = 0{,}5\overline{W}_{AB}^{\text{об}},\ \ \overline{W}_{DB}^{\text{віс}} = 0{,}5\overline{W}_{AB}^{\text{віс}}.$$

Але тоді в правій частині формули (29) усі вектори повністю відомі і, вважаючи, що осі *Dx* і *Dy* горизонтальна вправо і вертикальна вгору, проектуємо залежність (28) на ці осі:

$$W_{Dx} = -W_{DB}^{\text{об}} \cos 60° + \ W_{DB}^{\text{віс}} \cos 30° = -0{,}34 \cdot 0{,}5 + 1{,}48 \cdot 0{,}86 = 1{,}1\,;$$

$$W_{Dy} = W_B - W_{DB}^{\text{об}} \sin 60° - W_{DB}^{\text{віс}} \sin 30° =$$

$$= 1{,}5 - 0{,}34 \cdot 0{,}86 - 1{,}48 \cdot 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$W_D = \sqrt{W_{Dx}^2 + W_{Dy}^2} = \sqrt{1{,}21 + 0{,}25} = 1{,}2\ \text{м/с}^2.$$

5. Для знаходження прискорення точки *E* і миттєвого кутового прискорення ланки 2 запишемо для точки *E* формулу (2) в такому вигляді:

$$\overline{W}_E = \underline{\underline{\overline{W}_D}} + \overline{W}_{ED}^{\text{об}} + \underline{\underline{\overline{W}_{ED}^{\text{віс}}}}\,. \qquad (29)$$

У цій формулі вектори $\overline{W}_E$ і $\overline{W}_{ED}^{\text{об}}$ відомі з точністю до знаку лише за напрямком, причому попередньо вважаємо, що ε_2 направлене проти годинникової стрілки і у відповідності до цього пунктиром на рис. 7.13 показуємо напрямок вектора $\overline{W}_{ED}^{\text{об}}$. Вектор $\overline{W}_E$ направлений вертикально, але куди саме буде визначено в процесі обчислень. Вектор $\overline{W}_D$ є знайденим, а вектор $\overline{W}_{ED}^{\text{віс}}$ спрямований від *E* до *D*, а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_{ED}^{\text{віс}} = ED \cdot \omega_2^2 = \ell_2 \cdot \omega_2^2 = 0{,}8 \cdot 1{,}21 = 0{,}97 \text{ м/с}^2.$$

Тепер проектуємо формулу (29) на горизонтальну *Ex* і вертикальну *Ey* осі координат:

$$O = W_{Dx} - W_{ED}^{\text{об}} \cdot sin\, 30° - W_{ED}^{\text{віс}} \cdot cos\, 30°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{ED}^{\text{об}} = 2\left(W_{Dx} - W_{ED}^{\text{віс}} \cdot 0{,}86\right) = 2(1{,}1 - 0{,}83) = 0{,}54 \text{ м/с}^2.$$

Тоді будемо мати:

$$\varepsilon_2 = \frac{W_{ED}^{\text{об}}}{ED} = \frac{W_{ED}^{\text{об}}}{\ell_2} = \frac{0{,}54}{0{,}8} = 0{,}7\ c^{-2}.$$

Знаки плюс означають правильність попереднього припущення.

Проектування формули (29) на направлену вертикально догори вісь *Ey* приводить до такого результату:

$$W_E = W_{Dy} + W_{ED}^{\text{об}} \cdot cos\, 30° - W_{ED}^{\text{віс}} \cdot sin\, 30° =$$

$$= 0{,}5 + 0{,}54 \cdot 0{,}86 - 0{,}48 = 0{,}48 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\overline{W}_E$ направлений вертикально догори, тобто протилежно вектору $\bar{v}_E$ на рис. 7.13.

Для порівняння з аналітичними результатами на рис. 7.15 наведено план прискорень для даної задачі, який побудовано в масштабі 1:30 (тобто в 1 см діаграми – 0,3 м/с^2). Із довільної точки O_1 площини відкладаємо вертикально догори відрізок O_1b, такий, що $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$. Відкладаємо з точки b під кутом 60° до вертикалі відрізок bk, що відповідає $\overline{W}_{AB}^{\text{віс}}$, а потім проводимо через точку k промінь, перпендикулярний до bk (це напрямок невідомого вектора $\overline{W}_{AB}^{\text{об}}$). Потім із точки O_1 під кутом 30° до вертикалі відкладаємо відрізок O_1n такий, що $\overline{O_1n} = \overline{W}_A^n$, а через точку n проводимо перпендикуляр до відрізку O_1A (це напрямок невідомого вектора $\overline{W}_A^{\tau}$).

На перетині останніх двох перпендикулярів знаходиться точка a і $\overline{O_1a} = \overline{W}_A$. Звернемо увагу на те, що відрізок *na* відповідає вектору $\overline{W}_A^{\tau}$ і показує дійсний напрямок цього вектору, а саме вгору і вправо, а при аналітичному розв’язанні ми направили попередньо$\overline{W}_A^{\tau}$ вліво і вниз і отримали результат зі знаком мінус.

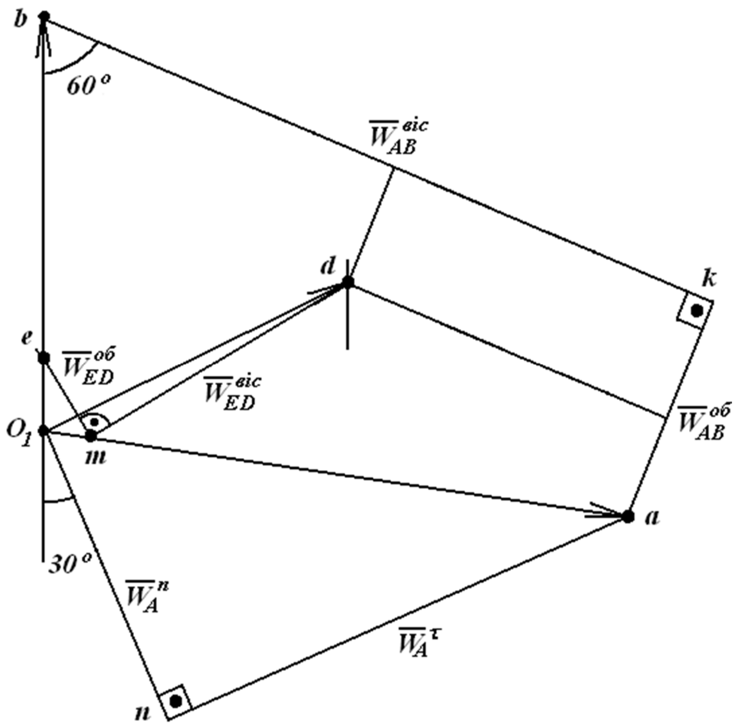

Рисунок 7.15 – План прискорень

Аналогічно, з плану прискорень бачимо, що відрізок *ka*, який відповідає $\overline{W}_{AB}^{\text{об}}$ направлений вліво і вниз, саме так ми попередньо направили вектор $\overline{W}_{AB}^{\text{об}}$ на рис. 7.13 і отримали результат зі знаком плюс. Усе це означає, що побудувавши план прискорень у складних задачах ми будемо мати, можливо не дуже точні числові значення прискорень, але дійсні їх напрямки. Що стосується уточнень для величин прискорень, то їх можна отримати аналітичними методами. Для побудови точки *d* на плані прискорень треба врахувати формули, які ми записали після формули (29), і тоді, провівши через середину відрізку *ka* пряму, паралельну *bk*, а через середину відрізку *bk* пряму, паралельну відрізку *ka*, на перетині цих двох прямих знайдемо точку d і $\overline{O_1 d} = \overline{W}_D$. Враховуємо, що точка *d* знаходиться на вертикальній прямій, відкладаємо від точки *d* під кутом 60° до вертикалі і вліво – вниз відрізок *dm*, такий, що $\overline{dm} = \overline{W}_{ED}^{\text{віс}}$, проводимо через точку *m* перпендикуляр до відрізку DE і на перетині цього перпендикуляра і вертикального променя із точки O_1 знаходимо точку e і $\overline{O_1 e} = \overline{W}_E$.

Приклад 5. Плоский механізм (рис. 7.16) складається з п'яти елементів: чотирьох стержнів і повзуна, які з'єднанні між собою шарнірами. Визначити для заданого положення механізму швидкості і прискорення точок B, D і E, а також миттєві кутові швидкості і кутові прискорення стержнів 2, 3 і 4, якщо:

$$\ell_1 = 0{,}6 \text{ м}, \ell_2 = 0{,}8 \text{ м}, \ell_3 = 1\text{м}, \ell_4 = 0{,}4 \text{ м}, \alpha = 120°; \beta = 30°$$
$$\gamma = 30°; \varphi = 90°;\ \theta = 150°; AD = BD;\ \omega_1 = 2c^{-1};\ \varepsilon_1 = 4c^{-2}.$$

Розв'язання.

Враховуючі задані довжини стержнів і величини кутів і виходячи з рис. 7.16 обираємо масштаб довжин 1:10 (тобто в 1 см рисунку – 0,1 м довжин стержнів) і будуємо конкретне положення механізму (рис. 55).

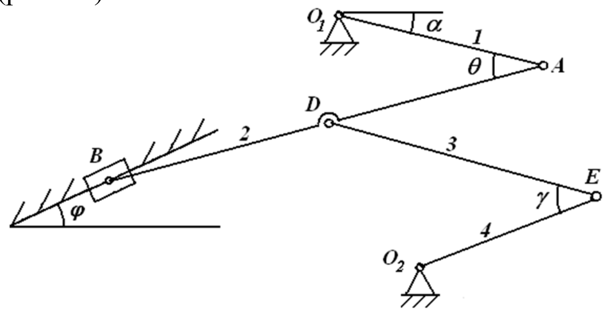

Рисунок 7.16 – Плоский механізм з п'яти елементів

1. Для знаходження лінійних і кутових швидкостей елементів механізму за правилом двох перпендикулярів знаходимо миттєві центри швидкостей для ланок 2 (точка P_2) і 3 (точка P_3) на рис. 7.17. Легко бачити, що трикутник BP_2A рівнобедрений з кутом 120° при вершині P_2, тоді:

$$BP_2 = AP_2 = \frac{\ell_2}{2\cos 30°} = \frac{0{,}8}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}8\sqrt{3}}{3} = 0{,}46 \text{ м};$$

$$v_B = v_A = \ell_1 \cdot \omega_1 = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2 \text{ м};$$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{1{,}2}{0{,}46} = 2{,}6\ c^{-1};$$

$$P_2D = P_2A \cdot sin\,30° = 0{,}5 \cdot 0{,}46 = 0{,}23\text{ м};$$

$$v_D = P_2D \cdot \omega_2 = 0{,}23 \cdot 2{,}6 = 0{,}6\text{ м/с}.$$

Трикутник EDP_3 також рівнобедрений з кутом 120° при вершині D. Але тоді:

$$DP_3 = ED = \ell_3 = 1\text{ м};$$

$$EP_3 = 2 \cdot \ell_3 \cdot cos\,30° = \ell_3\sqrt{3} = \sqrt{3} = 1{,}73\text{ м};$$

$$\omega_3 = \frac{v_D}{DP_3} = \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6\;c^{-1}.$$

$$v_E = EP_3 \cdot \omega_3 = 1{,}73 \cdot 0{,}6 = 1{,}04\text{ м/с};$$

$$\omega_4 = \frac{v_E}{\ell_4} = \frac{1{,}04}{0{,}4} = 2{,}5\;c^{-1}.$$

Для порівняння з цими аналітичними результатами на рис. 7.18 побудовано в масштабі 1:20 (тобто в 1 см рисунку – 0,2 м/с швидкості) план швидкостей для даного механізму.

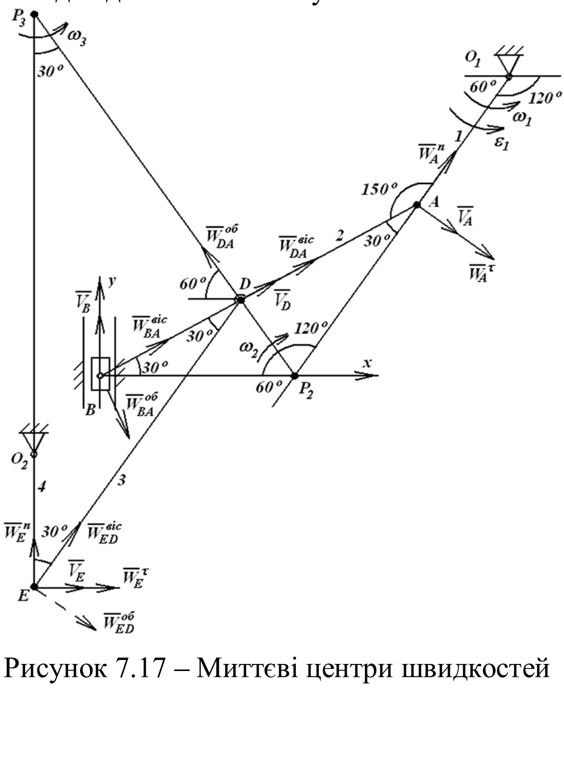

Рисунок 7.17 – Миттєві центри швидкостей

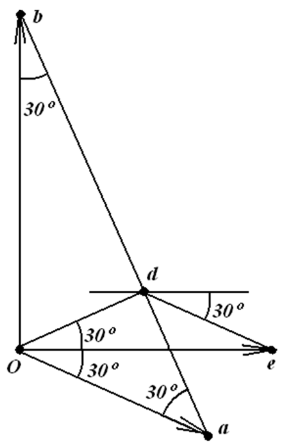

Рисунок 7.18 – План швидкостей

Для цього із довільної точки O площини під кутом 30° до горизонту вправо і вниз відклали відрізок Oa довжиною 6 см, тоді $\overline{Oa} = \bar{v}_A$. Потім із точки O провели вертикальний промінь, який відповідає напрямку невідомої швидкості точки B, а із точки a нашого плану швидкостей проводимо пряму, перпендикулярну до стержня AB механізму (це напрямок невідомого вектора $\bar{v}_{BA}$). На перетині вертикального променя із O і такого перпендикуляра знаходиться точка b і $\overline{Ob} = \bar{v}_B$. Оскільки в механізмі виконується умова $AD = BD$, то точка d знаходиться посередині відрізку ab, тоді $\overline{Od} = \bar{v}_D$ (рис. 7.18). Щоб побудувати точку e проводимо із точки O горизонтальний промінь (це напрямок невідомого вектора $\bar{v}_E$), а із точки d проводимо перпендикуляр до відрізку ED (це пряма, яка утворює кут 30° з горизонтом, як кути із взаємно перпендикулярними сторонами, що видно із рис. 7.17). На перетині таких двох прямих знаходиться точка e, тоді $\overline{Oe} = \bar{v}_E$. Легко переконатися, що графічні результати практично співпадають з отриманими вище аналітичними.

2. Для знаходження прискорення точки B і миттєвого кутового прискорення ε_2 тут треба застосовувати другий спосіб визначення ε . Для цього запишемо формулу (2) в такому вигляді:

$$\bar{W}_B = \underline{\underline{\bar{W}_A^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{W}_A^{n}}} + \bar{W}_{BA}^{\text{об}} + \underline{\underline{\bar{W}_{BA}^{\text{віс}}}} \,. \qquad (30)$$

Згідно із структурним аналізом цієї формули за «правилом підкреслювання» бачимо, що вектор $\overline{W}_B$ відомий лише за напрямком (вертикальною прямою) і то, лише з точністю до знаку (невідомо догори чи донизу), вектори $\overline{W}_A^\tau$ і $\overline{W}_A^n$ відомі повністю, їх напрямки показані на рис. 7.17, а модулі через задані параметри задачі знаходимо так:

$$W_A^\tau = O_1A \cdot \varepsilon_1 = \ell_1 \cdot \varepsilon_1 = 0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$W_A^n = O_1A \cdot \omega_1^2 = \ell_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4 \text{ м/с}^2;$$

вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ перпендикулярний до AB, невідомий за модулем, і, попередньо вважаючи, що ε_2 направлене проти годинникової стрілки, показуємо $\overline{W}_{BA}^{\text{об}}$ на рис. 7.17 пунктиром, вектор $\overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$ відомий повністю, він направлений від точки B до точки A, а його модуль знаходимо так:

$$W_{BA}^{\text{віс}} = AB \cdot \omega_2^2 = \ell_2 \cdot \omega_2^2 = 0{,}8 \cdot (2{,}6)^2 = 5{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Спочатку спроектуємо обидві частини векторної формули (30) на вісь Bx (рис. 7.17):

$$0 = W_A^\tau \cdot cos\,30° + W_A^n \cdot cos\,60° + W_{BA}^{\text{об}} \cdot cos\,60° + W_{BA}^{\text{віс}} \cdot cos\,30°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{BA}^{\text{об}} = -2(W_A^\tau \cdot cos\,30° + W_A^n \cdot cos\,60° + W_{BA}^{\text{віс}} \cdot cos\,30°) =$$

$$= -2(2{,}4 \cdot 0{,}86 + 2{,}4 \cdot 0{,}5 + 5{,}4 \cdot 0{,}86) = -15{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{AB} = \frac{W_{BA}^{\text{об}}}{\ell_2} = -\frac{15{,}8}{0{,}8} = -20\ c^{-2}.$$

Знаки мінус тут означають, що наше попереднє припущення про напрямок ε_2 за годинниковою стрілкою, а вектор $W_{BA}^{\text{об}}$ направлений перпендикулярно до низу, а вгору. Але ми поки що, нічого не будемо змінювати на рис. 7.17, але при другому проектуванні формули (30) на вісь By будемо підставляти значення$W_{BA}^{\text{об}}$ зі знаком мінус.

Тепер проектуємо (30) на вісь By, будемо мати:

$$W_{By} = -W_A^\tau \cdot sin\,30° + W_A^n \cdot sin\,60° - W_{BA}^{\text{об}} \cdot sin\,60° + W_{BA}^{\text{віс}} \cdot sin\,30° =$$

$$= -2{,}4 \cdot 0{,}5 + 2{,}4 \cdot 0{,}86 - (-15{,}8) \cdot 0{,}86 + 5{,}4 \cdot 0{,}5 = 17{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\overline{W}_B$ направлений вертикально догори, тобто повзун *B* рухається в даний момент прискорено.

3. Для знаходження $\overline{W}_D$ запишемо для точки *D* формулу (2) так:

$$\overline{W}_D = \overline{W}_A^{\tau} + \overline{W}_A^{n} + \overline{W}_{DA}^{\text{об}} + \overline{W}_{DA}^{\text{віс}}, \tag{31}$$

і врахуємо, що із умови *AD* = *BD* випливає, що за модулем:

$$W_{DA}^{\text{об}} = 0{,}5 \cdot W_{BA}^{\text{об}} = 0{,}5 \cdot 15{,}8 = 7{,}9 \text{ м/с}^2,$$

$$W_{DA}^{\text{віс}} = 0{,}5 \cdot W_{BA}^{\text{віс}} = 0{,}5 \cdot 5{,}4 = 2{,}7 \text{ м/с}^2;$$

при цьому на рис. 7.17 тепер вже показані точні напрямки обох векторів.

Проектуємо формулу (31) послідовно на осі *Bx* і *By*

$$W_{Dx} = W_A^{\tau} \cdot cos\,30° + W_A^{n} \cdot cos\,60° - W_{DA}^{\text{об}} \cdot cos\,60° + W_{DA}^{\text{віс}} \cdot cos\,30° =$$

$$= 2{,}4 \cdot 0{,}86 + 2{,}4 \cdot 0{,}5 - 7{,}9 \cdot 0{,}5 + 2{,}7 \cdot 0{,}86 = 1{,}6 \text{ м/с}^2$$

$$W_{Dy} = -W_A^{\tau} \cdot sin\,30° + W_A^{n} \cdot sin\,60° + W_{DA}^{\text{об}} \cdot sin\,60° + W_{DA}^{\text{віс}} \cdot sin\,30° =$$

$$= -2{,}4 \cdot 0{,}5 + 2{,}4 \cdot 0{,}86 + 7{,}9 \cdot 0{,}86 + 2{,}7 \cdot 0{,}5 = 8{,}7 \text{ м/с}^2;$$

$$W_D = \sqrt{W_{Dx}^2 + W_{Dy}^2} = \sqrt{1{,}6^2 + 8{,}7^2} = 8{,}8 \text{ м/с}^2.$$

4. Для знаходження ε_3 і $\overline{W}_E$ треба застосувати третій спосіб для визначення миттєвого кутового прискорення. Для цього згідно з формулою (2) можемо записати:

$$\overline{W}_E = \overline{W}_D + \overline{W}_{ED}^{\text{об}} + \overline{W}_{ED}^{\text{віс}}.$$

З іншого боку із кінематики обертального руху справедливе таке подання:

$$\overline{W}_E = \overline{W}_E^{\tau} + \overline{W}_E^{n}.$$

Шляхом об'єднання цих двох формул приходимо до наступної залежності:

$$\overline{W}_E^{\tau} + \underline{\underline{\overline{W}_E^{n}}} = \underline{\underline{\overline{W}_D}} + \overline{W}_{ED}^{\text{об}} + \underline{\underline{\overline{W}_{ED}^{\text{віс}}}}. \tag{32}$$

Тут вектор $\overline{W}_E^{n}$ відомий повністю, він показаний на рис. 7.17, а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_E^n = O_2 \cdot E \cdot \omega_4^2 = \ell_4 \cdot \omega_4^2 = 0{,}4 \cdot (2{,}5)^2 = 2{,}5 \text{ м/с}^2,$$

вектор $\bar{W}_E^\tau$ перпендикулярний до O_2E і попередньо вважаючи, що ε_4 направлене проти годинникової стрілки, показуємо на рис. 7.17 його пунктиром; вектор $\bar{W}_D^n$ повністю визначений своїми проекціями; вектор $\bar{W}_{ED}^{\text{об}}$ перпендикулярний до ED і, попередньо вважаючи ε_3 направленим проти годинникової стрілки, показуємо його пунктиром на рис. 7.17, вектор $\bar{W}_{ED}^{\text{віс}}$ показаний на рис. 7.17, а його модуль знаходимо так:

$$W_{ED}^{\text{віс}} = ED \cdot \omega_3^2 = \ell_3 \cdot \omega_3^2 = 1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}36 \text{м/с}^2.$$

Спроектуємо формулу (32) на вісь Ey

$$W_E^n = W_{Dy} - W_{ED}^{\text{об}} \cdot cos\, 60° + W_{ED}^{\text{віс}} \cdot cos\, 30°.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{ED}^{\text{об}} = 2\left(W_{Dy} + W_{ED}^{\text{віс}} \cdot cos\, 30° - W_E^n\right) = 2(8{,}7 + 0{,}36 \cdot 0{,}86 - 2{,}5) =$$

$$= 12 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{W_{ED}^{\text{об}}}{ED} = \frac{W_{ED}^{\text{об}}}{\ell_3} = \frac{12}{1} = 12\ c^{-2}.$$

Знаки плюс тут означають, що попереднє припущення про напрямки ε_3 і $\bar{W}_{ED}^{\text{об}}$ відповідає дійсності. З врахуванням отриманого значення $W_{ED}^{\text{об}}$ проектуємо формулу (32) на вісь *Ex:*

$$W_E^\tau = W_{Dx} + W_{ED}^{\text{віс}} \cdot sin\, 30° + W_{ED}^{\text{об}} \cdot sin\, 60° =$$
$$= 1{,}6 + 0{,}36 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 0{,}86 = 12{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\varepsilon_4 = \frac{W_E^\tau}{O_2E} = \frac{W_E^\tau}{\ell_4} = \frac{12{,}1}{0{,}4} = 30\ c^{-2};$$

$$W_E = \sqrt{(W_E^\tau)^2 + (W_E^n)^2} = \sqrt{12{,}1^2 + 2{,}5^2} = 12{,}3 \text{ м/с}.$$

5. Для порівняння побудуємо план прискорень для даного механізму (рис. 7.19). Обираємо масштаб 1:100 (тобто в 1 см діаграми – 1 м/с^2 прискорень). Оскільки $W_A^\tau = W_A^n = 2{,}4$, то із довільної точки O_1 під кутом 15° до горизонту вправо відкладаємо прискорення

$W_A = 2{,}4\sqrt{2}$м/с – відрізок O_1a. Із точки O_1 проводимо вертикальний промінь – це напрямок, на якому знаходиться поки що невідома точка b, а із точки a під кутом 30° до горизонта вправо відкладаємо відрізок am, такий що $\overline{am} = \overline{W}_{BA}^{\text{віс}}$.

Тепер через точку m проводимо перпендикуляр до стержня AB і там, де цей перпендикуляр перетинає вертикальний промінь знаходиться точка b і $\overline{O_1b} = \overline{W}_B$.

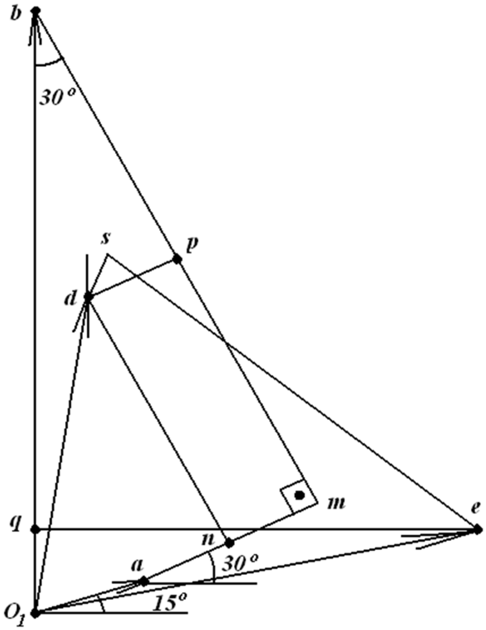

Рисунок 7.19 – План прискорень

Для знаходження точки d ділимо відрізок am пополам точкою n, а відрізок mb пополам ділимо точкою p і проводимо через n пряму, паралельну mb, а через p – пряму, паралельну am. На перетині цих двох прямих знаходимо точку d і $\overline{O_1d} = \overline{W}_D$. Відкладаємо із точки O_1 відрізок O_1q, такий, що $\overline{O_1q} = \overline{W}_E^n$ і проводимо через точку q горизонтальну пряму (це напрямок вектора $\overline{W}_E^\tau$). Із точки d під кутом 30° до вертикалі відкладаємо відрізок ds, такий що $\overline{ds} = \overline{W}_{ED}^{\text{віс}}$. Проводимо через точку s пряму, перпендикулярну до ланки ED, і в місці перетину цієї прямої і горизонталі, проведеної через точку q, знаходиться точка e, і $\overline{O_1 e} = \overline{W}_E$.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Частина 1. – Запоріжжя, 2007. – 140 с.

2. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І. Теоретична механіка. Ч. ІІІ. Додаткові матеріали до конспекту лекцій. – Запоріжжя, 2020. – 235 с.