

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
(для студентів заочної форми навчання)
та РГР (для студентів денної форми навчання)
з вищої математики
(скорочена форма навчання)
(2 семестр, 2 частина)

2016

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт (для студентів заочної форми навчання) та РГР (для студентів денної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання) (2 семестр, 2 частина) / Укл.: : Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016 – 62 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Комп'ютерна верстка

Давиденко С.І.

Відповідальний за випуск:

Килимник І.М., к.т.н., доц.

Затверджено на засіданні кафедри вищої
та загальної математики ЗНТУ
Протокол № 7 від 23.03.2016 р.
Затверджено НМК М-ф-ту
Протокол № 5 від 26.03.2016

ЗМІСТ

	Стор
Правила оформлення та виконання контрольної роботи(РГР)	4
Контрольна робота (РГР) № 4.1. Елементи теорії функції комплексної змінної. Елементи операційного числення.	5
1. Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі	5
Елементи теорії функції комплексної змінної. Елементи операційного числення	
1.1 Елементи теорії функції комплексної змінної	5
1.1.1 Комплексні числа та дії над ними.	5
1.1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині	8
1.1.3 Функції комплексної змінної	10
1.1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної.	14
Аналітичні функції.	
1.1.5 Інтегрування функції комплексної змінної	18
1.1.6 Степеневі ряди функції комплексної змінної. Ряд Лорана.	22
1.1.7 Класифікація нулів та ізольованих особливих точок функції комплексної змінної	26
1.1.8 Лишки та їх застосування	28
1.2 Елементи операційного числення	33
1.2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал	33
1.2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теореми.	34
1.2.3 Знаходження оригінала по зображенню.	37
1.2.4 Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.	40
2 Індивідуальні завдання	42
3 Довідковий матеріал	63
Література	65

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (РГР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати номер контрольної роботи (РГР), назву дисципліни, з якої виконується контрольна робота (РГР), номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.

3. В контрольній роботі (РГР) повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: дві останні цифри шифру треба поділити на 30. Остача від ділення відповідає номеру задачі в завданні.

Якщо остача дорівнює нулю, то студент розв'язує 30 задачу завдання.

5. Контрольна робота (РГР) подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольна робота (РГР), виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА (РГР) № 4.1

Елементи теорії функції комплексної змінної. Елементи операційного числення

1. Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі: «Елементи теорії функції комплексної змінної. Елементи операційного числення»

1.1 Елементи теорії функції комплексної змінної

1.1.1 Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z називається число, яке має вигляд:
 $z = x + iy$, де x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$;
 $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – уявна
 частина комплексного числа. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається
спряженим комплексному числу z .

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини
 XOY з координатами (x, y) , або вектором $\bar{r}$, який має напрямок з
 початку координат т. О в точку (x, y) . Довжина вектора
 $\bar{r}$ називається **модулем комплексного**

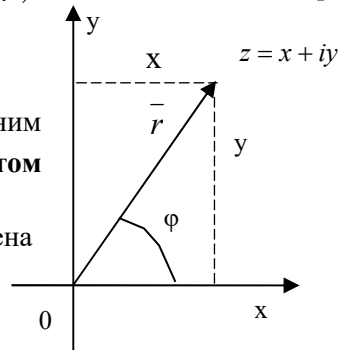
числа: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Кут φ , утворений вектором з додатним
 напрямом вісі Ox називається **аргументом**
комплексного числа: $\varphi = \operatorname{Arg} z$

Величина $\operatorname{Arg} z$ багатозначна і визначена
 з точністю до доданка кратного 2π :

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

При $z = 0$ величина $\operatorname{Arg} z$ не має змісту.



Головне значення аргументу позначається $\arg z$ і визначається
 умовами: $-\pi < \arg z \leq \pi$, при цьому

$$\arg z = \begin{cases} \arcsin \frac{y}{x}, \text{ якщо } x > 0, y - \text{будь яке}; \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, y > 0; \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, y < 0; \\ 0, \text{ якщо } x > 0, y = 0; \\ \pi, \text{ якщо } x < 0, y = 0; \end{cases}$$

Форми комплексного числа:

1) **Алгебраїчна форма:** $z = x + iy$

2) **Тригонометрична форма:** $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, якщо в алгебраїчній формі зробити заміну $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$.

3) **Показникова форма:** $z = re^{i\varphi}$, застосовуючи формулу Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, можна перейти від тригонометричної форми до показникової.

Дії над комплексними числами:

Маємо

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

1) **Рівність:** $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2$

2) **Додавання:** $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

3) **Добуток:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

4) Частка:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Маємо $z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

1) Піднесення до натурального степеня n :

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = re^{in\varphi};$$

Формула Муавра: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

2) Корінь n -го степеня (n — ціле):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{z} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}. \quad \text{Матимемо } n$$

різних значень $\sqrt[n]{z}$, поклавши $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Задача 1. Задані комплексні числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + 2i$,

$$z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i. \text{ Знайти: а) } z_1 + z_2; \text{ б) } z_1 - z_2; \text{ в) } z_1 \cdot z_2; \text{ г) } \frac{z_1}{z_2};$$

Записати: д) z_2 в тригонометричній формі; е) z_3 у показниковій формі.

Розв'язування. а) $z_1 + z_2 = (2 + i) + (-2 + 2i) = 3i$;

$$\text{б) } z_1 - z_2 = (2 + i) - (-2 + 2i) = 4 - i;$$

$$\text{в) } z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (-2 + 2i) = -4 + 4i - 2i + 2i^2 = -6 + 2i;$$

$$\text{г) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{-2+2i} \cdot \frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{-4-4i-2i-2i^2}{4-4i^2} = \frac{-2-6i}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i.$$

д) $z_2 = -2 + 2i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x = -2$, $y = 2$. Тоді

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2};$$

$$x < 0, y > 0 \Rightarrow \arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрична форма z_2 :

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

е) $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x = 2$; $y = -2\sqrt{3}$. Тоді

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4;$$

$$x > 0, y < 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2} \right) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Показникова форма z_3 :

$$z_3 = 4e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

1.1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині

Якщо рівняння $F(z) = 0$ визначає лінію на комплексній площині, а нерівності $F(z) \leq 0$ і $F(z) \geq 0$ – частину комплексної площини, точки якої задовольняють цим нерівностям, та із урахуванням того, що:

$$z = x + iy, \operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y, \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, |z - z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3),$$

рівняння $F(z) = 0$ отримаємо, як рівняння лінії $F(x, y) = 0$, а нерівності $F(z) \leq 0$ і $F(z) \geq 0$ – область, яка складається із множин точок (x, y) .

Задача 2. Визначити та побудувати лінію, задану рівнянням

$$\operatorname{Re}(z^2 + z) = 2 \operatorname{Im} z$$

Розв'язування. Знайдемо $z^2 + z = (x + iy)^2 + (x + iy) =$
 $= x^2 - y^2 + 2xyi + x + iy = (x^2 + x - y^2) + i(2xy + y)$. Тоді

$\operatorname{Re}(z^2 + z) = x^2 + x - y^2$, $\operatorname{Im} z = y$. Підставимо знайдене у рівняння:

$$x^2 + x - y^2 = 2y \quad \text{або} \quad x^2 + x - y^2 - 2y = 0.$$

Доповнимо до повних квадратів по x і y ліву частину рівняння:

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - (y^2 + 2y + 1) + 1 = 0 \quad \text{або}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y + 1)^2 = -\frac{3}{4} \quad \left| : -\frac{3}{4} \right.$$

$$-\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + \frac{(y + 1)^2}{\frac{3}{4}} = 1 \quad \text{- рівняння рівнобічної гіперболи з центром}$$

$$O_1\left(-\frac{1}{2}, -1\right); a = b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 3. Яку множину точок на комплексній площині визначає нерівність

$$\begin{cases} 1 < |z - 1 - 2i| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Розв'язування. Враховуючи, що $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, маємо: $|z - 1 - 2i| = |(x - 1) + i(y - 2)| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$. Перша нерівність системи має вигляд: $1 < (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$. На площині – це кільце, яке обмежене концентричними колами радіусів $R=1$ (не включаючи саме коло) та $R=2$. Друга нерівність системи $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ визначає частину площини між прямими, що виходять з точки O і утворюють з віссю Ox кути $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{4}$ (не включаючи пряму $y=x$, $x > 0$). Зробимо рисунок.

Множина D точок комплексної площини називається **областю**, якщо вона задовольняє умовам:

б) будь які дві точки множини D можна сполучити ламаною, що повністю складається із точок множини D (властивість зв'язності).

Точки, які задовольняють умову а) означення області, називаються точками області (**внутрішніми точками області**).

Зовнішня точка області D – точка комплексної площини, яка не належить множині D разом із деяким кругом, що містить у собі цю точку.

Межова точка області D – точка, що не належить цій області, але будь-який достатньо малий окіл указаної точки містить точки області D .

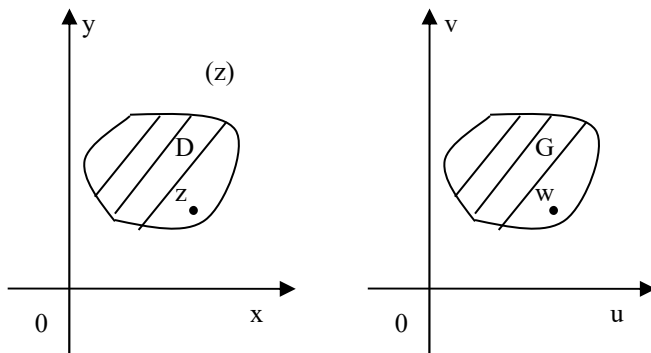
Межа області – сукупність усіх межових точок області D .

Замкнена область – множина точок, що складається з області D та її межі.

Область D називається **однозв'язною**, якщо будь-яка проста замкнена крива, що цілком належить D , може бути стягнута в точку за допомогою неперервної деформації без виведення з області D (в іншому випадку – область **многозв'язна**). З цього визначення випливає, що межа многозв'язної області не може складатися з однієї замкненої кривої.

Нехай D – однозв'язна область і L – її межа. Виберемо на L деяку точку і, починаючи з цієї точки, будемо обходити межу L . **Додатним напрямом обходу** межі області вважається таким, при якому область залишається весь час зліва.

Нехай дано дві площини комплексних чисел $z = x + iy$ і $w = u + iv$.



Якщо кожному числу $z \in D$ за деяким законом поставлено у відповідність певне комплексне число $w \in G$, то кажуть, що на множині D задано **однозначну функцію комплексної змінної**, яка відображає множину D у множину $G : w = f(z)$.

Множина D називається **множиною визначення** функції $f(z)$. Якщо кожна точка множини G є значенням функції, то G – **множина значень** цієї функції, або образ множини D , заданий за допомогою функції $f(z)$. Якщо кожному $z \in D$ відповідає кілька різних значень w , то функція $w = f(z)$ називається **багатозначною**.

Функцію $f(z)$ можна записати у вигляді:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad \text{де } u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) - \text{функції дійсних змінних } x \text{ і } y.$$

Основні елементарні функції комплексної змінної

1) *Дробово-раціональна* $w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}$, $n, m \in \mathbb{N}$;

її окремими випадками є:

лінійна функція $w = a z + b$, (a, b – комплексні числа);

степенева функція $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$;

дробово-лінійна $w = \frac{a z + b}{c z + d}$, (a, b, c, d – комплексні числа);

2) *Показникова функція* $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Властивості: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$; $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} - e^{z_2}$.

Показникова функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$:

$$e^z = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

3) *Логарифмічна функція* $w = \operatorname{Ln} z$ визначається як функція, обернена до показникової. Функція є багатозначною:

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln z + i 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де $\ln z$ – головне значення $\operatorname{Ln} z$: $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Властивості: $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$; $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$;

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z.$$

4) *Загальна степенева функція* $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число. Функція є багатозначною. Головне значення:

$$z^a = e^{a \ln z}$$

5) *Загальна показникова функція*: $w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, $a \neq 0$ – будь-яке комплексне число. Функція є багатозначною. Головне значення

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

6) *Тригонометричні функції*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функції $\sin z$, $\cos z$ періодичні з дійсним періодом 2π , а функції $tg z$, $ctg z$ – з дійсним періодом π . При довільних значеннях комплексних аргументів z_1 і z_2 справедливі формули

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

При довільному комплексному z виконується тотожність $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Модулі функцій $\sin z$, $\cos z$ можуть бути більше 1.

7) Гіперболічні функції

$$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad th z = \frac{sh z}{ch z}; \quad cth z = \frac{ch z}{sh z}.$$

Функції $sh z$, $ch z$ періодичні з уявним періодом $2\pi i$ а функції $th z$, $cth z$ – з уявним періодом πi .

Співвідношення між тригонометричними та гіперболічними функціями:

$$\sin z = -i sh iz$$

$$sh z = -i \sin iz$$

$$\cos z = ch iz$$

$$ch z = \cos iz$$

$$tg z = -i th iz$$

$$th z = -i tg iz$$

$$ctg z = i cth iz$$

$$cth z = i ctg iz.$$

8) Обернені тригонометричні функції

$$\text{Arc sin } z = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right); \quad \text{Arc cos } z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; \quad \text{Arcctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z+i}{z-i}.$$

Всі функції є багатозначними.

Задача 4. Обчислити задані функції: а) $\cos(1+i)$; б) $sh(2+i)$;

в) $(1 + \sqrt{3}i)^{(1+i)}$ (тільки головне значення).

Розв'язування:

а) за означенням $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Маємо:

$$\begin{aligned}\cos(1+i) &= \cos 1 \cdot \cos i - \sin 1 \cdot \sin i = \cos 1 \cdot \frac{e^{-1} + e^1}{2} - \sin 1 \cdot \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = \\ &= \cos 1 \cdot \operatorname{ch} 1 - i \cdot \sin 1 \cdot \operatorname{sh} 1.\end{aligned}$$

б) за означенням: $sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Маємо

$$\begin{aligned}sh(2+i) &= \frac{e^{2+i} - e^{-2-i}}{2} = \frac{e^2(\cos 1 + i \sin 1) - e^{-2}(\cos 1 - i \sin 1)}{2} = \\ &= \frac{(e^2 - e^{-2})\cos 1 + i(e^2 + e^{-2})\sin 1}{2} = sh 2 \cdot \cos 1 + i ch 2 \cdot \sin 1.\end{aligned}$$

в) За означенням $z^a = e^{aLnz}$, головне значення: $z^a = e^{a \ln z}$.

$(1 + \sqrt{3}i)^{(1+i)}$: $z = 1 + \sqrt{3}i$; $a = 1 + i$. Тоді:

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2; x > 0, y > 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\ln(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + i \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}\text{Підставимо: } (1 + \sqrt{3}i)^{(1+i)} &= e^{(1+i)\left(\ln 2 + i \frac{\pi}{3}\right)} = e^{\left(\ln 2 - \frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right)i} = \\ &= e^{\left(\ln 2 - \frac{\pi}{3}\right)} \cdot \left(\cos\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right)\right).\end{aligned}$$

1.1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної. Аналітичні функції.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0 = x_0 + y_0$, крім, можливо, самої точки z_0 . Якщо існують границі $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ і $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$, то функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ має **границю** при $z \rightarrow z_0$, яка дорівнює $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + i v_0 = w_0$. Дане визначення зводиться до

звичайного визначення границі функції дійсних аргументів, тому основні властивості граничного переходу для функцій дійсних

змінних справедливий і для функцій комплексної змінної. Функція $f(z)$ називається **неперервною у точці** z_0 , якщо вона визначена у деякому околі z_0 (включаючи саму точку z_0) і $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Очевидно, що для неперервності функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ у точці z_0 необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були неперервними у точці (x_0, y_0) . Сума, різниця, добуток і частка неперервних у точці z_0 комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ є неперервними функціями в цій точці. (У випадку частки припускаємо, що $g(z) \neq 0$). Функція називається **неперервною в області** D , якщо вона є неперервною в кожній точці цієї області.

Основні поняття і формули аналізу функцій дійсної змінної переносяться на випадок функції комплексної змінної.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякій області D і точки $z, z + \Delta z \in D$.

Похідною функції $w = f(z)$ **комплексної змінної** називається границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dw}{dz}$, при умові, що $\Delta z \rightarrow 0$ довільним чином.

Функція $w = f(z)$ називається **диференційованою** в точці, якщо існує похідна в цій точці.

Функція $w = f(z)$ називається **аналітичною** в даній точці z , якщо вона диференційована як в самій точці z , так і в деякому її околі.

Функція $w = f(z)$, що однозначна та диференційована в кожній точці області D , називається **аналітичною** в області D .

Точки області, де функція аналітична, називаються **правильними**, а точки де вона не аналітична – **особливими**.

Умови диференційованості функції $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ виражає наступна **теорема**:

Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки z , до того ж у цій точці функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовані. Тоді для диференційованості функції комплексної

змінної $f(z)$ у точці z необхідно і достатньо, щоб у цій точці мали місце рівності:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}.$$

Рівності (1), (2) називаються умовами **Коші-Рімана**.

Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області D , необхідно і достатньо існування в цій області неперервних частинних похідних від функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, які задовольняють умови Коші-Рімана. При виконанні умов Коші-Рімана, похідну $f'(z)$ можна представити в таких рівнозначних формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Правила диференціювання функцій комплексної змінної і похідні від елементарних функцій комплексної змінної аналогічні, що й для функцій дійсного аргументу.

Дійсна і уявна частини аналітичної в області D функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є гармонічними функціями в цій області, тобто кожна з них задовольняє рівнянням Лапласа, які отримаємо з умов

Коші-Рімана, вилучивши $v(x, y)$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\Delta u) = 0$ і, аналогічно,

вилучивши $u(x, y)$: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (\Delta v) = 0$.

Внаслідок лінійності оператора Лапласа ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) маємо

$\Delta w = \Delta u + i \Delta v = 0$. Дві гармонічні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, що задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються **спряженими**.

Умови Коші-Рімана дають змогу відновити аналітичну функцію, знаючи її дійсну або уявну частину.

Задача 5. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по відомій дійсній або уявній частині: а) $u(x, y) = 2y + 3xy + 1$; б) $v(x, y) = 3x - 4xy + y$.

Розв'язування:

а) $u(x, y) = 2y + 3xy + 1$.

Шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому

задовольняє умовам Коші-Рімана:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}.$$

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x} = 3y$ і $\frac{\partial u}{\partial y} = 2 + 3x$. З (1) випливає, що $\frac{\partial v}{\partial y} = 3y$.

Інтегруємо співвідношення по y : $v(x, y) = \int 3y dy = \frac{3}{2}y^2 + \varphi(x)$.

Для знаходження функції $\varphi(x)$ диференціюємо останню рівність по x : $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$. Враховуючи (2), матимемо $2 + 3x = -\varphi'(x)$ або $\varphi'(x) = -2 - 3x$. Інтегруємо отримане рівняння:

$$\varphi(x) = -2 \int dx - 3 \int x dx = -2x - \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Уявна частина шуканої функції: $v(x, y) = \frac{3}{2}y^2 - 2x - \frac{3}{2}x^2 + C$.

Знаходимо функцію:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = 2y + 3xy + 1 + i\left(\frac{3}{2}y^2 - 2x - \frac{3}{2}x^2 + C\right) = \\ &= 2y + 3xy + 1 + \frac{3}{2}y^2i - 2xi - \frac{3}{2}x^2i + Ci = \\ &= 1 - 2i(x + iy) - \frac{3}{2}i(x^2 - y^2 + 2xyi) + Ci = 1 - 2iz - \frac{3}{2}iz^2 + Ci. \end{aligned}$$

б) $v(x, y) = 3x - 4xy + y$.

Шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому

$$\text{задовольняє умовам Коші - Рімана: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}.$$

Знайдемо $\frac{\partial v}{\partial x} = 3 - 4y$ і $\frac{\partial v}{\partial y} = -4x + 1$. З (1) випливає, що $\frac{\partial u}{\partial x} = -4x + 1$.

Інтегруємо співвідношення по x :

$$u(x, y) = -4 \int x dx - \int dx = -2x^2 + x + \varphi(y).$$

Для знаходження функції $\varphi(y)$ диференціюємо останню рівність по y : $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y)$. Враховуючи (2), матимемо $\varphi'(y) = -3 + 4y$.

Інтегруємо отримане рівняння:

$$\varphi(y) = -3 \int dy + 4 \int y dy = -3y + 2y^2 + C.$$

Дійсна частина шуканої функції $u(x, y) = -2x^2 + x - 3y + 2y^2 + C$.

Знаходимо функцію:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = -2x^2 + x - 3y + 2y^2 + C + i(3x - 4xy + y) = \\ &= -2x^2 + x - 3y + 2y^2 + 3xi - 4xyi + yi + C = \\ &= (x + iy) - 2(x^2 - y^2 + 2xyi) + 3i(x + iy) + C = z + 3iz - 2z^2 + C. \end{aligned}$$

Зауваження. При знаходженні $f(z)$ слід пам'ятати, що $\bar{z} = x - iy$,
 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, $z^3 = x^3 - y^3i + 3x^2yi - 3xy^2$,
 $\bar{z}^3 = x^3 + y^3i - 3x^2yi + 3xy^2$.

1.1.5 Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена і неперервна в області D , а C – кусково-гладка замкнена або незамкнена крива, що належить D . **Обчислення інтеграла від $f(z)$** зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy.$$

Інтеграли від функції комплексної змінної мають властивості криволінійних інтегралів другого роду для функцій дійсного аргументу.

Якщо шлях інтегрування є променем, який виходить із точки z_0 , або є колом з центром у точці z_0 , то зручно робити заміну змінної виду: $z - z_0 = re^{i\varphi}$. В першому випадку $t = \text{const}$ (кут нахилу до осі Ox), r – дійсна змінна інтегрування; в другому випадку $r = \text{const}$ (радіус кола), t – дійсна змінна інтегрування.

Якщо крива C задана параметричним рівнянням

$$z(t) = x(t) + i y(t), \text{ де } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \text{ і значення параметра}$$

$t = t_0$ і $t = t_1$ відповідають початковій та кінцевій точкам кривої C , то:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t)dt.$$

Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D , що містить точки z_0 і z_1 , то має місце **формула Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0), \text{ де } F(z) - \text{первісна функція для } f(z).$$

Обчислення інтегралів від аналітичних функцій проводять із використанням таблиці основних інтегралів та методів інтегрування функцій дійсного аргументу.

У випадку, коли $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D , обмеженій контуром L , і C – замкнений контур, що цілком лежить в області D , то $\oint_C f(z)dz = 0$ (**Теорема Коші**).

Інтегральна теорема Коші справджується і у випадку замкнутого контуру, який є границею області аналітичності.

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в замкненій однозв'язній області D , обмеженій кусково-гладким замкненим контуром C і на самому контурі, то значення функції $f(z)$ в будь-якій точці $z_0 \in D$ можна обчислити за **інтегральною формулою Коші**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(при обході контуру C область D залишається зліва).

Формула Коші зв'язує значення аналітичної функції $f(z)$ у довільній точці області зі значенням цієї функції на межі області.

Для функцій комплексної змінної справедлива **теорема**:

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в замкненій області D . Тоді в кожній внутрішній точці $z_0 \in D$ функція $f(z)$ має похідні всіх порядків, причому похідну n -го порядку обчислюють за формулою:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

При застосуванні інтегральної формули Коші може бути корисною **теорема**:

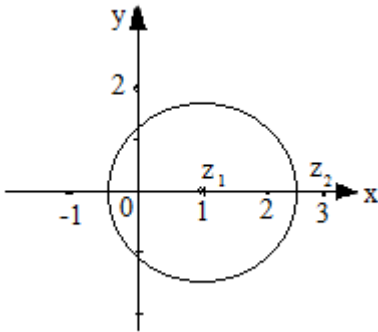
Нехай область D – багатозв'язна, обмежена додатно орієнтовним контуром C , та декількома внутрішніми додатно орієнтовними контурами C_i ($i = \overline{1, n}$). Область $\overline{D}$ – внутрішня частина області D .

Якщо функція $f(z)$ – аналітична в $\overline{D}$, то $\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z) dz$.

Задача 6. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\text{а) } \oint_{|z-1|=3/2} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z-i|=3} \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2i)} dz.$$

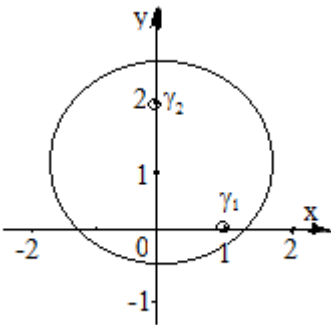
Розв'язування:



а) Підінтегральна функція $\frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)}$ невизначена в точках $z_1 = 1$ і $z_2 = 3$. Область інтегрування обмежена колом радіуса $\frac{3}{2}$ з центром в точці $z_0 = 1$. Області інтегрування належить точка $z_1 = 1$. Функція $f(z) = \frac{e^{2z}}{z-3}$

є аналітичною в крузі $|z-1| = \frac{3}{2}$, тому:

$$\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)} dz = \oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^{2z}}{z-3} dz = 2\pi i \frac{e^{2z}}{(z-3)} \Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{e^2}{-2} = -\pi i e^2.$$



б) Підінтегральна функція $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2i)}$ невизначена в точках $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, які належать області інтегрування, що обмежена колом $|z-i| = 3$. Обмежимо точки z_1 і z_2 відповідно колами γ_1 і γ_2 , достатньо малих радіусів, таких, щоб кола не перетинались та цілком

містились в крузі $|z-i| \leq 3$. В тризв'язній області, яка обмежена колами $|z-i| = 3$, γ_1 і γ_2 , підінтегральна функція всюди аналітична. За інтегральною теоремою Коші для багатозв'язної області, заданий інтеграл є сумою інтегралів по областях γ_1 і γ_2 :

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-i|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2i)} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z-2i} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{z^2+1}{z-2i}}{z-1} dz = \\
&= 2\pi i \left(\left. \frac{z^2+1}{z-2i} \right|_{z=1} + \left. \frac{z^2+1}{z-1} \right|_{z=2i} \right) = 2\pi i \left(\frac{1+1}{1-2i} + \frac{4i^2+1}{2i-1} \right) = \\
&= 2\pi i \left(\frac{2}{1-2i} + \frac{-3}{2i-1} \right) = 2\pi i \frac{5}{1-2i} = \frac{10\pi i}{1-2i}.
\end{aligned}$$

1.1.6 Степеневі ряди функцій комплексної змінної. Ряд Лорана.

Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots,$$

де z – комплексна змінна; $c_0, c_1, \dots, c_n$ – сталі комплексні числа (*коефіцієнти ряду*); z_0 – комплексне число (*центр ряду*), називається *степеневим*. Ті значення z , при яких ряд збігається, називають *точками збіжності*. Множина точок збіжності утворює *область збіжності* степеневого ряду.

Область $|z - z_0| < R$ ($R > 0$), у кожній точці якої степеневий ряд збігається, а зовні її – розбігається, називають його *кругом збіжності* з центром у точці z_0 , а число R – *радіусом збіжності* цього ряду. На межі круга ряд може як збігатися, так і розбігатися. Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

якщо границі існують. Коли $R = 0$ ряд збігається в єдиній точці $z = z_0$, а для $R = \infty$ – ряд розбігається в усій комплексній площині.

Степеневий ряд всередині круга збіжності збігається до аналітичної функції, яка є сумою ряду. Степеневий ряд в середині круга збіжності можна почлено інтегрувати і диференціювати

довільне число раз, причому радіус збіжності одержаних рядів дорівнює радіусові збіжності початкового ряду.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в середині круга $|z - z_0| < R$, то вона може бути розвинена в цьому крузі в збіжний степеневий ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причому коефіцієнти цього ряду визначаються однозначно за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

де C – довільний замкнений контур у середині круга аналітичності, що містить точку z_0 . Степеневий ряд називається **рядом Тейлора** функції $f(z)$.

Розвинення деяких функцій в ряд Тейлора з центром у точці $z_0 = 0$:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Будь-яку аналітичну в кільці $r < |z - z_0| < R$ ($0 \leq r < R \leq +\infty$) функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому кільці в ряд:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{коєфіцієнти якого визначаються за формулами}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \text{де } C - \text{довільне коло з}$$

центром у точці z_0 , яке лежить усередині заданого кільця.

Цей ряд називають *Лорановим рядом* функції з центром у точці z_0 функції $f(z)$. Ряд Лорана для функції

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{складається з}$$

двох частин.

При цьому ряд $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається в крузі

$|z - z_0| < R$ і називається **правильною частиною** ряду Лорана, а ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{збігається при } |z - z_0| > r \text{ і називається } \textbf{головною}$$

частиною ряду

У середині кільця $r < |z - z_0| < R$ ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається

до аналітичної функції $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Рядом Лорана для функції $f(z)$ в околі точки $z = +\infty$ буде ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{який збігається в кільці } r < |z| < \infty. \quad \text{У цьому}$$

випадку головною частиною ряду Лорана є $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а правильною – ряд $\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$.

Задача 7. Розвинути функції у ряд Тейлора по степенях z , використовуючи відомі формули:

а) $f(z) = \ln(4+z)$; б) $f(z) = ch^2 \frac{z}{2}$

Розв'язування:

а) Застосуємо розвинення в ряд функції $\ln(1+z)$:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad \text{де } |z| < 1. \quad \text{Перетворимо}$$

задану функцію наступним чином:

$$\ln(4+z) = \ln 4 \left(1 + \frac{z}{4}\right) = \ln 4 + \ln \left(1 + \frac{z}{4}\right) = \ln 4 + \frac{z}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{4}\right)^3 - \dots$$

Маємо: $f(z) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n \cdot 4^n}$, де $\left|\frac{z}{4}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 4$.

б) Переходимо від гіперболічної функції до тригонометричної функції: $ch^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{iz}{2} = \frac{1 + \cos iz}{2}$. Застосуємо розвинення в ряд

$$\cos z : \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad \text{Тоді матимемо}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} - \dots \right) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Задача 8. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)$ по степеням z в заданому кільці.

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3.$$

Розв'язування:

Функція є аналітичною в усіх точках, окрім $z = 2$ та $z = 3$.

Розкладемо функцію на суму простих дробів:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} = \frac{A(z-3) + B(z-2)}{(z-2)(z-3)}.$$

Коефіцієнти A і B знайдемо із тотожності:

$$\begin{aligned} 1 &= A(z-3) + B(z-2) \\ \left. \begin{aligned} z=2 \\ z=3 \end{aligned} \right| \begin{aligned} -A &= 1 \\ B &= 1 \end{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Отже

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

До кожного доданка $f(z)$ застосуємо формулу: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$.

Матимемо:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots \right) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n, \left| \frac{z}{3} \right| < 1;$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \left| \frac{1}{z} \right| < 1.$$

Отже:
$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

1.1.7 Класифікація нулів та ізольованих особливих точок функції комплексної змінної

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і $f(z_0) = 0, z_0 \in D$, то точка z_0 називається **нулем функції** $f(z)$. Розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд в околі нуля функції – точки z_0 має вигляд:

$$f(z) = c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots, \quad c_0 = 0.$$

У випадку коли $c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0, c_m \neq 0$, тобто розвинення в ряд має вид: $f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, c_m \neq 0$, то точка z_0 називається **нулем m -го порядку** для функції $f(z)$. Якщо $m=1$, то нуль називається **простим**, якщо ж $m > 1$ – **кратним**. Також справедливо, що точка z_0 є нулем функції $f(z)$ порядку m , якщо виконуються умови: $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Для того, щоб точка z_0 була нулем m -го порядку аналітичності в точці z_0 функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі цієї точки виконувалась рівність $f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Точки, в яких порушуються умови аналітичності, називаються **особливими**. Точку z_0 називають **ізолюваною особливою точкою функції $f(z)$** , якщо існує проколений окіл точки z_0 – кільце $0 < |z - z_0| < R$ у якому функція $f(z)$ однозначна й аналітична. У самій точці z_0 функція не означена, або не є однозначною і аналітичною.

Існують три типи ізолюваних особливих точок: **усувна особлива точка, полюс та істотно особлива точка**. Кваліфікуються вони або за виглядом ряду Лорана: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, або за поведінкою функції в околі особливої точки z_0 .

1) Точка z_0 – **усувна особлива точка**, якщо існує скінчена границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C, (C - const)$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки не містить головної частини: $f(z) = f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, c_{-n} = 0 \ (n = \overline{1, \infty})$.

2) Точка z_0 – **полюс**, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить скінчену кількість членів головної частини. Точка z_0 – **полюс m -го порядку**, якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, $\varphi(z_0) \neq 0$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить m членів головної частини:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

$$c_{-m} \neq 0, c_{-n} = 0 \left(n = \overline{m+1, \infty} \right).$$

Якщо $m=1$, то маємо **полюс першого порядку**, або **простий полюс**.

Зв'язок між нулем і полюсом: якщо точка z_0 – полюс m -го порядку функції $f(z)$, то для функції $\frac{1}{f(z)}$ ця точка є нулем m -го порядку.

3) Точка z_0 – **істотно особлива точка**, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує (і не дорівнює нескінченності) або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить нескінченну кількість членів головної частини:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

1.1.8 Лишки та їх застосування

Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називається число, що позначається символом $\operatorname{res} f(z_0)$ або $\operatorname{res}[f(z), z_0]$ і визначається рівністю: $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$, де C – деякий замкнений контур, що містить всередині тільки одну особливу точку z_0 і лежить в області аналітичності функції $f(z)$.

Лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в розвиненні функції $f(z)$ в околі точки z_0 в ряд Лорана: $\text{res } f(z_0) = c_{-1}$.

Лишок в усувній особливій точці дорівнює нулеві: $\text{res } f(z_0) = 0$.

Якщо точка z_0 – **полюс першого порядку** функції $f(z)$, то лишок обчислюється за формулою:

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot (z - z_0)]$$

Якщо точка z_0 – **полюс m -го порядку** функції $f(z)$, то

$$\text{res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z) \cdot (z - z_0)^m]$$

У випадку, коли функція $f(z)$ в околі точки z_0 зображується як частка двох аналітичних функцій $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, тобто точка z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то

$$\text{res } f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Якщо точка z_0 – істотно особлива точка, то для знаходження лишку функції $f(z)$, знаходять коефіцієнт c_{-1} з розвинення цієї функції в ряд Лорана в околі точки z_0 .

Якщо точка $z = \infty$ особлива точка функції $f(z)$ і ця функція аналітична в околі $|z| > r$, то $\text{res } f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = -c_{-1}$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична на всій комплексній площині, окрім точок $z_k (k = \overline{1, N})$, тоді

$$\sum_{k=1}^N \text{res } f(z_k) + \text{res } (\infty) = 0.$$

При застосуванні лишків до обчислення контурних інтегралів використовують **основну теорему про лишки**:

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в деякій області D , окрім скінченної множини особливих точок z_k ($k = \overline{1, N}$), а C – простий замкнений контур з цієї області (додатно зорієнтований) і охоплює точки z_k . Тоді справедлива рівність

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} f(z_k).$$

Якщо дробово-раціональна функція $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неперервна на всій дійсній осі ($Q_m(x) \neq 0$) і $m \geq n + 2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} f(z_k), \quad (\operatorname{Im} z_k > 0),$$

де лишки обчислюють за особливими точками підінтегральної функції, які лежать у верхній півплощині.

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в усіх точках напівплощини $\operatorname{Im} z \geq 0$, окрім точок z_k ($k = \overline{1, N}$) і задовольняє умові $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $M > 0$, $\delta > 0$, коли $|z| \geq R$ (R - достатньо велике), тоді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} f(z_k).$$

Задача 9. З'ясувати характер особливих точок заданих функцій і знайти лишки в цих точках.

а) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2(z-1)}$; б) $f(z) = z^4 \cdot \sin \frac{3}{z}$;

Розв'язування:

а) Функція $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2(z-1)}$ невизначена в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = 1$. Ці точки є особливими. Визначимо їх характер. Перепишемо функцію

$f(z)$ у вигляді: $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2}$, де $\varphi(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)}$ і $\varphi(0) \neq 0$. За означенням особлива точка $z_1 = 0$ – полюс другого порядку ($m = 2$).

Для функції $f(z)$, записаної у вигляді: $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, де $\varphi(z) = \frac{e^{2z}}{z^2}$ і $\varphi(1) \neq 0$, маємо, що особлива точка $z_2 = 1$ – полюс першого порядку ($m = 1$). Знайдемо лишки в цих точках.

$$\operatorname{res} f(z_1) = \operatorname{res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{2z}}{z^2(z-1)} z^2 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{2z}(z-1) - e^{2z}}{(z-1)^2} = -3$$

$$\operatorname{res} f(z_2) = \operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{e^{2z}}{z^2(z-1)} (z-1) \right] = e^2.$$

б) Функція $f(z) = z^4 \cdot \sin \frac{3}{z}$ має особливу точку $z = 0$. Визначимо її характер, розклавши функцію $f(z)$ в ряд. Для цього застосуємо формулу: $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$, підставивши замість z аргумент $\frac{3}{z}$.

Матимемо $\sin \frac{3}{z} = \frac{3}{z} - \frac{3^3}{z^3 \cdot 3!} + \frac{3^5}{z^5 \cdot 5!} - \dots$. Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі особливої точки $z = 0$ має вигляд:

$$f(z) = z^4 \cdot \left(\frac{3}{z} - \frac{3^3}{z^3 \cdot 3!} + \frac{3^5}{z^5 \cdot 5!} - \dots \right) = 3z^3 - \frac{9}{2}z + \frac{81}{40z} - \dots \quad \text{Розвинення}$$

має нескінчену кількість членів головної частини. Точка $z = 0$ є істотно особливою точкою. Тому $\operatorname{res} f(0) = c_{-1} = \frac{81}{40}$.

Задача 10. Обчислити інтеграли за допомогою лишків.

$$\text{а) } \oint_{|z|=3} \frac{e^z - 1}{z^2 - z} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{z - i}{(z + i)(z + 1)^2}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$$

Розв'язування:

$$\text{а) } \oint_{|z|=3} \frac{e^z - 1}{z^2 - z} dz. \quad \text{Функція } f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 - z} \text{ в колі } |z| \leq 3 \text{ має ізольовані}$$

особливі точки $z = 0$ та $z = 1$. Точка $z = 0$ є усунутою особливою

точкою функції $f(z)$: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2 - z} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^z - 1)'}{(z^2 - z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{2z - 1} = -1$,

тому $\text{res } f(0) = 0$. Точка $z = 1$ – простий полюс. За формулою

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)] \text{ маємо } \text{res } f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(e^z - 1) \cdot (z - 1)}{z(z - 1)} = e - 1.$$

$$\text{Отже } \oint_{|z|=3} \frac{e^z - 1}{z^2 - z} dz = 2\pi i (\text{res } f(0) + \text{res } f(1)) = 2\pi i (e - 1).$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{z - i}{(z + i)(z + 1)^2}. \quad \text{Функція } f(z) = \frac{z - i}{(z + i)(z + 1)^2} \text{ в колі } |z| \leq 2 \text{ має}$$

ізольовані особливі точки $z = -i$ та $z = -1$. Точка $z = -i$ – простий полюс функції $f(z)$, тому

$$\text{res } f(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z - i) \cdot (z + i)}{(z + i)(z + 1)^2} = \frac{-i - i}{(1 - i)^2} = \frac{-2i}{1 - 2i + i^2} = 1.$$

Точка $z = -1$ – полюс другого порядку функції $f(z)$, тому

$$\begin{aligned} \text{res } f(-1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z - i) \cdot (z + 1)^2}{(z + i)(z + 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z - i}{z + i} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1 \cdot (z + i) - (z - i) \cdot 1}{(z + i)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2i}{(z + i)^2} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Отже: } \oint_{|z|=2} \frac{z - i}{(z + i)(z + 1)^2} = 2\pi i (\text{res } f(-i) + \text{res } f(-1)) = 2\pi i (1 - 1) = 0.$$

в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$. Введемо функцію $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 13)^2}$, яка при $z = x$ співпадає з підінтегральною функцією $f(x)$. Функція $f(z)$ має два полюси другого порядку: $z_1 = -2 + 3i$ та $z_2 = -2 - 3i$. На верхній півплощині лежить один полюс $z_1 = -2 + 3i$.

Знайдемо $\text{res } f(-2 + 3i)$:

$$\begin{aligned} \text{res } f(-2 + 3i) &= \lim_{z \rightarrow -2 + 3i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z + 2 - 3i)^2 (z + 2 + 3i)^2} (z + 2 - 3i)^2 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2 + 3i} \frac{z + 2 + 3i - 2z}{(z + 2 + 3i)^3} = \frac{4}{(6i)^3} = -\frac{1}{54i} \end{aligned}$$

$$\text{Отже } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{54i} \right) = -\frac{\pi}{27}.$$

1.2 Елементи операційного числення

1.2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал

Оригіналом називається комплексна функція $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ дійсної змінної t , що задовольняє умовам:

1) $f(t)$ – однозначна, кусково-неперервна функція разом зі своїми похідними n -го порядку в інтервалі $(-\infty; \infty)$;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

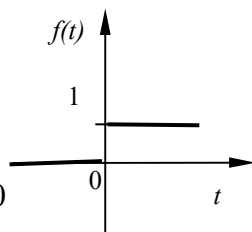
3) існують такі додатні числа M, s_0 , що $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$ для всіх $t > 0$, тобто функція $f(t)$ зростає не швидше, ніж деяка показникова функція;

Число s_0 , для якого умова 3) виконана при будь-якому $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) і не виконується при $s = s_0 - \varepsilon$ (s_0 – точна нижня межа чисел s) називається **показником зростання функції** $f(t)$. Функції, які при $t \rightarrow 0$ є обмеженими, або задовольняють умові 3) називаються **функціями експоненціального типу**.

Функції, що задовольняють умовам 1) – 3), утворюють **клас оригіналів** D .

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична функція Хевісайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Якщо довільна функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам 1) і 3), то функція $\varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

задовольняє всім умовам оригіналу.

Зображенням функції-оригіналу $f(t) \in D$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається інтегралом (**інтегральним перетворенням**) Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Інтеграл існує і рівномірно збігається, якщо $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Співвідношення між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ символічно записується: $f(t) \div F(p)$, $f(t) \leftarrow F(p)$.

1.2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теореми.

Теорема єдності: Якщо $F(p)$ і $\Phi(p)$ – два зображення і вони співпадають, то будуть співпадати і їх оригінали в усіх точках їх неперервності.

Теорема про аналітичність зображення: якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то $F(p)$ – аналітична функція в області $\operatorname{Re} p > s_0$.

Лінійність: Якщо $f_1(t), f_2(t) \in D$ і $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, то $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \div \alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$, де α, β – будь-які комплексні сталі.

Диференціювання оригіналу: Якщо $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то:

$$\begin{aligned} f'(t) \div pF(p) - f(0); \quad f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Інтегрування оригіналу: Якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Диференціювання зображення (множення оригіналу на аргумент): Якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то $t \cdot f(t) \div -\frac{dF(p)}{dp}$.

Наслідки:

$$1) t^n \cdot f(t) \div (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n};$$

$$2) t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{p^n} \div \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}.$$

Інтегрування зображення (ділення оригіналу на аргумент):

$$\text{Якщо } \frac{f(t)}{t} \in D \text{ і } f(t) \div F(p), \text{ то } \frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(p) dp.$$

Терема подібності (про зміну масштабу): Якщо $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$, то для $\forall \alpha > 0$:

$$f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \div \alpha F(\alpha p), \text{ або якщо } a = \frac{1}{\alpha}: f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Терема запізнення: Якщо $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$ і $\alpha > 0$, то:

$$f(t - \alpha) \div e^{-\alpha p} F(p).$$

Терема випередження: Якщо $f(t) \in D$, і $f(t) \div F(p)$ і $\alpha > 0$, то:

$$f(t+\alpha) \div e^{\alpha p} \left[F(p) - \int_0^{\alpha} f(t) e^{-pt} dt \right].$$

Теорема зсуву: Якщо $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$, то:

$$e^{-\alpha t} f(t) \div F(p + \alpha).$$

Теорема множення (теорема про згортку): Вираз

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = f_1 * f_2 \quad \text{називають } \textbf{згорткою} \text{ двох функцій.}$$

Якщо $f_1(t), f_2(t) \in D$, $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, то:

$$f_1 * f_2 \div F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Наслідок (інтеграл Дюамеля):

$$\begin{aligned} p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t-\tau) d\tau = \\ = f_2(t) \cdot f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Задача 11. Знайти зображення $F(p)$ функції $f(t) \cdot \eta(t)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда, за означенням (інтеграл Лапласа) та користуючись таблицею зображень, якщо функція $f(t)$ задана:

$$f(t) = 3 - te^t + \sin 2t.$$

Розв'язування:

За означенням:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (3 - te^t + \sin 2t) e^{-pt} dt = \\ &= 3 \int_0^{\infty} e^{-pdt} - \int_0^{\infty} t \cdot e^{(1-p)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin 2t dt. \end{aligned}$$

Обчислимо інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} d(-pt) = -\frac{1}{p} \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-pt} \Big|_0^A = \frac{1}{p};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^{\infty} t e^{(1-p)t} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{t}{1-p} e^{(1-p)t} \Big|_0^A - \frac{1}{1-p} \int_0^A e^{(1-p)t} dt \right] = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{t}{1-p} e^{(1-p)t} \Big|_0^A - \frac{1}{(1-p)^2} e^{(1-p)t} \Big|_0^A = \frac{1}{(p-1)^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin 2t dt = I.$$

Застосувавши інтегрування частинами два рази, отримаємо:

$$I = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p^2 + 4} \cdot e^{-pt} (p \sin 2t + 2 \cos 2t) \Big|_0^A \right) = \frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$\text{Отже: } F(p) = \frac{3}{p} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$\text{За таблицею: } 3 \cdot \eta(t) \div \frac{3}{p}, \quad t \cdot e^t \eta(t) \div \frac{1}{(p-1)^2}, \quad \sin 2t \cdot \eta(t) \div \frac{2}{p^2 + 4}$$

$$\text{Шукане зображення: } F(p) = \frac{3}{p} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p^2 + 4}.$$

1.2.3 Знаходження оригіналу по зображенню

Для знаходження оригіналу по зображенню у простих випадках необхідно скористатись таблицею зображень основних елементарних функцій.

$$\text{Якщо } F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)} \text{ - правильний раціональний дріб, то його}$$

розкладають на суму простих дробів і для кожного із них знаходять оригінали. В більш складних випадках користуються:

1) **Формула Меліна:** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $F(p) \rightarrow 0$ коли $|p| \rightarrow \infty$ рівномірно відносно

аргументу p , та виконується умова: $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |F(p)| dp < M$, тоді:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dt.$$

2) **Перша теорема розвинення:**

Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в околі точки $p = \infty$ і $F(\infty) = 0$. Розвинення функції $F(p)$ в ряд Лорана має вигляд:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{p^{n+1}}. \text{ Тоді її оригінал:}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

3) **Друга теорема розвинення:**

Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Окрім того, $F(p)$ – дробово-раціональна функція, яка

має полюси в точках $p_i (i = \overline{1, n})$. Тоді її оригінал:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p=p_i} [F(p) e^{pt}].$$

Зокрема, якщо всі p_i - прості полюси, а $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ і функції

$A(p)$ і $B(p)$ не мають спільних нулів, то:

$$F(p) \div f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot e^{p_i t}.$$

Задача 12. Знайти оригінал $f(t)$ для заданого зображенням $F(p)$.

$$а) F(p) = \frac{p+2}{p^2-2p+10} ; б) F(p) = \frac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Розв'язування:

$$а) F(p) = \frac{p+2}{p^2-2p+10}.$$

Застосуємо елементарні перетворення для розкладання цього дробу на суму простих дробів, оригінали яких відомі: виділимо повний квадрат у знаменнику дробу, а чисельник перетворимо згідно формул 11, 12 Таблиця 3.1. – Основні оригінали і їх зображення .

$$\frac{p+2}{p^2-2p+10} = \frac{p+2}{(p-1)^2+3^2} = \frac{p-1+3}{(p-1)^2+3^2} = \frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} + \frac{3}{(p-1)^2+3^2}.$$

За таблицею знаходимо:

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} \div e^t \cos 3t; \frac{3}{(p-1)^2+3^2} \div e^t \sin 2t;$$

Оригінал для заданої функції: $f(t) = e^t (\cos 3t - \sin 3t)$.

$$б) F(p) = \frac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)};$$

Розкладемо функцію $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\frac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \frac{A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1)}{(p-1)(p^2+1)}$$

Коефіцієнти A, B, C знаходимо з тотожності:

$$2p^2+1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1)$$

$$\begin{array}{l|l} p=1 & 3=2A \Rightarrow A=3/2 \\ p^2 & 2=A+B \Rightarrow B=1/2 \\ p & 0=C-B \Rightarrow C=1/2 \end{array}$$

$$\text{Тоді: } F(p) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{p^2+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

За таблицею для кожного доданку знаходимо:

$$\frac{1}{p-1} \div e^t; \frac{p}{p^2+1} \div \cos t; \frac{1}{p^2+1} \div \sin t.$$

Оригінал для заданої функції: $f(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$

1.2.4 Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку:

$y'' + a_1y' + a_2y = f(t)$, де $a_1, a_2 - \text{const}$, $f(t)$ - функція-оригінал, $y = y(t)$ - невідома функція-оригінал.

Необхідно знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$

Нехай $y(t) \div Y(p)$, $f(t) \div F(p)$.

Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосуємо теорему диференціювання оригіналу:

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - y_0;$$

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - py_0 - y'_0.$$

Перейдемо від диференціального рівняння оригіналів до алгебраїчного рівняння відносно зображення $Y(p)$:

$$p^2Y(p) - py_0 - y'_0 + a_1(pY(p) - y_0) + a_2Y(p) = F(p).$$

Розв'яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p)(p^2 + a_1p + a_2) = F(p) + py_0 + y'_0 + a_1y_0;$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + py_0 + y'_0 + a_1y_0}{p^2 + a_1p + a_2}.$$

Отримали операторний розв'язок рівняння. По зображенню $Y(p)$ знаходимо оригінал $y(t)$, який є розв'язком задачі Коші.

Аналогічно розв'язують лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку та системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача 13. Користуючись методом операційного числення знайти розв'язок ЛНДР, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' + 2y' + 5y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язування:

Згідно з теоремою про зображення похідних:

$$y(t) \div Y(p); \quad y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y''(t) \div p^2 Y(p) - pY(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1.$$

Для функції $f(t) = \sin t$ зображення знаходимо за таблицею:

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}. \quad \text{Операторне рівняння має вигляд:}$$

$$p^2 Y(p) - 1 + 2pY(p) + 5Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Знайдемо $Y(p)$:

$$Y(p) \cdot (p^2 + 2p + 5) = \frac{1}{p^2 + 1} + 1 = \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1};$$

$$Y(p) = \frac{p^2 + 2}{(p^2 + 1) \cdot ((p+1)^2 + 2^2)}.$$

Розкладемо $Y(p)$ на суму простих дробів:

$$Y(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{C(p+1) + D}{(p+1)^2 + 2^2} \Rightarrow$$

$$p^2 + 2 = A(p^3 + 2p^2 + 5p) + B(p^2 + 2p + 5) + C(p^3 + p^2 + p + 1) + D(p^2 + 1)$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти із системи рівнянь, порівнявши коефіцієнти при однакових ступенях:

$$\begin{array}{l|l} p^3 & A + C = 0 \\ p^2 & 2A + B + C + D = 1 \\ p & 5A + 2B + C = 0 \\ p^0 & 5B + C + D = 2 \end{array} \quad : \quad A = -\frac{1}{10}; \quad B = \frac{2}{10}; \quad C = \frac{1}{10}; \quad D = \frac{9}{10}.$$

Тоді:

$$Y(p) = -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{10} \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{10} \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{9}{20} \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

Користуючись таблицею, отримаємо оригінали для кожного дробу.

Розв'язок рівняння:

$$y(t) = -\frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} e^{-t} \cos 2t + \frac{9}{20} e^{-t} \sin 2t$$

2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Задані комплексні числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + 2i$,

$z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$. Знайти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$;

Записати: д) z_2 в тригонометричній формі; е) z_3 у показниковій формі.

Варіант	z_1	z_2	z_3
1.	$3 - 2i$	$2 + i$	$-2 + 2i$
2.	$-2 - 3i$	$1 + 3i$	$-1 + \sqrt{3}i$
3.	$-2 + 5i$	$1 - 4i$	$-1 - \sqrt{3}i$
4.	$3 - 5i$	$1 - 3i$	$-5 + 5i$
5.	$2 - 3i$	$4 + 3i$	$-2\sqrt{3} + 2i$
6.	$1 - 2i$	$3 - 4i$	$-6 - 6i$
7.	$7 - i$	$3 + 2i$	$-2 + 2\sqrt{3}i$
8.	$-3 + 4i$	$1 - 2i$	$-\sqrt{3} + i$
9.	$5 + 2i$	$2 + 3i$	$-2 - 2i$
10.	$3 + i$	$3 - 2i$	$-2\sqrt{3} - 2i$
11.	$-3 + 2i$	$2 - 3i$	$-3 + 3i$
12.	$2 + 3i$	$1 + 4i$	$-3 + \sqrt{3}i$
13.	$-5 + 2i$	$4 + i$	$-\sqrt{3} - 3i$

14.	$5 - 3i$	$3 - i$	$-4 + 4i$
15.	$-1 + 3i$	$5 - 2i$	$-1 + i$
16.	$-4 - 3i$	$2 + 5i$	$-3\sqrt{3} + 3i$
17.	$4 + 5i$	$5 - i$	$-3 - 3\sqrt{3}i$
18.	$4 - i$	$5 + 3i$	$-1 - i$
19.	$5 + i$	$3 + 4i$	$-4 - 4i$
20.	$-6 + i$	$5 + 2i$	$-\sqrt{3} - i$
21.	$6 - 2i$	$4 - 3i$	$-6 + 6i$
22.	$-3 + i$	$2 - 4i$	$-3 + 3\sqrt{3}i$
23.	$-1 + 4i$	$3 + i$	$-3 - 3i$
24.	$-2 + 4i$	$6 - 2i$	$-4 + 4\sqrt{3}i$
25.	$-2 + 7i$	$5 - 3i$	$-4\sqrt{3} + 4i$
26.	$-4 + 5i$	$1 - 6i$	$-5 - 5i$
27.	$-5 + i$	$7 + 2i$	$-7 + 7i$
28.	$-1 + 2i$	$5 + 6i$	$-4\sqrt{3} - 4i$
29.	$-2 + 3i$	$3 - 5i$	$-5 + 5i$
30.	$-1 - 4i$	$7 - 2i$	$-4 - 4\sqrt{3}i$

Завдання 2. Визначити та побудувати лінії, задані наступними рівняннями

- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| 1. | $\operatorname{Re}(2z + 3) = z ^2$ | 2. | $\operatorname{Im}(z^2 + z) = 2 - \operatorname{Im} \bar{z}$ |
| 3. | $\operatorname{Re}(1 - z) = z ^2$ | 4. | $ z ^2 + 2\operatorname{Im} z = 0$ |
| 5. | $z \cdot \bar{z} = 2\operatorname{Re} \bar{z}$ | 6. | $(z + 1)(\bar{z} - 1) = 2i \cdot \operatorname{Im} \bar{z}$ |
| 7. | $ z = 3 + \operatorname{Im} \bar{z}$ | 8. | $\operatorname{Re} z^2 + z \cdot \bar{z} = \operatorname{Im} z$ |
| 9. | $ z - 2 = \sqrt{1 - 8\operatorname{Re} z}$ | 10. | $\operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = 1$ |
| 11. | $2 z ^2 - z \cdot \bar{z} = 2\operatorname{Re}(2 + z)$ | 12. | $\operatorname{Re}(5 + 4z) = z ^2$ |
| 13. | $z \cdot \bar{z} + 2\bar{z} = 1 - 2i\operatorname{Im} z$ | 14. | $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$ |

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 15. | $\operatorname{Re}(z+1)= z $ | 16. | $\operatorname{Re}(z^2-2z)= z ^2$ |
| 17. | $z \cdot \bar{z} = \operatorname{Im} z^2 + 1$ | 18. | $\operatorname{Im}(z+2-i) = \operatorname{Re} \bar{z}$ |
| 19. | $\operatorname{Im}(z^2-2z) = 2 \operatorname{Re}(1+iz)$ | 20. | $\bar{z}^2 + z^2 = 2$ |
| 21. | $ z ^2 = \operatorname{Re}(2z)$ | 22. | $\operatorname{Im}(3i+2\bar{z}) = z ^2$ |
| 23. | $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \operatorname{Re}(z+2)$ | 24. | $\operatorname{Re}(3+2\bar{z}) = z \cdot \bar{z}$ |
| 25. | $\operatorname{Im} \bar{z} + 3 = z $ | 26. | $z \cdot \bar{z} - 4 \operatorname{Re} z = 0$ |
| 27. | $\bar{z}^2 - z^2 = 4i$ | 28. | $\operatorname{Re}(2z) = z \cdot \bar{z}$ |
| 29. | $\operatorname{Im}(z-2i) = z $ | 30. | $\operatorname{Re}(z^2-2\bar{z}) = z \cdot \bar{z}$ |

Завдання 3. Яку множину точок на комплексній площині визначають нерівності:

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| 1. | $\begin{cases} 1 < z-2 \leq 2 \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{3} \end{cases}$ | 2. | $\begin{cases} 1 < z-i < 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} 1 < z+2 \leq 2 \\ \frac{2\pi}{3} \leq \arg z < \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ | 4. | $\begin{cases} 1 \leq z+i < 2 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} 1 \leq z-1 < 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} 1 < z+2i \leq 2 \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq -\frac{\pi}{3} \end{cases}$ |
| 7. | $\begin{cases} 1 < z+ \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} 1 \leq z-2i < 2 \\ \frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ |
| 9. | $\begin{cases} 2 < z-2 \leq 3 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} 2 \leq z-i < 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \pi \end{cases}$ |
| 11. | $\begin{cases} 2 \leq z+2 < 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} 2 < z+i \leq 3 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ |

$$13. \quad \begin{cases} 2 < |z-1| \leq 3 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} 2 \leq |z+1| < 3 \\ -\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \pi \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} 1 < |z-2| \leq 3 \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} 1 \leq |z+2| < 3 \\ \frac{3\pi}{4} < \arg z \leq \pi \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} 1 < |z+1| \leq 3 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} 1 \leq |z-1| < 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} 2 \leq |z-2| \leq 4 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$27. \quad \begin{cases} 2 < |z+2| \leq 4 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$29. \quad \begin{cases} 3 \leq |z-2| < 4 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} 2 \leq |z-2i| < 3 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \pi \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} 1 < |z+3i| \leq 2 \\ -\frac{7\pi}{12} < \arg z < -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} 1 \leq |z-3i| < 2 \\ \frac{5\pi}{12} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} 1 < |z-i| \leq 3 \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} 1 \leq |z+i| \leq 3 \\ -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} 1 < |z-2i| \leq 3 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$26. \quad \begin{cases} 1 \leq |z+2i| < 3 \\ -\frac{7\pi}{12} < \arg z \leq 0 \end{cases}$$

$$28. \quad \begin{cases} 1 \leq |z-3i| \leq 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$30. \quad \begin{cases} 2 < |z+3i| \leq 3 \\ -\frac{2\pi}{3} < \arg z \leq 0 \end{cases}$$

Завдання 4. Обчислити задані функції, для б) тільки головне значення

1.	a)	$\cos(3-i)$	б)	$i^{(1+i)}$
2.	a)	$\sin(1+i)$	б)	$(1+i)^i$
3.	a)	$ch(3-i)$	б)	$(-1)^i$
4.	a)	$sh(1+i)$	б)	$(-i)^{1+i}$
5.	a)	$\cos(3-2i)$	б)	$(\sqrt{3}-i)^i$
6.	a)	$sh(3+i)$	б)	$i^{(2+i)}$
7.	a)	$\sin(2-i)$	б)	$(-1)^{1-i}$
8.	a)	$ch(2-3i)$	б)	i^{2i}
9.	a)	$sh(3+2i)$	б)	$(-1+i)^i$
10.	a)	$\sin(2-4i)$	б)	$(1+\sqrt{3}i)^i$
11.	a)	$\cos(2+4i)$	б)	$(1-i)^i$
12.	a)	$ch(4-i)$	б)	$(-1)^{(2-i)}$
13.	a)	$sh(5-2i)$	б)	$i^{(-1-i)}$
14.	a)	$\sin(5-3i)$	б)	$(1-i)^{2i}$
15.	a)	$\cos(3-5i)$	б)	$(-1)^{(1-2i)}$
16.	a)	$ch(5+3i)$	б)	$(-i)^{(2+i)}$
17.	a)	$sh(3+5i)$	б)	$(-1+i)^{3i}$
18.	a)	$\sin(6+i)$	б)	$(-1)^{i+2i}$
19.	a)	$\cos(1-6i)$	б)	$(-i)^{3i}$
20.	a)	$ch(1+6i)$	б)	$(\sqrt{3}+i)^i$
21.	a)	$sh(6-i)$	б)	$(1+i)^{4i}$
22.	a)	$\sin(2+3i)$	б)	$(-1)^{3-i}$
23.	a)	$\cos(1-3i)$	б)	$(-i)^{-1-i}$
24.	a)	$ch(4-2i)$	б)	$(1-i)^{3i}$

- | | | | | |
|-----|----|--------------|----|---------------|
| 25. | a) | $sh(4+2i)$ | б) | $(-1)^{4+i}$ |
| 26. | a) | $\sin(5+6i)$ | б) | $(-i)^{-2+i}$ |
| 27. | a) | $\cos(6-5i)$ | б) | $(-1+i)^{4i}$ |
| 28. | a) | $ch(5-6i)$ | б) | $(-1)^{1-3i}$ |
| 29. | a) | $sh(6+5i)$ | б) | $i^{(3-i)}$ |
| 30. | a) | $\sin(5-4i)$ | б) | $(-1)^{3-2i}$ |

Завдання 5. Поновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по відомій дійсній або уявній частині.

- | | | | |
|-----|-----------------------------|-----|-------------------------------|
| 1. | $u = 2x^2 - 2y^2 - y$ | 2. | $v = -3x^2y + y^3 + 2x$ |
| 3. | $u = -2xy - 4x$ | 4. | $v = x^3 - 3xy^2 + 2y$ |
| 5. | $u = -2x^2 + 2y^2 + 3x$ | 6. | $v = -x^2 + y^2 + 2x$ |
| 7. | $u = x^3 - 3xy^2 + x$ | 8. | $v = 3x^2y - y^3 - x$ |
| 9. | $u = x^2 - y^2 + y$ | 10. | $v = -x^3 + 3xy^2 + y$ |
| 11. | $u = -x^2 + y^2 + 2x$ | 12. | $v = -3x^2y + y^3 + 2x + 2$ |
| 13. | $u = -2xy - 4x + 3$ | 14. | $v = 4xy - y$ |
| 15. | $u = x^3 - 3xy^2 - 2xy$ | 16. | $v = 4xy + x$ |
| 17. | $u = -x^3 + 3xy^2 - 2y$ | 18. | $v = x^2 - y^2 - 4y$ |
| 19. | $u = -3x^2y + y^3 + 2x$ | 20. | $v = -4xy + 3y$ |
| 21. | $u = 2xy - 2y$ | 22. | $v = 3x^2y - y^3 + y$ |
| 23. | $u = x^3 - 3xy^2 + y$ | 24. | $v = 2xy - x$ |
| 25. | $u = 3x^2y - y^3 + x$ | 26. | $v = -2xy + 2y$ |
| 27. | $u = -x^3 + 3xy^2 - 2y + 1$ | 28. | $v = x^2 - y^2 - 4y - 2$ |
| 29. | $u = 2x^2 - 2y^2 - x$ | 30. | $v = 3x^2y - y^3 + x^2 - y^2$ |

Завдання 6. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші.

1. а) $\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4i}{z(z-2)} dz$

б) $\int_{|z+i|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z+i)(z-2i)}$

3. а) $\int_{|z|=2} \frac{3z-5i}{z(z+3)} dz$

б) $\int_{|z-2|=4} \frac{e^z + 1}{(z-2)(z-2i)} dz$

5. а) $\int_{|z|=3} \frac{z^2 - 3i}{z(z+4)} dz$

б) $\int_{|z+i|=4} \frac{sh \frac{\pi z}{2} dz}{(z-2i)(z-3i)}$

7. а) $\int_{|z|=1} \frac{3z+4i}{z(z-3)} dz$

б) $\int_{|z-2|=4} \frac{1 + \sin z}{(z+i)(z-4)} dz$

9. а) $\int_{|z|=2} \frac{-z^2 - 2i}{z(z+5)} dz$

б) $\int_{|z+i|=4} \frac{sh \frac{\pi z}{2} dz}{(z-i)(z+1)}$

2. а) $\int_{|z|=1} \frac{2z-3}{z(z+2i)} dz$

б) $\int_{|z+1|=4} \frac{z^2 + \cos z}{(z+i)(z-2i)} dz$

4. а) $\int_{|z|=2} \frac{2z^2 + 3}{z(z-3i)} dz$

б) $\int_{|z-i|=3} \frac{\cos z}{(z-i)(z+1)} dz$

6. а) $\int_{|z|=3} \frac{2z+4}{z(z-5i)} dz$

б) $\int_{|z+1|=4} \frac{\ln z dz}{(z+3i)(z-2i)}$

8. а) $\int_{|z|=1} \frac{3z^2 - 2}{z(z+3i)} dz$

б) $\int_{|z-i|=3} \frac{\ln \frac{z}{2} dz}{(z+i)(z-3i)}$

10. а) $\int_{|z|=2} \frac{3z-2}{z(z-3i)} dz$

б) $\int_{|z+1|=4} \frac{\cos z \pi dz}{(z+1)(z+i)} dz$

11. a) $\int_{|z|=3} \frac{-3z+2i}{z(z-4)} dz$

б) $\int_{|z-2|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z+1)(z-3)}$

13. a) $\int_{|z|=1} \frac{3z^2+i}{z(z+6)} dz$

б) $\int_{|z+i|=4} \frac{(z^2+\cos z) dz}{(z+2i)(z-1)}$

15. a) $\int_{|z|=2} \frac{0,5z-2i}{z(z+3)} dz$

б) $\int_{|z-2|=4} \frac{sh \frac{\pi z}{2} dz}{(z+2i)(z-3i)}$

17. a) $\int_{|z|=3} \frac{0,3z^2+3i}{z(z-5)} dz$

б) $\int_{|z+i|=4} \frac{\ln \frac{z}{2} dz}{(z+2)(z-2i)}$

19. a) $\int_{|z|=1} \frac{0,2z-4i}{z(z+2)} dz$

б) $\int_{|z-2|=4} \frac{sh \frac{\pi z}{4} dz}{(z+i)(z-2i)}$

21. a) $\int_{|z|=2} \frac{0,1z^2+3i}{z(z+4)} dz$

12. a) $\int_{|z|=3} \frac{-z^2+5}{z(z-4i)} dz$

б) $\int_{|z-i|=3} \frac{\ln z dz}{(z-i)(z-3i)}$

14. a) $\int_{|z|=1} \frac{5z+2}{z(z+5i)} dz$

б) $\int_{|z+1|=4} \frac{sh \frac{\pi z}{4} dz}{(z+i)(z-3i)}$

16. a) $\int_{|z|=2} \frac{0,5z^2-4}{z(z-6i)} dz$

б) $\int_{|z-i|=3} \frac{\sin \frac{\pi z}{4} dz}{(z-1)(z+2)}$

18. a) $\int_{|z|=2} \frac{0,3z+6}{z(z+3i)} dz$

б) $\int_{|z+1|=4} \frac{\cos z dz}{(z+i)(z-2)}$

20. a) $\int_{|z|=1} \frac{-0,3z^2-2}{z(z-5i)} dz$

б) $\int_{|z-i|=3} \frac{\sin z dz}{(z+i)(z+2)}$

22. a) $\int_{|z|=2} \frac{0,1z+5}{z(z-3i)} dz$

- 6) $\int_{|z+i|=4} \frac{e^z dz}{(z+i)(z-2i)}$
23. а) $\int_{|z|=3} \frac{-0,4z+2i}{z(z+5)} dz$ б) $\int_{|z+1|=4} \frac{(1+\sin z)dz}{(z-i)(z+3)}$
- б) $\int_{|z-2|=4} \frac{\cos \pi z dz}{(z+3i)(z-1)}$ 24. а) $\int_{|z|=3} \frac{0,4z^2-2}{z(z+6i)} dz$ б) $\int_{|z-i|=3} \frac{e^{iz} dz}{(z+1)(z-2)}$
25. а) $\int_{|z|=1} \frac{0,7z^2-i}{z(z+4)} dz$ 26. а) $\int_{|z|=1} \frac{-0,7z+2}{z(z-5i)} dz$ б) $\int_{|z+1|=4} \frac{\sin \frac{\pi z}{2} dz}{(z-i)(z+3)}$
- б) $\int_{|z+i|=4} \frac{\sin \frac{\pi z}{2} dz}{(z-i)(z+3)}$ 27. а) $\int_{|z|=2} \frac{1,1z+5i}{z(z-7)} dz$ 28. а) $\int_{|z|=2} \frac{-0,9z^2+3}{z(z+4i)} dz$ б) $\int_{|z-2|=4} \frac{e^z dz}{(z+1)(z+3i)}$
- б) $\int_{|z-2|=4} \frac{e^z dz}{(z+1)(z+3i)}$ б) $\int_{|z-i|=3} \frac{sh \frac{\pi z}{2} dz}{(z+1)(z-3i)}$
29. а) $\int_{|z|=3} \frac{0,8z^2+2i}{z(z+6)} dz$ 30. а) $\int_{|z|=3} \frac{-0,8z-4}{z(z-6i)} dz$ б) $\int_{|z+i|=4} \frac{ch \pi z dz}{(z-1)(z+3i)}$
- б) $\int_{|z+i|=4} \frac{ch \pi z dz}{(z-1)(z+3i)}$ б) $\int_{|z+1|=4} \frac{\ln \frac{z}{2} dz}{(z+4)(z-2i)}$

Завдання 7. Розвинути у ряд Тейлора функцію $f(z)$ по степенях z , використовуючи відомі формули.

1. $f(z) = \frac{z}{z^2 + i}$

2. $f(z) = \ln(2-z)$

$$3. \quad f(z) = \cos^2 \frac{iz}{2}$$

$$5. \quad f(z) = \ln(3+z)$$

$$7. \quad f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$$

$$9. \quad f(z) = \frac{z}{z^3 - i}$$

$$11. \quad f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z}$$

$$13. \quad f(z) = z^2 \cdot \cos \frac{1}{z}$$

$$15. \quad f(z) = \frac{\ln(2+z)}{z}$$

$$17. \quad f(z) = \sin^2 iz$$

$$19. \quad f(z) = z \cdot e^{iz}$$

$$21. \quad f(z) = \sin \frac{i}{z^2}$$

$$23. \quad f(z) = \ln \left(\frac{2+z}{z} \right)$$

$$25. \quad f(z) = z \cdot \cos \frac{i}{z}$$

$$27. \quad f(z) = z \cdot e^{\frac{i}{z}}$$

$$29. \quad f(z) = \frac{z^2}{z^2 + i}$$

$$4. \quad f(z) = \sin^2 \frac{iz}{2}$$

$$6. \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$$8. \quad f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}$$

$$10. \quad f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$12. \quad f(z) = \frac{z^2}{z^4 + i}$$

$$14. \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$$

$$16. \quad f(z) = \cos^2 iz$$

$$18. \quad f(z) = ch^2 iz$$

$$20. \quad f(z) = \ln \left(\frac{1+z}{z} \right)$$

$$22. \quad f(z) = \cos \frac{i}{z^2}$$

$$24. \quad f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$26. \quad f(z) = z \cdot \sin \frac{i}{z}$$

$$28. \quad f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{i}{z}}$$

$$30. \quad f(z) = sh^2 iz$$

Завдання 8. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)$ по степенях z в заданому кільці.

1. $f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z+2)}$ $1 < |z| < 2$
2. $f(z) = \frac{4-z}{(z-1)(z+2)}$ $1 < |z| < 2$
3. $f(z) = \frac{3z}{(z+1)(z-2)}$ $1 < |z| < 2$
4. $f(z) = \frac{z+4}{(z+1)(z-2)}$ $1 < |z| < 2$
5. $f(z) = \frac{5z}{(z-2)(z+3)}$ $2 < |z| < 3$
6. $f(z) = \frac{12-z}{(z-2)(z+3)}$ $2 < |z| < 3$
7. $f(z) = \frac{5z}{(z+2)(z-3)}$ $2 < |z| < 3$
8. $f(z) = \frac{z+12}{(z+2)(z-3)}$ $2 < |z| < 3$
9. $f(z) = \frac{4z}{(z-1)(z+3)}$ $1 < |z| < 3$
10. $f(z) = \frac{6-2z}{(z-1)(z+3)}$ $1 < |z| < 3$
11. $f(z) = \frac{4z}{(z+1)(z-3)}$ $1 < |z| < 3$
12. $f(z) = \frac{2z+6}{(z+1)(z-3)}$ $1 < |z| < 3$
13. $f(z) = \frac{6z}{(z-2)(z+4)}$ $2 < |z| < 4$

14. $f(z) = \frac{16-2z}{(z-2)(z+4)}$ $2 < |z| < 4$
15. $f(z) = \frac{6z}{(z+2)(z-4)}$ $2 < |z| < 4$
16. $f(z) = \frac{2z+16}{(z+2)(z-4)}$ $2 < |z| < 4$
17. $f(z) = \frac{7z}{(z-3)(z+4)}$ $3 < |z| < 4$
18. $f(z) = \frac{24-z}{(z-3)(z+4)}$ $3 < |z| < 4$
19. $f(z) = \frac{7z}{(z+3)(z-4)}$ $3 < |z| < 4$
20. $f(z) = \frac{z+24}{(z+3)(z-4)}$ $3 < |z| < 4$
21. $f(z) = \frac{5z}{(z-1)(z+4)}$ $1 < |z| < 4$
22. $f(z) = \frac{8-3z}{(z-1)(z+4)}$ $1 < |z| < 4$
23. $f(z) = \frac{5z}{(z+1)(z-4)}$ $1 < |z| < 4$
24. $f(z) = \frac{3z+8}{(z+1)(z-4)}$ $1 < |z| < 4$
25. $f(z) = \frac{7z}{(z-2)(z+5)}$ $2 < |z| < 5$
26. $f(z) = \frac{20-3z}{(z-2)(z+5)}$ $2 < |z| < 5$
27. $f(z) = \frac{7z}{(z+2)(z-5)}$ $2 < |z| < 5$
28. $f(z) = \frac{3z+20}{(z+2)(z-5)}$ $2 < |z| < 5$

$$29. \quad f(z) = \frac{6z}{(z-1)(z+5)} \quad 1 < |z| < 5$$

$$30. \quad f(z) = \frac{4z+10}{(z+1)(z-5)} \quad 1 < |z| < 5$$

Завдання 9. З'ясувати характер особливих точок заданих функцій і знайти лишки в цих точках.

- | | | | |
|-----|---|--|--|
| 1. | a) $\frac{e^{z-1}-1}{z-1}$ | б) $\frac{z^2+2}{z^3+z^2}$ | в) $z \cdot \cos \frac{1}{z}$ |
| 2. | a) $\frac{\ln(1-z)}{z}$ | б) $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ | в) $e^{\frac{1}{z+2}}$ |
| 3. | a) $\frac{\sin(z-1)}{z-1}$ | б) $\frac{z}{(z+1)^2(z-1)}$ | в) $z^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z}$ |
| 4. | a) $\frac{1-e^{z^2}}{z^2}$ | б) $\frac{z-2}{z^3+3z^2}$ | в) $z^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z}$ |
| 5. | a) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ | б) $\frac{z+1}{(z-2)^2(z-1)}$ | в) $z \cdot e^{\frac{1}{z^2}}$ |
| 6. | a) $\frac{\ln(1+z^3)}{z^2}$ | б) $\frac{z+2}{z^3+4z^2}$ | в) $z^2 \sin \frac{1}{z}$ |
| 7. | a) $\frac{\sin^2 z}{z}$ | б) $\frac{z}{(z+1) \cdot (z+2)^2}$ | в) $(z-1)^3 \cos \frac{1}{z-1}$ |
| 8. | a) $\frac{\operatorname{sh}(z+2)}{z+2}$ | б) $\frac{1}{(z-i) \cdot (z+1)^2}$ | в) $(z-2)^2 e^{-\frac{1}{z-2}}$ |
| 9. | a) $\frac{\sin(2z+2)}{z+1}$ | б) $\frac{1}{z^3+2z^2}$ | в) $(z+i)^2 \sin \frac{1}{z+i}$ |
| 10. | a) $\frac{\ln(2+z)}{z+1}$ | б) $\frac{z+1}{(z-3)^2 \cdot (z+2)}$ | в) $z^5 \sin \frac{1}{z^2}$ |
| 11. | a) $\frac{e^{2z+4}-1}{z+2}$ | б) $\frac{-2z+3}{(z-1) \cdot (z+2)^2}$ | в) $(z+2i)^3 \cos \frac{1}{z+2i}$ |

- | | | | | | | |
|-----|----|-------------------------------|----|-------------------------------------|----|------------------------------------|
| 12. | a) | $\frac{\sin(z+3)}{2z+6}$ | б) | $\frac{z+1}{(z-2)^2 \cdot (z+3)}$ | в) | $(z+1)^2 sh \frac{1}{z+1}$ |
| 13. | a) | $\frac{\ln(1+2z)}{z}$ | б) | $\frac{2z-1}{(z+2)^2 \cdot (z-3)}$ | в) | $e^{-\frac{1}{z+1}}$ |
| 14. | a) | $\frac{1-\cos 2z}{z^2}$ | б) | $\frac{1}{(z-i)^2 \cdot (z+1)}$ | в) | $(z+2)^3 ch \frac{1}{(z+2)}$ |
| 15. | a) | $\frac{\ln(1-z^3)}{z^3}$ | б) | $\frac{-2z+1}{(z+1)^2 \cdot (z+3)}$ | в) | $z^4 \cdot \sin \frac{1}{z}$ |
| 16. | a) | $\frac{1-e^{z^3}}{z^3}$ | б) | $\frac{3z+1}{(z-1)^2 \cdot (z+3)}$ | в) | $(z+i)^2 \cdot e^{\frac{1}{z+i}}$ |
| 17. | a) | $\frac{\sin^2(z-2)}{(z-2)^2}$ | б) | $\frac{1}{(z-i)^2 \cdot (z+2)}$ | в) | $z^3 \cdot \cos \frac{1}{z}$ |
| 18. | a) | $\frac{\ln(1-3z)}{z}$ | б) | $\frac{2z+3}{z^3-3z^2}$ | в) | $(z-1)ch \frac{1}{z-1}$ |
| 19. | a) | $\frac{1-\cos 4z}{z^2}$ | б) | $\frac{-4z+1}{(z-1) \cdot (z+3)^2}$ | в) | $z \cdot e^{-\frac{1}{z^2}}$ |
| 20. | a) | $\frac{sh 2z}{z}$ | б) | $\frac{1}{z^3-iz^2}$ | в) | $(z-i)^2 \cdot e^{\frac{1}{z-i}}$ |
| 21. | a) | $\frac{1-e^{z-3}}{2z-6}$ | б) | $\frac{2z+1}{(z-1)^2 \cdot (z+4)}$ | в) | $z^3 \cdot \sin \frac{1}{z^2}$ |
| 22. | a) | $\frac{\sin 3z}{z}$ | б) | $\frac{1}{z \cdot (z-i)^2}$ | в) | $(z+3)^3 \cdot e^{\frac{1}{z+3}}$ |
| 23. | a) | $\frac{\ln(3+z)}{z+2}$ | б) | $\frac{z+1}{(z-1) \cdot (z+4)^2}$ | в) | $(z-i)^4 \cdot \sin \frac{1}{z-i}$ |
| 24. | a) | $\frac{1-\cos(z+2)}{(z+2)^2}$ | б) | $\frac{2z}{(z+1)^2 \cdot (z-4)}$ | в) | $z^5 \cdot ch \frac{1}{z}$ |
| 25. | a) | $\frac{sh 3z^2}{z^2}$ | б) | $\frac{1}{(z-2i)^2 \cdot (z+1)}$ | в) | $z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z}}$ |

26. а) $\frac{\cos 6z - 1}{z^2}$ б) $\frac{z - 3}{(z + 1) \cdot (z - 4)^2}$ в) $z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$
27. а) $\frac{\sin(2z - 4)}{z - 2}$ б) $\frac{1}{z(z + i)^2}$ в) $(z - i)^3 \cdot \operatorname{ch} \frac{1}{z - i}$
28. а) $\frac{\operatorname{sh}(1 - z)}{z - 1}$ б) $\frac{1}{(z - 2i) \cdot (z + 1)^2}$ в) $(z - 4)^3 \cdot \cos \frac{1}{z - 4}$
29. а) $\frac{e^{2z} - 1}{z}$ б) $\frac{1 - 2z}{(z + 2) \cdot (z - 3)^2}$ в) $(z + 2i)^4 \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{z + 2i}$
30. а) $\frac{\ln(5 + z)}{z + 4}$ б) $\frac{1}{(z - i) \cdot (z + i)^2}$ в) $z^7 \sin \frac{1}{z^2}$

Завдання 10. Обчислити інтеграли за допомогою лишків.

1. а) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{(z^2 + 1)^2}$ б) $\oint_{|z-2i|=3} (z - 2i)^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z - 2i} dz$ в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$
2. а) $\oint_{|z-1|=3} \frac{z dz}{(z + 1)^2 (z - 1)}$ б) $\oint_{|z|=2} (z + i)^2 \sin \frac{1}{z + i} dz$ в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$
3. а) $\oint_{|z-3|=3} \frac{z dz}{(z - 4)^3 (z - 3)}$ б) $\oint_{|z+1|=1} (z + 1)^3 e^{\frac{1}{z+1}} dz$ в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 17)^2}$
4. а) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^4 + z^3}$ б) $\oint_{|z|=1} \frac{1 - \cos \frac{1}{z}}{z} dz$ в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 16)^2}$
5. а) $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 dz}{z^2 + 25}$ б) $\oint_{|z|=2} \frac{\frac{1}{e^z} + 1}{z} dz$ в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 1)}$
6. а) $\oint_{|z+2i|=3} \frac{\cos z dz}{z^4 + 4iz^3}$ б) $\oint_{|z|=2} (z - i)^3 \cos \frac{1}{z - i} dz$ в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 20)^2}$

$$7.a) \oint_{|z+2|=2} \frac{(z+5)dz}{(z+2)^3(z-3)}$$

$$b) \oint_{|z+2|=1} (z+2)^3 e^{\frac{1}{z+2}} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$$

$$8.a) \oint_{|z+1|=3} \frac{\sin z dz}{z^4+2z^3+z^2}$$

$$b) \oint_{|z-i|=2} z^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

$$9.a) \oint_{|z-1|=3} \frac{e^{2z} dz}{(z^2-1)^2}$$

$$b) \oint_{|z|=1} \frac{1-\sin \frac{1}{z}}{z} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$10.a) \oint_{|z+1|=2} \frac{(2z+1)dz}{(z+1)^3(z-5)}$$

$$b) \oint_{|z-2i|=1} (z-2i)^2 \sin \frac{1}{z-2i} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$$

$$11.a) \oint_{|z|=1} \frac{1+\sin z}{z^4} dz$$

$$b) \oint_{|z+4i|=2} (z+5i) e^{\frac{1}{(z+5i)^2}} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+8x+17)^2}$$

$$12.a) \oint_{|z-2|=2} \frac{z^4 dz}{(z-3)^3(z+2)}$$

$$b) \oint_{|z-1|=1} (z-1)^3 \sin \frac{1}{z-1} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$$

$$13.a) \oint_{|z-i|=3} \frac{\sin \pi z}{z^2-z} dz$$

$$b) \oint_{|z|=1} (z+1) e^{\frac{1}{z+1}} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2(x^2+16)}$$

$$14.a) \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)^3(z^2-16)}$$

$$b) \oint_{|z+4i|=1} (z+4i)^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z+4i} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

$$15.a) \oint_{|z-2|=2} \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^3}$$

$$b) \oint_{|z-2i|=1} (z-2i)^4 \sin \frac{1}{(z-2i)^2} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}$$

$$16.a) \oint_{|z+2i|=3} \frac{\sin 2z dz}{z^4+4iz^3}$$

$$b) \oint_{|z|=2} z^3 \operatorname{sh} \frac{1}{z} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$$

$$17.a) \oint_{|z+1|=1} \frac{e^z dz}{(z+1)^4}$$

$$b) \oint_{|z+1|=2} (z+2)^3 \cos \frac{1}{z+2} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+36)^2}$$

$$18.a) \oint_{|z-2|=1} \frac{(z+2)dz}{z(z-3)^2}$$

$$b) \oint_{|z-2|=1} (z-2)^2 \sin \frac{1}{z-2} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+12x+37)^2}$$

$$19.a) \oint_{|z+i|=1} \frac{(z^2+1)dz}{(z+i)^3}$$

$$b) \oint_{|z|=3} (z-2i)e^{\frac{1}{(z-2i)^3}} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+8x+25)^2}$$

$$20.a) \oint_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^4-z^2} dz$$

$$b) \oint_{|z-2|=1} \frac{1-\sin \frac{1}{z-2}}{z-2} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$$

$$21.a) \oint_{|z|=1} \frac{1+\cos 3z}{z^3} dz$$

$$b) \oint_{|z+i|=2} (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+12x+40)^3}$$

$$22.a) \oint_{|z-2|=2} \frac{(\ln z+7)dz}{(z-3)^3}$$

$$b) \oint_{|z-2|=1} (z-2)^5 \sin \frac{1}{(z-2)^2} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+25)^3}$$

$$23.a) \oint_{|z+2|=3} \frac{\sin(z+2)}{z^3+2z^2} dz$$

$$b) \oint_{|z-3i|=4} (z-3i)^2 \cos \frac{1}{z-3i} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^4}$$

$$24.a) \oint_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{(z-2i)^3} dz$$

$$b) \oint_{|z-i|=1} (z-i)^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z-i} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)^2}$$

$$25.a) \oint_{|z+i|=2} \frac{\cos z-1}{z^3(z-3)} dz$$

$$b) \oint_{|z+3i|=4} (z+3i)^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z+3i} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+100)^3}$$

$$26.a) \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$$

$$b) \oint_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+6x+10)^2}$$

$$27.a) \oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^4}$$

$$b) \oint_{|z+i|=1} \frac{1+\cos \frac{1}{z+i}}{z+i} dz$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(x^2+16)}$$

$$28.a) \oint_{|z+2|=3} \frac{1-\cos z}{z^3+2z^2} dz$$

$$б) \oint_{|z|=3} (z+2i)e^{\frac{1}{(z+2i)^2}} dz$$

$$в) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+36)^3}$$

$$29.a) \oint_{|z-2i|=2} \frac{(3-z)dz}{(z-i)^3(z+4)}$$

$$б) \oint_{|z+i|=1} (z+i)^3 sh \frac{1}{z+i} dz$$

$$в) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+8x+20)^2}$$

$$30.a) \oint_{|z|=3} \frac{zdz}{(z^2+4)^2}$$

$$б) \oint_{|z-1|=2} (z-1)^5 \sin \frac{1}{(z-1)^2} dz$$

$$в) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+25)}$$

Завдання 11. Знайти зображення $F(p)$ функції $f(t) \cdot \eta(t)$, де $\eta(t)$ - одинична функція Хевісайда, користуючись таблицею зображень, якщо задана функція $f(t)$.

$$1. \quad 2t^2 - 3\sin^2 4t - 5$$

$$2. \quad 4e^t t^3 + \cos^2 3t - 7$$

$$3. \quad 3t^3 - t \sin 2t + 2$$

$$4. \quad 2e^{-4t} - \sin 2t \cos t - 3$$

$$5. \quad 4 - t^5 e^{3t} + 2\sin^2 t$$

$$6. \quad 6te^{2t} - \cos^2 7t$$

$$7. \quad \sin 5t \sin 7t - 5e^t t^2 + 3$$

$$8. \quad 3t^2 e^{-2t} + \cos^2 2t - 4$$

$$9. \quad \sin 3t \cos 4t + 2te^{-3t} - 2$$

$$10. \quad 6t^3 e^{-7t} + \sin^2 3t$$

$$11. \quad \cos 3t \cos 6t - te^{-4t} + 5$$

$$12. \quad 2\sin^2 t - 5t^3 e^{-2t}$$

$$13. \quad 5t \sin 2t - 8e^{-2t} + 4$$

$$14. \quad 3t^2 e^{-3t} - 6\cos^2 t$$

$$15. \quad \sin 3t \sin 5t - 2t^4 e^{-2t} + 6$$

$$16. \quad 2\sin^2 5t - 4t^3 e^{-2t}$$

$$17. \quad 4\cos^2 2t - 2t^2 e^{-t}$$

$$18. \quad 5 - e^{-2t} \sin 3t + t^3$$

$$19. \quad e^{-3t} \cos 2t + t^4 - 3$$

$$20. \quad te^{-t} - 3\sin^2 3t$$

$$21. \quad 3\cos^2 6t - 4t + e^{-2t}$$

$$22. \quad e^t \cdot t^2 - 3\sin^2 t$$

$$23. \quad 2te^{-4t} - 6\cos^2 2t$$

$$24. \quad 8\sin 2t \cos 6t - te^{-3t} + 2$$

$$25. \quad 8\sin^2 2t - 5te^{-3t}$$

$$26. \quad 4\cos 7t \cos 9t + e^{-7t} + 7$$

$$27. \quad 6\cos^2 2t - t^2 e^{6t}$$

$$28. \quad 8\sin^2 2t + 4t^3 e^{-5t}$$

29. $t^2 e^{2t} - 8 \sin^2 t$

30. $\sin 8t \sin 2t - 4t^4 e^{-2t} - 3$

Завдання 12. Знайти оригінал $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$.

- | | | | | |
|-----|----|----------------------------|----|--------------------------------------|
| 1. | a) | $\frac{2p+3}{p^2+4p+13}$ | б) | $\frac{2p^2+1}{(p^2+2) \cdot (p-1)}$ |
| 2. | a) | $\frac{-p+4}{p^2+6p+18}$ | б) | $\frac{2p^2-2}{(p^2+2) \cdot (p+2)}$ |
| 3. | a) | $\frac{4p-3}{p^2-2p+5}$ | б) | $\frac{3p^2+7}{(p^2+4) \cdot (p-1)}$ |
| 4. | a) | $\frac{1-3p}{p^2-8p+25}$ | б) | $\frac{2p^2+1}{(p^2+2) \cdot (p+1)}$ |
| 5. | a) | $\frac{5p+1}{p^2+4p+53}$ | б) | $\frac{3p^2+4}{(p^2+4) \cdot (p+2)}$ |
| 6. | a) | $\frac{3p+14}{p^2-10p+29}$ | б) | $\frac{2p^2-2}{(p^2+2) \cdot (p-2)}$ |
| 7. | a) | $\frac{7-3p}{p^2-4p+20}$ | б) | $\frac{3p^2+7}{(p^2+4) \cdot (p+1)}$ |
| 8. | a) | $\frac{p-16}{p^2-6p+34}$ | б) | $\frac{3p^2-1}{(p^2+4) \cdot (p-3)}$ |
| 9. | a) | $\frac{8-2p}{p^2+2p+10}$ | б) | $\frac{3p^2+6}{(p^2+5) \cdot (p+2)}$ |
| 10. | a) | $\frac{3p+1}{p^2-4p+13}$ | б) | $\frac{2p^2}{(p^2+9) \cdot (p+3)}$ |
| 11. | a) | $\frac{2p-6}{p^2+8p+20}$ | б) | $\frac{3p^2+4}{(p^2+4) \cdot (p-2)}$ |

12.	a)	$\frac{4-3p}{p^2-2p+65}$	б)	$\frac{2p^2-7}{(p^2+2) \cdot (p+3)}$
13.	a)	$\frac{2p+7}{p^2-10p+50}$	б)	$\frac{3p^2-1}{(p^2+4) \cdot (p+3)}$
14.	a)	$\frac{2-9p}{p^2-4p+29}$	б)	$\frac{3p^2+6}{(p^2+5) \cdot (p-2)}$
15.	a)	$\frac{-7p-3}{p^2-8p+32}$	б)	$\frac{2p^2-7}{(p^2+2) \cdot (p-3)}$
16.	a)	$\frac{3p-11}{p^2-12p+40}$	б)	$\frac{3p^2+6}{(p^2+5) \cdot (p-2)}$
17.	a)	$\frac{2p-13}{p^2+14p+53}$	б)	$\frac{-8}{(p^2+4) \cdot (p+2)}$
18.	a)	$\frac{-2p+10}{p^2-16p+68}$	б)	$\frac{2p^2}{(p^2+9) \cdot (p-3)}$
19.	a)	$\frac{2p-5}{p^2-2p+10}$	б)	$\frac{-13}{(p^2+4) \cdot (p+3)}$
20.	a)	$\frac{4p-7}{p^2+20p+109}$	б)	$\frac{-20}{(p^2+16) \cdot (p-2)}$
21.	a)	$\frac{6p-15}{p^2+12p+45}$	б)	$\frac{2p^2+5}{(p^2+9) \cdot (p+2)}$
22.	a)	$\frac{17-4p}{p^2-20p+116}$	б)	$\frac{-25}{(p^2+16) \cdot (p-3)}$
23.	a)	$\frac{8p-5}{p^2+4p+29}$	б)	$\frac{3p^2+14}{(p^2+9) \cdot (p-2)}$
24.	a)	$\frac{-4p-7}{p^2+12p+52}$	б)	$\frac{2p^2+7}{(p^2+16) \cdot (p+3)}$

25.	a)	$\frac{6p+17}{p^2-14p+58}$	б)	$\frac{-20}{(p^2+16) \cdot (p+2)}$
26.	a)	$\frac{9-8p}{p^2+16p+73}$	б)	$\frac{3p^2+6}{(p^2+5) \cdot (p+2)}$
27.	a)	$\frac{11-7p}{p^2+2p+50}$	б)	$\frac{2p^2+5}{(p^2+9) \cdot (p-2)}$
28.	a)	$\frac{7p-10}{p^2-16p+80}$	б)	$\frac{-13}{(p^2+4) \cdot (p-3)}$
29.	a)	$\frac{5p-13}{p^2-6p+45}$	б)	$\frac{3p^2+14}{(p^2+9) \cdot (p+2)}$
30.	a)	$\frac{12-3p}{p^2+18p+90}$	б)	$\frac{-8}{(p^2+4) \cdot (p-2)}$

Завдання 13. Користуючись методом операційного числення, знайти розв'язок ЛНДР, який задовольняє початковим умовам.

1.	$y'' + y' = 2t,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$	16.	$y'' - 9y = 10 \sin t,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$
2.	$y'' + 2y' = -8 \sin 2t,$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$	17.	$y'' + 3y' = 3,$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$
3.	$y'' + y = 6e^{-t},$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$	18.	$y'' - 3y' + 2y = e^t,$ $y(0) = y'(0) = 1.$
4.	$y'' + 4y = 16e^{2t},$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$	19.	$y'' + 9y = 18e^{3t},$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$
5.	$y'' - 2y' - 3y = 9t,$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$	20.	$y'' - y = 10 \cos 3t,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
6.	$y'' - 9y = 10 \sin t,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$	21.	$y'' + 4y' = 8,$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| 7. | $y'' + 3y' = 3,$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$ | 22. | $y'' + 2y' = -8 \sin 2t,$
$y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$ |
| 8. | $y'' - 3y' + 2y = e^t,$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$ | 23. | $y'' + y = 6e^{-t},$
$y(0) = y'(0) = 1.$ |
| 9. | $y'' + 9y = 18e^{3t},$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$ | 24. | $y'' + 4y = 16e^{2t},$
$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$ |
| 10. | $y'' - y = 10 \cos 3t,$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$ | 25. | $y'' - 2y' - 3y = 9t,$
$y(0) = -2, \quad y'(0) = 1.$ |
| 11. | $y'' + y' = 2t,$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$ | 26. | $y'' - 9y = 10 \sin t$
$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$ |
| 12. | $y'' + 2y' = -8 \sin 2t,$
$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$ | 27. | $y'' + 3y' = 3,$
$y(0) = 2, \quad y'(0) = -5.$ |
| 13. | $y'' + y = 6e^{-t},$
$y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$ | 28. | $y'' - 3y' + 2y = e^t,$
$y(0) = y'(0) = 2.$ |
| 14. | $y'' + 4y = 16e^{2t},$
$y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$ | 29. | $y'' + 9y = 18e^{3t},$
$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$ |
| 15. | $y'' - 2y' - 3y = 9t,$
$y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$ | 30. | $y'' - y = 10 \cos 3t,$
$y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$ |

3. Довідковий матеріал

Таблиця 3.1. – Основні оригінали і їх зображення.

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	12	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
2.	$t^n (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$

3.	$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	14	$e^{\lambda t} ch \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 - \omega^2}$
4.	$e^{\lambda t} (\lambda = a + bi)$	$\frac{1}{p-\lambda}$	15	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
5.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	16	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
6.	$t^\alpha e^{\lambda t} (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	17	$t sh \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
7.	$\sin \omega t (\omega > 0)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	18	$t ch \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
8.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	19	$\sin(t - \tau)$ ($\tau > 0$)	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
9.	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	20	$\cos(t - \tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
10	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	21	$t^n \sin \omega t$	$\frac{\text{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
11	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$	22	$t^n \cos \omega t$	$\frac{\text{Re}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
23	$\frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3} \div \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$				

Література.

1. Высшая математика. Специальные главы.: Пособие для студентов вузов Под ред. П.И. Чинаева. – К.: Вища школа, 1981.- 368 с.
2. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг. ред. П.П. Овчинникова. - К.: Техніка, 2004. – 792 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учебное пособие для студентов вузов. - М.: Высш. школа, 1980. – 365 с.
4. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учебное пособие. - М.: «Наука», 1981. -302 с.
5. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Под ред. Г.И. Кручковича. Учебное пособие для вузов. - М.: Высш. школа, 1970. - 512 с.
6. Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы. Под ред. А.В.Ефимова, В.П.Демидовича. - М.: «Наука», 1984. - 608 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. - К.: Вища школа, 1993. - 648с.
8. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.-М.,1967.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы, функции комплексного переменного.-М.-1989.
10. Кулініч Г.Л., Тараненко Є.Ю., Бурим В.М. та ін.; Вища математика: Підручник.-Кн2. Спеціальні розділи.- К.:Либідь,2003.