Д.І. Анпілогов – доцент кафедри прикладної математики національного університету «Запорізька політехніка».

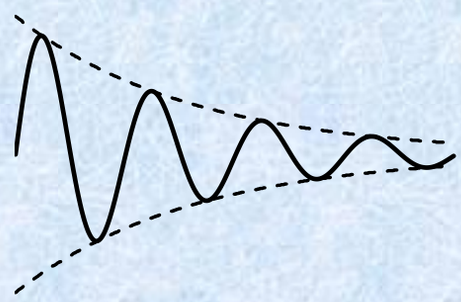
Н.В. Сніжко – доцент кафедри вищої математики національного університету «Запорізька політехніка».

Інтегральне числення

Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко

Д.І. Анпілогов
Н.В. Сніжко

# Інтегральне числення



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

Д. І. Анпілогов
Н. В. Сніжко

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2021

УДК 517.3 (075.8)
А69

*Рекомендовано до друку вченою радою*
*національного університету «Запорізька політехніка»*
*(протокол № 1 від 11.10.2021)*

Р е ц е н з е н т и:

*С.В.Чопоров* – професор кафедри програмної інженерії
Запорізького національного університету,
доктор технічних наук,

*Ю. В. Мастиновський* – завідувач кафедри прикладної
математики НУ «Запорізька політехніка»,
кандидат технічних наук, професор

**Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В.**

А69 Інтегральне числення: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 254 с.

ISBN 978-617-529-334-8

Посібник містить теоретичні відомості і значну кількість ілюстративних прикладів та розв'язаних задач з інтегрального числення у відповідності до програми курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців інженерно-технічних спеціальностей. В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів та приклади їх розв'язку, які не потребують застосування обчислювальної техніки.

Видання може бути корисним для студентів, педагогів вищої школи, докторантів та аспірантів, які працюють у сфері педагогіки вищої школи.

**УДК 517.3 (075.8)**

ISBN 978-617-529-334-8

© Анпілогов Д. І.
© Сніжко Н. В.
© Національний університет
«Запорізька політехніка», 2021

# *З М І С Т*


Вступ . . . . . 6

**1 Невизначений інтеграл** **8**

1.1 Означення і властивості невизначеного інтегралу . 8

1.1.1 Означення невизначеного інтегралу . . . . . 8

1.1.2 Властивості невизначеного інтегралу . . . . . 8

1.2 Елементи техніки інтегрування . . . . . 9

1.2.1 Таблиця первісних . . . . . 9

1.2.2 Заміна змінної у невизначеному інтегралі . 11

1.2.3 Застосування заміни змінної . . . . . 14

1.2.4 Інтегрування частинами . . . . . 19

1.3 Класи інтегровних функцій . . . . . 21

1.3.1 Інтегрування раціональних виразів . . . . . 21

1.3.1.1 Інтегрування елементарних правильних дробів . . . . . 22

1.3.1.2 Виділення цілої частини . . . . . 30

1.3.1.3 Розкладання правильного дробу на елементарні . . . . . 33

1.3.1.4 Заключне зауваження . . . . . 38

1.3.2 Інтегрування деяких ірраціональних виразів 39

1.3.3 Інтегрування тригонометричних виразів . . 47

1.3.3.1 Основні формули тригонометрії . . 47

1.3.3.2 Елементарні випадки . . . . . 50

1.3.3.3 Універсальна тригонометрична підстановка . . . . . 50

1.3.3.4 Подальші приклади . . . . . 52

1.4 Питання для перевірки . . . . . 56

**2 Визначений інтеграл** **59**
2.1 Означення і властивості визначеного інтегралу . . 59
2.1.1 Означення визначеного інтегралу . . . . . 59
2.1.2 Формула Ньютона-Лейбніца . . . . . 62
2.1.3 Властивості визначеного інтегралу . . . . . 65
2.2 Обчислення визначеного інтегралу . . . . . 67
2.2.1 Інтегрування частинами . . . . . 67
2.2.2 Заміна змінної . . . . . 67
2.2.3 Випадок від'ємної площі . . . . . 71
2.2.4 Випадок симетричних меж . . . . . 74
2.3 Застосування визначеного інтегралу . . . . . 75
2.3.1 Приклади фізичних застосувань . . . . . 75
2.3.1.1 Схема застосування інтегралу . . . . 75
2.3.1.2 Інтегральне середнє . . . . . 78
2.3.1.3 Подальші приклади . . . . . 82
2.3.2 Приклади геометричних застосувань . . . . . 91
2.3.2.1 Три способи задати функцію . . . . 92
2.3.2.2 Площі плоских фігур . . . . . 103
2.3.2.3 Довжина плоскої кривої . . . . . 108
2.3.2.4 Об'єм тіла обертання . . . . . 114
2.3.2.5 Площа поверхні тіла обертання . . . 121
2.3.2.6 Узагальнюючі результати . . . . . 125
2.4 Питання для перевірки . . . . . 127

**3 Невласні інтеграли** **129**
3.1 Невласні інтеграли першого роду . . . . . 129
3.1.1 Означення і приклади . . . . . 129
3.1.2 Деякі елементарні теореми . . . . . 131
3.1.3 Ознаки порівняння . . . . . 132
3.1.3.1 Перша ознака порівняння . . . . . 133
3.1.3.2 Друга ознака порівняння . . . . . 134
3.1.4 Про абсолютну збіжність . . . . . 135
3.1.5 Заключні зауваження . . . . . 138
3.2 Невласні інтеграли другого роду . . . . . 138
3.3 Питання для перевірки . . . . . 143

**4 Інтеграл Рімана** **144**
4.1 Криволінійні інтеграли . . . . . 144
4.1.1 Криволінійні інтеграли першого роду . . . . 144

4.1.1.1 Означення криволінійного інтегралу першого роду . . . . . 144
4.1.1.2 Обчислення криволінійного інтегралу першого роду . . . . . 147
4.1.1.3 Властивості криволінійного інтегралу першого роду . . . . . 148
4.1.1.4 Узагальнення на тривимірний випадок . . . . . 149
4.1.2 Криволінійні інтеграли другого роду . . . . . 151
4.1.2.1 Означення криволінійного інтегралу другого роду . . . . . 151
4.1.2.2 Обчислення криволінійного інтегралу другого роду . . . . . 154
4.1.2.3 Властивості криволінійного інтегралу другого роду . . . . . 159
4.1.2.4 Про повноту диференціалу . . . . . 160
4.1.2.5 Випадок замкненого контуру . . . . 165
4.2 Подвійні інтеграли . . . . . 169
4.2.1 Означення і зміст подвійного інтегралу . . . 169
4.2.2 Властивості подвійного інтегралу . . . . . 177
4.2.3 Обчислення подвійного інтегралу . . . . . 177
4.2.4 Заміна змінних у подвійному інтегралі . . . 185
4.2.5 Формула Гріна . . . . . 195
4.2.6 Застосування подвійного інтегралу . . . . . 201
4.2.6.1 Центр мас неоднорідної пластини . 201
4.2.6.2 Моменти інерції неоднорідної пластини . . . . . 204
4.2.6.3 Інші застосування . . . . . 207
4.3 Питання для перевірки . . . . . 209

**5 Індивідуальні завдання** **213**

**6 Розв'язок типового варіанту** **228**
Література . . . . . 253

# Вступ

Даний посібник є продовженням посібника «Диференціальне числення» авторів Д.І. Анпілогова, Н.В. Сніжко і охоплює наступні теми курсу математичного аналізу: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл та його застосування», «Невласні інтеграли», «Криволінійні інтеграли та їх застосування», «Подвійні інтеграли та їх застосування». Тематичний обсяг та рівень викладення відповідають сучасним вимогам, у відповідності до програми курсу вищої математики багатоступеневої підготовки фахівців інженерно-технічних спеціальностей.

Переважну більшість тверджень доведено з дотриманням досить високого рівня математичної строгості. Це дозволяє розглядати матеріал як викладений системно. Крім того, з практичної точки зору мати в наявності доведення зручно, оскільки при цьому легше прийняти рішення про відповідність конкретної ситуації до меж застосування тих чи інших ознак, властивостей, формул тощо.

Усі основні теоретичні положення ілюструються великою кількістю відповідних прикладів. Значний об'єм посібника зумовлений значною кількістю наведених прикладів, які пояснюють специфіку принципово нових термінів. Автори, зокрема, ретельно добирали приклади, які ілюструють хід постановки математичних задач для опису фізичних процесів або станів. В багатьох прикладах також розв'язано низку типових задач курсу вищої математики для студентів інженерно-технічних спеціальностей.

Певні фрагменти матеріалу набрано дрібним шрифтом. Як правило, при першому читанні ці фрагменти можна пропустити, але автори настійливо рекомендують повернутись до них пізніше при повторному читанні. В кінці кожного розділу наведено список контрольних питань. За їх допомогою можна систематизувати опанований матеріал та перевірити рівень його засвоєння.

В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів і приклад розв'язку одного варіанта. Жодна задача не потребує застосування обчислювальної техніки. Зав-

дання дібрано в такий спосіб, щоб розрахунки були простими в обчислювальному плані. На думку авторів, зручність розрахунків дозволяє не відволікатись на громіздкі арифметичні дії, а зосередитись на ідеях і практичних аспектах застосування математичного аналізу.

В кінці посібника наведений список літератури. Цей список, звичайно, не є повним. Автори свідомо обмежились лише класичними фундаментальними підручниками, які перевидаються та не втрачають актуальності впродовж десятиліть.

В посібнику прийнято наступні умовні позначення. Означення супроводжуються символом ♦. Приклади та їх розв'язання містяться між білими трикутниками: ◁ *текст прикладу* ▷.

Матеріали посібника можуть використовуватись студентами для самостійної роботи при вивченні курсу математичного аналізу і виконанні практичних розрахунково-графічних завдань. Посібник може бути корисним і для викладачів при організації та плануванні лекційних та практичних занять з математичного аналізу; зокрема, задачі індивідуальних завдань можуть бути використані для створення банків задач в системах дистанційного навчання.

Автори будуть вдячні за будь-які зауваження та пропозиції щодо задуму, плану та змісту даного посібника.

# 1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

## 1.1 Означення і властивості невизначеного інтегралу

### 1.1.1 Означення невизначеного інтегралу

Розглянемо функцію $f(x)$. Кажуть, що диференційовна функція $F(x)$ є *первісною* для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$. Наприклад, первісною для функції $f(x) = 2x$ є функція $F(x) = x^2$, оскільки $F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x = f(x)$.

Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Тоді функція $F_1(x) = F(x) + C$, $C = \text{const}$ – також первісна. Справді:

$$F_1'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Доведемо також обернене твердження: якщо $F(x)$ і $F_1(x)$ – первісні, то $F(x) - F_1(x) = \text{const}$. Припустимо, це не так, і

$$F(x) - F_1(x) = \varphi(x).$$

Диференціюючи, отримуємо:

$$\varphi'(x) = (F(x) - F_1(x))' = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Але це можливо лише в разі $\varphi(x) \equiv \text{const}$.

Отже, функція $f(x)$ має безліч первісних, але вони відрізняються одна від одної лише адитивною[1] константою.

♦ **Означення 1.1. Невизначеним інтегралом функції $f(x)$** називають сукупність усіх її первісних:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \text{якщо} \qquad F'(x) = f(x).$$

### 1.1.2 Властивості невизначеного інтегралу

1°. Основна властивість має вигляд

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

[1] Так називають величину, яку додають.

і випливає безпосередньо з означення інтегралу. Вона означає, що *інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання.*
2°. Властивість

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx,\qquad\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

називають **лінійністю**. Ця властивість доводиться безпосереднім диференціюванням правої частини.

Лінійнійсть передбачає два аспекти. По-перше, покладемо $\alpha=\beta=1$:

$$\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx,$$

тобто *інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій*.

По-друге, покладемо $\beta=0$:

$$\int\alpha f(x)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx,$$

тобто *мультиплікативну*[2] *константу можна виносити за знак інтегралу.*
3°. Вигляд первісної не залежить від позначення змінної інтегрування: якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то $\int f(t)\,dt=F(t)+C$.

Властивості невизначеного інтегралу відкривають широкі можливості для його знаходження.

## 1.2 Елементи техніки інтегрування

Спочатку сформуємо **таблицю первісних** для основних елементарних функцій, а потім розробимо на додаток до неї **прийоми інтегрування.** Вкажемо на два основні прийоми: **інтегрування частинами** і **заміна змінної.** За їх допомогою можна в подальшому поповнювати таблицю первісних.

### 1.2.1 Таблиця первісних

Наведемо таблицю первісних (табл. 1.1). Більшість її рядків ви-

[2]Так називають величину, на яку множать.

Таблиця 1.1 – Таблиця первісних

| № | Первісна | Прим. |
|---|---|---|
| 1 | $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $n \neq -1$ |
| 1a | $\int x^0\,dx = \int 1 \cdot\,dx = \int dx = x + C$ | Окремий випадок $n = 0$ |
| 1b | $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ | Особливий випадок $n = -1$ |
| 2 | $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $a > 0$, $a \neq 1$ |
| 2a | $\int e^x\,dx = e^x + C$ | Окремий випадок $a = e$ |
| 3 | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ | |
| 4 | $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ | |
| 5 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ | |
| 6 | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ | |
| 7 | $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ | $a \neq 0$ |
| 7a | $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ | Окремий випадок $a = 1$ |
| 8 | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ | $a > 0$ |
| 8a | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ | Окремий випадок $a = 1$ |
| 9 | $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ | «Високий логарифм» |
| 10 | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$ | «Довгий логарифм» |
| 11 | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C$ | При $x > a$, де $a > 0$ |

никає при використанні таблиці похідних. Кожен рядок таблиці первісних легко перевірити безпосереднім диференціюванням правої частини. Однак, виникнення деяких рядків таблиці первісних потребує додаткових пояснень. Ми надамо їх нижче, але для зручності користування відповідні результати наведемо вже зараз, складаючи повну[3] таблицю.

### 1.2.2 Заміна змінної у невизначеному інтегралі

У символі $\int f(x)\,dx$ функцію $f(x)$ називають **підінтегральною функцією,** а добуток $f(x)\,dx$ називають **підінтегральним виразом.** Нехай підінтегральна функція $f(x)$ є добутком двох множників, з яких один є похідною деякої функції $\varphi$, а інший є складною функцією, причому внутрішня функція – це $\varphi$:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Введемо заміну: $t = \varphi(x)$, тоді $dt = \varphi'(x)\,dx$. Підінтегральний вираз матиме вигляд

$$f(x)\,dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = g(t)\,dt.$$

Отже, переходячи до нової змінної, ми переходимо від задачі інтегрування функції $f$ до задачі інтегрування функції $g$. Якщо розбиття функції $f$ на співмножники зроблено вдало, то нова задача є більш простою порівняно зі старою. Нехай її розв'язок

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

Тоді

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Справді:

$$(G(\varphi(x)) + C)'_x = G'_\varphi \cdot \varphi'_x = g(\varphi) \cdot \varphi'_x = f(x).$$

[3]Насправді поняття «повна» слід розглядати як відносне: таблиці первісних можуть налічувати декілька тисяч позицій [1] (існує і багато інших видань; ми посилаємось на найвідоміше). Наша таблиця є «повною» в суб'єктивному розумінні: автори вважають, що таблиця 1.1 містить мінімальну інформацію, яку слід запам'ятати. В більш складних випадках можна звертатись до більш повних таблиць, або застосовувати різні методи і прийоми інтегрування.

Отже, при введенні заміни слід заміняти: 1) аргумент $x$ в підінтегральній функції; 2) диференціал аргументу $dx$ в підінтегральному виразі. При цьому підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ *слід розуміти як добуток* функції $f(x)$ і диференціалу аргументу $dx$.

Окремим важливим випадком розглянутої техніки є такий: підінтегральна функція є складною, причому внутрішня функція лінійна, а інтеграл від зовнішньої – відомий: якщо

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Справді[4]:

$$\int f(kx+b)\,dx = \left\| \begin{matrix} t = kx+b \\ dt = k\,dx \\ dx = \frac{dt}{k} \end{matrix} \right\| = \int f(t)\,\frac{dt}{k} =$$

$$= \frac{1}{k}\int f(t)\,dt = \frac{1}{k}\left(F(t) + C_1\right) = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

де позначено $C = \frac{C_1}{k}$.

Розглянемо відповідні приклади.

◁ *Приклад 1.1.*

$$\int e^{2x+3}\,dx = \left\| \begin{matrix} t = 2x+3 \\ dt = 2\,dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right\| = \int e^t\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.2.*

$$\int \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)\,dt = \left\| \begin{matrix} z = \omega t + \varphi_0 \\ dz = \omega\,dt \\ dt = \frac{dz}{\omega} \end{matrix} \right\| = \int \cos z\,\frac{dz}{\omega} =$$

[4]Подвійними вертикальними рисками $\|\cdots\|$ зручно позначати тимчасове відволікання від основного тексту.

$$= \frac{1}{\omega}\int \cos z\,dz = \frac{1}{\omega}\sin z + C = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi_0) + C. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.3.*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2z+7}} = \left\| \begin{matrix} u = 2z+7 \\ du = 2\,dz \\ dz = \frac{du}{2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{2z+7} + C. \triangleright$$

В наведених прикладах і стару, і нову змінні можна позначати довільними літерами. Треба лише пам'ятати: при введенні заміни в підінтегральному виразі повинні зникнути і стара змінна, і її диференціал (якою б літерою вони не були позначені). Замість них повинні з'являтись нова змінна і її диференціал (якою б літерою вони не були позначені).

Заміна змінної є, мабуть, найпотужнішим прийомом інтегрування. Цей прийом не вичерпується випадками, коли внутрішня функція лінійна. Розглянемо наступні приклади.

◁ *Приклад 1.4.*

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \left\| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.5.*

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix} \right\| = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2} + C. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.6.*

$$\int (2x+5)(x^2+5x-8)^3\,dx = \left\| \begin{matrix} t = x^2+5x-8 \\ dt = (2x+5)\,dx \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(x^2+5x-8)^4}{4} + C. \triangleright$$

Одним із різновидів заміни змінної є прийом **«внесення під знак диференціалу».** Ніякий новий математичний зміст в цьому разі не з'являється. Змінюється лише форма викладок, причому відмовляються від використання нової літери для позначення нової змінної. Так, три останніх приклади можна оформити в такий спосіб:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Тут під знак диференціалу внесли косинус (і він перетворився на синус), тобто врахували, що

$$d(\sin x) = (\sin x)'_x\, dx = \cos x\, dx.$$

Аналогічно,

$$\int 2xe^{x^2}\, dx = \int e^{x^2}\, d\left(x^2\right) = e^{x^2} + C.$$

Тут під знак диференціалу внесли $2x$ (з перетворенням на $x^2$), тобто врахували, що

$$d\left(x^2\right) = \left(x^2\right)'_x\, dx = 2x\, dx.$$

Аналогічно,

$$\int (2x+5)(x^2+5x-8)^3\, dx =$$

$$= \int \left(x^2+5x-8\right)^3\, d\left(x^2+5x-8\right) = \frac{(x^2+5x-8)^4}{4} + C.$$

Тут під знак диференціалу внесли $2x+5$ (з перетворенням на відповідний квадратний тричлен), тобто врахували, що

$$d\left(x^2+5x-8\right) = \left(x^2+5x-8\right)'_x\, dx = (2x+5)\, dx.$$

### 1.2.3 Застосування заміни змінної

Настав час надати коментарі до таблиці первісних. Зробимо це, розглядаючи відповідні приклади.

1°. Заміна змінних дозволяє узагальнити формулу 7а таблиці первісних до вигляду 7. В наступному і аналогічних прикладах домовляються вважати, що $a > 0$.

◁ *Приклад 1.7.* Обчислимо інтеграл 7 в таблиці первісних. Маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \left\| \begin{matrix} t = \frac{x}{a} \\ x = at \\ dx = a\, dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{a\, dt}{a^2t^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \triangleright$$

2°. Заміна змінних дозволяє узагальнити формулу 8а таблиці первісних до вигляду 8.

◁ *Приклад 1.8.* Обчислимо інтеграл 8 в таблиці первісних при $a > 0$. Маємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ x = at \\ dx = a\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \int \frac{a\,dt}{|a|\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C. \triangleright$$

3°. Отримаємо формулу 9 таблиці первісних. При обчисленні цього інтегралу користуються **методом невизначених коефіцієнтів.** В нашому випадку він полягає в наступному: якщо два многочлени однакових степенів тотожно (при будь-яких $x$) дорівнюють один одному, то дорівнюють один одному коефіцієнти при однакових степенях $x$ відповідно.

◁ *Приклад 1.9.* Обчислимо інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, $a \neq 0$. Для цього спочатку розкладемо дріб $\frac{1}{x^2 - a^2}$ на елементарні методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}.$$

Тут $A$ і $B$ є деякими (поки що невизначеними) коефіцієнтами. Розкласти дріб в цьому випадку і означає знайти $A$ і $B$. Маємо:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A(x + a) + B(x - a)}{(x - a)(x + a)} = \frac{x(A + B) + a(A - B)}{x^2 - a^2}.$$

Отже, достатньо виконати тотожність

$$x(A + B) + a(A - B) \equiv 1 = 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$, отримуємо систему[5]

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 : & A + B = 0 \\ x^0 : & a(A - B) = 1 \end{array}\right\}$$

[5]Тут і далі символи «$x^n$ :», які відокремлюються вертикальною рискою, є елементами коментаря і до складу відповідних рівнянь, звичайно, не входять. Вони лише пояснюють, при яких степенях $x$ відбувається прирівнювання коефіцієнтів.

Її розв'язок $A = \frac{1}{2a}$, $B = -\frac{1}{2a}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \left( \frac{\frac{1}{2a}}{x - a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x + a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a} \right) = \left\| \begin{matrix} t = x - a & z = x + a \\ x = t + a & x = z - a \\ dx = dt & dx = dz \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dz}{z} \right) = \frac{1}{2a} \left( \ln |t| - \ln |z| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t}{z} \right| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

В середовищі математиків таку конструкцію жаргонно називають **«високий логарифм».** ▷

4°. Отримаємо формулу 10 таблиці первісних.

Перед цим розглянемо елементи гіперболічної тригонометрії. Функції

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

називають **гіперболічним синусом** і **гіперболічним косинусом**. Ці назви стануть очевидними після вивчення компексних чисел.

По-перше, отримаємо **основну тригонометричну тотожність** гіперболічної тригонометрії: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{\left( e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} \right) - \left( e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x} \right)}{4} = \frac{2 + 2}{4} = 1.$$

По-друге, отримаємо **вирази для похідних** цих функцій:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

◁ *Приклад 1.10.* Обчислимо інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \left\| \begin{matrix} x = a \operatorname{sh} t \\ dx = a \operatorname{ch} t \, dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{a \operatorname{ch} t \, dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2}} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch} t \, dt}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}} = \int \frac{\operatorname{ch} t \, dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t \, dt}{|\operatorname{ch} t|} = \int dt = t + C_1.$$

Врахували, що $\operatorname{ch} t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, і тому $|\operatorname{ch} t| = \operatorname{ch} t$. Власне, інтегрування завершене. Введемо зворотну заміну, тобто знайдемо $t$ з рівняння $x = a \operatorname{sh} t$. Покладемо $e^t = z$, $z > 0$. Тоді $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{z}$. Маємо:

$$a \operatorname{sh} t = a \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} = a \cdot \frac{z - \frac{1}{z}}{2} = a \cdot \frac{z^2 - 1}{2z}.$$

Тоді з заміни отримуємо:

$$x = a \operatorname{sh} t = a \cdot \frac{z^2 - 1}{2z}, \qquad 2xz = az^2 - a, \qquad az^2 - 2xz - a = 0.$$

Дискримінант цього квадратного рівняння $D = 4x^2 + 4a^2$, корені

$$z_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

Оскільки $z > 0$, то перед знаком радикалу обираємо «плюс»:

$$z = e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

$$t = \ln z = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \ln a.$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = t + C_1 = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \ln a + C_1.$$

Позначаючи $C = C_1 - \ln a$, остаточно отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C.$$

В середовищі математиків таку конструкцію жаргонно називають **«довгий логарифм».** $\triangleright$

5°. Отримаємо формулу 11 таблиці первісних.

$\triangleleft$ *Приклад 1.11.* Обчислимо інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \left\| \begin{matrix} x = a \operatorname{ch} t \\ dx = a \operatorname{sh} t \, dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{a \operatorname{sh} t \, dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2}} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{sh} t \, dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} = \int \frac{\operatorname{sh} t \, dt}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{sh} t \, dt}{|\operatorname{sh} t|} = \begin{cases} \int dt, & \operatorname{sh} t > 0 \\ -\int dt, & \operatorname{sh} t < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{bmatrix} t + C_1 & t > 0 \\ -t + C_1, & t < 0 \end{bmatrix} = |t| + C_1.$$

Знайдемо $t$ з рівняння $x = a \operatorname{ch} t$. Покладемо $e^t = z$, $z > 0$. Тоді $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{z}$. Маємо:

$$a \operatorname{ch} t = a \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = a \cdot \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = a \cdot \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Тоді з заміни отримуємо:

$$x = a \operatorname{ch} t = a \cdot \frac{z^2 + 1}{2z}, \qquad 2xz = az^2 + a, \qquad az^2 - 2xz + a = 0.$$

Дискримінант цього квадратного рівняння $D = 4x^2 - 4a^2$. Отже, розв'язки виникають лише за умови $|x| > a$. Втім, і підінтегральна функція визначена саме на цьому проміжку. Корені

$$z_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Обмежимось випадком $x > a$. Тоді:

$$t_1 = \ln z_1 = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}, \qquad t_2 = \ln z_2 = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Побудуємо суму $t_1 + t_2$. З використанням теореми Вієта маємо:

$$t_1 + t_2 = \ln z_1 + \ln z_2 = \ln (z_1 z_2) = \ln \frac{a}{a} = \ln 1 = 0.$$

Отже, $t_2 = -t_1$. Якщо $x > a$, то $t_1 > 0$, а $t_2 < 0$. Тоді

$$|t| = t_1 = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) - \ln a.$$

Остаточно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = |t| + C_1 = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + C, \qquad x > a.$$

Тут знову позначено $C = C_1 - \ln a$. Ми отримали ще один різновид «довгого логарифму». ▷

В двох останніх прикладах при введенні зворотної заміни ми фактично розв'язували рівняння $\operatorname{sh} t = \frac{x}{a}$, $\operatorname{ch} t = \frac{x}{a}$, знаходячи з них $t$. Прямий шлях розв'язати ці рівняння – знайти обернені функції при аргументі $\frac{x}{a}$. Ці функції називають арксинусом гіперболічним (арккосинусом гіперболічним), або ареасинусом (ареакосинусом). Отже, «довгий логарифм» описує обернені функції гіперболічної тригонометрії. Але видається за доцільне більш детально вивчати означення і властивості цих функцій в теорії комплексної змінної.

### 1.2.4 Інтегрування частинами

Нехай $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Тоді $f' = u'v + uv'$. Домножимо це рівняння на $dx$. Оскільки $df = f'\,dx$, $du = u'\,dx$, $dv = v'\,dx$, отримуємо: $df = v\,du + u\,dv$, звідки $u\,dv = df - v\,du = d(uv) - v\,du$. Після інтегрування маємо:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Це і є **формула інтегрування частинами.** При інтегруванні частинами допоміжні функції $u$, $v$ треба вводити так, щоб підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ був вичерпаний добутком $u\,dv$.

Найчастіше інтегрують частинами, коли $u$ є многочленом (при цьому його степінь знижується на одиницю).

◁ *Приклад 1.12.*

$$\int xe^x\,dx = \int \underbrace{x}_{u}\,\overbrace{e^x\,dx}^{dv} = \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x\,dx & v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x \end{matrix} \right\| =$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C. \triangleright$$

Якщо $u$ є многочленом більш високого степеня, ніж перший, то знадобиться інтегрувати частинами відповідну кількість разів поспіль.

◁ *Приклад 1.13.*

$$\int x^2 \cos x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C. \triangleright$$

Іноді частинами інтегрують і за відсутності многочлена.

◁ *Приклад 1.14.*

$$\int \ln x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \triangleright$$

$\triangleleft$ *Приклад 1.15.*

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left\| \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C. \triangleright$$

Узагальнюючи наведені приклади, перелічимо випадки, коли інтегрування частинами є зручним.

1°. Інтеграли $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx$, де $P_n(x)$ – многочлен $n$-го степеня, обчислюють частинами, покладаючи $u = P_n(x)$; $dv = \cos\alpha x\,dx$, $dv = \sin\alpha x\,dx$, $dv = e^{\alpha x}\,dx$ відповідно. Кожного разу після інтегрування частинами степінь многочлена зменшується на одиницю, доки інтеграл не буде зведено до табличного.

2°. Інтеграли $\int P_n(x)\ln x\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, де $P_n(x)$ – многочлен $n$-го степеня, обчислюють частинами, покладаючи $dv = P_n(x)\,dx$; $u = \ln x$, $u = \arcsin x$, $u = \operatorname{arctg} x$ відповідно. В цьому разі, переходячи під знаком інтегралу від $u$ до $du$, позбавляються трансцедентних функцій.

3°. Наведемо ще один цікавий приклад, який містить повторне інтегрування частинами.

$\triangleleft$ *Приклад 1.16.* Нехай $J = \int e^{ax}\cos bx\,dx$. Маємо:

$$J = \left\| \begin{matrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\,dx \\ dv = \cos bx\,dx & v = \frac{1}{b}\sin bx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\,dx \\ dv = \sin bx\,dx & v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}J\right).$$

Інтеграл $J$ виявився вираженим сам через себе. Розв'яжемо отримане рівняння:

$$J = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} J,$$
$$J\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) e^{ax},$$
$$J\left(a^2 + b^2\right) = \left(b \sin bx + a \cos bx\right) e^{ax},$$
$$J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(b \sin bx + a \cos bx\right).$$

Остаточно отримуємо:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(b \sin bx + a \cos bx\right) + C.$$

В аналогічний спосіб можна також обчислити інтеграл $\int e^{ax} \sin bx \, dx$.

Існують і інші випадки, коли інтегрування частинами виправдане.

## 1.3 Класи інтегровних функцій

При інтегруванні функції $f(x)$ виникає нова функція $F(x)$. Навіть якщо функція $f(x)$ є елементарною, її первісна $F(x)$ може такою і не бути. Це не означає, що інтеграл $\int f(x) \, dx$ не існує. Це лише означає, що такий інтеграл не вдається виразити у вигляді комбінації *скінченної кількості* елементарних функцій. В якості прикладів можна навести інтеграли

$$\int e^{-x^2} \, dx, \quad \int \sin\left(x^2\right) \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad \int \frac{e^x}{x} \, dx, \quad \int \frac{x}{\ln x} dx,$$

і подібні до них, які неможливо виразити *аналітично в скінченному вигляді*.

Тому виявляється, що *не існує універсального алгоритму* знаходження первісної. Іншою мовою, клас функцій, інтегрування яких можна здійснити аналітично, є достатньо вузьким. Тим більш важливо розглянути основні гілки цього класу. Такими є: раціональні вирази, деякі ірраціональні вирази, деякі тригонометричні вирази.

### 1.3.1 Інтегрування раціональних виразів

Раціональним виразом називають відношення двох многочленів (в загальному випадку – різних степенів): $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Індексами $m$, $n$ тут і далі позначено степені многочленів. Дріб

називають **правильним**, якщо $m < n$, і **неправильним**, якщо $m \geqslant n$.

Як буде показано в цьому пункті, *раціональні вирази можна проінтегрувати за будь-яких обставин*. Для цього потрібно: 1) навчитись інтегрувати елементарні правильні дроби; 2) навчитись перетворювати неправильний дріб на правильний; 3) навчитись розкладати правильний дріб на елементарні правильні дроби. Цим трьом діям присвячено наступні підпункти 1.3.1.1, 1.3.1.2, 1.3.1.3 відповідно.

#### 1.3.1.1 Інтегрування елементарних правильних дробів

Спочатку розглянемо інтегрування **елементарних правильних** дробів. Так називають чотири дроби вигляду

$$\frac{1}{x-a}, \qquad \frac{1}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, \qquad \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

1°. Нехай $f(x) = \frac{1}{x-a}$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

2°. Нехай $f(x) = \frac{1}{(x-a)^k}$, $k \neq 1$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \int (x-a)^{-k}\,dx =$$

$$= \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

3°. Нехай

$$f(x) = \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, \tag{1.1}$$

причому $a \neq 0$. Тут потрібно розглянути три випадки *залежно від знаку дискримінанту знаменника*.

3°а). *Випадок додатного дискримінанту*. Нехай дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена у знаменнику (1.1) є додатним, $D > 0$. Тоді корені $x_1$, $x_2$ знаменника є дійсними і різними, причому

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2). \tag{1.2}$$

Формулою (1.2) подається **розкладання квадратного тричлена на множники.** Розкладемо дріб (1.1) на елементарні дроби методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(x)=\frac{Mx+N}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{x(A+B)+(-Ax_2-Bx_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Порівнюючи з чисельником (1.1), отримуємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1: & A+B=M \\ x^0: & -Ax_2-Bx_1=N \end{array}\right\}$$

Оскільки $x_2\neq x_1$, то визначник матриці цієї системи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{vmatrix}=x_2-x_1\neq 0.$$

Отже, розв'язок $(A;B)$ існує і є єдиним. Тоді

$$f(x)=\frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$$

при *вже відомих* $A$, $B$, і тому інтегрування $f(x)$ зводиться до інтегрування дробів $\frac{A}{x-x_1}$, $\frac{B}{x-x_2}$, тобто до п. 1°.

◁ *Приклад 1.17.* Проінтегруємо функцію $f(x)=\frac{6x-10}{x^2-4x+3}$. Корені знаменника знаходимо з рівняння $x^2-4x+3=0$, отримуємо $x_1=1$, $x_2=3$. Тоді розкладання дробу на елементарні шукаємо у вигляді

$$f(x)=\frac{6x-10}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x(A+B)+(-3A-B)}{x^2-4x+3}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $A$, $B$:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1: & A+B=6 \\ x^0: & -3A-B=-10 \end{array}\right\}$$

Її розв'язки $A = 2$, $B = 4$. Тоді $\frac{6x-10}{x^2-4x+3} = \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x-3}$,

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x-3}\right)\,dx = 2\ln|x-1| + 4\ln|x-3| + C. \triangleright$$

Розглянемо **скорочений алгоритм розкладання дробу на елементарні.** Нехай $f(x) = \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$. Очевидно, корені $x_1$, $x_2$ знаменника є дійсними і різними. Розкладання дробу на елементарні шукаємо у вигляді

$$f(x) = \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \frac{Mx+N}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

Домножимо це рівняння на «дужку» $(x - x_1)$:

$$\frac{Mx+N}{a(x-x_2)} = A + \frac{B(x-x_1)}{x-x_2}.$$

Ми шукаємо такі коефіцієнти $A$, $B$, за яких розкладання виконано при довільних $x$, в тому числі і при довільних $x$ з проколотого околу точки $x_1$. Здійснимо граничний перехід при $x \to x_1$. Оскільки завдяки множенню на «дужку» $(x - x_1)$ невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ ми позбавились, то граничний перехід зводиться до підстановки $x = x_1$. Отримуємо:

$$\left.\frac{Mx+N}{a(x-x_2)}\right|_{x=x_1} = A + \frac{B\cdot 0}{x_1-x_2}, \qquad A = \frac{Mx_1+N}{a(x_1-x_2)}.$$

Аналогічно, домножаючи на «дужку» $(x - x_2)$, отримуємо:

$$\frac{Mx+N}{a(x-x_1)} = \frac{A(x-x_2)}{x-x_1} + B.$$

Підставляємо $x = x_2$:

$$\left.\frac{Mx+N}{a(x-x_1)}\right|_{x=x_2} = \frac{A\cdot 0}{x_2-x_1} + B, \qquad B = \frac{Mx_2+N}{a(x_2-x_1)},$$

і розкладання можна вважати знайденим.

Для розглянутого скороченого алгоритму характерно, що можна знайти $A$ окремо від $B$, а також $B$ окремо від $A$. Інакше кажучи, *зникає потреба* не тільки *в розв'язуванні* системи лінійних рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів, а навіть потреба *в складанні* такої системи.

◁ *Приклад 1.18.* Розкладемо дріб $\frac{6x-10}{(x-1)(x-3)}$ на елементарні за скороченим алгоритмом. Розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{6x-10}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Домножимо на «дужку» $(x-1)$:

$$\frac{6x-10}{x-3} = A + \frac{B(x-1)}{x-3}.$$

При підстановці $x = 1$ маємо:

$$A = \frac{6 \cdot 1 - 10}{1-3} = 2.$$

Домножимо на «дужку» $(x-3)$:

$$\frac{6x-10}{x-1} = \frac{A(x-3)}{x-1} + B.$$

При підстановці $x = 3$ маємо:

$$B = \frac{6 \cdot 3 - 10}{3-1} = 4.$$

Отже, результат розкладання має вигляд

$$\frac{6x-10}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x-3}$$

і збігається з отриманим в попередньому прикладі. ▷

Якщо скорочений алгоритм розкладання дробу на елементарні не модифікувати, то область його застосування залишається обмеженою: корені знаменника повинні бути простими[6]. Проте, їх кількість нічим не обмежена. І чим вона більша, тім більш очевидною стає перевага скороченого алгоритму.

◁ *Приклад 1.19.* Розкладемо дріб $\frac{10x^2-37x+31}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ на елементарні за скороченим алгоритмом. Розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{10x^2-37x+31}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

[6]Число $x_0$ називають **простим коренем** многочлена $P_n(x)$, якщо цей многочлен можна подати у вигляді $P_n(x) = (x-x_0)Q_{n-1}(x)$, причому $Q_{n-1}(x_0) \neq 0$. Число $x_0$ називають **кратним коренем** многочлена $P_n(x)$ кратності $k$, якщо цей многочлен можна подати у вигляді $P_n(x) = (x-x_0)^k Q_{n-k}(x)$, причому $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$.

Домножимо на «дужку» $(x-1)$:

$$\frac{10x^2-37x+31}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}.$$

При підстановці $x=1$ маємо:

$$A = \frac{10\cdot 1^2 - 37\cdot 1 + 31}{(1-2)(1-3)} = 2.$$

Домножимо на «дужку» $(x-2)$:

$$\frac{10x^2-37x+31}{(x-1)(x-3)} = \frac{A(x-2)}{x-1} + B + \frac{C(x-2)}{x-3}.$$

При підстановці $x=2$ маємо:

$$B = \frac{10\cdot 2^2 - 37\cdot 2 + 31}{(2-1)(2-3)} = 3.$$

Домножимо на «дужку» $(x-3)$:

$$\frac{10x^2-37x+31}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-3)}{x-1} + \frac{B(x-3)}{x-2} + C.$$

При підстановці $x=3$ маємо:

$$C = \frac{10\cdot 3^2 - 37\cdot 3 + 31}{(3-1)(3-2)} = 5.$$

Остаточна відповідь:

$$\frac{10x^2-37x+31}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-3}. \triangleright$$

3°б). *Випадок нульового дискримінанту.* Нехай дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена у знаменнику (1.1) дорівнює нулю, $D=0$. Тоді корені $x_1$, $x_2$ знаменника є дійсними і однаковими. Позначаючи кожен з них через $x_0$, отримуємо:

$$x_0 = x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При цьому знаменник (1.1) – повний квадрат. Справді, з використанням (1.2) маємо:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-x_0)(x-x_0) = a(x-x_0)^2.$$

Якщо тепер $M = 0$, то

$$f(x) = \frac{0 + N}{ax^2 + bx + c} = \frac{N}{a\,(x - x_0)^2},$$

і вся справа зводиться до п. 2°. Якщо ж $M \neq 0$, то

$$f(x) = \frac{Mx - Mx_0 + N + Mx_0}{a\,(x - x_0)^2} = \frac{M}{a\,(x - x_0)} + \frac{N + Mx_0}{a\,(x - x_0)^2},$$

і вся справа зводиться до сумісного використання п.п. 1°, 2°.

◁ *Приклад 1.20.*

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 8x + 16}\,dx = \int \frac{2x - 3}{(x - 4)^2}\,dx = \int \frac{2x - 8 + 5}{(x - 4)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{2(x - 4) + 5}{(x - 4)^2}\,dx = \int \left( \frac{2}{x - 4} + \frac{5}{(x - 4)^2} \right) dx =$$

$$= 2 \ln |x - 4| - \frac{5}{x - 4} + C. \triangleright$$

3°в). *Випадок від'ємного дискримінанту.* Нехай дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлену у знаменнику (1.1) від'ємний, $D < 0$. В цьому разі здійснюють **операцію виділення повного квадрату**[7]. Зауважимо, операцію розкладання квадратного тричлена на множники у вигляді (1.2) можна здійснити лише з квадратними тричленами, які мають дійсні корені. В той же час, *виділити повний квадрат можна з будь-якого квадратного тричлена.* Це роблять так:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$$

$$= a \left[ \left( x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] =$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

[7] Власне, вперше цю операцію роблять ще в середній школі, при доведенні формули коренів квадратного рівняння.

Позначимо $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Позначимо також $t = x - x_0$. Тоді

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x - x_0)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[t^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Отже, повний квадрат виділено, оскільки нова змінна $t$ присутня тепер лише у другому степені.

Маємо далі:

$$4ac - b^2 = -\left(b^2 - 4ac\right) = -D > 0,$$

оскільки зараз $D < 0$. Тоді $\frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$. Позначимо $p = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$. Тоді $ax^2 + bx + c = a\left(t^2 + p^2\right)$. Далі, враховуючи, що $dx = dt$, отримуємо

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}\,dx = \int \frac{M(t + x_0) + N}{a\left(t^2 + p^2\right)}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2t\,dt}{t^2 + p^2} + \frac{Mx_0 + N}{a}\int \frac{dt}{t^2 + p^2} =$$

$$= \frac{M}{2a}\ln\left(t^2 + p^2\right) + \frac{Mx_0 + N}{a}\cdot\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{t}{p} + C,$$

де залишається ввести обернену заміну $t = x - x_0 = x + \frac{b}{2a}$.

◁ *Приклад 1.21.*

$$\int \frac{8x - 35}{x^2 - 8x + 25}\,dx = \int \frac{8x - 35}{x^2 - 8x + 16 + 9}\,dx = \int \frac{8x - 35}{(x - 4)^2 + 9}\,dx =$$

$$= \int \frac{(8x - 32) + 32 - 35}{(x - 4)^2 + 9}\,dx = \int \frac{8(x - 4) - 3}{(x - 4)^2 + 9}\,dx = \left\|\begin{matrix} x - 4 = t \\ x = t + 4 \\ dx = dt \end{matrix}\right\| =$$

$$= \int \frac{8t - 3}{t^2 + 9}\,dt = 4\int \frac{2t\,dt}{t^2 + 9} - 3\int \frac{dt}{t^2 + 3^3} =$$

$$= 4\ln\left(t^2 + 9\right) - 3\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= 4\ln\left((x - 4)^2 + 9\right) - \operatorname{arctg}\frac{x - 4}{3} + C =$$

$$= 4\ln\left(x^2 - 8x + 25\right) - \operatorname{arctg}\frac{x - 4}{3} + C. \triangleright$$

4°. Нехай

$$f(x)=\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^k},\qquad k\geqslant 2, \tag{1.3}$$

причому $a\neq 0$ і $D=b^2-4ac<0$. Тут випадки $D=0$ і $D>0$ ми не розглядаємо, оскільки, як і вище, вся справа буде зводитись до попередніх пунктів.

Інтеграли від функцій (1.3), які виникають при *різних* $k$, позначатимемо символом

$$I_k=\int\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}\,dx. \tag{1.4}$$

Виділимо у знаменнику повний квадрат. З використанням замін п. 3°:

$$x_0=-\frac{b}{2a},\qquad t=x-x_0,\qquad dx=dt,\qquad p=\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

отримаємо:

$$I_k=\int\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}\,dx=\int\frac{M(t+x_0)+N}{a^k\left(t^2+p^2\right)^k}\,dt=$$

$$=\frac{M}{2a^k}\int\frac{2t\,dt}{\left(t^2+p^2\right)^k}+\frac{Mx_0+N}{a^k}\int\frac{dt}{\left(t^2+p^2\right)^k}.$$

Тут перший інтеграл легко обчислити заміною $z=t^2+p^2$, $dz=2t\,dt$:

$$\int\frac{2t\,dt}{\left(t^2+p^2\right)^k}=\int\frac{dz}{z^k}=\frac{z^{-k+1}}{-k+1}=\frac{1}{(1-k)z^{k-1}}=\frac{1}{(1-k)\left(t^2+p^2\right)^{k-1}}.$$

Другий інтеграл обчислимо частинами. Покладаючи

$$\begin{array}{ll} u=\frac{1}{\left(t^2+p^2\right)^k}, & du=-\frac{2kt\,dt}{\left(t^2+p^2\right)^{k+1}},\\ dv=dt, & v=t, \end{array}$$

отримуємо:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+p^2\right)^k}=\frac{t}{\left(t^2+p^2\right)^k}+2k\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+p^2\right)^{k+1}}.$$

Тут останній інтеграл згідно з позначенням (1.4)

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+p^2\right)^{k+1}}=\int\frac{\left(t^2+p^2\right)-p^2}{\left(t^2+p^2\right)^{k+1}}\,dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2+p^2\right)^k}-p^2\int\frac{dt}{\left(t^2+p^2\right)^{k+1}}=I_k-p^2I_{k+1}.$$

Тоді

$$I_k=\frac{M}{2a^k}\cdot\frac{1}{(1-k)\left(t^2+p^2\right)^{k-1}}+\frac{Mx_0+N}{a^k}\left[\frac{t}{\left(t^2+p^2\right)^k}+2k\left(I_k-p^2I_{k+1}\right)\right].$$

З цього рівняння легко виразити[8] $I_{k+1}$ через $I_k$. Але $I_1$ вже відомо з п. 3°, і за його допомогою можна знайти $I_2$. Потім при відомому $I_2$ можна знайти $I_3$

[8]Будь-яку формулу, яка дозволяє виразити кожний наступний результат через попередній, називають **рекурентною.**

і т.д. Отже, починаючи з цього моменту питання інтегрування елементарних правильних дробів є вичерпаним.

◁ *Приклад 1.22.* Обчислимо інтеграл $J = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Утворимо послідовність інтегралів $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$. При $k = 1$ інтеграл $I_1$ є відомим:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^1} = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x,$$

а при $k = 2$ цей інтеграл є шуканим: $J = I_2$. Отже, потрібно виразити $I_2$ через $I_1$. Інтегруємо частинами:

$$\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(x^2+1)^k}, & du = -\frac{2kx\,dx}{(x^2+1)^{k+1}}, \\ dv = dx, & v = x. \end{array}$$

Отримуємо:

$$I_k = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{k+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k \left( \int \frac{dx}{(x^2+1)^k} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{k+1}} \right) = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\,(I_k - I_{k+1}),$$

$$I_k = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\,(I_k - I_{k+1}).$$

При $k = 1$ остання формула набуває вигляду

$$I_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2\,(I_1 - I_2).$$

Звідси знаходимо:

$$J = I_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + I_1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x \right) + C. \triangleright$$

### 1.3.1.2 Виділення цілої частини

Розглянемо неправильний дріб $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m \geqslant n$. Очевидно, результатом цього ділення повинен бути многочлен $(m-n)$-го степеня[9]. Ділення многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ може відбутися націло або з остачею. Як і в арифметиці, спрацьовує правило

$$\frac{\text{ділене}}{\text{дільник}} = \text{частка} + \frac{\text{остача}}{\text{дільник}}.$$

Нехай $R_{m-n}(x)$ – частка (результат ділення), а $S_\nu(x)$ – остача від ділення. Тоді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{S_\nu(x)}{Q_n(x)}. \tag{1.5}$$

[9] В тому числі при $m = n$ отримаємо многочлен нульового степеня, тобто константу.

Степінь $\nu$ многочлена $S_\nu$ заздалегідь невідомий. Відомо лише, що $\nu < n$. Якщо це не так, то ділення ще не закінчене, і з дробу $\frac{S}{Q}$ треба продовжувати виділяти цілу частину. Може виявитись, що $\nu = 0$, тобто $S_\nu = S_0 = \text{const}$. Може навіть виявитись, що $S_\nu \equiv 0$; так буде при діленні без остачі.

Отже, постановка задачі цього пункту така: за двома многочленами $P_m(x)$, $Q_n(x)$, $m \geqslant n$, знайти два многочлени $R_{m-n}(x)$, $S_\nu(x)$, $\nu < n$, за яких справджується (1.5). Тоді і буде виконано перехід від неправильного дробу $\frac{P}{Q}$ до правильного дробу $\frac{S}{Q}$.

Іноді виділення цілої частини є очевидним, як в наступних прикладах.

◁ *Приклад 1.23.*

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3.$$

Отримали: $R_1 = x-3$, $S_0 \equiv 0$. Ділення відбулось націло (без остачі). ▷

◁ *Приклад 1.24.*

$$\frac{x^4+3}{x} = \frac{x^4}{x} + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{3}{x}.$$

Отримали: $R_3 = x^3$, $S_0 = 3$. Перевірка (1.5) здійснюється безпосередньо:

$$x^3 + \frac{3}{x} = \frac{x^3 \cdot x + 3}{x} = \frac{x^4+3}{x}. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.25.*

$$\frac{x^5+1}{x^2+1} = \frac{x^5+x^3+1-x^3}{x^2+1} = \frac{x^3(x^2+1)+1-x^3}{x^2+1} =$$

$$= x^3 - \frac{x^3-1}{x^2+1} = x^3 - \frac{x^3+x-1-x}{x^2+1} = x^3 - \frac{x(x^2+1)-1-x}{x^2+1} =$$

$$= x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Отримали: $R_3 = x^3 - x$, $S_1 = x+1$. Перевірка (1.5) здійснюється безпосередньо:

$$x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{(x^3-x)(x^2+1)+x+1}{x^2+1} = \frac{x^5+1}{x^2+1}. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.26.*

$$\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{x^2-2x-3x+7}{x-2}=\frac{x(x-2)-3x+7}{x-2}=$$

$$=x-\frac{3x-7}{x-2}=x-\frac{3x-6-1}{x-2}=x-\frac{3(x-2)-1}{x-2}=$$

$$=x-3-\frac{-1}{x-2}=x-3+\frac{1}{x-2}.$$

Отримали: $R_1=x-3$, $S_0=1$. Перевірка (1.5) здійснюється безпосередньо:

$$x-3+\frac{1}{x-2}=\frac{(x-3)(x-2)+1}{x-2}=\frac{x^2-5x+7}{x-2}.\ \triangleright$$

Якщо виділення цілої частини не є очевидним, то многочлени ділять у стовпчик. Алгоритм ділення такий самий, як і в разі арифметичного ділення в стопчик. Різниця лише в тому, що при арифметичному діленні ставлять за мету позбавлення в діленому *числових розрядів* в напрямку від старших до молодших, а при діленні многочленів – позбавлення *степенів аргументу* в напрямку від старших до молодших.

◁ *Приклад 1.27.* З дробу $\frac{x^5+5x^4-3x^3+2x^2+x+52}{x^2+2x+3}$ виділимо цілу частину. Розділимо ці многочлени в стовпчик:

$$\begin{array}{l|l}
x^5+5x^4-3x^3+2x^2+x+52 & x^2+2x+3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^5+2x^4+3x^3} & x^3+3x^2-12x+17 \\
3x^4-6x^3+2x^2 & \\
\underline{3x^4+6x^3+9x^2} & \\
-12x^3-7x^2+x & \\
\underline{-12x^3-24x^2-36x} & \\
17x^2+37x+52 & \\
\underline{17x^2+34x+51} & \\
3x+1 &
\end{array}$$

Отримали:
$P_5(x)=x^5+5x^4-3x^3+2x^2+x+52$ – ділене,
$Q_2(x)=x^2+2x+3$ – дільник,
$R_3(x)=x^3+3x^2-12x+17$ – частка,

$S_1(x) = 3x + 1$ – остача від ділення.

Тому відповідно до (1.5) отримуємо:

$$\frac{x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 52}{x^2 + 2x + 3} = x^3 + 3x^2 - 12x + 17 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Перевірку легко зробити, здійснюючи додавання в правій частині. ▷

#### 1.3.1.3 Розкладання правильного дробу на елементарні

Нехай $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильний дріб. Нехай $x_0$ є коренем знаменника кратності $k$. Це означає наступне: існує многочлен $Q^*_{n-k}(x)$ такий, що $Q_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q^*_{n-k}(x)$, причому $Q^*_{n-k}(x_0) \neq 0$, тобто $x_0$ є коренем многочлена $Q_n(x)$, але вже не є коренем[10] многочлена $Q^*_{n-k}(x)$ (див. також виноску 6 на с. 25). Доведемо, що існують число $A$ і многочлен $P^*(x)$ такі, що справджується тотожність:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x - x_0)^k} + \frac{P^*(x)}{(x - x_0)^{k-1} Q^*_{n-k}(x)}. \tag{1.6}$$

Маємо:

$$\frac{P_m(x)}{(x - x_0)^k Q^*_{n-k}(x)} = \frac{A}{(x - x_0)^k} + \frac{P^*(x)}{(x - x_0)^{k-1} Q^*_{n-k}(x)}.$$

Домножимо на $(x - x_0)^k$:

$$\frac{P_m(x)}{Q^*_{n-k}(x)} = A + \frac{(x - x_0) P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)}.$$

Покладаючи тут $x = x_0$, отримуємо:

$$A = \frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)}.$$

[10] Якщо $Q^*_{n-k}(x_0) = 0$, то $x_0$ є коренем не тільки многочлена $Q_n(x)$, а ще і многочлена $Q^*_{n-k}(x)$. В цьому разі для многочлена $Q_n(x)$ корінь $x_0$ має кратність більшу за $k$. Тому при розкладанні многочлена $Q_n(x)$ на множники число $k$ треба збільшувати, доки не виконається вимога $Q^*_{n-k}(x_0) \neq 0$. Для цього потрібно продовжувати розкладання многочлена $Q^*_{n-k}(x)$ на множники з метою виявити *усі* множники вигляду $(x - x_0)$. Їх повна кількість і буде кратністю $k$ кореня $x_0$.

Тоді

$$\frac{P_m(x)}{Q^*_{n-k}(x)} = \frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)} + \frac{(x-x_0)P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)}.$$

Домножимо на $Q^*_{n-k}(x)$:

$$(x-x_0)P^*(x) = P_m(x) - \frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)} \cdot Q^*_{n-k}(x).$$

Тут $\frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)} = A = \text{const}$, тому вся права частина є многочленом. Його степінь дорівнює[11] $\max\{m; n-k\}$. Очевидно, $x_0$ є коренем цього многочлену:

$$\left(P_m(x) - \frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)} \cdot Q^*_{n-k}(x)\right)\Bigg|_{x=x_0} =$$

$$= P_m(x_0) - \frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)} \cdot Q^*_{n-k}(x_0) = P_m(x_0) - P_m(x_0) = 0.$$

Тоді цей многочлен після розкладання на множники повинен[12] містити «дужку» $(x-x_0)$. Тоді

$$P^*(x) = \frac{P_m(x) - \frac{P_m(x_0)}{Q^*_{n-k}(x_0)} \cdot Q^*_{n-k}(x)}{(x-x_0)},$$

причому ділення повинно відбутися націло (без остачі) через скорочення на $(x-x_0)$. Отже, многочлен $P^*(x)$ пред'явлено. Його степінь за рахунок зменшення на одиницю в результаті ділення на $(x-x_0)$ стає рівним $s = \max\{m; n-k\} - 1$.

Тепер, коли відомі число $A$ і многочлен $P^*_s(x) \equiv P^*(x)$, можна стверджувати наступне. Формула (1.6) гарантує можливість переходу від дробу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-x_0)^k \cdot Q^*_{n-k}(x)}$$

[11] Якщо $a$, $b$ – різні дійсні числа, то вираз $\max\{a; b\}$ позначає більше з цих двох чисел. Якщо ж $a = b$, то $\max\{a; b\} = a = b$.

[12] Це твердження є наслідком відомої **теореми Безу́**: остача від ділення многочлена на двочлен $(x-a)$ дорівнює значенню многочлена в точці $x = a$. Справді, з (1.5) маємо: $\frac{P_m(x)}{x-a} = R_{m-1}(x) + \frac{A}{x-a}$, де $A$ і є остачею. Домножаючи на двочлен $(x-a)$, знаходимо: $P_m(x) = (x-a)R_{m-1}(x) + A$. Підставляючи $x = a$, отримуємо: $P_m(a) = A$, що і треба було довести.

Уявімо тепер, що $a = x_0$ – корінь многочлена $P_m(x)$. Тоді $P_m(a) = P_m(x_0) = 0$. Тоді і $A = 0$, отже, $\frac{P_m(x)}{x-a} = R_{m-1}(x) + 0$. Але це і означає, що многочлен $P_m(x)$ ділиться на двочлен $(x-x_0)$ націло (тобто без остачі).

до дробу

$$\frac{P_s^*(x)}{(x-x_0)^{k-1}Q_{n-k}^*(x)},$$

який має *такий самий вигляд*, але кратність $k$ кореня $x_0$ зменшується на одиницю.

Доведемо, що останній дріб також є правильним. Степінь многочлена в знаменнику дорівнює $(k-1)+(n-k)=n-1$. Отже, потрібно довести, що $s<n-1$, $\max\{m;n-k\}-1<n-1$, $\max\{m;n-k\}<n$.

Якщо кратність $k$ кореня велика, то цілком може статись, що $m\geqslant n-k$. Тоді $\max\{m;n-k\}=m$. Тоді потрібно довести, що $m<n$. Але це так і є, бо вихідний дріб є правильним.

Якщо ж $m<n-k$, то $\max\{m;n-k\}=n-k$. Тоді потрібно довести, що $n-k<n$. Але це так і є, бо $k>0$. Отже, зниження кратності кореня знаменника за допомогою формули (1.6) *залишає дріб правильним.*

Тепер можна, послідовно застосовуючи формулу (1.6) $k$ разів поспіль, знизити кратність аж до її вичерпання, тобто «перенести дужки» $(x-x_0)$ з вихідного дробу до елементарних дробів. Інакше кажучи, якщо число $x_0$ є $k$-кратним коренем многочлену $Q_n(x)$, то гарантується можливість розкладання:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-x_0)^k}+\frac{P_s^*(x)}{Q_{n-k}^*(x)}.$$

Практично числа $A_1,A_2,\cdots,A_k$ і многочлен $P_s^*(x)$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів. При цьому степінь $s$ заздалегідь невідомий; відомо лише, що $s<n-k$. Тому в практичних розрахунках покладають $s=s_{\max}=n-k-1$. Якщо «пощастить», то може виявитись, що старший коефіцієнт многочлена $P^*$ (або навіть декілька старших коефіцієнтів) дорівнює нулю. Ми отримаємо випадок $s<s_{\max}$ (саме так і буде в наступному прикладі). Але заздалегідь це невідомо, тому в загальному випадку треба покладати $s=s_{\max}$.

$\lhd$ *Приклад 1.28.* Дріб $\frac{5x^3+5x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}$ розкласти на елементарні. Тут $x_0=0$ – корінь кратності $k=2$, тому розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{5x^3+5x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Тут степінь знаменника $x^2+1$ дорівнює 2, тому максимальний степінь чисельника $s_{\max}=1$. Тому чисельнику і надано вигляд $Cx+D$. Домножимо ліву і праву частини на знаменник лівої частини:

$$5x^3+5x^2+5x+3=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2,$$

$$5x^3+5x^2+5x+3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B.$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3: & A+C=5 \\ x^2: & B+D=5 \\ x^1: & A=5 \\ x^0: & B=3 \end{array}\right\}$$

Її розв'язок $A=5$, $B=3$, $C=0$, $D=2$. Отже, шукане розкладання має вигляд

$$\frac{5x^3+5x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^2+1}.$$

В цьому прикладі нам просто «пощастило», що $C$ «зникло», і многочлен $P^*=Cx+D$ виявився нульового степеня, а не першого, $s=0<s_{\max}=1$. Але дізнатись про це можна тільки *після* складання і розв'язування відповідної системи. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.29.* Дріб $\frac{3x^4-8x^3+11x^2-4x+4}{(x-1)^3(x^2+1)}$ розкласти на елементарні. Тут $x_0=1$ – корінь кратності $k=3$, тому розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{3x^4-8x^3+11x^2-4x+4}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Домножимо ліву і праву частини на знаменник лівої частини:

$$3x^4-8x^3+11x^2-4x+4=$$

$$=A(x-1)^2(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)^3.$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4: & A+D=3 \\ x^3: & -2A+B-3D+E=-8 \\ x^2: & 2A+B+C+3D-3E=11 \\ x^1: & -2A+B-D+3E=-4 \\ x^0: & A+B+C-E=4 \end{array}\right\}$$

Її розв'язок $A = 1$, $B = 0$, $C = 3$, $D = 2$, $E = 0$. Отже, шукане розкладання має вигляд

$$\frac{3x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x + 4}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2x}{x^2+1}. \triangleright$$

Припустимо тепер, що з дробу $\frac{P_m}{Q_n}$ виділено вже всі елементарні дроби вигляду $\frac{A_r}{(x-x_j)^r}$. Тоді знаменник $Q_n$ дійсних коренів вже не має (ні простих, ані кратних), а отже є добутком скінченної кількості множників вигляду

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{k_1}, \quad (a_2x^2 + b_2x + c_2)^{k_2},$$

і т.д., причому кожний квадратний тричлен має від'ємний дискримінант і далі на множники вже не розкладається. Нехай

$$Q_n(x) = (ax^2 + bx + c)^k \cdot Q^*_{n-2k}(x).$$

По аналогії з (1.6) можна довести існування чисел $M$, $N$ і многочлена $P^*(x)$, таких, що

$$\frac{P_m(x)}{(ax^2 + bx + c)^k \cdot Q^*_{n-2k}(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^k} + \frac{P^*(x)}{(ax^2 + bx + c)^{k-1} Q^*_{n-2k}(x)}. \qquad (1.7)$$

При цьому останній дріб буде залишатись правильним. Повторюючи процедуру (1.7) потрібну кількість разів, позбавляються множника $(ax^2+bx+c)^k$. Далі в такий же спосіб позбавляються решти множників, з яких складається многочлен $Q^*_{n-2k}(x)$.

$\triangleleft$ *Приклад 1.30.* Розкладемо дріб $\frac{2x^3+3x^2+3x+7}{(x^2+1)^2}$ на елементарні. Розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 7}{(x^2+1)^2} = \frac{Mx + N}{x^2+1} + \frac{Ax + B}{(x^2+1)^2}.$$

Домножимо ліву і праву частини на знаменник лівої частини:

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = (Mx + N)(x^2 + 1) + Ax + B,$$

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = Mx^3 + Nx^2 + (M + A)x + (N + B).$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3: & M=2 \\ x^2: & N=3 \\ x^1: & M+A=3 \\ x^0: & N+B=7 \end{array}\right\}$$

Її розв'язок $M=2$, $N=3$, $A=1$, $B=4$. Отже, шукане розкладання має вигляд

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+7}{(x^2+1)^2}=\frac{2x+3}{x^2+1}+\frac{x+4}{(x^2+1)^2}. \triangleright$$

#### 1.3.1.4 Заключне зауваження

Отже, інтегрування раціональних виразів можна вважати розглянутим вичерпно. Враховуючи викладене, сформулюємо загальний алгоритм інтегрування раціональних виразів.

1. У виразі $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ порівнюють $m$ і $n$. Якщо $m \geqslant n$, виділяють цілу частину. Вона є многочленом і інтегрується безпосередньо. Дріб перетворюється на правильний. Якщо $m<n$, то дріб вже спочатку правильний.

2. Розкладають знаменник $Q_n(x)$ на множники. Це можуть бути або множники вигляду $(x-x_0)^k$, або множники вигляду $(ax^2+bx+c)^k$, $b^2-4ac<0$.

3. Кожному множнику вигляду $(x-x_0)^k$ ставлять у відповідність *групу* з $k$ доданків

$$\frac{A_1}{x-x_0}, \qquad \frac{A_2}{(x-x_0)^2}, \qquad \frac{A_3}{(x-x_0)^3},$$

   і т.д. аж до вичерпання кратності $k$.

4. Кожному множнику вигляду $(ax^2+bx+c)^k$ ставлять у відповідність *групу* з $k$ доданків

$$\frac{M_1x+N_1}{ax^2+bx+c}, \qquad \frac{M_2x+N_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \qquad \frac{M_3x+N_3}{(ax^2+bx+c)^3},$$

   і т.д. аж до вичерпання кратності $k$.

5. Методом невизначених коефіцієнтів знаходять $A_i$, $M_i$, $N_i$. При цьому виникає розкладання правильного дробу на елементарні.

6. Інтегрують кожний елементарний дріб окремо за методикою, викладеною вище.

### 1.3.2 Інтегрування деяких ірраціональних виразів

Нехай $R(x, y)$ – деяка раціональна функція двох змінних. Нехай в якості $y$ виступає **ірраціональний** вираз $y = \sqrt[n]{\varphi(x)}$. Отже, маємо підінтегральний вираз $R\left(x,\, \sqrt[n]{\varphi(x)}\right)\, dx$. Очевидна ідея – позбутися знаку радикалу.

Покладемо $(t(x))^n = \varphi(x)$. Тоді $\sqrt[n]{\varphi(x)} = \sqrt[n]{t^n} = t$. Маємо далі:

$$nt^{n-1}\, dt = \varphi'(x)\, dx, \qquad dx = \frac{nt^{n-1}\, dt}{\varphi'(x)} = \frac{n\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^{n-1}}{\varphi'(x)}\, dt.$$

Тоді

$$R\left(x,\, \sqrt[n]{\varphi(x)}\right)\, dx = R\left(x, t\right) \frac{n\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^{n-1}}{\varphi'(x)}\, dt.$$

Тут в правій частині $x$ потрібно виразити через $t$ з рівняння $t^n = \varphi(x)$. Як бачимо, знаку радикалу вдалося позбавитись всередині функції $R$, але не в підінтегральній функції, яка тепер набула вигляду

$$\tilde{R} = R \cdot \frac{n\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^{n-1}}{\varphi'(x)}.$$

Іншими словами, проблема не розв'язалась, а лише перемістилась зсередини виразу для функції $R$ назовні. Отже, потрібна заміна змінної, яка дозволяє позбутися знаку радикалу в підінтегральній функції, але так, щоб цей знак не виникав у виразі для диференціалу старого аргументу. Тоді вся справа зводилася б до інтегрування раціонального виразу. Якщо така заміна існує, кажуть що вона **раціоналізує ірраціональний вираз.**

Але така заміна можлива не при будь-яких функціях $\varphi(x)$. Отже, ірраціональний вираз, на відміну від раціонального, не завжди може бути проінтегрований в елементарних функціях.

Тому важливо перелічити ті окремі випадки, коли раціоналізація підінтегрального виразу стає можливою.

1°. Нехай $\varphi(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Покладемо $ax + b = t^n$. Тоді

$$x = \frac{t^n}{a} - \frac{b}{a}, \qquad dx = \frac{nt^{n-1}\,dt}{a}.$$

Маємо: $\sqrt[n]{ax+b} = \sqrt[n]{t^n} = t$. Тоді

$$R\left(x,\, \sqrt[n]{\varphi(x)}\right)\, dx = R\left(\frac{t^n}{a} - \frac{b}{a}, t\right) \cdot \frac{nt^{n-1}}{a}\, dt.$$

Як бачимо, підінтегральний вираз перетворився на раціональний. Отже, якщо $\varphi(x)$ – лінійна функція, то *інтегрування (в елементарних функціях) гарантовано можливе* (тобто первісна є елементарною функцією).

◁ *Приклад 1.31.*

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^3}\, dx = \left\| \begin{matrix} x+1 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{t^2} = t \end{matrix} \right\| = \int \frac{t}{1+t^3} \cdot 2t\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{3t^2\,dt}{1+t^3} = \left\| \begin{matrix} z = 1+t^3 \\ dz = 3t^2\,dt \end{matrix} \right\| = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{2}{3}\ln|z| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right| + C = \frac{2}{3}\ln\left|1+\left(\sqrt{x+1}\right)^3\right| + C. \triangleright$$

2°. Досі функція $\varphi(x)$ була лінійною. Нехай тепер вона є дробово-лінійною, тобто нехай $\varphi(x) = \frac{ax+b}{px+q}$. Введемо заміну змінної: $\frac{ax+b}{px+q} = t^n$. Тоді

$$ax + b = pxt^n + qt^n, \qquad x = \frac{qt^n - b}{a - pt^n}.$$

Очевидно, диференціювання цього виразу залишає його раціональним. Отже, якщо $\varphi(x)$ – дробово-лінійна функція, то *інтегрування гарантовано можливе.*

◁ *Приклад 1.32.* Знайдемо інтеграл $J = \int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$. Тут під знаком радикалу $\varphi(x) = \frac{x}{x+1}$ – дробово-лінійна функція. Тому покладемо

$$\frac{x}{x+1} = t^2, \qquad x = xt^2 + t^2, \qquad x = \frac{t^2}{1-t^2},$$

$$dx = \frac{2t(1-t^2) - t^2(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2} = \frac{2t\,dt}{(t-1)^2(t+1)^2}.$$

Тоді

$$J = \int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = \int \sqrt{t^2}\cdot\frac{2t\,dt}{(t-1)^2(t+1)^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{(t-1)^2(t+1)^2}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(t) = \frac{2t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}.$$

Домножимо на знаменник лівої частини:

$$2t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1^2).$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3: & A + C = 0 \\ x^2: & A + B - C + D = 2 \\ x^1: & -A + 2B - C - 2D = 0 \\ x^0: & -A + B + C + D = 0 \end{array}\right\}$$

Її розв'язок: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$. Тоді

$$J = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C.$$

Остаточна відповідь виникає звідси при $t = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$. $\triangleright$

3°. Нехай тепер $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ – квадратична функція. В цьому пункті накладемо додаткове обмеження: нехай ірраціональність зумовлена наявністю тільки одного знаку радикалу, і він – другого степеня.

З квадратного тричлена $\varphi(x)$ виділимо повний квадрат і винесемо за дужки модуль старшого коефіцієнта $|a|$. Тоді при від'ємному дискримінанті отримаємо ірраціональний вираз

$$R\left(x, \sqrt{x^2 + p^2}\right),$$

а при додатному[13] – один із виразів

$$R\left(x, \sqrt{x^2 - p^2}\right), \qquad R\left(x, \sqrt{p^2 - x^2}\right)$$

залежно від знаку $a$. Нагадаємо, схожі інтеграли ми вже обчислювали при доведенні формули «довгого логарифму». Там ми користались замінами гіперболічної тригонометрії. В той же час, існують алгебраїчні заміни, які запропонував Л. Ейлер.

В разі додатного старшого коефіцієнту покладемо

$$\sqrt{x^2 \pm p^2} = t - x.$$

Маємо:

$$x^2 \pm p^2 = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2 \mp p^2}{2t} = \frac{t}{2} \mp \frac{p^2}{2t}, \quad dx = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{p^2}{2t^2}\right) dt.$$

Тоді

$$R\left(x, \sqrt{x^2 \pm p^2}\right) dx = R\left(\frac{t^2 \mp p^2}{2t}, t - \frac{t^2 \mp p^2}{2t}\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{p^2}{2t^2}\right) dt,$$

і вираз раціоналізовано. Після завершення інтегрування обернена заміна $t = x + \sqrt{x^2 \pm p^2}$.

◁ *Приклад 1.33.* Обчислимо інтеграл $\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx$. Введемо заміну

$$\sqrt{x^2 + 1} = t - x, \quad x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t},$$

$$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) dt = \frac{t^2 + 1}{2t^2}\, dt.$$

Маємо:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx = \int \underbrace{\left(t - \frac{t^2 - 1}{2t}\right)}_{\sqrt{x^2+1} = t - x} \overbrace{\frac{t^2 + 1}{2t^2}\, dt}^{dx} = \int \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2}\, dt =$$

[13] Випадок $D = 0$ нас зараз не цікавить, оскільки в цьому разі $\varphi(x)$ є повним квадратом, корінь здобувається націло і вираз стає раціональним.

$$= \int \frac{\left(t^2+1\right)^2}{4t^3}\,dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\ln|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C = \frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{8t^2}+C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{8\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}+C. \triangleright$$

В разі від'ємного старшого коефіцієнту покладемо

$$\sqrt{p^2-x^2} = tx-p.$$

Маємо:

$$p^2-x^2 = t^2x^2-2txp+p^2, \qquad -x = t^2x-2tp, \qquad x = \frac{2tp}{t^2+1},$$

$$dx = 2p\cdot\frac{(t^2+1)-t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt = 2p\cdot\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

При цьому

$$\sqrt{p^2-x^2} = tx-p = t\cdot\frac{2tp}{t^2+1}-p = p\left(\frac{2t^2}{t^2+1}-1\right) = p\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

Тоді

$$R\left(x,\sqrt{p^2-x^2}\right)\,dx = R\left(\frac{2tp}{t^2+1}, p\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)2p\cdot\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

і вираз раціоналізовано. Після завершення інтегрування обернена заміна $t = \frac{p+\sqrt{p^2-x^2}}{x}$. Отже, *гарантовано можливе знаходження інтегралів*

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm p^2}\right)\,dx, \qquad \int R\left(x,\sqrt{p^2-x^2}\right)\,dx.$$

Заміна Ейлера – не завжди найкращий вихід. Інтеграли

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+p^2}\right)\,dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-p^2}\right)\,dx,\ \int R\left(x,\sqrt{p^2-x^2}\right)\,dx$$

можна також раціоналізувати підстановками

$$x = p\operatorname{tg} t, \qquad x = \frac{p}{\cos t}, \qquad x = p\sin t$$

відповідно. Специфіку інтегрування тригонометричних виразів розглянуто нижче.

◁ *Приклад 1.34.*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = \sin t \\ t = \arcsin x \\ dx = \cos t\,dt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \end{array} \right\| = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Скористались формулою зниження степеня $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ і формулою синуса подвійного кута $\sin 2t = 2\sin t\cos t$. ▷

4°. Розглянемо інтегрування **біноміального диференціалу** (його називають також **диференціальним біномом**). Таку назву закріпили за конструкцією вигляду

$$df = x^m\,(a+bx^n)^p\;dx.$$

Тут $a$, $b$ – довільні дійсні числа, а $m$, $n$, $p$ – раціональні числа, тобто звичайні дроби з натуральними знаменниками.

Існують лише три випадки, коли біноміальний диференціал може бути раціоналізовано.

1) Якщо $p$ ціле, то раціоналізацію здійснює заміна $x = t^M$, $M \in \mathbb{Z}$, де $M$ – найменше спільне кратне *знаменників* дробів $m$ і $n$ (при цьому $mM, nM \in \mathbb{Z}$). Справді, маємо: $dx = Mt^{M-1}\,dt$,

$$df = x^m\,(a+bx^n)^p\;dx = \left(t^M\right)^m \left(a + b\left(t^M\right)^n\right)^p \cdot Mt^{M-1}\,dt =$$

$$= Mt^{mM}\left(a+bt^{nM}\right)^p t^{M-1}\,dt = M\left(a+bt^{nM}\right)^p t^{mM+M-1}\,dt.$$

Тут в правій частині усі показники степеня є цілими, і отже цей вираз – раціональний.

◁ *Приклад 1.35.* Розглянемо інтеграл $J = \int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$. Це біноміальний диференціал з параметрами $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{4}$, $a = b = 1$, $p = -1 \in \mathbb{Z}$. Отже, трапився перший випадок біноміального диференціалу. Знаменники дробів $m$, $n$ – числа 6 і 4. Їх найменше спільне кратне $M = 12$. Тоді вводимо заміну $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}\,dt$:

$$J = \int \frac{\sqrt[6]{t^{12}}\cdot 12t^{11}\,dt}{1+\sqrt[4]{t^{12}}} = 12\int \frac{t^{13}\,dt}{1+t^3},$$

і інтеграл раціоналізовано. Подальші обчислення, як принципово можливі, ми за мету зараз не маємо. ▷

2) Введемо заміну $x^n = t$, $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$. Тоді

$$df = t^{\frac{m}{n}}\,(a+bt)^p \cdot \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt = \frac{1}{n}\,(a+bt)^p\,t^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

Позначимо

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Тоді

$$df = \frac{1}{n}\,(a+bt)^p\,t^q\,dt.$$

Якщо $q \in \mathbb{Z}$, то ірраціональність в цьому виразі може міститись лише за рахунок знаменника дробу $p$. Нехай знаменник дробу $p$ дорівнює $M$, $M \in \mathbb{N}$, тоді $pM \in \mathbb{Z}$. Введемо заміну $z = \sqrt[M]{a+bt}$:

$$a + bt = z^M, \qquad t = \frac{1}{b}\left(z^M - a\right), \qquad dt = \frac{M}{b} z^{M-1}\,dz.$$

Отримуємо:

$$df = \frac{1}{n}\left(z^M\right)^p \left[\frac{1}{b}\left(z^M - a\right)\right]^q \cdot \frac{M}{b} z^{M-1}\,dz =$$

$$= \frac{M}{nb^{q+1}}\left(z^M - a\right)^q \cdot z^{pM+M-1}\,dz.$$

Тепер усі показники степеня є цілими, і отже, вираз раціоналізовано. Зауважимо, дві використані в цьому разі заміни можна об'єднати в одну. Остаточно, якщо $q = \frac{m+1}{n} - 1$ ціле, то раціоналізацію здійснює заміна $a + bx^n = z^M$, де $M$ – знаменник дробу $p$.

Розглянемо раціональну функцію двох змінних $R(x,y) = xy$. Покладемо $y = \sqrt{x^2 \pm p^2}$, отримаємо: $R = x\sqrt{x^2 \pm p^2}$. Це і є розглядуваний зараз диференціальний біном з параметрами $m = 1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $a = \pm p^2$. Справді, маємо: $q = \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{1+1}{2} - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$. На принциповій можливості інтегрування такого виразу ми вже наголошували вище.

◁ *Приклад 1.36.* Розглянемо інтеграл $J = \int \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[9]{2 + 3\sqrt[5]{x^4}}\,dx$. Це біноміальний диференціал з параметрами $m = \frac{3}{5}$, $n = \frac{4}{5}$, $a = 2$, $b = 3$, $p = \frac{1}{9}$. Оскільки

$$q = \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{\frac{3}{5}+1}{\frac{4}{5}} - 1 = 1 \in \mathbb{Z},$$

то трапився другий випадок біноміального диференціалу. Знаменник дробу $p$ дорівнює $M = 9$. Тоді вводимо заміну $2 + 3\sqrt[5]{x^4} = z^9$, $x = \left(\frac{z^9-2}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$. Диференціюючи, отримуємо:

$$dx = \frac{5}{4}\left(\frac{z^9-2}{3}\right)^{\frac{5}{4}-1} \cdot \frac{9z^8\,dz}{3} = \frac{15}{4}\left(\frac{z^9-2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} z^8\,dz.$$

Тоді:

$$J = \int \left[\left(\frac{z^9-2}{3}\right)^{\frac{5}{4}}\right]^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[9]{z^9} \cdot \frac{15}{4}\left(\frac{z^9-2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} z^8\,dz = \frac{15}{4}\int \frac{z^9-2}{3} z^9\,dz =$$

$$= \frac{5}{4}\int \left(z^{18} - 2z^9\right)\,dz = \frac{5}{4}\left(\frac{z^{19}}{19} - \frac{z^{10}}{5}\right) + C =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{\left(\sqrt[9]{2 + 3\sqrt[5]{x^4}}\right)^{19}}{19} - \frac{\left(\sqrt[9]{2 + 3\sqrt[5]{x^4}}\right)^{10}}{5}\right) + C. \triangleright$$

3) Вираз для $df$ можна також подати у вигляді

$$df = \frac{1}{n}\,(a+bt)^p\,t^q\,dt = \frac{1}{n}\left(\frac{a+bt}{t}\cdot t\right)^p t^q\,dt = \frac{1}{n}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q}\,dt =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{t}+b\right)^p t^{p+q}\,dt = \frac{1}{n}\left(at^{-1}+b\right)^p t^{p+q}\,dt.$$

Якщо $(p+q)\in\mathbb{Z}$, то ірраціональність в цьому виразі може міститись лише за рахунок знаменника дробу $p$. Нехай знаменник дробу $p$ дорівнює $M$. Тоді аналогічно до попереднього пункту раціоналізація здійснюється заміною $at^{-1}+b=z^M$. Знову поєднуючи дві заміни, покладемо замість цього:

$$ax^{-n}+b=z^M.$$

◁ *Приклад 1.37.* Розглянемо інтеграл $J=\int \sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$. Це біноміальний диференціал з параметрами $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{3}{4}$, $a=b=1$, $p=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$. Отже, це не перший випадок. Оскільки

$$q=\frac{m+1}{n}-1=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{3}{4}}-1=\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z},$$

то це не другий випадок. Але

$$p+q=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\in\mathbb{Z}.$$

Отже, трапився третій випадок біноміального диференціалу. Знаменник дробу $p$ дорівнює $M=3$. Тоді вводимо заміну $x^{-\frac{3}{4}}+1=z^3$, $x=\left(z^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}$. Диференціюючи, отримуємо:

$$dx=-\frac{4}{3}\left(z^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3z^2\,dz.$$

Тоді:

$$J=-\int\sqrt[4]{(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{\left[(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}\right]^3}}\cdot\frac{4}{3}\left(z^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3z^2\,dz =$$

$$=-4\int\left(z^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+(z^3-1)^{-1}}\cdot\left(z^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot z^2\,dz =$$

$$=-4\int\left(z^3-1\right)^{-\frac{8}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{z^3-1}}\cdot z^2\,dz=-4\int\left(z^3-1\right)^{-\frac{8}{3}}\cdot\frac{z}{\sqrt[3]{z^3-1}}\cdot z^2\,dz =$$

$$=-4\int\left(z^3-1\right)^{-\frac{9}{3}}\cdot z^3\,dz=-4\int\frac{z^3\,dz}{\left(z^3-1\right)^3},$$

і інтеграл раціоналізовано. ▷

Узагальнення викладених відомостей наведено в таблиці 1.2.

Власне, ці три випадки, коли диференціальний біном можна раціоналізувати (і в подальшому обчислити), були відомі ще І. Ньютону. Але лише в середині XIX сторіччя П.Л. Чебишов зміг довести, що *ні в якому іншому разі (крім цих трьох випадків) проінтегрувати диференціальний біном з отриманням відповіді у вигляді комбінації скінченної кількості елементарних функцій неможливо.*

Таблиця 1.2 – Раціоналізація виразу $x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$

| № | Параметри | Заміна | Коментар |
|---|---|---|---|
| 1) | $p \in \mathbb{Z}$ | $x = t^M$ | $M$ – найменше спільне кратне *знаменників* дробів $m$, $n$ |
| 2) | $q = \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ | $a + bx^n = z^M$ | $M$ – знаменник дробу $p$ |
| 3) | $p + q \in \mathbb{Z}$ | $ax^{-n} + b = z^M$ | $M$ – знаменник дробу $p$ |

## 1.3.3 Інтегрування тригонометричних виразів

### 1.3.3.1 Основні формули тригонометрії

Формули цього підпункту відомі зі шкільного курсу математики. Ми наводимо ці формули для того, щоб позбавити читача необхідності шукати їх в інших джерелах.

1°. **Основна тригонометрична тотожність** має вигляд

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Якщо $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\cos x \neq 0$. Враховуючи, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, ділимо основну тригонометричну тотожність на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2°. **Формули додавання** мають вигляд

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{1.8}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{1.9}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{1.10}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{1.11}$$

Ці формули виконуються для довільних і незалежних $\alpha$, $\beta$.

Важливим окремим випадком формул додавання є т.зв. **формули зведення.** Вони виникають, якщо покласти $\beta = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо $k$ – парне, то $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = \pm 1$. Якщо $k$ – непарне, то $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = \pm 1$. В будь-якому разі формули (1.8)–(1.11) значно спрощуються.

3°. Отримаємо **формули функцій подвійних кутів.** В (1.10) покладемо: $\alpha = x$, $\beta = x$:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

В (1.8) покладемо: $\alpha = x$, $\beta = x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, звідси легко також отримати інший вигляд цієї формули:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

4°. З двох останніх формул легко отримати **формули зниження степеня:**

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

5°. Отримаємо **формули перетворення суми на добуток.** Покладемо

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2}, \\ \beta = \frac{x-y}{2}. \end{cases}$$

Додамо (1.10) і (1.11):

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Віднімемо (1.11) з (1.10):

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Додамо (1.8) і (1.9):

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Віднімемо (1.9) з (1.8):

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

6°. Отримаємо **формули перетворення добутку на суму.** Додамо (1.8) і (1.9). Розділивши на 2 і помінявши частини місцями, отримуємо:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Віднімемо (1.8) з (1.9). Розділивши на 2 і помінявши частини місцями, отримуємо:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Додамо (1.10) і (1.11). Розділивши на 2 і помінявши частини місцями, отримуємо:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

7°. Розглянемо **метод введення допоміжного кута.** Нехай

$$f(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Маємо:

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right).$$

Легко довести, що $\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leqslant 1$. Тоді має сенс вираз

$$\varphi = \arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

При цьому $\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, і з означення арккосинусу випливає, що $\varphi \in [0;\pi]$. Тоді $\sin\varphi \geqslant 0$, і отже

$$\sin\varphi = +\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{A^2}{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B^2}{A^2+B^2}} = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тоді

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \begin{cases}\sin\varphi, & B \geqslant 0;\\ -\sin\varphi, & B < 0.\end{cases}$$

Тоді

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi\cos x \pm \sin\varphi\sin x\right) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\varphi).$$

При цьому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \pm\frac{B}{A}.$$

Отже, лінійну комбінацію двох функцій вдається звести до однієї функції.

#### 1.3.3.2 Елементарні випадки

Застосовуючи наведені вище формули, можна зводити інтеграли до табличних. Розглянемо це на наступних прикладах.

◁ *Приклад 1.38.*

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\;dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \;\triangleright$$

◁ *Приклад 1.39.*

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \left\|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix}\right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C. \;\triangleright$$

◁ *Приклад 1.40.*

$$\int \cos 3x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 4x)\;dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C. \;\triangleright$$

#### 1.3.3.3 Універсальна тригонометрична підстановка

Розглянемо вираз $R(\sin x, \cos x)\,dx$. Маємо:

$$\sin x = \frac{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1},$$

$$\cos x = \frac{\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}.$$

Введемо заміну

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}.$$

Тоді

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}, \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}\right)\frac{2\,dt}{t^2+1} = R_1(t)\,dt.$$

Отже, використана заміна $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ раціоналізує розглядуваний вираз, і він може бути проінтегрований за будь-яких обставин. Тому таку заміну називають **універсальною тригонометричною підстановкою.**

◁ *Приклад 1.41.*

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \triangleright$$

◁ *Приклад 1.42.*

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2-1} = -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)^{-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C.$$

Цей приклад можна розв'язати і інакше:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \left\| \begin{array}{l} x+\frac{\pi}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sin t} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Звичайно, ми отрималу ту ж саму відповідь (щоправда, в дещо іншій формі):

$$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| = \left|\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|.$$

Врахували, що $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, і почленно розділили чисельник і знаменник на $\cos\frac{x}{2}$. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.43.*

$$\int\frac{2\,dx}{\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-4} = \int\frac{dx}{\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-2} =$$

$$= \int\frac{dx}{\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x-2} = \int\frac{dx}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2} =$$

$$= \int\frac{dx}{\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2} = \left\|\begin{matrix}x-\frac{\pi}{6}=z\\ dx=dz\end{matrix}\right\| = \int\frac{dz}{\cos 2z-2} =$$

$$= \left\|\begin{matrix}\operatorname{tg} z=t\\ z=\operatorname{arctg} t\\ dz=\frac{dt}{1+t^2}\\ \cos 2z=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\| = \int\frac{dt}{(1+t^2)\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\right]} = \int\frac{dt}{1-t^2-2-2t^2} =$$

$$= -\int\frac{dt}{3t^2+1} = -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{3}\right)+C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} z\right)+C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+C.\ \triangleright$$

#### 1.3.3.4 Подальші приклади

1°. Нехай тепер $R$ – раціональна функція однієї змінної. Вираз $R(\sin x)\cos x\,dx$ раціоналізується заміною

$$\sin x = t, \qquad \cos x\,dx = dt, \qquad R(\sin x)\cos x\,dx = R(t)\,dt.$$

$\triangleleft$ *Приклад 1.44.*

$$\int\frac{\sin^2 x\cos x\,dx}{\sin^3 x+1} = \left\|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{matrix}\right\| = \int\frac{t^2\,dt}{t^3+1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} t^3+1=z \\ 3t^2\,dt=dz \\ t^2\,dt=\frac{1}{3}\,dz \end{matrix} \right\| = \int \frac{\frac{1}{3}\,dz}{z} = \frac{1}{3}\ln|z| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\sin^3 x + 1\right| + C. \triangleright$$

Вираз $R(\cos x)\sin x\,dx$ раціоналізується заміною

$$\cos x = t, \qquad -\sin x\,dx = dt, \qquad R(\cos x)\sin x\,dx = -R(t)\,dt.$$

$\triangleleft$ *Приклад 1.45.*

$$\int \sin 2x \left(\cos^5 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = 2\int \sin x\cos x \left(\cos^5 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx =$$

$$= 2\int \sin x \left(\cos^6 x + \frac{1}{\cos x}\right) dx = \left\| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{matrix} \right\| =$$

$$= -2\int \left(t^6 + \frac{1}{t}\right) dt = -2\left(\frac{t^7}{7} + \ln|t|\right) + C =$$

$$= -2\left(\frac{\cos^7 x}{7} + \ln|\cos x|\right) + C. \triangleright$$

Вираз $R(\operatorname{tg} x)\,dx$ раціоналізується заміною

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad R(\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{R(t)\,dt}{1+t^2}.$$

$\triangleleft$ *Приклад 1.46.*

$$\int \operatorname{tg}^3 x \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^2 dx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int t^3 \left(1+t^2\right)^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^3 \left(1+t^2\right)\,dt = \int \left(t^3+t^5\right)\,dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^6 + C =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + C. \triangleright$$

2°. Розглянемо інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$. Обмежимось випадком $m, n \in \mathbb{Z}$.

Нехай обидва числа $m, n$ є парними: $m = 2\mu$, $n = 2\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$. Маємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Тоді раціоналізуючою є заміна

$$t = \operatorname{tg} x, \qquad x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Справді:

$$\sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^{2\mu} x \cos^{2\nu} x\, dx = \left(\sin^2 x\right)^\mu \left(\cos^2 x\right)^\nu\, dx =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^\mu \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^\nu\, dx = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^\mu \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^\nu \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^{2\mu}\, dt}{(1+t^2)^{\mu+\nu+1}}.$$

◁ *Приклад 1.47.*

$$\int \frac{\sin^6 x\, dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^6 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \triangleright$$

*Примітка.* Якщо обидва числа $m, n$ є парними *і додатними*, то можна рекомендувати зниження степеня за відомими формулами тригонометрії.

Нехай тепер принаймні одне з чисел $m, n$ є непарним. Тоді новою літерою позначають функцію, яка входить в іншому степені (який може бути довільним за парністю).

Наприклад, нехай $m$ – непарне, $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді раціоналізуючою є заміна $\cos x = t$. Справді, маємо:

$$\sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \sin^{2k} x \cos^n x \sin x\, dx =$$

$$= \left(\sin^2 x\right)^k \cos^n x \sin x\, dx = \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x\, dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix} \right\| = -\left(1 - t^2\right)^k t^n\, dt,$$

і вираз раціоналізовано.

Навпаки, нехай тепер $n$ – непарне, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді раціоналізуючою є заміна $\sin x = t$. Справді, маємо:

$$\sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\, dx =$$

$$= \sin^m x \left(\cos^2 x\right)^k \cos x\, dx = \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^k \cos x\, dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right\| = t^m \left(1 - t^2\right)^k\, dt,$$

і вираз раціоналізовано.

◁ *Приклад 1.48.*

$$\int \sin^8 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^8 x \cos^4 x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^8 x \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x\, dx = \int \sin^8 x \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x\, dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right\| = \int t^8 \left(1 - t^2\right)^2\, dt = \int t^8 \left(1 - 2t^2 + t^4\right)\, dt =$$

$$= \int \left(t^8 - 2t^{10} + t^{12}\right)\, dt = \frac{t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C =$$

$$= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^{11} x}{11} + \frac{\sin^{13} x}{13} + C. \triangleright$$

3°. Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Його можна раціоналізувати заміною $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. В той же час, заміна $t = \operatorname{tg} x$ іноді може вести до результату швидше. Можна довести наступне: заміна $t = \operatorname{tg} x$ раціоналізує вираз $R(\sin x, \cos x)\, dx$, якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ залишається незмінною при одночасній заміні $\sin x$ на $(-\sin x)$ і $\cos x$ на $(-\cos x)$.

◁ *Приклад 1.49.*

$$J = \int \frac{5 - \operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{5 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{5 - t}{t^2 - 3t + 2}\, dt.$$

Розкладаючи підінтегральну функцію на елементарні методом невизначених коефіцієнтів, легко отримати:

$$J = \int \left(\frac{3}{t - 2} - \frac{4}{t - 1}\right) dt = 3 \ln|t - 2| - 4 \ln|t - 1| + C =$$

$$= 3 \ln|\operatorname{tg} x - 2| - 4 \ln|\operatorname{tg} x - 1| + C. \triangleright$$

## 1.4 Питання для перевірки

1. Що таке первісна?
2. Що таке невизначений інтеграл?
3. Що таке адитивна константа?
4. Як, знаючи первісну, написати вираз для невизначеного інтегралу?
5. Властивості невизначеного інтегралу.
6. Чому кажуть, що інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання?
7. Що таке лінійність невизначеного інтегралу? Які два аспекти передбачає ця властивість?
8. Що таке мультиплікативна константа?
9. Що таке таблиця первісних? Як перевірити її рядки? Наведіть приклади.
10. Як провадять заміну змінної у невизначеному інтегралі?
11. Як інтегрують складну функцію, якщо внутрішня функція лінійна, а інтеграл від зовнішньої – відомий?
12. Що таке синус гіперболічний, косинус гіперболічний?
13. Як виглядає основна тригонометрична тотожність гіперболічної тригонометрії?
14. Чому дорівнює похідна синусу гіперболічного, косинусу гіперболічного?
15. Формула інтегрування частинами.
16. Перелічіть випадки, коли інтегрування частинами є доречним.
17. Які класи інтегровних функцій вам відомі?
18. Що таке правильний дріб?

19. Що таке елементарний правильний дріб? Напишіть чотири типи таких дробів.

20. Які три випадки можуть виникнути при інтегруванні дробу $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$?

21. Як інтегрують дріб $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ при додатному дискримінанті знаменника?

22. В чому полягає скорочений алгоритм розкладання дробу $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ на елементарні дроби першого типу при додатному дискримінанті знаменника? В чому полягає перевага такого підходу перед методом невизначених коефіцієнтів?

23. Як виділити повний квадрат з квадратного тричлену? Чи для довільних квадратних тричленів це можна зробити?

24. Як виділити цілу частину з неправильного дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$?

25. Який степінь мають частка і остача від ділення при виділенні цілої частини дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m \geqslant n$?

26. Що таке кратність кореня многочлена?

27. Скільки доданків містить розкладання правильного дробу $\frac{P_m(x)}{(x-x_0)^k}$ на елементарні при $P_m(x_0) \neq 0$? Напишіть вигляд цих доданків.

28. Як інтегрують дробово-раціональні функції? Сформулюйте алгоритм їх інтегрування. Чи в довільному випадку він спрацьовує?

29. Що таке раціоналізація ірраціонального виразу?

30. Як раціоналізувати вираз $R\left(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}\right) dx$, якщо функція $\varphi(x)$ лінійна? дробово-лінійна?

31. Як раціоналізувати вираз $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ заміною Ейлера при $a > 0$? при $a < 0$?

32. Як раціоналізувати вираз $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ за допомогою тригонометричних функцій? гіперболічних тригонометричних функцій?

33. Диференціальний біном: три випадки інтегровності.

34. Раціоналізація виразу $R(\sin x, \cos x)\,dx$ за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

35. Інтегрування добутку цілих степенів синусу і косинусу.

36. В яких випадках вираз $R(\sin x, \cos x)\,dx$ може бути раціоналізований заміною $t = \operatorname{tg} x$?

# 2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

## 2.1 Означення і властивості визначеного інтегралу

### 2.1.1 Означення визначеного інтегралу

Нехай функцію $f(x)$ задано на інтервалі $x \in [a;b]$. Фігуру, утворену її графіком, вертикалями $x = a$, $x = b$ і віссю $Ox$, називають **криволінійною трапецією** (рис. 2.1). Поставимо за мету обчислення площі криволінійної трапеції.

Задамося системою точок $x_k$, $k = \overline{0;N}$, які задовольняють систему нерівностей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Ці точки (їх усього $N+1$ штук) розбивають інтервал $[a;b]$ на $N$ елементів, довжина яких

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \cdots, \quad \Delta x_N = x_N - x_{N-1}.$$

В загальному випадку ширина $\Delta x_k$ може бути різною при різних $k$.

Всередині чергової вертикальної смужки $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ оберемо деяку точку[1] $\xi_k$. В загальному випадку точка $\xi_k$ може бути розташованою в довільному місці інтервалу $[x_{k-1};x_k]$ (і навіть збігатись з одним із його кінців $x_{k-1}$, $x_k$). Значення функції в цій точці дорівнює $f(\xi_k)$.

Протягом інтервалу $[x_{k-1};x_k]$ функція $f(x)$ встигає змінювати своє значення. Але якщо цей інтервал достатньо вузький, то такою зміною можна знехтувати. Тому (звичайно, наближено!) будемо вважати, що функція в межах кожного окремого інтервалу залишає своє значення сталим і рівним $f(\xi_k)$. Геометрично таке припущення значить, що ми *підміняємо* графік функції $f(x)$ графіком *іншої* (кусково-сталої) функції, а криволінійну трапецію – ступінчастою фігурою. При цьому площа ступінчастої фігури і є наближеним значенням площі криволінійної трапеції.

[1] Грецьку літеру $\xi$ читають як «ксі».

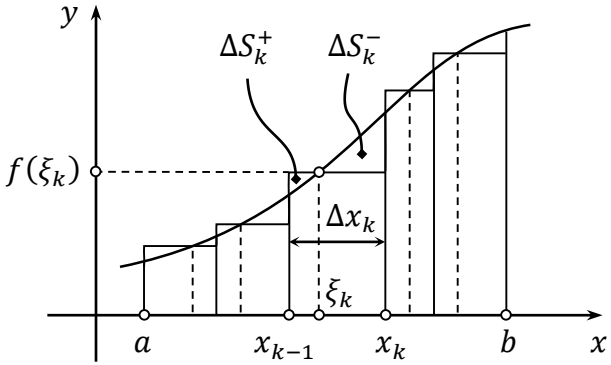



Рисунок 2.1 – До означення визначеного інтегралу

Кожна смужка, утворена в описаний спосіб, є прямокутником висотою $f(\xi_k)$ і шириною $\Delta x_k$. Тому її площа є добутком цих величин. Тоді площу ступінчастої фігури отримаємо як суму таких добутків. Вираз

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_N)\,\Delta x_N, \qquad (2.1)$$

який дорівнює площі ступінчастої фігури, називають **інтегральною сумою.**

В загальному випадку всередині кожної смужки виникають[2] два криволінійні трикутники. За їх рахунок площа ступінчастої фігури відрізняється від шуканої площі криволінійної трапеції. З одного боку, площа ступінчастої фігури є оцінкою площі криволінійної трапеції *з надлишком* за рахунок трикутників $\Delta S_k^+$, а з іншого – *з нестачею* за рахунок трикутників $\Delta S_k^-$ (див. рис. 2.1). Тоді кожна смужка вносить похибку $\delta_k = \Delta S_k^+ - \Delta S_k^-$. Очевидно,

$$|\delta_k| = \left|\Delta S_k^+ - \Delta S_k^-\right| \leqslant \Delta S_k^+ + \Delta S_k^-.$$

[2]Якщо покласти $\xi_k = x_{k-1}$ або $\xi_k = x_k$, то один з трикутників не виникає. Якщо $f = \text{const}$, вони обидва не виникають. Але ми продовжимо вважати, що вони обидва наявні. Зрештою, якщо трикутник зник, можна вважати, що він залишився, але його площа дорівнює нулю.

З метою спрощення надамо міркування лише якісного характеру, побудувавши оцінку швидкості прямування похибки до нуля. Порядок сумарної похибки (сумованої за усіма смужками) становить

$$\Delta S_{\text{total}} = \sum_{(k)} \delta_k \sim N\delta_k.$$

З метою зменшення сумарної похибки має сенс збільшувати кількість $N$ смужок, оскільки при цьому площі трикутників $\Delta S_k^{\pm}$ будуть зменшуватись. Але тоді вираз для $\Delta S_{\text{total}}$ буде містити невизначеність типу $[\infty \cdot 0]$.

Нехай функція $f(x)$ не набуває нескінченно великих значень (тобто є обмеженою). Тоді обидва катети кожного трикутника $\Delta S_k^{\pm}$ одночасно прямують до нуля. При цьому невизначеність $[\infty \cdot 0]$ розкривається на користь малої $\delta_k$, оскільки вона є малою більш високого (другого) порядку малості. Справді, катети трикутника мають порядок $\Delta x_k \sim \frac{b-a}{N}$, а площа – порядок $\Delta S_k^{\pm} \sim \frac{1}{2}\Delta x_k^2 \sim \frac{\text{const}}{N^2}$. Тоді

$$\Delta S_{\text{total}} \sim N \cdot \Delta S_k^{\pm} \sim N \cdot \frac{\text{const}}{N^2} \sim \frac{\text{const}}{N} \to 0.$$

Отже, подальше згущення розбиття інтервалу $[a;b]$ дозволяє позбавитись похибки $\Delta S_{\text{total}}$, оскільки при $N \to \infty$ границя цієї похибки становить нуль рівно в точності. При цьому площа ступінчастої фігури *після граничного переходу* стає рівною площі криволінійної трапеції.

♦ **Означення 2.1. Визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на інтервалі $x \in [a;b]$ називається границя інтегральної суми

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

якщо вона 1) існує і є скінченною; 2) не залежить від а) способу розбиття інтервалу $[a;b]$ на елементи довжини $\Delta x_k$ і б) способу вибору точок $\xi_k$ всередині цих елементів. Числа $a$, $b$ називають **нижньою і верхнею межами інтегрування.**

З огляду на порядок формування інтегральної суми стає зрозумілим, чому пишуть $\int f(x)\,dx$, а не просто $\int f(x)$. Символ $\int$ є стилізованою літерою «S», що і позначає суму. Отже, запис

$\int f(x)\,dx$ просто повторює структуру виразу інтегральної суми: «сума–значення функції–диференціал аргументу».

$\lhd$ *Приклад 2.1.* Обчислимо за означенням $\int_0^1 x\,dx$. Здійснимо, наприклад, рівномірне розбиття інтервалу $[0;1]$ на $N$ однакових елементів довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{N} = \frac{1}{N}$. Отже, розбиття здійснюється системою точок $x_k = k\,\Delta x = \frac{k}{N}$, $k = \overline{0;N}$. В якості точки $\xi_k$ оберемо абсцису правого кінця кожної смужки, тобто покладемо $\xi_k = x_k$. Оскільки підінтегральна функція $f(x) = x$, то інтегральна сума має вигляд

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} x_k\,\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\cdot\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N^2}\,(1+2+\cdots+N) =$$

$$= \frac{1}{N^2}\cdot\frac{1+N}{2}\cdot N = \frac{1+N}{2N} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}.$$

Скористались формулою суми арифметичної прогресії. Тоді

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, саме такою і є площа трикутника, обмеженого прямими $y = 0$, $x = 1$, $y = x$. $\rhd$

Кожного разу виводити вираз для інтегральної суми – занадто важка процедура. Практично користуються формулою Ньютона-Лейбніца, яку ми отримаємо в наступному пункті.

### 2.1.2 Формула Ньютона-Лейбніца

Розглянемо інтеграл $S(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$. Тут нижня межа інтегрування дорівнює $a$ і є сталою, верхня межа інтегрування дорівнює $x$ і є незалежною змінною. Цей інтеграл треба розуміти як **функцію змінної верхньої межі інтегрування.** Справді, доки $x$ дорівнює значенню, яке відповідає положенню точки $C$ (рис. 2.2), $S(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції $ABCD$.

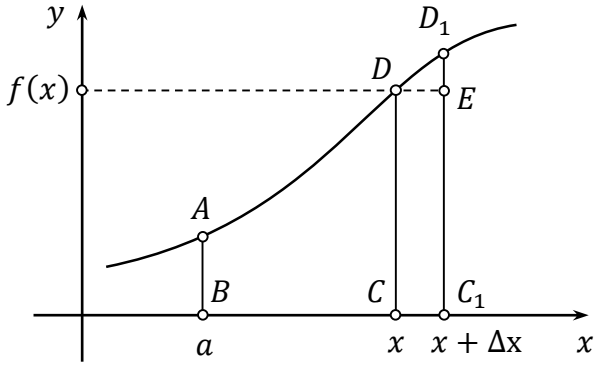



Рисунок 2.2 – До виводу формули Ньютона-Лейбніца

Якщо $x$ отримає приріст $\Delta x$, то точка $C$ переміститься в положення $C_1$, і величина $S(x+\Delta x)$ дорівнюватиме площі нової криволінійної трапеції $ABC_1D_1$. Отже, $S$ залежить від $x$, оскільки при збільшенні $x$ відбувається подальше *накопичення площі* під графіком функції $f(x)$.

Зауважимо, ми пишемо саме $S(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$, а не $S(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, оскільки аргумент $x$ в верхній межі і в підінтегральному виразі треба розрізняти. Аргумент $x$ у верхній межі – це довільне значення, а аргумент $\xi$ у підінтегральному виразі – це *сукупність усіх значень з інтервалу* $\xi \in [a;x]$.

Задача полягає в знаходженні функції $S(x)$, але технічно простіше знайти її похідну. При цьому ми будемо виходити з уявлення про інтеграл як про площу під графіком:

$$\frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_{ABC_1D_1}-S_{ABCD}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_{DCC_1D_1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_{DCC_1E}+S_{DD_1E}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{CD\cdot CC_1+S_{DD_1E}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot\Delta x+S_{DD_1E}}{\Delta x} =$$

$$= f(x) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_{DD_1E}}{\Delta x} = f(x).$$

Тут остання границя дорівнює нулю, оскільки площа $S_{DD_1E}$ є нескінченно малою більш високого (другого) порядку малості:

разом з прямуванням $CC_1 = \Delta x \to 0$ відбувається також і прямування $ED_1 = \Delta f \to 0$. Отже,

$$\frac{dS}{dx} = f(x). \tag{2.2}$$

Але тоді за означенням 1.1 отримуємо $S(x) = \int f(x)\,dx$, або

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) + C,$$

де $F(x)$ є первісною підінтегральної функції $f$.

Знайдемо константу $C$. Покладемо $x = a$. При цьому висота $BC$ (а разом з нею і площа) криволінійної трапеції $ABCD$ стає рівною нулю. Тоді

$$\int_a^a f(\xi)\,d\xi = 0 = F(a) + C, \qquad C = -F(a).$$

Маємо:

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) - F(a).$$

Починаючи з цього місця, подальша зміна верхньої межі інтегрування не передбачається, тому замість літери $x$ можна використати літеру $b$. Літера $x$ вивільняється, і її можна використати замість літери $\xi$. Остаточно отримуємо формулу Ньютона-Лейбніца у вигляді

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

Отже, **визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної, обчислених у верхній і нижній межах інтегрування.**

Часто формулу Ньютона-Лейбніца пишуть у вигляді

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Фрагмент $|_a^b$ читають «обчислене в межах від $a$ до $b$», або «обчислене в підстановці від $a$ до $b$».

При застосуванні формули Ньютона-Лейбніца можна обирати довільну первісну, оскільки первісні $F(x)$ і $F_1(x) = F(x)+C$ призводять до однакових результатів:

$$F_1(x)|_a^b = F_1(b) - F_1(a) =$$

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b .$$

Найчастіше буває зручно покласти $C = 0$.

◁ *Приклад 2.2.*

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2},$$

що збігається з результатом попереднього прикладу 2.1. ▷

### 2.1.3 Властивості визначеного інтегралу

Границя інтегральної суми не завжди існує. В разі існування такої границі функцію $f(x)$ називають **інтегровною** на інтервалі $x \in [a; b]$.

Приймемо без доведення наступне твердження. Якщо функція $f(x)$ 1) є обмеженою на інтервалі $x \in [a; b]$ і 2) має лише скінченну кількість[3] точок розриву[4], то вона є інтегровною на цьому інтервалі. Геометрично це означає: навіть якщо відбуваються розриви першого роду, площа під графіком залишається визначеною і скінченною.

Далі в цьому пункті матимемо на увазі лише інтегровні функції.

[3]Зокрема, ця кількість може дорівнювати нулю, тобто функція може бути неперервною.

[4]Маються на увазі розриви або усувні, або першого роду (типу «стрибка»). Ті й інші, узяті разом, називають розривами «не більш ніж першого роду». Розриви другого роду (з прямуванням функції на нескінченність) зараз не обговорюються, оскільки при таких розривах функція не може бути обмеженою.

Зауважимо також, наведені умови інтегровності є достатніми, але не є необхідними. Це значить, що інтегровними (в деякому сенсі) *можуть* виявитись навіть деякі функції, які цим умовам не задовольняють (зокрема, розривні з розривом другого роду). Більш детально про це йдеться в розділі, присвяченому *невласним інтегралам*.

1°. Визначений інтеграл є сталою, яка не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \text{const}.$$

Справді, при застосування формули Ньютона-Лейбніца не має значення, числа $a$, $b$ підставляти замість $x$ чи замість $t$.

2°. **Лінійність:**

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx, \qquad \forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Ця властивість доводиться безпосереднім застосуванням формули Ньютона-Лейбніца до лівої і правої частин.

3°. **Адитивність:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ця властивість також доводиться безпосереднім застосуванням формули Ньютона-Лейбніца до лівої і правої частини.

Геометричний зміст адитивності визначеного інтегралу – це додавання площ. Якщо $c$ – внутрішня точка інтервалу $[a;b]$, то адитивність означає: площа криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ дорівнює сумі площ криволінійних трапецій з основами $[a;c]$ і $[c;b]$.

4°. Досі ми обчислювали інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$. Продовжуючи вважати, що цю нерівність виконано, розглянемо інтеграл $\int_b^a f(x)\,dx$. «Пробігання» інтервалу інтегрування відбувається в зворотному напрямку, і кожний елемент довжини $\Delta x_k$ змінює свій знак на протилежний. Отже,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Це співвідношення можна також перевірити і формально за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

Зокрема, покладаючи $b = a$, отримаємо:

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Геометрично це означає: площа під графіком зникає за рахунок того, що висота криволінійної трапеції стає рівною нулю.

## 2.2 Обчислення визначеного інтегралу

### 2.2.1 Інтегрування частинами

В разі визначеного інтегралу формула інтегрування частинами набуває вигляду

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Тут добуток $uv$ є складовою первісної, і при використанні формули Ньютона-Лейбніца до нього теж треба підставляти межі інтегрування.

◁ *Приклад 2.3.*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{matrix} \right\| = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - (0\cdot\sin 0) + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1. \triangleright$$

### 2.2.2 Заміна змінної

Нехай дано інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, і функція $f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a;b]$. Введемо нову змінну $t$ за формулою $x = \varphi(t)$. Нехай виконано три умови.

1) Нова змінна $t$ змінюється в деяких межах $t \in [t_1; t_2]$, причому $\varphi(t_1) = a$ і $\varphi(t_2) = b$.
2) Функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на інтервалі $t \in [t_1; t_2]$.
3) Складна функція $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна на інтервалі $t \in [t_1; t_2]$.

Тоді має місце **формула заміни змінної у визначеному інтегралі:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Справді, нехай $F(x)$ є первісною для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Тоді складна функція $F[\varphi(t)]$ є первісною для підінтегральної функції правої частини (2.3):

$$(F[\varphi(t)])' = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Це випливає з теореми про похідну складної функції. Тоді ліва частина (2.3) дорівнює

$$F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Права частина (2.3) дорівнює

$$F[\varphi(t)]\big|_{t_1}^{t_2} = F[\varphi(t_2)] - F[\varphi(t_1)] = F(b) - F(a),$$

і (2.3) доведено.

Нагадаємо, при введенні заміни у невизначеному інтегралі існувало два місця, куди вводилась заміна: підінтегральна функція і диференціал аргументу. Тепер *таких місць три*: підінтегральна функція, диференціал аргументу і межі інтегрування.

Нові межі $t_1$, $t_2$ інтегрування *знаходять як розв'язки рівняння* $\varphi(t) = x$ при $x = a$ і $x = b$ відповідно.

$\lhd$ *Приклад 2.4.* Обчислимо площу кола радіуса $R$. Рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$, звідки для верхнього півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площа *половини* кола дорівнює площі під графіком, тобто інтегралу

$$\frac{1}{2}S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Введемо заміну $x = R\sin t$, $dx = R\cos t\,dt$. Для покриття інтервалу $x \in [-R; R]$ потрібно нову змінну $t$ змінювати в межах

$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Справді $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ є розв'язком рівняння $R\sin t = -R$, а $t_2 = \frac{\pi}{2}$ – розв'язком рівняння $R\sin t = R$. Тоді

$$\frac{1}{2}S = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,dt =$$

$$= R^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{R^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt,$$

$$S = R^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = R^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2. \triangleright$$

Порівняно з невизначеним інтегралом, ми тепер повинні виконувати додаткову дію – знаходження нових меж інтегрування $t_1$ і $t_2$. Але тепер шуканий інтеграл – число (а не функція-первісна). І це число можна знайти за допомогою формули Ньютона-Лейбніца з використанням нових меж $t_1$ і $t_2$; повернення до старих меж $a$, $b$ не потрібно. Інакше кажучи, *при введенні заміни у визначеному інтегралі потреби повертатись до старої змінної немає.*

Наведемо приклад, який демонструє, що вимога неперервності функцій $\varphi$, $\varphi'$ є суттєвою. В розглядуваному прикладі ця вимога порушиться, що призведе до помилки.

Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, де

$$f(x) = \begin{bmatrix} a, & x < -1; \\ b, & -1 < x < 1; \\ c, & x > 1. \end{bmatrix}$$

Очевидно,

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} b\,dx = bx|_{-1}^{1} = 2b$$

і не залежить від $a$ і $c$. Введемо *розривну* заміну змінної:

$$x = \varphi(t) = \frac{2\,|t|}{t} - \frac{1}{2}t,$$

визначивши її лише на множині $t \in [-2;0)\cup(0;2]$ (рис. 2.3). Маємо:

$$x = \varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) = -2 - \frac{1}{2}t, & t < 0; \\ \varphi_2(t) = 2 - \frac{1}{2}t, & t > 0. \end{bmatrix}$$

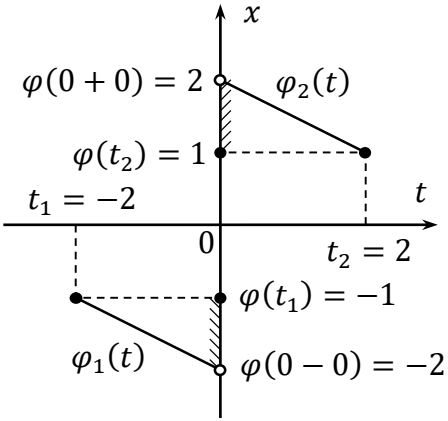



Рисунок 2.3 – Графік розривної заміни

Формально для нових меж інтегрування можна покласти $t_1 = -2$, $t_2 = 2$, оскільки $\varphi(-2) = \varphi_1(-2) = -1$, $\varphi(2) = \varphi_2(2) = 1$, і інтервал $x \in [-1; 1]$ нібито покрито. Насправді ж спочатку $t$ збільшиться від $t_1 = -2$ до $t_0 = 0$. Оскільки при цьому «працює» перша гілка $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, то аргумент $x = \varphi(t)$ *зменшиться* від $\varphi(t_1) = -1$ до[5] $\varphi(t_0 - 0) = -2$. Оскільки весь цей час аргумент $x$ менший за $-1$, то $f$ залишається сталою і рівною $a$. Далі відбувається перехід через точку $t_0 = 0$. Йому відповідає стрибкоподібна зміна функції $\varphi(t)$ від лівобічного граничного значення $\varphi(t_0 - 0) = -2$ до правобічного граничного значення $\varphi(t_0 + 0) = 2$. Після цього стрибка $t$ збільшується від $t_0 = 0$ до $t_2 = 2$. Але тепер «працює» друга гілка $\varphi(t) = \varphi_2(t)$, і аргумент $x = \varphi(t)$ зменшується від $\varphi(t_0 + 0) = 2$ до $\varphi(t_2) = 1$. Оскільки весь цей час аргумент $x$ більший за 1, то $f$ залишається сталою і рівною $c$. Тоді відповідь залежатиме від $a$ і $c$, а не від $b$, як повинно бути.

Отже, розрив функції $\varphi(t)$ в точці $t_0 = 0$ призвів до того, що при «пробіганні» інтервалу $t \in [-2; 2]$ ми організували перебір значень аргументу з множини $x \in (-2; -1] \cup [1; 2)$ замість потрібного інтервалу $x \in [-1; 1]$.

Для запобігання таких помилок і вимагають неперервність функцій $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$. При знаходженні нових меж інтегрування слід переконуватись, що при зміні нової змінної $t$ в межах від $t_1$ до $t_2$ буде перебрано усі ті і лише ті значення старої змінної, які відповідають старим межам інтегрування. Інакше кажучи, заміна $x = \varphi(t)$ повинна бути такою, щоб зміна $t$ в нових межах $t \in [t_1; t_2]$ забезпечувала покриття інтервалу $x \in [a; b]$.

[5]При $t = t_0 = 0$ функція $\varphi(t_0)$ не визначена. Втім, існують і є скінченними її однобічні границі: $\varphi(t_0 - 0) = \lim\limits_{t \to 0-0} \varphi_1(t) = -2$, $\varphi(t_0 + 0) = \lim\limits_{t \to 0+0} \varphi_2(t) = 2$.

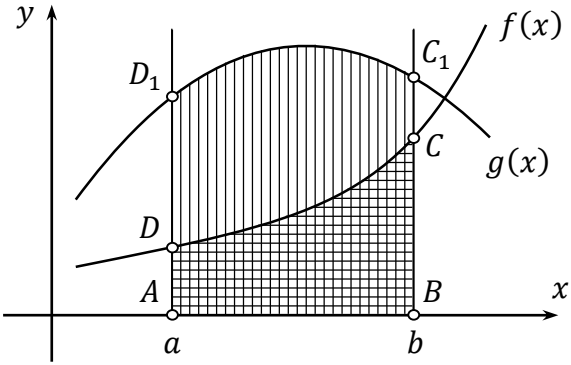



Рисунок 2.4 – Криволінійна трапеція

### 2.2.3 Випадок від'ємної площі

Визначений інтеграл може набувати від'ємних значень. Наприклад:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1.$$

Це відбувається за рахунок від'ємності значень підінтегральної функції (нагадаємо, $f(\xi_k)$ відіграє роль висоти чергової смужки, площа якої є черговим внеском до інтегральної суми). Знак «мінус» у відповіді вказує на те, що обчислено площу не під графіком, а над ним.

Узагальнимо поняття криволінійної трапеції. Обмежимо її вертикалями $x = a$, $x = b$ і графіками *двох* функцій: $f(x)$, $g(x)$. Нехай для кожного $x$ з інтервалу $x \in [a; b]$ виконано нерівність $g(x) \geqslant f(x)$. Тоді в межах цього інтервалу будь-яка точка графіку $g(x)$ розташована вище за точку графіку $f(x)$ з такою ж абсцисою. Тому графік $g(x)$ будемо називати «верхнім», а графік $f(x)$ – «нижнім». Ці графіки утворюють криволінійну трапецію $DCC_1D_1$ (рис. 2.4). Її площа

$$S_{DCC_1D_1} = S_{ABC_1D_1} - S_{ABCD} =$$

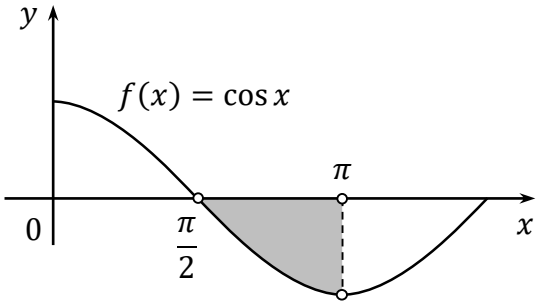



Рисунок 2.5 – Криволінійний трикутник

$$= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[g_{\text{верх.}}(x) - f_{\text{ниж.}}(x)\right]\,dx.$$

Якщо заздалегідь невідомо, який з графіків є «верхнім», можна написати

$$S = \int_a^b \left[g_{\text{верх.}}(x) - f_{\text{ниж.}}(x)\right]\,dx = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx. \qquad (2.4)$$

В прикладі, з якого ми почали цей пункт, фактично обчислювалась площа криволінійного трикутника, обмеженого вертикаллю $x = \pi$, графіком косинусоїди і віссю $Ox$ (рис. 2.5). При цьому роль «нижнього» виконував графік функції $f(x) = \cos x$, а роль «верхнього» – графік функції $g(x) \equiv 0$ (тобто вісь $Ox$). Тому для площі *над* графіком косинусоїди (і *під* віссю $Ox$) з використанням (2.4) отримуємо:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [0 - \cos x]\,dx = +1.$$

Уявімо тепер, що замість функцій $f(x)$, $g(x)$ задано функції $f_1(x) = f(x) + C$, $g_1(x) = g(x) + C$. Графік кожної з них лише пересувається на $C$ догори. Тому криволінійна трапеція зберігає свої форму і розміри, і формула (2.4) залишається справедливою. Якщо $C < 0$, то пересування трапеції відбувається в

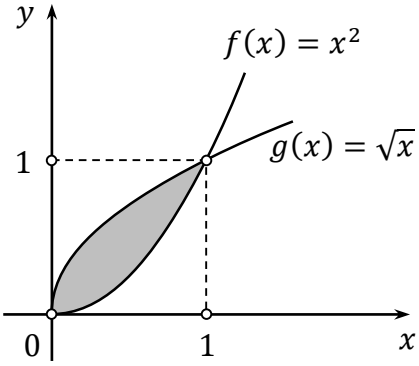



Рисунок 2.6 – До обчислення площі пелюстка

напрямку донизу. Очевидно, при достатньо великих $C$ обидві площі, $\int_a^b f(x)\,dx$ і $\int_a^b g(x)\,dx$, стануть від'ємними, але формула (2.4) все одно надасть додатне значення і залишиться справедливою.

Зауважимо також, числа $a$, $b$ можуть бути невідомими. В цьому разі їх знаходять як абсциси точок перетину графіків.

$\lhd$ *Приклад 2.5.* Обчислимо площу пелюстка, який утворено кривими $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$. З рівняння $x^2 = \sqrt{x}$ знайдемо абсциси точок перетину графіків: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Очевидно, при $x \in [0; 1]$ виконано нерівність $\sqrt{x} \geqslant x^2$. Тому $y = \sqrt{x}$ задає верхній графік, а $y = x^2$ – нижній (рис. 2.6). Тоді

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{3}. \rhd$$

До речі, цей результат був відомий ще Архімеду, про що ми дізнаємося з «Послання до Ератосфена про механічні теореми».

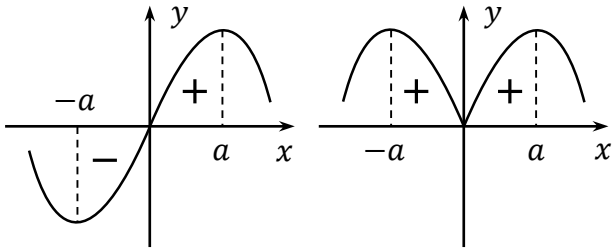



Рисунок 2.7 – Інтегрування парних і непарних функцій

### 2.2.4 Випадок симетричних меж

Розглянемо інтеграл $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, $a > 0$. За властивістю адитивності маємо:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad (*)$$

1°. Припустимо, функція $f(x)$ є непарною. Тоді її графік є центрально симетричним відносно початку координат (рис. 2.7, ліворуч). Тоді інтеграли в правій частині $(*)$ рівні за модулем як площі рівних фігур та протилежні за знаком. Тому їх сума дорівнює нулю. Отже, якщо $f(x)$ – **непарна** функція, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

◁ *Приклад 2.6.*

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(3x^2 + \frac{x^3\cos 3x}{1+e^{x^2}}\right) dx = \int\limits_{-1}^{1} 3x^2\,dx + \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3\cos 3x\,dx}{1+e^{x^2}}}_{=0} =$$

$$= x^3\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2. \triangleright$$

Зауважимо, у випадку останнього інтегралу потреба шукати первісну зникає. Достатньо лише переконатись, що межі інтегрування симетричні і підінтегральна функція є непарною.

$2^\circ$. Припустимо тепер, що функція $f(x)$ є парною. Тоді її графік є осесиметричним відносно осі $Oy$ (рис. 2.7, праворуч). Тоді інтеграли в правій частині $(*)$ рівні як площі рівних фігур, що лежать по один бік від осі $Ox$. Тому достатньо обчислити лише один з них. Отже, якщо $f(x)$ – **парна** функція, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Мати нижньою межею нуль – зручніше, ніж від'ємне число. Хоча первісну шукати цього разу все ж потрібно.

Попередній приклад можна розв'язати ще так:

$\triangleleft$ *Приклад 2.7.*

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(3x^2+\frac{x^3\cos 3x}{1+e^{x^2}}\right)dx = 2\int\limits_{0}^{1} 3x^2\,dx = \left.2x^3\right|_0^1 = 2-0=2. \triangleright$$

## 2.3 Застосування визначеного інтегралу

Розрізняють фізичні і геометричні застосування визначеного інтегралу. Але і в тому, і в іншому разі визначений інтеграл постає в якості *унікального інструменту, здатного враховувати зміну* значень певних параметрів під час здійснення відповідних процесів. Так, при обчисленні площі криволінійної трапеції за допомогою інтегралу було враховано зміну висоти смужки (рис. 2.1). Така висота може відігравати роль величини, зміна якої і буде врахована.

### 2.3.1 Приклади фізичних застосувань

#### 2.3.1.1 Схема застосування інтегралу

Нехай стан деякої системи описано параметром $x$, який змінюється з плином часу: $x = x(t)$. Швидкість цієї зміни, *середня за інтервал часу* $\Delta t$, становить $\langle v\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Якби фактична швидкість була сталою (незалежною від $\Delta t$) та рівною цій середній, то зміна параметру $x$ з плином часу накопичувалась би за законом прямої пропорційності згідно з формулою

$$\Delta x = \langle v\rangle\,\Delta t. \tag{2.5}$$

Якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ значення параметру відоме, $x(0) = x_0$, то його значення в довільний наступний момент $T$ становить

$$x(T) = x_0 + \Delta x = x_0 + \langle v \rangle \, \Delta t = x_0 + \langle v \rangle \, (T - t_0) = x_0 + \langle v \rangle \, T,$$

і стан системи описано[6].

Проблема полягає як раз у тому, що швидкість не є сталою, і отже, ми втрачаємо право застосовувати формулу (2.5). Перейдемо до **миттєвої** швидкості, спрямовуючи $\Delta t$ до нуля:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle v \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v'(t) = \frac{dx}{dt},$$

$$dx = v(t) \, dt. \tag{2.6}$$

Отримана формула (2.6) формально збігається з (2.5). Отже, при переході від середньої швидкості до миттєвої ми відновлюємо своє право застосовувати міркування прямої пропорційності між інтервалом часу $dt$ і приростом параметру $dx$. Але необхідно зробити два зауваження. По-перше, ця пропорційність поширюється лише на нескінченно малі інтервали $dt \to 0$, оскільки рівність $\Delta x \approx dx$ виконується лише з точністю до малих вищих порядків. По-друге, коефіцієнт пропорційності $v(t)$ для кожного інтервалу $dt$ є індивідуальним.

Розіб'ємо весь інтервал часу $[0; T]$ на малі проміжки $\Delta t_k$. Нехай черговий проміжок $t \in [t_k; t_k + \Delta t_k]$ малий настільки, що зміною швидкості протягом нього можна знехтувати. Тоді всередині цього інтервалу $v = v(t_k) = \text{const}$, і різниця між (2.5) і (2.6) зникає. Тоді для кожного малого проміжку $\Delta t_k$, взятого окремо, згідно (2.5), (2.6) і наближеної рівності $\Delta x \approx dx$ маємо:

$$\Delta x_k \approx v(t_k) \Delta t_k.$$

Саме тепер відбувається врахування зміни швидкості під час процесу, оскільки швидкість $v(t_k)$ є специфічною для кожного інтервалу $\Delta t_k$, взятого окремо. Тоді величина $x$ *послідовно накопичує* своє значення:

$$x(T) = x_0 + \Delta x = x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots \approx x_0 + \sum_{(k)} v(t_k) \Delta t_k.$$

[6]Точніше кажучи, миттєвий стан системи описано конкретним значенням $x$, а отримане нами рівняння $x(T)$ описує *еволюцію цього стану з плином часу*. Це рівняння дозволяє *будувати прогноз* щодо стану на *довільний* майбутній момент часу $T$.

Але це і є інтегральна сума. Вона дорівнює площі ступінчастої фігури в координатах $(t; v)$ в межах $t \in [0; T]$. Здійснюємо граничний перехід при $\max \Delta t_k \to 0$:

$$x(T) = x_0 + \int\limits_0^T v(t)\, dt.$$

Тут інтеграл дорівнює площі під графіком $v(t)$ в межах інтегрування $t \in [0; T]$.

Зауважимо, в момент здійснення граничного переходу наближена рівність перетворюється на точну. Справді, величини $dx_k$ і $\Delta x_k$ збігаються з точністю до малих вищих порядків, але, як ми вже доводили, границя цієї похибки, навіть просумованої за всіма інтервалами $\Delta t_k$, дорівнює нулю.

Наведена схема дозволяє стверджувати, що **визначений інтеграл є унікальним інструментом, який дозволяє враховувати зміну параметрів процесу в ході цього процесу.**

◁ *Приклад 2.8.* Нехай швидкість прямолінійного руху матеріальної точки змінюється за лінійним законом $v(t) = v_0 + at$. Обчислимо шлях, пройдений за час $T$, з урахуванням зміни швидкості з плином часу.

Розіб'ємо весь інтервал часу $[0; T]$ на *диференціально*[7] малі проміжки $dt$. Тоді елементарний шлях $ds = v(t)\, dt$. Тоді

$$S = \int ds = \int\limits_0^T (v_0 + at)\, dt = \left( v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \Bigg|_0^T = v_0 T + \frac{aT^2}{2}. \triangleright$$

В цьому прикладі термін «швидкість» буквально і значив «швидкість механічного руху». Але наведені міркування не обмежуються суто механічним рухом, оскільки поняття швидкості припускає певні узагальнення. Наприклад, миттєве прискорення $a = \frac{dv}{dt}$ – це швидкість зміни швидкості руху, миттєва механічна потужність $P = \frac{dA}{dt}$ – це швидкість виконання роботи, миттєва сила струму $I = \frac{dQ}{dt}$ – це швидкість витрат кількості електричного заряду, миттєва ЕРС індукції $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ – це швидкість зменшення магнітного потоку і т.д.

[7] Тут і далі фразу «диференціально малий» розуміють як «малий настільки, що *зміною* відповідного параметру (в нашому разі зміною швидкості) можна знехтувати». Замість «диференціально малий» кажуть також «елементарний».

◁ *Приклад 2.9.* Нехай електричний струм коливається за законом $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Обчислити заряд, перенесений через поперечний переріз ланцюга за першу чверть періоду, врахувавши зміну сили струму з плином часу.

Період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$. За означенням сила струму є швидкістю витрат кількості електричного заряду: $I = \frac{dQ}{dt}$. Тоді за час $dt$ переноситься заряд $dQ = I(t)\,dt$. Тоді

$$Q = \int dQ = \int\limits_0^{\frac{T}{4}} I_0 \cos \omega t\, dt = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t|_0^{\frac{T}{4}} =$$

$$= \frac{I_0}{\omega} \left[ \sin \left( \omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} \right) - \sin 0 \right] = \frac{I_0}{\omega} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{I_0}{\omega}. \triangleright$$

◁ *Приклад 2.10.* Нехай замкнений контур опором $R$ пронизується змінним магнітним потоком $\Phi(t)$, який за час $t \in [0; T]$ змінюється від $\Phi_1 = \Phi(0)$ до $\Phi_2 = \Phi(T)$. Обчислимо електричний заряд, перенесений по контуру.

За законом Фарадея ЕРС індукції $\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$. За законом Ома індукційний струм $I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$. З означення сили струму елементарний[8] заряд $dQ = I(t)\,dt = -\frac{1}{R}\,d\Phi$. Фактично в цей момент ми робимо заміну змінної, переходячи від змінної $t$ до змінної $\Phi$. Тоді

$$Q = \int dQ = -\frac{1}{R} \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R}\, \Phi|_{\Phi_1}^{\Phi_2} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}.$$

Цікаво зауважити, що цей результат не залежить від вигляду функції $\Phi(t)$. $\triangleright$

#### 2.3.1.2 Інтегральне середнє

Нехай $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $a = \text{const}$. Тоді $S(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ – площа криволінійної трапеції. При цьому $f(b)$ дорівнює миттєвій швидкості, з якою накопичується ця площа в *останній момент* перебігу інтервалу $[a; b]$. Справді, $\frac{dS}{db} = f(b)$ згідно з (2.2). Звідси маємо $dS = f(b)\,db$.

[8] Звичайно, тут термін «елементарний» використано в сенсі «диференціально малий», а не у фізичному сенсі «заряд одного електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл».

Знайдемо середню швидкість $\langle y\rangle$, яка стосувалась би усього інтервалу $[a;b]$, а не його приросту $[b;b+\Delta b]$. Її потрібно визначити так, щоб усю площу $S$ цілком (а не її елементарний приріст $dS$) можна було знайти в такий самий спосіб:

$$S = \langle y\rangle \cdot (b-a). \tag{2.7}$$

Очевидно, достатньо покласти $\langle y\rangle \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$, звідки

$$\langle y\rangle = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Це значення називають **інтегральним середнім** функції $f(x)$ на інтервалі $x\in[a;b]$. На відміну від миттєвої швидкості $y(x)$, яка змінюється протягом інтервалу $x\in[a;b]$, інтегральне середнє $\langle y\rangle$ є константою для даного інтервалу. Її геометричний зміст – *висота прямокутника з основою* $[a;b]$*, рівновеликого відповідний криволінійній трапеції.*

Якщо функція лінійна, $y(x)=kx+c$, то її інтегральне середнє на інтервалі $[a;b]$ збігається із середнім арифметичним значень $y(a)=ka+c$, $y(b)=kb+c$, які досягаються на кінцях інтервалу:

$$\langle y\rangle = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (kx+c)\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{kx^2}{2}+cx\right)\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\left(\frac{kb^2}{2}+bc\right)-\left(\frac{ka^2}{2}+ac\right)\right] = \frac{\frac{k}{2}\left(b^2-a^2\right)+c(b-a)}{b-a} =$$

$$= \frac{k}{2}(b+a)+c = \frac{(ka+c)+(kb+c)}{2} = \frac{y(a)+y(b)}{2},$$

що і треба було довести.

Таким чином, якщо функція є лінійною, то при обчисленні площі криволінійної трапеції за формулою (2.7) інтегральне середнє можна підмінити середнім арифметичним значень функції на кінцях інтервалу.

◁ *Приклад 2.11.* Нехай швидкість прямолінійного руху матеріальної точки змінюється за лінійним законом $v(t)=v_0+at$. Обчислити шлях, пройдений за час $T$, з урахуванням зміни швидкості з плином часу. Подати відповідь у вигляді, який не містить $a$ явно.

Маємо:

$$S = \int_0^T (v_0 + at)\,dt = v_0 T + \frac{aT^2}{2} =$$

$$= \frac{2v_0 T + aT^2}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + aT)}{2} \cdot T = \frac{v(0) + v(T)}{2} \cdot T.$$

Як і очікувалось, $S = \langle v \rangle\, T$, де $\langle v \rangle = \frac{v(0)+v(T)}{2}$. $\triangleright$

Зауважимо, обернене твердження є хибним. А саме: якщо інтегральне середнє дорівнює середньому арифметичному значень функції на кінцях інтервалу, то це ще не значить, що функція повинна бути лінійною. Очевидно, достатньо розглянути наступний контрприклад.

$\triangleleft$ *Приклад 2.12.* Розглянемо функцію $f(x) = (x - x_0)^3 + b$ на інтервалі $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. Очевидно, її значення на кінцях інтервалу $f(x_0 - \delta) = (-\delta)^3 + b = b - \delta^3$, $f(x_0 + \delta) = b + \delta^3$. Середнє арифметичне

$$\frac{f(x_0 - \delta) + f(x_0 + \delta)}{2} = \frac{\left(b - \delta^3\right) + \left(b + \delta^3\right)}{2} = b.$$

Інтегральне середнє

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{(x_0 + \delta) - (x_0 - \delta)} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \left[(x - x_0)^3 + b\right]\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x - x_0 = t \\ dx = dt \\ t \in [-\delta; \delta] \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \left(t^3 + b\right)\,dt = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} b\,dt = b.$$

Тут доданок $t^3$ видалено, оскільки він веде до інтегралу від непарної функції в симетричних межах, який дорівнює нулю. Отже, $\frac{f(x_0-\delta)+f(x_0+\delta)}{2} = \langle f(x) \rangle = b$, хоча функція $f(x)$ при цьому не є лінійною. $\triangleright$

Як бачимо, суто випадково трапилось, що для нелінійної функції середнє арифметичне на кінцях інтервалу і інтегральне середнє на цьому інтервалі збігаються. Це легко збагнути з урахуванням центральної симетрії графіку відносно точки $(x_0; b)$. Втім, підміна інтегрального середнього формальним середнім арифметичним, як правило, веде до помилки.

◁ *Приклад 2.13.* Нехай електричний струм коливається за законом $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Обчислити середній струм за першу чверть періоду і порівняти його з формальним середнім арифметичним значень сили струму на кінцях інтервалу.

Маємо:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\frac{T}{4} - 0} \int\limits_0^{\frac{T}{4}} I_0 \cos \omega t \, dt = \frac{4}{T} \cdot \frac{I_0}{\omega} = \frac{4I_0}{2\pi} = \frac{2I_0}{\pi}.$$

В той же час, формальне середнє арифметичне на кінцях інтервалу становить

$$\frac{I(0) + I\left(\frac{T}{4}\right)}{2} = \frac{I_0 \cos 0 + I_0 \cos \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{I_0}{2},$$

що менше від правильної відповіді в $\frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$ разів. ▷

Розглянемо ще один важливий приклад.

◁ *Приклад 2.14.* Напруга в мережі коливається за законом $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Знайти діюче значення напруги.

**Діючим значенням** напруги змінного[9] струму називають постійну напругу штучно вигаданого джерела, при дії якого в ланцюгу протягом періоду виділяється така ж теплова енергія, як і при дії джерела змінного струму.

Приєднаємо до джерела резистор опором $R$. Нехай за диференціально малий час $dt$ в ланцюгу виділяється теплова енергія $dW$. За означенням миттєвої потужності $P(t) = \frac{dW}{dt}$, звідки $dW = P(t)\, dt$. За законом Джоуля-Ленца

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R} = \frac{U_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{R} = \frac{U_0^2}{2R}[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)].$$

Тоді теплова енергія за період

$$W = \int dW = \int P(t)\, dt = \frac{U_0^2}{2R} \int\limits_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)]\, dt =$$

[9] У вузькому сенсі змінним називають струм, який змінюється за гармонічним законом: $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. В широкому сенсі змінним називають струм, який взагалі залежить від часу, тобтог $I = I(t)$, в тому числі навіть неперіодично. Означення діючого значення ми подаємо саме для цього довільного випадку. Але розв'язуємо задачу лише для випадку змінного струму у вузькому сенсі.

$$= \frac{U_0^2}{2R}\left(t + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi_0)\right)\Bigg|_0^T = \frac{U_0^2 T}{2R},$$

оскільки $\omega T = 2\pi$.

Розглянемо штучно вигадане джерело постійного струму з діючою напругою $U_д$. При приєднанні резистора $R$ воно виділяє постійну потужність $P_{\text{штуч.}} = \frac{U_д^2}{R}$. Тоді теплова енергія за період

$$W_{\text{штуч.}} = P_{\text{штуч.}} T = \frac{U_д^2 T}{R}.$$

З рівняння $W_{\text{штуч.}} = W$ отримуємо:

$$\frac{U_д^2 T}{R} = \frac{U_0^2 T}{2R}, \qquad U_д^2 = \frac{U_0^2}{2}, \qquad U_д = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Отже, діюче значення $U_д$ змінної напруги в $\sqrt{2}$ разів менше від амплітудного значення $U_0$. Звичайно, цей результат стосується лише змінного струму у вузькому сенсі: для іншої форми залежності $U(t)$ він буде іншим.

Додамо також, вольтметр змінного струму вимірює саме $U_д$. Отже, амплітуда коливань напруги в розетці

$$U_0 = U_д\sqrt{2} = 220 \cdot \sqrt{2} \approx 311 \text{ В}. \triangleright$$

#### 2.3.1.3 Подальші приклади

В попередньому підпункті ми розбивали на елементарні проміжки деякий інтервал часу, оскількі певна величина (швидкість, струм, потужність тощо) змінювалась з плином часу. Визначений інтеграл дозволяє враховувати не тільки часові, а й інші зміни параметрів процесу. Так, можна врахувати залежність параметрів від просторових координат або інших фізичних величин.

$\triangleleft$ *Приклад 2.15.* Пружину жорсткістю $k$, попередньо видовжену на відстань $x_1$, продовжують повільно розтягати, доки видовження не досягне значення $x_2$. Обчислити роботу зовнішньої сили по розтяганню пружини.

Спрямуємо вісь $Ox$ вздовж пружини і оберемо початок координат в нейтральному положенні рухомого кінця. Розіб'ємо інтервал $x \in [x_1; x_2]$ руху рухомого кінця пружини на диференціально малі елементи $dx$. За законом Гука сила пружності $F_{\text{пружн.}}(x) = kx$. Оскільки рух повільний, будемо вважати,

що зовнішня сила кожної миті врівноважується силою пружності, тоді $F(x) = kx$. Елементарна робота зовнішньої сили $dA = F(x)\,dx$. Тоді

$$A = \int dA = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

До речі, саме цей результат спонукає потенціальну енергію пружної деформації вважати рівною $W = \frac{kx^2}{2}$.

Інтегральне середнє сили збігається з середнім арифметичним значень сили на кінцях інтервалу:

$$\langle F\rangle = \frac{A}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_1 + x_2)}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2},$$

оскільки залежність сили від видовження за законом Гука лінійна. ▷

◁ *Приклад 2.16.* Електричний заряд $Q$ закріплено в точці з координатою $x = 0$, а електричний заряд $q$ під дією сили Кулона переміщується вздовж осі $Ox$ із точки $x_1$ в точку $x_2$. Обчислити роботу сили Кулона.

Розіб'ємо інтервал $x \in [x_1; x_2]$ на елементарні «шматочки» $dx$. Протягом окремого інтервалу $[x; x + dx]$ сила Кулона дорівнює $F(x) = \frac{kQq}{x^2}$ і залишається сталою. Тоді її елементарна робота $dA = F(x)\,dx$. Тоді

$$A = \int dA = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{kQq}{x^2}\,dx = -\left.\frac{kQq}{x}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{kQq}{x_1} - \frac{kQq}{x_2}.$$

До речі, саме цей результат спонукає потенціальну енергію електростатичної взаємодії в системі двох точкових електричних зарядів вважати рівною $W = \frac{kQq}{x}$ (а електричний потенціал поля точкового заряду $Q$ – рівним $\varphi = \frac{W}{q} = \frac{kQ}{x}$).

Інтегральне середнє сили

$$\langle F\rangle = \frac{A}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{kQq}{x_1} - \frac{kQq}{x_2}}{x_2 - x_1} = \frac{kQq}{x_1 x_2}.$$

Цього разу $\langle F\rangle$ виявляється меншим за середнє арифметичне значень сили на кінцях інтервалу:

$$\langle F\rangle < \frac{F_1 + F_2}{2}, \qquad \frac{kQq}{x_1 x_2} < \frac{\frac{kQq}{x_1^2} + \frac{kQq}{x_2^2}}{2},$$

$$\frac{2}{x_1x_2} < \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}, \qquad \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} > 2.$$

Введемо заміну $z = \frac{x_2}{x_1} > 1$. Залишається довести елементарну нерівність:

$$z + \frac{1}{z} > 2, \qquad z^2 + 1 > 2z, \qquad z^2 - 2z + 1 > 0, \qquad (z-1)^2 > 0,$$

що очевидно. Так і повинно бути, оскільки фактична робота сили, тобто площа під графіком $F(x)$, за рахунок опуклості графіка донизу менша порівняно з площею прямолінійної трапеції, яка виникала би при лінійній залежності $F(x)$. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 2.17.* Нехай матеріальна точка масою $m$ рухається вздовж осі $Ox$ під дією змінної сили $F$, спрямованої також вздовж осі $Ox$. Обчислити роботу сили при переміщенні точки з одного положення в інше, якщо швидкість руху змінюється при цьому від $v_1$ до $v_2$.

За другим законом Ньютона $F = ma = m\frac{dv}{dt}$. Тоді елементарна робота

$$dA = F\,dx = m\frac{dv}{dt} \cdot dx = m\,dv \cdot \frac{dx}{dt} = mv\,dv.$$

Тоді

$$A = \int dA = \int\limits_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

До речі, саме цей результат спонукає кінетичну енергію руху матеріальної точки вважати рівною $W = \frac{mv^2}{2}$. $\triangleright$

Обчислимо *енергію обертання твердого тіла*. Проблема полягає в тому, що різні частини тіла обертаються по колах різних радіусів, і за однаковий час проходять різні відстані, тому мають різні швидкості. Отже, формула $W = \frac{mv^2}{2}$ безпосередньо незастосовна.

Розіб'ємо тіло на велику кількість диференціально малих елементів об'єму $\Delta V_k$. Кожний з них можна вважати матеріальною точкою. Нехай густина тіла дорівнює $\rho$. Тоді маса $k$-ої матеріальної точки $\Delta m_k = \rho\,\Delta V_k$.

Тіло може бути неоднорідним, а величина $\rho$ – змінною. Тому кожному елементу $\Delta V_k$ може бути притаманним індивідуальне значення $\rho = \rho_k$. Отже, для врахування неоднорідності тіла

(для врахування того, що густина є змінною) треба написати $\Delta m_k = \rho_k \, \Delta V_k$.

Нехай кутова швидкість обертання дорівнює $\omega$. Кут повороту за час $dt$ складає $d\alpha = \omega \, dt$. Нехай $k$-та матеріальна точка $\Delta m_k$ обертається по колу радіуса $r_k$. Нехай шлях точки за час $dt$ становить $ds_k$. За означенням величини кута $d\alpha = \frac{ds_k}{r_k}$. Очевидно, цей дріб не залежить[10] від $k$. Маємо: $ds_k = r_k \, d\alpha = r_k \omega \, dt$. Тоді швидкість цієї точки $v_k = \frac{ds_k}{dt} = r_k \omega$, а її кінетична енергія

$$\Delta W_k = \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{\rho_k \, \Delta V_k r_k^2 \omega^2}{2}.$$

Сумуючи за всіма елементами об'єму, отримуємо вираз для інтегральної суми:

$$W \approx \sum_{(k)} \Delta W_k = \frac{\left( \sum\limits_{(k)} r_k^2 \rho_k \, \Delta V_k \right) \omega^2}{2}.$$

Ця наближена рівність перетворюється на точну при здійсненні граничного переходу при $\max \Delta V_k \to 0$, і ми отримуємо:

$$W = \frac{J \omega^2}{2}.$$

Тут величину

$$J = \lim_{\max \Delta V_k \to 0} \sum_{(k)} r_k^2 \rho_k \, \Delta V_k = \int r^2 \rho \, dV$$

називають **моментом інерції.** Ця величина виконує таку ж роль для обертального руху, як і маса для поступального руху. Зиск від використання моменту інерції полягає в тому, що більше не потрібно враховувати відмінність *лінійних* швидкостей $v$ різних точок тіла: *кутова* швидкість $\omega$ у всіх точок однакова.

Диференціюючи останню формулу, знаходимо внесок окремого «шматочку» тіла в загальний момент інерції:

$$dJ = r^2 \rho \, dV = r^2 \, dm. \tag{2.8}$$

[10] Оскільки тіло тверде, то кут повороту для всіх точок $\Delta m_k$ однаковий.

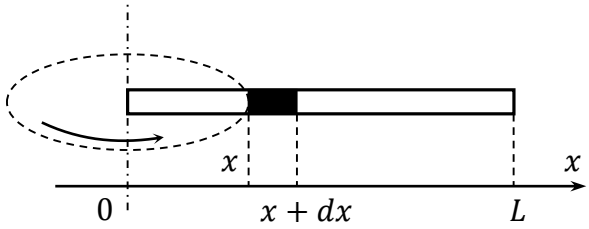



Рисунок 2.8 – До обчислення моменту інерції стержня

◁ *Приклад 2.18.* Обчислити момент інерції тонкого стержня масою $M$ і довжиною $L$ при обертанні навколо осі, яка проходить через один з кінців стержня перпендикулярно площині обертання.

Оберемо вісь $Ox$ і виділимо елемент довжиною $dx$ (рис. 2.8). Маса одиниці довжини дорівнює $\frac{M}{L}$. Тоді маса довжини $dx$ є в $dx$ разів більшою, тобто маса виділеного елементу дорівнює $dm = \frac{M}{L}\,dx$. Цей елемент обертається по колу радіуса $x$, тому його внесок в момент інерції становить $dJ = x^2\,dm = \frac{Mx^2}{L}\,dx$. Тоді

$$J = \int dJ = \int\limits_0^L \frac{Mx^2}{L}\,dx = \left.\frac{Mx^3}{3L}\right|_0^L = \frac{1}{3}ML^2. \triangleright$$

Обчислимо **момент інерції перерізу.** Нехай з матеріалу густиною $\rho$ виготовлено тонкий лист товщиною $h$. Виділимо елемент поверхні площею $dS$. Йому відповідає об'єм $dV = h\,dS$, і отже, маса $dm = \rho\,dV = \rho h\,dS$. Позначимо $\sigma = \rho h$. Тоді

$$dm = \sigma\,dS.$$

Величину $\sigma = \frac{dm}{dS}$ називають **поверхневою густиною.**

Зауважимо, лист міг бути неоднорідним: як його густина, так і його товщина могли бути різними в різних точках. Саме цьому ми виділяли диференціально малий елемент площі, тобто малий настільки, щоб зміною густини і товщини можна було знехтувати. Отже, поверхневу густину $\sigma$ слід вважати функцією точки на поверхні. Зокрема, для однорідного матеріалу сталої товщини отримуємо $\sigma = \text{const}$. Наприклад, для стандартного паперу А4 поверхнева густина дорівнює $80\ \frac{\text{г}}{\text{м}^2}$.

Нехай криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $f(x)$, $x \in [a;b]$, виготовлено з однорідного листового матеріалу поверхневою густиною $\sigma$. Розіб'ємо інтервал $[a;b]$ на елементи $dx$. Виникає система «смужок». Довжина чергової «смужки» дорівнює $L = f(x)$, ширина $dx$, площа $dS = L\,dx = f(x)\,dx$, маса $dm = \sigma\,dS = \sigma f(x)\,dx$, внесок «смужки» в момент інерції при обертанні навколо осі $Ox$ згідно з останнім прикладом

$$dJ = \frac{1}{3}L^2\,dm = \frac{1}{3}f^2(x)\cdot\sigma f(x)\,dx = \frac{\sigma}{3}f^3(x)\,dx.$$

Остаточно маємо

$$J = \int dJ = \frac{\sigma}{3}\int\limits_a^b f^3(x)\,dx.$$

◁ *Приклад 2.19.* Розглянемо прямокутник з розмірами $b \times h$, виготовлений з листового матеріалу з поверхневою густиною $\sigma$. Обчислимо його момент інерції при обертанні відносно осі, яка проходить через середини сторін $h$ (рис. 2.9).

Розіб'ємо інтервал $x \in \left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right]$ на «смужки» висотою $dx$. Ширина «смужки» дорівнює $b$, площа $dS = b\,dx$, маса

$$dm = \sigma\,dS = \sigma b\,dx.$$

Радіус обертання становить $x$ (зміна саме цього радіусу і враховується визначеним інтегралом). Усі точки маси $dm$ обертаються за цим радіусом, тому внесок в момент інерції становить $dJ = x^2\,dm = \sigma b x^2\,dx$. Тоді

$$J = \int dJ = \sigma b\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2\,dx = 2\sigma b\int\limits_0^{\frac{h}{2}} x^2\,dx = 2\sigma b\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{\sigma b h^3}{12}.$$

Врахували парність підінтегральної функції.

В курсі опору матеріалів при вивченні згину балки вважають момент інерції перерізу його геометричною характеристикою, і тому покладають $\sigma = 1$. Для моменту інерції перерізу виникає відома формула $J = \frac{bh^3}{12}$. ▷

Обчислимо **положення центру мас плоского твердого тіла.** Нехай плоске тверде тіло, виготовлене з однорідного листового

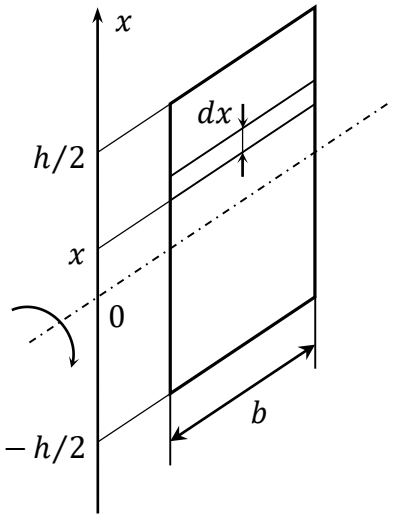



Рисунок 2.9 – До обчислення моменту інерції перерізу

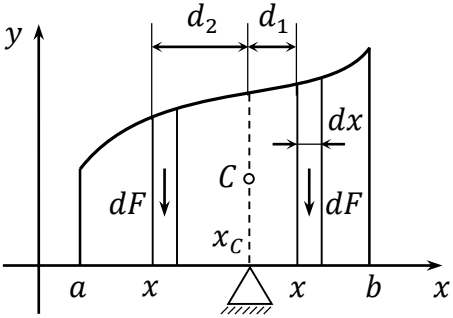



Рисунок 2.10 – До обчислення абсциси центру мас

матеріалу з поверхневою густиною $\sigma$, має форму криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ і розташоване у вертикальній площині (рис. 2.10). Нехай абсциса центру мас $C$ дорівнює $x_C$. Тоді при розміщенні опори в точці $x_C$ моменти сил тяжіння повинні врівноважитись.

Розіб'ємо інтервал $x \in [a; b]$ на «смужки» шириною $dx$. Висота «смужки» дорівнює $f(x)$, площа $dS = f(x)\,dx$, маса

$$dm = \sigma\,dS = \sigma f(x)\,dx.$$

Тоді елементарна сила тяжіння

$$dF = g\,dm = g\sigma f(x)\,dx.$$

Тут $g$ – прискорення вільного падіння.

Сили тяжіння, прикладені до «смужок», розташованих праворуч від точки $x_C$, намагаються повернути тіло за годинниковою стрілкою. Плече чергової сили дорівнює $d_1 = x - x_C$, і внесок в момент сили

$$dM_1 = d_1 \cdot dF = g\sigma(x - x_C)f(x)\,dx.$$

В цьому разі визначений інтеграл враховує зміну плеча сили, оскільки сила тяжіння є *розподіленою*, а не прикладеною до якоїсь однієї точки. Тоді загальний момент сил тяжіння, який намагається повернути тіло за годинниковою стрілкою, дорівнює

$$M_1 = \int dM_1 = g\sigma \int\limits_{x_C}^{b} (x - x_C)f(x)\,dx.$$

Сили тяжіння, прикладені до «смужок», розташованих ліворуч від точки $x_C$, намагаються повернути тіло проти годинникової стрілки. Плече чергової сили дорівнює $d_2 = x_C - x$, і внесок в момент сили

$$dM_2 = d_2 \cdot dF = g\sigma(x_C - x)f(x)\,dx.$$

Тоді загальний момент сил тяжіння, який намагається повернути тіло проти годинникової стрілки, дорівнює

$$M_2 = \int dM_2 = g\sigma \int\limits_{a}^{x_C} (x_C - x)f(x)\,dx.$$

Умова рівноваги має вигляд $M_2 = M_1$, і ми отримуємо:

$$g\sigma \int\limits_a^{x_C} (x_C - x) f(x)\, dx = g\sigma \int\limits_{x_C}^{b} (x - x_C) f(x)\, dx,$$

$$\int\limits_a^{x_C} (x_C - x) f(x)\, dx = -\int\limits_{x_C}^{b} (x_C - x) f(x)\, dx,$$

$$\int\limits_a^{b} (x_C - x) f(x)\, dx = 0,$$

$$x_C = \frac{\int\limits_a^b x f(x)\, dx}{\int\limits_a^b f(x)\, dx}. \tag{2.9}$$

Таку відповідь ми б і отримали, якби в механічному означенні радіус-вектора центру мас

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum_{(k)} \overrightarrow{r_k}\, \Delta m_k}{\sum_{(k)} \Delta m_k} \tag{2.10}$$

здійснили проектування на вісь $Ox$ і наступний за цим граничний перехід при $\max \Delta m_k \to 0$.

◁ *Приклад 2.20*. Розглянемо трикутник, обмежений прямими $y = 0$, $x = b$, $y = kx$. Абсциса центру мас:

$$x_C = \frac{\int\limits_0^b x \cdot kx\, dx}{\int\limits_0^b kx\, dx} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^b}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b} = \frac{2}{3} b$$

незалежно від $k$. Це відповідає відомому твердженню: центр мас суцільного однорідного трикутника лежить в точці перетину його медіан. ▷

Формула (2.9) придатна для обчислення абсциси центру мас криволінійної трапеції. В разі фігур більш складної форми ця формула потребує певної модифікації. Наприклад, розглянемо

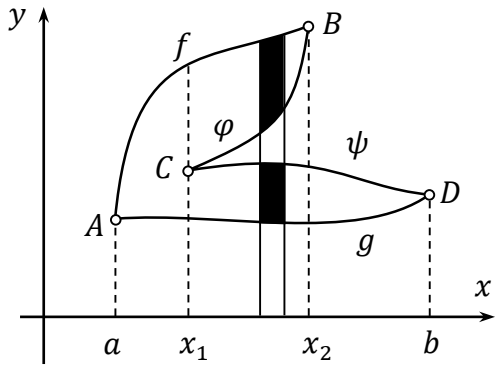



Рисунок 2.11 – До знаходження центру мас неопуклої фігури

неопуклий криволінійний чотирикутник $ABCD$ (рис. 2.11). Нехай його утворено графіками функцій $f(x)$ (крива $AB$), $\varphi(x)$ (крива $BC$), $\psi(x)$ (крива $CD$), $g(x)$ (крива $DA$). Виходячи з міркувань рівноваги моментів сил тяжіння, отримуємо:

$$x_C = \frac{\int\limits_a^{x_1} x(f-g)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} x\left[(f-\varphi)+(\psi-g)\right]\,dx + \int\limits_{x_2}^{b} x(\psi-g)g\,dx}{\int\limits_a^{x_1} (f-g)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[(f-\varphi)+(\psi-g)\right]\,dx + \int\limits_{x_2}^{b} (\psi-g)g\,dx}.$$

Тут межі інтегрування і різниці функцій підібрано в такий спосіб, щоб в процесі інтегрування було перебрано усі ті і лише ті точки, які належать криволінійному чотирикутнику $ABCD$. В наведеному прикладі масса в інтервалі $dx$, обраному всередині інтервалу $[x_1; x_2]$, виявляється «розривною». Тому при $x_1 < x < x_2$ окремо враховується висота $(f-\varphi)$ верхньої «смужки», і окремо – висота $(\psi - g)$ нижньої (обидві на рис. 2.11 зафарбовано). Більш детально розстановку меж інтегрування в таких випадках зручно розглянути в темі «подвійний інтеграл».

### 2.3.2 Приклади геометричних застосувань

Тепер мова піде про обчислення довжин, площ і об'ємів деяких геометричних фігур. Обмежимось випадками, коли ці фігури

обмежені або графіками функцій, або поверхнями, утвореними при їх обертанні. Ми розглянемо випадки, коли ці функції задано або явно, або параметрично, або в полярних координатах.

#### 2.3.2.1 Три способи задати функцію

1°. Кажуть, що функцію задано **явно** за допомогою формули $y = f(x)$.

2°. Кажуть, що функцію задано **параметрично** за допомогою системи рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases} \tag{2.11}$$

Тут $t$, принаймні, в принципі, можна виразити через $x$ з першого рівняння і підставити до другого. Ми отримаємо складну функцію $y = y(t(x))$. Отже, параметр $t$ відіграє роль «посередника».

◁ *Приклад 2.21.* Тіло кинуто з початковою швидкістю $v_0$ під кутом $\alpha$ до горизонту. Встановити траєкторію руху.

Сила тяжіння зумовлює рівноприскорений рух тіла з прискоренням $g$ вільного падіння. Проекції рівняння рівноприскореного руху на осі $Ox$, $Oy$ мають вигляд

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t; \\ y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Це і є параметричне задання траєкторії $y(x)$. З першого рівняння системи маємо $t(x) = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Підставляємо це до другого рівняння системи:

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2}{2} = x \operatorname{tg}\alpha - x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Отримали рівняння параболи з вітками донизу.

Інтерес становить не парабола цілком, а лише її дуга, яка відповідає фізичному руху тіла. Очевидно, достатньо покласти $y \geqslant 0$. З нерівності $v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \geqslant 0$ отримуємо $t \in [0; T]$, де $T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ – час польоту. ▷

Часто рівняння $x = x(t)$ не вдається розв'язати однозначно відносно $t$. Проте, мета залишається попередньою: в системі (2.11) потрібно позбутись параметру $t$.

◁ *Приклад 2.22.* Нехай

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\omega t; \\ y(t) = R\sin\omega t. \end{cases}$$

Підносячи обидва рівняння до квадрату і додаючи їх, отримуємо: $x^2 + y^2 = R^2$. Це рівняння кола радіусу $R$ з центром в початку координат.

Фізично задану систему можна розуміти як сукупність рівнянь руху, які задають два гармонічних коливання, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках. Тому цей приклад встановлює тісний зв'язок коливального і обертального рухів.

При $t = 0$ отримуємо $x = R$, $y = 0$. Отже, рух починається в точці з координатами $M_0(R; 0)$. При збільшенні $t$ від нуля $x$ починає зменшуватись, а $y$ – збільшуватись. Отже, обертання відбувається з початкової точки в напрямку проти годинникової стрілки. До речі, легко показати, що це обертання відбувається зі сталою швидкістю:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t} = R\omega = \text{const}.$$

Обираючи різні інтервали зміни параметру $t$, можна описати різні частини кола. Очевидно, період обертання становить $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Для отримання повного кола достатньо дочекатись моменту $t = T$. За рахунок періодичності синусу і косинусу ми повернемось в початкову точку $M_0$.

При $t = \frac{T}{4}$ отримаємо $x = 0$, $y = R$, тобто за час $t \in \left[0; \frac{T}{4}\right]$ відбулось проходження першої координатної чверті.

Якщо потрібно задати верхнє півколо $y \geqslant 0$, достатньо покласти $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$. Аналогічно, якщо потрібно задати праве півколо $x \geqslant 0$, достатньо покласти $t \in \left[-\frac{T}{4}; \frac{T}{4}\right]$.

**При параметричному заданні функції можна керувати не лише геометрією контуру, а ще й напрямком його обходу.** Наприклад, подамо те саме коло параметрично у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = R\sin\omega t; \\ y(t) = R\cos\omega t. \end{cases}$$

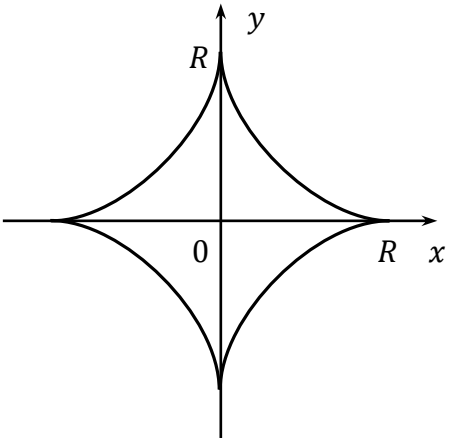



Рисунок 2.12 – Астроїда

Тепер, обмежуючись інтервалом $t \in \left[0; \frac{T}{4}\right]$, отримаємо дугу в першій координатній чверті, але з обходом в напрямку за годинниковою стрілкою. Справді, рух почнеться з точки $M_1(0; R)$, яка виникає при $t = 0$, в напрямку точки $M_0(R; 0)$, яка виникає при $t = \frac{T}{4}$. $\triangleright$

Якщо точка гармонічно коливається в двох взаємно перпендикулярних напрямках одночасно, то траєкторію її руху називають *фігурою Ліссажу*. В попередньому прикладі амплітуди $R$ і часто́ти $\omega$ коливань були однаковими, а різниця фаз становила $\frac{\pi}{2}$. Траєкторія виявлялась колом. Можлива безліч інших варіантів.

$\triangleleft$ *Приклад 2.23.* Нехай

$$\begin{cases} x(t) = \cos t; \\ y(t) = \cos 2t. \end{cases}$$

Маємо: $y = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 2x^2 - 1$. Отже, вихідна система параметрично задає параболу вітками догори. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 2.24.* Система

$$\begin{cases} x(t) = R\cos^3 t; \\ y(t) = R\sin^3 t \end{cases}$$

задає криву, відому як *астроїда* (зіркоподібна). Її зображено на рис. 2.12. Для переходу від параметричної форми до неявної виключимо з рівнянь системи параметр $t$. Для цього кожне

рівняння піднесемо до степеня $\frac{2}{3}$ і додамо їх: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$. Тепер перехід до явної форми $y(x)$ труднощів не становить. $\triangleright$

Нехай деяку криву задано явно рівнянням $y = y(x)$. Перехід від явної форми до параметричної називають **параметризацією кривої.** Важливим окремим випадком є параметризація прямолінійного відрізку.

Нехай на координатній площині задано дві точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$. Знайдемо чотири числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, за допомогою яких пряма $A_1A_2$ задається параметрично у вигляді[11]

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta; \\ y(t) = \gamma t + \delta, \end{cases}$$

причому при зміні параметру $t$ в інтервалі $t \in [t_1; t_2]$ відбувається спрямований перехід від точки $A_1$ («початок») до точки $A_2$ («кінець»). Тому при підстановці в параметризацію значення $t = t_1$ ми повинні отримати координати точки $A_1$, а при підстановці значення $t = t_2$ – координати точки $A_2$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha t_1 + \beta; \\ y_1 = \gamma t_1 + \delta, \\ x_2 = \alpha t_2 + \beta; \\ y_2 = \gamma t_2 + \delta, \end{cases}$$

Віднімаючи з третього рівняння перше, маємо:

$$x_2 - x_1 = \alpha(t_2 - t_1), \qquad \alpha = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Тоді з першого рівняння $\beta = x_1 - \alpha t_1$ при вже відомому $\alpha$. Числа $\gamma$, $\delta$ знаходять в аналогічний спосіб з іншої пари рівнянь.

Зазвичай покладають $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, і знаходження чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ спрощується.

$\triangleleft$ *Приклад 2.25.* Дано точки $A(4; 3)$, $B(2; 5)$. Параметризувати відрізок $AB$, вважаючи точку $A$ його початком, а точку $B$ – кінцем.

Нехай шукана параметризація має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta; \\ y(t) = \gamma t + \delta. \end{cases}$$

[11] Цей вигляд і справді задає пряму: при виключенні з цих рівнянь параметра $t$ величина $y$ стає лінійною функцією величини $x$.

Нехай $t \in [0;1]$. Тоді шукані числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ повинні бути такими, щоб виконались умови:

$$x(0) = x_A, \qquad y(0) = y_A, \qquad x(1) = x_B, \qquad y(1) = y_B.$$

В розширеному вигляді маємо:

$$\begin{cases} 4 = \alpha \cdot 0 + \beta; \\ 3 = \gamma \cdot 0 + \delta; \\ 2 = \alpha \cdot 1 + \beta; \\ 5 = \gamma \cdot 1 + \delta. \end{cases}$$

Очевидний розв'язок: $\beta = 4$, $\alpha = -2$, $\delta = 3$, $\gamma = 2$. Тоді шукана параметризація має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = -2t + 4; \\ y(t) = 2t + 3. \end{cases}$$

Справді, спочатку при $t = 0$ ми отримуємо з останньої системи координати точки $A$. Потім, збільшуючи $t$, ми збільшуємо $y$ і зменшуємо $x$. Саме цим і забезпечене «пробігання» відрізку в напрямку від $A$ до $B$. Насамкінець, при $t = 1$ ми отримуємо координати точки $B$. $\triangleright$

Вкажемо також на один тривіальний спосіб переходу від явної форми до параметричної: якщо $y = f(x)$, то

$$\begin{cases} x(t) = t; \\ y(t) = f(t). \end{cases}$$

3°. Кажуть, що функцію задано **в полярних координатах,** якщо її рівняння вдалося призвести до вигляду $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho$, $\varphi$ – так звані *полярні координати*.

Визначити положення деякої точки $M$ на координатній площині можна за допомогою впорядкованої пари чисел – *декартових* координат $M(x; y)$. Але це положення можна визначити і за допомогою іншої впорядкованої пари чисел – *полярних* координат $M(\varphi, \rho)$. Перша з них є кутом $\varphi = \angle xOM$ (в радіанах), на який потрібно повернутись в додатному напрямку (проти годинникової стрілки), рахуючи від додатного напрямку осі $Ox$, а друга – відстанню $\rho = OM$, на яку потрібно переміститись від точки $O$ вздовж обраного напрямку (рис. 2.13). З відповідного

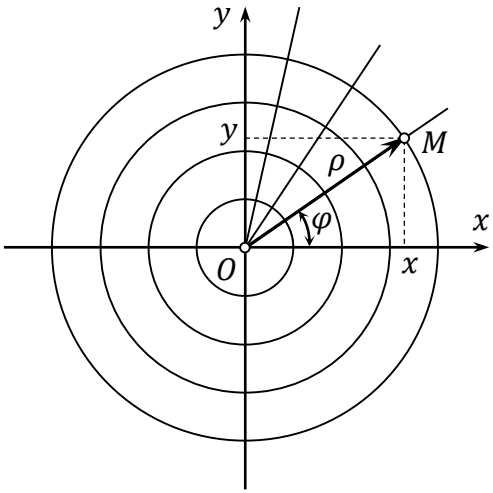



Рисунок 2.13 – Полярні координати

прямокутного трикутника маємо:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.12}$$

З геометричного змісту очевидно, що $\rho \geqslant 0$. На кут $\varphi$ обмежень немає. Але при даному $\rho$ кути, які відрізняються на цілу кількість повних обертів ($\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), вказуватимуть на одну й ту саму точку на площині. Тому достатньо обмежитись інтервалом $\varphi \in [0; 2\pi]$, або інтервалом $\varphi \in [-\pi; \pi]$.

Система (2.12) однозначно розв'язує задачу: «за відомими полярними координатами $(\varphi, \rho)$ знайти декартові координати $(x; y)$». Обернена задача («за відомими декартовими координатами $(x; y)$ знайти полярні координати $(\varphi, \rho)$») також може бути розв'язаною однозначно. Справді, підносячи рівняння системи до квадрату і додаючи їх, отримаємо $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При знаходженні $\varphi$ спочатку припустимо, що $x = 0$. Якщо $x = 0$ і $y > 0$, то точка лежить на осі $Oy$ в верхній півплощині. В цьому разі достатньо покласти $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Якщо $x = 0$ і $y < 0$, то точка лежить на осі $Oy$ в нижній півплощині. В цьому разі достатньо покласти $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ або $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Якщо $x = 0$ і $y = 0$,

то точка є початком координат. В цьому разі полярний кут $\varphi$ *залишається невизначеним* (оскільки в цьому разі $\rho = 0$, то немає сенсу питати: «в якому напрямку потрібно переміститись на нуль метрів?»). Втім, при $\rho = 0$ потреба в такій визначеності зникає. Тому далі в тексті розглянуто випадки, коли $x \neq 0$, і дріб $\frac{y}{x}$ існує.

Розділимо друге рівняння системи на перше: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, звідки $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, достатньо обрати або $k = 0$, або $k = 1$, оскільки усі інші розв'язки відрізнятимуться від цих на цілу кількість повних обертів.

З означення арктангенса випливає нерівність $\left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right| < \frac{\pi}{2}$. Кути з інтервалу $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ відповідають першій і четвертій координатним чвертям. Тому для $x > 0$ обираємо $k = 0$ і отримуємо:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

В другій і третій координатних чвертях, тобто при $x < 0$, слід обрати $k = 1$, і ми отримуємо:

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

В тому числі в другій чверті $\frac{y}{x} < 0$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < 0$. Тоді

$$\frac{\pi}{2} < \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < \pi,$$

тобто кут $\varphi$ є тупим, як і повинно бути в другій чверті. В третій чверті $\frac{y}{x} > 0$, $0 < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\pi < \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < \frac{3\pi}{2},$$

тобто кут $\varphi$ є більш ніж розгорнутим, як і повинно бути в третій чверті.

Остаточно, розв'язок оберненої задачі:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а також

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0; \\ -\frac{\pi}{2} \text{ або } \frac{3\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0; \\ \text{не визначено}, & x = 0,\ y = 0. \end{cases}$$

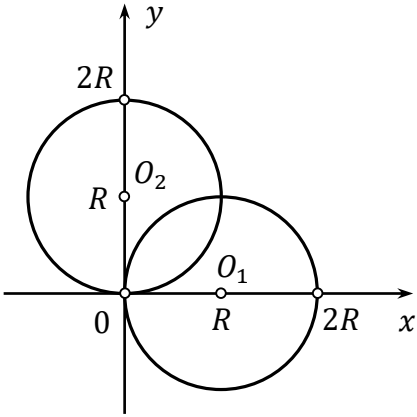



Рисунок 2.14 – До рівняння кола в полярних координатах

В декартовій системі координат можна провести родину ліній $x = \text{const}$ і родину ліній $y = \text{const}$. Ці родини утворюють координатну сітку. Декартову систему координат називають *прямолінійною ортогональною*, оскільки координатні лінії є прямими, і кожна лінія однієї родини перетинається з кожною лінією другої родини під прямим кутом.

Аналогічно, координатні лінії в полярній системі координат – це концентричні кола $\rho = \text{const}$ і в'язка променів $\varphi = \text{const}$ зі спільною вершиною в точці $O$. Ці системи ліній також утворюють координатну сітку (рис. 2.13). Полярну систему координат називають *криволінійною ортогональною*, оскільки деякі координатні лінії є кривими, але кожна пара ліній різних родин, як і раніше, перетинається під прямим кутом.

Розглянемо деякі приклади кривих, заданих в полярних координатах.

◁ *Приклад 2.26.* Рівняння кола радіуса $R$ з центром в початку координат має вигляд $x^2 + y^2 = R^2$. Підставляючи сюди рівняння системи (2.12), отримуємо $\rho^2 = R^2$, або $\rho = R$ (оскільки $\rho \geqslant 0$). Це і є рівняння кола радіуса $R$. Саме тому $\rho$ і називають **полярним радіусом.** ▷

◁ *Приклад 2.27.* Розглянемо коло радіуса $R$ з центром в точці $O_1(R;0)$ (рис. 2.14). Його рівняння є $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, або

$$x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Підставимо сюди рівняння системи (2.12):

$$\rho^2 = 2R\rho\cos\varphi, \qquad \rho(\varphi) = 2R\cos\varphi.$$

Це і є рівняння кола радіуса $R$ з центром в точці $O_1$.

В цьому прикладі ми вперше стикаємось зі специфікою поняття області визначення функції, заданої в полярних координатах. Проблема тепер не лише в тому, щоб виключити з цієї області значення $\varphi$, які тягнуть за собою труднощі обчислювального характеру (на кшталт ділення на нуль, або логарифмування нуля тощо), тобто унеможливлюють знаходження залежної величини $\rho(\varphi)$. На додаток до цього, з області визначення також треба виключити значення $\varphi$, які призводять до від'ємних значень $\rho$, оскільки точку $(\varphi, \rho)$ при $\rho < 0$ зобразити в полярних координатах неможливо (величина $\rho$ є відстанню і тому не може бути від'ємною). Отже, область визначення виникає при розв'язуванні нерівності $\rho(\varphi) \geqslant 0$. В нашому випадку маємо $\cos\varphi \geqslant 0$. Обмежуючись одним періодом, знаходимо: $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Це кути четвертої і першої чвертей, що узгоджується з рис. 2.14.

Аналогічно, розглянемо коло радіуса $R$ з центром в точці $O_2(0; R)$ (рис. 2.14). Його рівняння є $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, або

$$x^2 + y^2 = 2Ry.$$

Підставимо сюди рівняння системи (2.12):

$$\rho^2 = 2R\rho\sin\varphi, \qquad \rho(\varphi) = 2R\sin\varphi.$$

Отримали рівняння кола радіуса $R$ з центром в точці $O_2$.

Область визначення виникає з нерівності $\sin\varphi \geqslant 0$. Обмежуючись одним періодом, знаходимо: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Це відповідає першій і другій чвертям, що узгоджується з рис. 2.14. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 2.28.* Розглянемо *спіраль Архімеда*. Її рівняння в полярних координатах $\rho(\varphi) = A\varphi$. Якщо покласти $A > 0$, то область визначення $\varphi \in [0; +\infty)$. При збільшенні полярного кута відбувається пропорційне збільшення полярного радіусу. На рис. 2.15 ліворуч спіраль Архімеда побудовано при $A = 0{,}07$ в інтервалі $\varphi \in \left[0; \frac{39\pi}{8}\right]$. Крок координатної сітки за полярним радіусом становить $\Delta\rho = 0{,}5$, а за полярним кутом – $\Delta\varphi = \frac{\pi}{8}$.

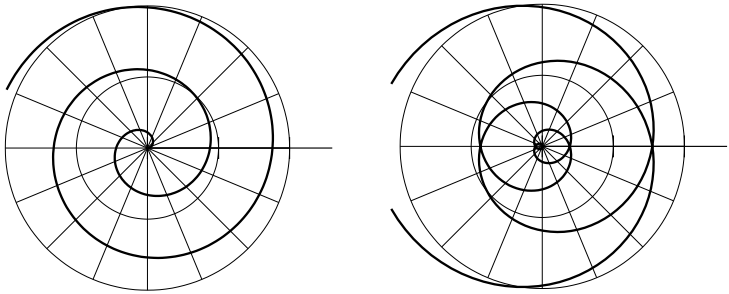


Рисунок 2.15 – Спіраль Архімеда

*Крок спіралі* визначається як відстань між сусідніми витками, виміряна в радіальному напрямку. В нашому випадку

$$h = \rho(\varphi_0 + 2\pi) - \rho(\varphi_0) = A(\varphi_0 + 2\pi) - A\varphi_0 =$$

$$= 2A\pi = 2 \cdot 0{,}07 \cdot \pi \approx 0{,}44$$

і не залежить від кута $\varphi_0$. Для інших спіралей крок може бути змінним (залежним від $\varphi$). Наприклад, для спіралі $\rho(\varphi) = Ae^{\alpha\varphi}$ він буде швидко зростати.

Якщо модифікувати рівняння спиралі Архімеда до вигляду $\rho(\varphi) = A\,|\varphi|$, $A > 0$, то область визначення не обмежується: $\varphi \in \mathbb{R}$. Виникає можливість «накручувати» спіраль і в зворотному напрямку. На рис. 2.15 праворуч в полярних координатах побудовано графік модифікованого рівняння спіралі Архімеда при $\varphi \in \left[-\frac{39\pi}{8}; \frac{39\pi}{8}\right]$. Звичайно, утворена крива є інфінітною (необмеженою в обидва боки) і симетричною відносно полярної осі. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 2.29.* Вже відому нам *астроїду* (див. рис. 2.12) також можна подати в полярних координатах. Надамо параметру $t$ сенс полярного кута $\varphi$. Піднесемо рівняння астроїди до квадрату:

$$\begin{cases} x^2 = R^2 \cos^6 \varphi; \\ y^2 = R^2 \sin^6 \varphi. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, отримуємо:

$$\rho^2 = R^2 \cos^6 \varphi + R^2 \sin^6 \varphi, \qquad \rho = R\sqrt{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi}. \triangleright$$

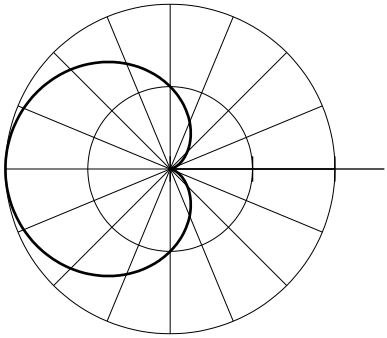


Рисунок 2.16 – Кардіоїда

◁ *Приклад 2.30.* Розглянемо *кардіоїду* (серцеподібну). Її рівняння в полярних координатах $\rho(\varphi) = 2a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$. Область визначення знову виникає з нерівності $\rho \geqslant 0$ і складає $\varphi \in \mathbb{R}$. Кардіоїду при $a = 0{,}5$ подано на рис. 2.16. Використано полярні кути $\varphi \in [0; 2\pi]$. Цього достатньо для побудови кривої з урахуванням періодичності косинусу.

Узагальненням кардіоїди є крива $\rho(\varphi) = \ell - a\cos\varphi$, відома[12] як *равлик Паскаля*. ▷

◁ *Приклад 2.31.* Розглянемо *лемніскату Бернуллі*. Її рівняння в полярних координатах $\rho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$. Лемніскату Бернуллі при $a = 1$ подано на рис. 2.17. Область визначення знову виникає з нерівності $\rho \geqslant 0$, але цього разу, обмежуючись періодом $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, маємо:

$$\cos 2\varphi \geqslant 0, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].$$

Отже, сектори $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ графіка не містять. ▷

Можна навести ще багато цікавих прикладів – багатопелюсткова троянда, локон Марії Аньєзі, листок Декарта та інші[13].

Нижче будуть розглянуті чотири питання: площі плоских фігур, довжина плоскої кривої, об'єм тіла обертання, площа поверхні тіла обертання. В межах кожного питання відповідно до цього пункту ми розглянемо три випадки: 1) випадок

[12] https://uk.wikipedia.org/wiki/Равлик_Паскаля

[13] Наприклад, https://books.ifmo.ru/file/pdf/2233.pdf

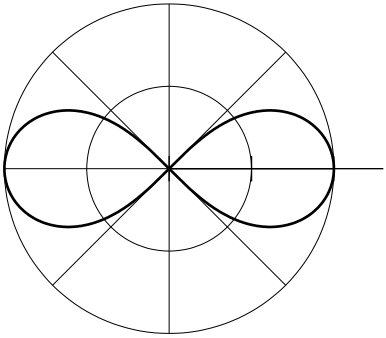


Рисунок 2.17 – Лемніската Бернуллі

функції, заданої явно формулою $y = y(x)$; 2) випадок функції, заданої параметрично системою (2.11); 3) випадок функції, заданої в полярних координатах формулою $\rho = \rho(\varphi)$.

#### 2.3.2.2 Площі плоских фігур

**Випадок функції, заданої явно.** Цей аспект вже детально розглянуто. Він вичерпується формулою (2.4). Зокрема, якщо покласти $f(x) \equiv 0$, то згідно з геометричним змістом визначеного інтегралу ми отримуємо площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $g(x)$.

**Випадок функції, заданої параметрично.** Нехай криволінійна трапеція обмежена графіком функції $y = g(x)$, заданої параметрично системою (2.11), графіком функції $f(x) \equiv 0$ (тобто віссю $Ox$) і вертикалями $x = a$, $x = b$, $a < b$. Нехай числа $t_1$, $t_2$ є такими, що $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Переходячи в (2.4) до нової змінної $t$, отримуємо:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt. \tag{2.13}$$

Може виявитись, що $x(t)$ є спадною функцією, і $x'(t) < 0$. Але за рахунок спадання при $a < b$ отримаємо $t_1 > t_2$. Тоді

формулі (2.13) зручно надати вигляду

$$S = -\int\limits_{t_2}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)\, dt.$$

Оскільки $x'(t) < 0$, то ця формула при $y > 0$, $t \in [t_2; t_1]$, призведе до додатної відповіді, $S > 0$.

◁ *Приклад 2.32.* Обчислимо площу частини кола $x^2+y^2 = R^2$, розташованої в першій чверті. Параметризація кола:

$$\begin{cases} x = R\sin t; \\ y = R\cos t. \end{cases}$$

Переконатись в цьому легко, підносячи ці рівняння до квадрату і додаючи їх. Для виділення потрібної частини кола покладемо $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. При $t \in [t_1; t_2]$ як раз і забезпечимо «пробігання» потрібної дуги від точки $(0; R)$ до точки $(R; 0)$, тобто в бік збільшення $x$. Ці межі інтегрування можна знайти і формально як розв'язки рівнянь $x(t_1) = a = 0$, $x(t_2) = b = R$, тобто як розв'язки рівнянь $R\sin t_1 = 0$, $R\sin t_2 = R$. Тоді маємо:

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t \cdot (R\sin t)'\, dt = R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4},$$

як і повинно бути для чверті кола.

Як ми вже зазначали, при параметричному заданні функції можна керувати не лише геометрією контуру, а ще й напрямком його обходу. Оберемо для того самого кола іншу параметризацію:

$$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Тепер функція $x(t)$ спадає на інтервалі $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Якщо ми збережемо зміну параметру $t$ від нуля до $\frac{\pi}{2}$, то це призведе до спадання $x$ від $R$ до нуля, тобто до обходу контуру в протилежному напрямку – від точки $(R; 0)$ до точки $(0; R)$. Звичайно,

відповідь стає від'ємною:

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \cdot (R\cos t)'\,dt = -R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = -\frac{\pi R^2}{4}.$$

Для отримання правильної відповіді треба зберегти напрямок обходу контуру. Для цього потрібно змінювати $t$, *зменшуючи* його від $\frac{\pi}{2}$ до нуля. Справді, з рівняння $x(t_1) = a$, $R\cos t_1 = 0$, знаходимо $t_1 = \frac{\pi}{2}$. Відповідно, з рівняння $x(t_2) = b$, $R\cos t_2 = R$, знаходимо $t_2 = 0$. Тоді за (2.13) отримуємо правильну відповідь

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 R\sin t \cdot (R\cos t)'\,dt = +\frac{\pi R^2}{4}. \triangleright$$

Як випливає з розглянутого прикладу, формальне застосування (2.13) є припустимим, але потрібно слідкувати за наступним. Величина $t$ повинна змінюватись в таких межах, щоб з рівняння $x = x(t)$ при даному напрямку зміни $t$ відбувалось зростання $x$. Зокрема, якщо $t_1 < t_2$, то параметризація має бути заданою зростаючою функцією $x = x(t)$, тобто повинна виконатись нерівність $x'(t) > 0$.

$\triangleleft$ *Приклад 2.33.* Знайдемо площу частини еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, розташованої в першій чверті. Параметризація еліпса:

$$\begin{cases} x = a\sin t; \\ y = b\cos t. \end{cases}$$

Переконатись в цьому легко. Достатньо перше рівняння розділити на $a$, друге – на $b$, потім піднести їх до квадрату і додати одне до одного. Для виділення потрібної частини еліпса покладемо $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. При $t \in [t_1; t_2]$ як раз і забезпечимо «пробігання» потрібної дуги від точки $(0; b)$ до точки $(a; 0)$, тобто в напрямку збільшення $x$. Так і мало бути, оскільки $x = a\sin t$ є зростаючою функцією при $t \in [t_1; t_2]$. Тоді маємо:

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t \cdot (a\sin t)'\,dt = ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Зокрема, покладаючи $a = b = R$, отримаємо результат попереднього прикладу для кола. $\triangleright$

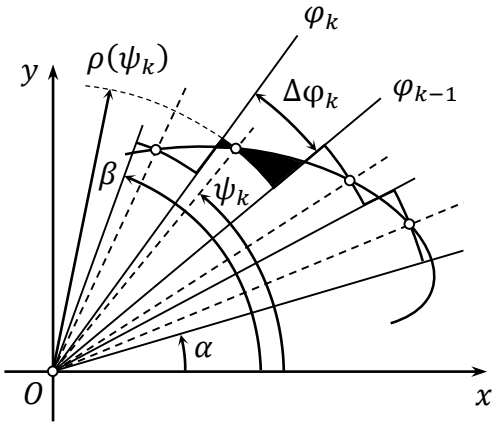



Рисунок 2.18 – Площа в полярних координатах

**Випадок функції, заданої в полярних координатах.** Обчислимо площу (некругового) сектора, обмеженого графіком функції $\rho(\varphi)$, заданої на відрізку $\varphi \in [\alpha;\beta]$ (рис. 2.18). Розіб'ємо цей відрізок променями $\varphi = \varphi_k$ на диференціально малі сектори кутової величини $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ і оберемо всередині кожного сектору точку $\psi_k$. Значення функції в цій точці дорівнює $\rho_k = \rho(\psi_k)$. Підмінимо графік $\rho(\varphi)$ ступінчастою фігурою, складеною з (тепер вже) кругових секторів з радіусами $\rho_k$ і кутами $\Delta\varphi_k$. Саме зараз ми враховуємо зміну полярного радіуса $\rho$ при зміні полярного кута $\varphi$, оскільки кожному куту $\Delta\varphi_k$ відповідає індивідуальне значення $\rho_k$. Натомість, кут $\Delta\varphi_k$ є настільки малим, що зміною радіуса $\rho_k$ в його межах можна знехтувати. Площа кола радіуса $\rho_k$ дорівнює $\pi\rho_k^2$. Тоді на один радіан припадає площа $\frac{\pi\rho_k^2}{2\pi} = \frac{\rho_k^2}{2}$, а на кут $\Delta\varphi_k$ – площа, в $\Delta\varphi_k$ разів більша. Отже, площа одного сектора дорівнює $\frac{1}{2}\rho_k^2\,\Delta\varphi_k$. Тоді площа ступінчастої фігури

$$\frac{1}{2}\sum_{(k)} \left[\rho(\psi_k)\right]^2\,\Delta\varphi_k.$$

Очевидно, вона є інтегральною сумою.

При підміні некругового сектора ступінчастою фігурою, складеною з кругових секторів, ми припускаємось похибки. Внесок

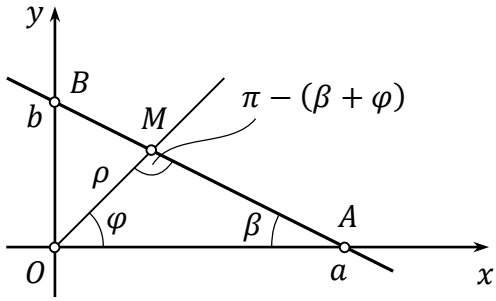



Рисунок 2.19 – Пряма в полярних координатах

чергового сектора $\Delta\varphi_k$ в цю похибку дорівнює різниці площ двох криволінійних трикутників (на рис. 2.18 вони зафарбовані). Цей внесок аналогічний до похибки $\left|\Delta S_k^+ - \Delta S_k^-\right|$, яка виникала при обговоренні рис. 2.1. Тому при граничному переході похибка зникає.

Здійснимо граничний перехід при $\max \Delta\varphi_k \to 0$ в отриманій нами інтегральній сумі. Інтеграл, який при цьому виникає, і є площею некругового сектору. Остаточно маємо:

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{2.14}$$

◁ *Приклад 2.34.* Нехай пряма $AB$ проходить через точки з координатами $A(a;0)$, $B(0;b)$ (рис. 2.19). Побудуємо її рівняння в полярних координатах і обчислимо площу трикутника $AOB$.

Нехай $M(\varphi,\rho)$ – поточна точка прямої. Нехай $\angle OAM = \beta$. Тоді кут при вершині $M$ становить $\pi - (\varphi + \beta)$. За теоремою синусів:

$$\frac{OM}{\sin\beta} = \frac{OA}{\sin(\pi - (\varphi+\beta))}, \qquad \frac{\rho}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\varphi+\beta)},$$

$$\rho(\varphi) = \frac{a\sin\beta}{\sin(\varphi+\beta)}.$$

Очевидно, для «пробігання» відрізку $AB$ кут $\varphi$ потрібно зміни-

ти в інтервалі $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\, d\varphi = \frac{a^2 \sin^2\beta}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi+\beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \sin^2\beta}{2}\left(-\operatorname{ctg}(\varphi+\beta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \sin^2\beta}{2}\operatorname{ctg}(\varphi+\beta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{a^2 \sin^2\beta}{2}\left(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right) = \frac{a^2 \sin^2\beta}{2}\left(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\beta\right) =$$

$$= \frac{a^2 \sin^2\beta}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \frac{a^2 \sin^2\beta}{2}\cdot\frac{\cos^2\beta+\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta} =$$

$$= \frac{a^2 \sin\beta}{2}\cdot\frac{1}{\cos\beta} = \frac{a^2\operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{1}{2}a\cdot a\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}OA\cdot OB,$$

як і повинно бути. Звичайно, це не найкращий спосіб обчислення площі трикутника; в цьому прикладі ми мали за мету продемонструвати роботу формули (2.14). ▷

◁ *Приклад 2.35.* Обчислимо площу, обмежену лемніскатою Бернуллі. З міркувань симетрії достатньо обчислити лише площу частини, яка знаходиться у першій координатній чверті. З використанням рівняння $\rho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ маємо:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{a^2}{4},$$

звідки $S = a^2$. ▷

#### 2.3.2.3 Довжина плоскої кривої

**Випадок функції, заданої явно.** Обчислимо довжину кривої, яка є графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Розіб'ємо цей відрізок точками $x_k$ на елементи довжини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ і обчислимо значення функції в місцях сполучення цих елементів: $y_k = f(x_k)$. Послідовно з'єднуючи точки $(x_k; y_k)$, отримуємо ламану, вписану в криву (рис. 2.20). Довжина $k$-ї ланки ламаної

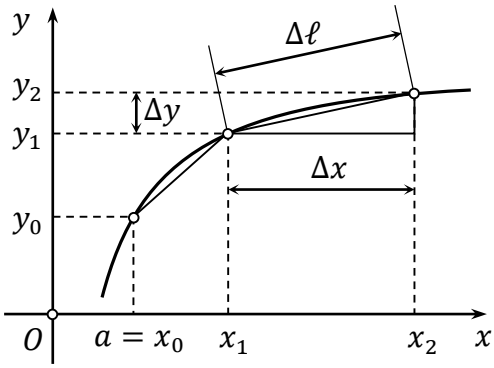



Рисунок 2.20 – До обчислення довжини кривої

з відповідного прямокутного трикутника $\Delta\ell_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$. Довжина ламаної стає інтегральною сумою:

$$\sum_{(k)} \Delta\ell_k = \sum_{(k)} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_{(k)} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k.$$

Припустимо, функція $y = f(x)$ є диференційовною. Отже, в кожній точці існує єдина дотична. Кожна ланка ламаної є січною, але при прямуванні $\max \Delta x_k \to 0$ вона стає дотичною, а відношення $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$ перетворюється на похідну, обчислену в даній точці. За довжину кривої приймемо за означенням границю довжини вписаної ламаної. Тому, здійснюючи граничний перехід при $\max \Delta x_k \to 0$, остаточно отримуємо:

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{2.15}$$

$$L = \int d\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

◁ *Приклад 2.36.* Обчислити довжину кривої $y = \operatorname{ch} x$ при

$x \in [0;1]$. Маємо: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} x$,

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \int\limits_0^1 \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= \operatorname{sh} x\big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh} 0 = \operatorname{sh} 1 \approx 1{,}2. \triangleright$$

**Випадок функції, заданої параметрично.** Нехай функцію задано параметрично системою (2.11). Нехай виділено інтервал $t \in [t_1; t_2]$ і виконано рівності $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Якщо $x(t)$ є неперервною і монотонною, то при зміні параметру $t$ у вказаному інтервалі матимемо $x \in [a; b]$.

Знайдемо диференціали координат з рівнянь системи (2.11):

$$dx = \frac{dx}{dt}\, dt, \qquad\qquad dy = \frac{dy}{dt}\, dt.$$

Підставимо це до (2.15):

$$d\ell = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$

$$L = \int d\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{2.16}$$

Фактично ми вводимо заміну змінної, отже, в тому числі переходимо і до нових меж інтегрування.

Як ми вже зазначали, при параметричному заданні функції можна керувати не лише геометрією контуру, а ще й напрямком його обходу. Але в попередньому підпункті, обчислюючи площу, ми визначали межі $t_1$, $t_2$ інтегрування в такий спосіб, щоб при даній параметризації забезпечити рух точки в бік збільшення $x$ (навіть якщо для цього доводилося зменшувати параметр $t$). При порушенні цього правила (тобто при зменшенні $x$) відрізок $x \in [a; b]$ «пробігався» в напрямку проти осі $Ox$, і площа виявлялась від'ємною. Тепер же ми обчислюємо довжину кривої. Підінтегральна функція в (2.16), на відміну від (2.13), завжди є додатною незалежно від характеру монотонності функції $x(t)$. Тому для отримання додатної довжини кривої

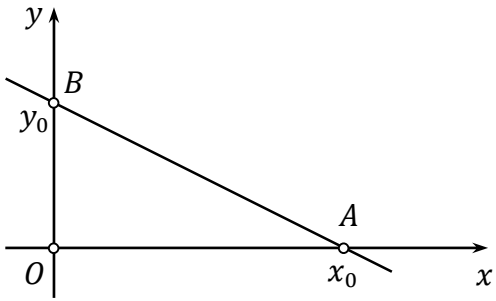



Рисунок 2.21 – До врахування напряму обходу

потрібно її початком вважати точку $x = a$, якій відповідає менше значення $t_1$, а кінцем – точку $x = b$, якій відповідає більше значення $t_2$, навіть якщо при цьому виявиться, що $a > b$. Втім, фактично інтегрувати буде потрібно вздовж інтервалу $[t_1; t_2]$, а не вздовж інтервалу $[a; b]$. Отже, немає потреби з'ясовувати, що більше: $a$ чи $b$. Натомість, необхідно прослідкувати, щоб виконувалась нерівність $t_2 > t_1$.

Можна запропонувати і інший підхід до розв'язання проблеми від'ємної довжини кривої. Домовимось формально знаходити кінці $t_1$, $t_2$ інтервалу інтегрування з рівнянь $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, вважаючи, що $a < b$. Якщо $t_2 > t_1$, то проблема застосування (2.16) взагалі не виникає. Якщо ж виявиться, що $t_2 < t_1$, то це свідчить, що функція $x(t)$ є спадною, $x'(t) < 0$. Але $dx = x'(t)\,dt$, тому $dx$ і $dt$ мають протилежні знаки. При цьому $x$ *зростає* від $a$ до $b$, тоді $dx > 0$, і $dt < 0$. Тоді при виведенні формули (2.16) треба було вважати, що $\sqrt{dt^2} = |dt| = -dt$. Наявність саме цього мінусу і вирішує проблему.

◁ *Приклад 2.37.* Розглянемо пряму $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$. Вона перетинає координатні осі в точках $A(x_0; 0)$, $B(0; y_0)$ (рис. 2.21). З $\triangle AOB$ за теоремою Піфагора маємо: $AB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Отримаємо тепер цей результат за допомогою інтегралу.

Приймемо параметризацію у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 t; \\ y(t) = y_0(1 - t). \end{cases}$$

У справедливості цієї параметризації легко переконатись, розділиши перше рівняння на $x_0$, друге на $y_0$ і потім додавши їх. Покладемо $t \in [0; 1]$. При $t_1 = 0$ маємо: $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$. Отже, $B(0; y_0)$ – початок контуру. Аналогічно, якщо покласти $t_2 = 1$, отримуємо: $x(1) = x_0$, $y(1) = 0$. Отже, $A(x_0; 0)$ – кінець контуру.

Враховуючи, що $\frac{dx}{dt} = x_0$, $\frac{dy}{dt} = -y_0$, отримуємо:

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{x_0^2 + (-y_0)^2}\, dt = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot t \Big|_0^1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Приймемо тепер параметризацію у вигляді:

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0(1 - \tau); \\ y(\tau) = y_0\tau. \end{cases}$$

У справедливості цієї параметризації теж легко переконатись в аналогічний спосіб. Знову покладемо $\tau \in [0; 1]$. При $\tau_1 = 0$ маємо: $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$. Отже, тепер навпаки $A(x_0; 0)$ – початок контуру. При $\tau_2 = 1$, отримуємо: $x(1) = 0$, $y(1) = y_0$, тому $B(0; y_0)$ – кінець контуру. Враховуючи, що $\frac{dx}{d\tau} = -x_0$, $\frac{dy}{d\tau} = y_0$, отримуємо:

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{(-x_0)^2 + y_0^2}\, d\tau = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \tau \Big|_0^1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Як бачимо, в обидвох випадках можна отримати правильну відповідь, хоча ці випадки відрізняються напрямом обходу. ▷

◁ *Приклад 2.38.* Обчислимо довжину астроїди (див. приклад 2.24 на с. 94). В рівнянні $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ можна без наслідків змінювати знаки змінних. Тому астроїда є симетричною як відносно осі $Ox$, так і відносно осі $Oy$. Отже, достатньо розповсюдити обчислення лише на частину кривої в першій чверті. Маємо:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos^3 t; \\ y(t) = R\sin^3 t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3R\cos^2 t \sin t; \\ \frac{dy}{dt} = 3R\sin^2 t \cos t. \end{cases}$$

Тоді

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9R^2\cos^4 t \sin^2 t + 9R^2 \sin^4 t \cos^2 t =$$

$$= 9R^2 \sin^2 t \cos^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) =$$

$$= \frac{9R^2}{4} \left(2\sin t \cos t\right)^2 = \frac{9R^2}{4} \sin^2 2t.$$

Тоді підінтегральна функція в (2.16) дорівнює $\frac{3R}{2}\,|\sin 2t|$.

Обмежимось частиною кривої всередині першої координатної чверті: $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. При цьому за формулою $x = R\cos^3 t$ абсциса $x$ буде *зменшуватись* від $a = x(t_1) = R\cos^3 0 = R$ до $b = x(t_2) = R\cos^3 \frac{\pi}{2} = 0$, і $a > b$. Отже, для отримання додатної довжини потрібно початком кривої вважати точку $(R;0)$, а кінцем – точку$(0;R)$. Саме при цьому виборі параметр $t$ буде збільшуватись. Маємо: $0 \leqslant 2t \leqslant \pi$, $\sin 2t \geqslant 0$, $|\sin 2t| = \sin 2t$. Тоді:

$$\frac{L}{4} = \int d\ell = \frac{3R}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = \frac{3R}{4}\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3R}{4}(1-(-1)) = \frac{3R}{2},$$

звідки $L = 4\cdot\frac{3R}{2} = 6R$. $\triangleright$

**Випадок функції, заданої в полярних координатах.** Знайдемо диференціали координат з рівнянь системи (2.12):

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,d\varphi = \cos\varphi\,d\rho - \rho\sin\varphi\,d\varphi; \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,d\varphi = \sin\varphi\,d\rho + \rho\cos\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Додаючи квадрати цих виразів, отримуємо:

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 = \left(\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2\right) d\varphi^2.$$

Отже, елемент довжини в полярних координатах дорівнює

$$d\ell = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi. \tag{2.17}$$

Якщо криву розташовано всередині сектору $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то ми отримуємо:

$$L = \int d\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

$\triangleleft$ *Приклад 2.39.* Обчислимо довжину кардіоїди, заданої рівнянням $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$. Маємо: $\frac{d\rho}{d\varphi} = 2a\sin\varphi$,

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = 4a^2(1-\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi =$$

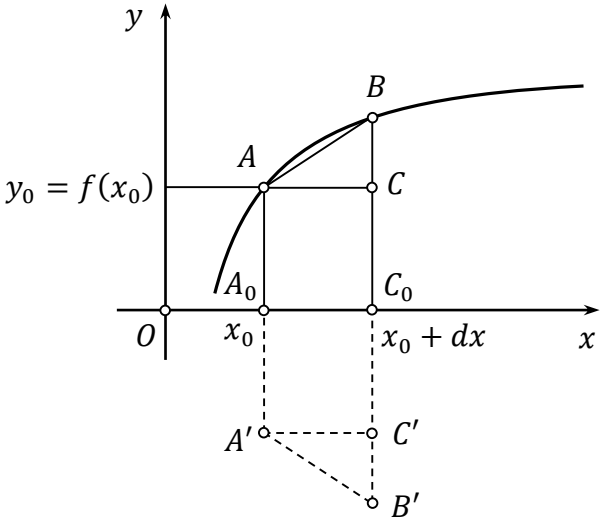



Рисунок 2.22 – Утворення елементу об'єму при обертанні

$$= 4a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4a^2(2 - 2\cos\varphi) =$$

$$= 16a^2 \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{2} = 16a^2 \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$L = \int d\ell = \int_0^{2\pi} 4a \sin\frac{\varphi}{2} = 8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{2\pi}^{0} 8a(1 - (-1)) = 16a. \triangleright$$

#### 2.3.2.4 Об'єм тіла обертання

**Випадок функції, заданої явно.** Роглянемо обертання графіка функції $y = f(x) \geqslant 0$, $x \in [a; b]$, навколо осі $Ox$ (рис. 2.22). Через точки $x_0$ і $x_0 + dx$ проведемо дві площини перендикулярно осі $Ox$. Вони вирізають криволінійну трапецію $AA_0C_0B$. Через половину оберту вона займе положення $A'A_0C_0B'$. При цьому утворюється дископодібна фігура обертання. Висота диску становить $h = A_0C_0 = dx$. Ліва основа диску – коло радіуса $R = A_0A = y_0 = f(x_0)$. Права основа – коло іншого радіуса $C_0B = f(x_0 + dx)$. Знехтуємо зміною радіусу протягом відрізку

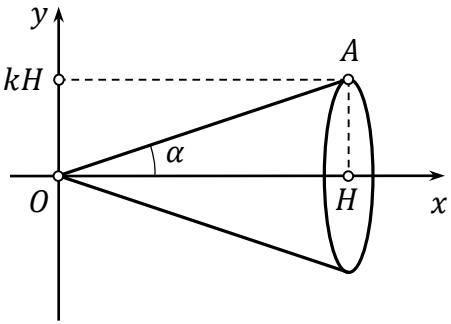



Рисунок 2.23 – До обчислення об'єму конусу

$dx$. Геометрично це означає, що дугу $AB$ графіка ми підміняємо горизонталлю $AC$. При обертанні прямокутника $AA_0C_0C$ виникає циліндр, вписаний[14] всередину диску. Об'єм цього циліндру дорівнює $\Delta V = \pi R^2 h$ і є оцінкою об'єму диска. Похибка цієї оцінки зумовлена відкиданням кільця, яке утворюється при обертанні криволінійного трикутника $ABC$. Об'єм кільця пропорційний площі цього трикутника, і тому є величиною більш високого порядку малості: разом з прямуванням $AC \to 0$ маємо також $BC \to 0$, і відкидання кільця є обгрунтованим.

Підсумовуючи тепер об'єми усіх таких циліндрів, отримуємо інтегральну суму:

$$\sum_{(k)} \Delta V_k = \sum_{(k)} \pi R_k^2 h_k = \pi \sum_{(k)} f^2(x_k) \Delta x_k.$$

Здійснюючи граничний перехід при $\max \Delta x_k \to 0$, остаточно отримуємо:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx. \tag{2.18}$$

◁ *Приклад 2.40.* Нехай $y = kx$, $x \in [0; H]$. Графік – відрізок $OA$, $A(H; kH)$ (рис. 2.23). При його обертанні навколо осі $Ox$ утворюється конус висотою $H$ і радіусом $R = H \operatorname{tg} \alpha = kH$,

[14] Якби функція $f(x)$ була спадною, ми б отримали $f(x_0 + dx) < f(x_0)$, тобто $C_0B < A_0A$. В цьому разі, навпаки, диск був би вписаний всередину циліндру.

причому відрізок $OA$ відіграє роль твірної. Маємо:

$$V = \pi \int_0^H (kx)^2\,dx = \left.\frac{\pi k^2}{3}x^3\right|_0^H = \frac{\pi k^2 H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi(kH)^2 \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

що збігається з відомою відповіддю. ▷

◁ *Приклад 2.41.* Обчислимо об'єм кулі радіуса $R$. Вона утворюється при обертанні кола $x^2+y^2 = R^2$ навколо осі $Ox$. Маємо:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2\,dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)\,dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)\,dx =$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

що збігається з відомою відповіддю. В цьому прикладі ми змінили нижню межу інтегрування, врахувавши парність підінтегральної функції. ▷

Нехай для функції $y = f(x)$ на інтервалі $x \in [a;b]$ вдалось побудувати обернену функцію $x = \varphi(y)$, яка є однозначною. Нехай $f(a) = c$, $f(b) = d$. Якщо функція $f(x)$ зростає, то $d > c$, і функцію $x = \varphi(y)$ задано на інтервалі $y \in [c;d]$. Якщо функція $f(x)$ спадає, то $d < c$, і функцію $x = \varphi(y)$ задано на інтервалі $y \in [d;c]$. Нехай тепер відбувається обертання графіка функції $x = \varphi(y)$ навколо осі $Oy$. Ми отримаємо той самий результат, тільки роль радіуса вписаного циліндру буде відігравати $x$, а роль його висоти – $dy$. Маємо:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy, \quad d > c, \qquad \text{або} \qquad V = \pi \int_d^c x^2(y)\,dy, \quad c > d.$$

**Випадок функції, заданої параметрично.** Розглянемо графік функції, заданої параметрично системою (2.11). Нехай $x \in [a;b]$, $a < b$, і числа $t_1$, $t_2$ є такими, що $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Переходячи в (2.18) до нової змінної $t$, отримуємо:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t)\,dt. \tag{2.19}$$

Нагадаємо, при параметричному заданні функції можна керувати не лише геометрією контуру, а ще й напрямком його обходу. При $a < b$ цей напрямок повинен бути таким, щоб $x$ в (2.18) збільшувався. Тоді в разі спадання функції $x(t)$ виявляється, що $t_1 > t_2$.

◁ *Приклад 2.42.* Нехай еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ обертається навколо осі $Ox$. При цьому утворюється *еліпсоїд обертання*. Обчислимо його об'єм.

Покладемо

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

В справедливості цієї параметризації легко переконатись, якщо розділити перше рівняння на $a$, друге на $b$, а потім піднести ці рівняння до другого степеня і додати їх. Для «пробігання» відрізку $x \in [0; a]$ в додатному напрямку (вздовж осі $Ox$) покладемо $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Для половини еліпсоїду отримуємо:

$$\frac{1}{2}V = \pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (b\sin t)^2 \, (a\cos t)' \, dt = \pi ab^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t \cdot (-\sin t) \, dt =$$

$$= \pi ab^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 - \cos^2 t\right) \cdot (-\sin t) \, dt = \left\| \begin{array}{l} \cos t = z \\ -\sin t \, dt = dz \\ z_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ z_2 = \cos 0 = 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \pi ab^2 \int\limits_{0}^{1} (1 - z^2) \, dz = \pi ab^2 \left( z - \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

Тоді $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$. Зокрема, покладаючи $a = b = R$, отримаємо об'єм кулі радіусу $R$. ▷

Якщо обертання відбувається навколо осі $Oy$, то $x$ і $y$ міняються ролями; ми отримуємо:

$$V = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x^2(t) \cdot y'(t) \, dt,$$

причому зауваження про напрямок обходу кривої зберігається.

**Випадок функції, заданої в полярних координатах.** Розглянемо коло радіуса $\rho$ з центром в початку координат. Спочатку розв'яжемо допоміжну задачу знаходження об'єму кульового сектору, який виникає при обертанні криволінійного трикутника $A_0OB$ з кутом $\angle A_0OB = \varphi$ навколо осі $Ox$ (рис. 2.24). Функцію, графік якої обертається, задамо кусково:

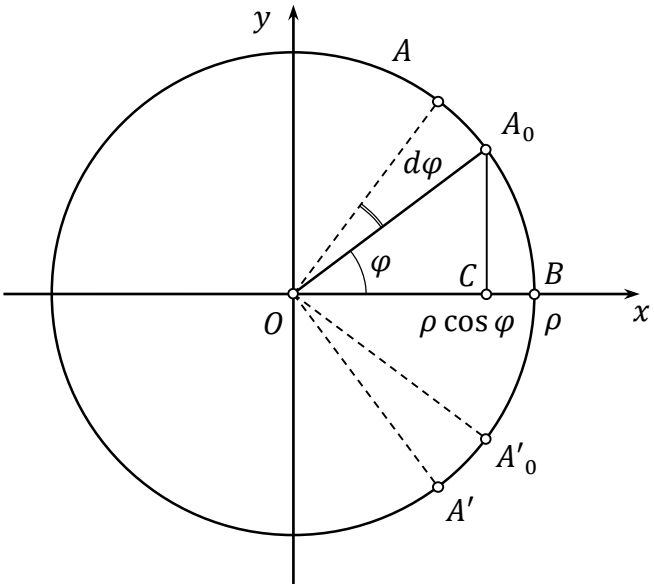



Рисунок 2.24 – До обчислення об'єму кульового сектору

$$y(x) = \begin{bmatrix} kx, & 0 \leqslant x \leqslant \rho\cos\varphi; \\ \sqrt{\rho^2 - x^2}, & \rho\cos\varphi \leqslant x \leqslant \rho. \end{bmatrix}$$

Тут $k = \operatorname{tg}\varphi$ – тангенс кута нахилу прямої $OA_0$. Вираз $\rho\cos\varphi$ є абсцисою точки $A_0$, в якій відбувається перехід між частинами графіка. Цей вираз можна отримати з трикутника $A_0OC$ ($OA_0 = \rho$ – гіпотенуза).

Кульовий сектор виникає при обертанні сектора $A_0OA_0'$. За

формулою (2.18) з використанням адитивності інтегралу маємо:

$$V(\varphi) = \pi \int\limits_0^{\rho} y^2\,dx = \pi \int\limits_0^{\rho\cos\varphi} k^2x^2\,dx + \pi \int\limits_{\rho\cos\varphi}^{\rho} (\rho^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x = \rho t \\ dx = \rho\,dt \\ t \in [0;\cos\varphi] \\ t \in [\cos\varphi;1] \end{array} \right\| = \pi\rho^3 \left[ k^2 \int\limits_0^{\cos\varphi} t^2\,dt + \int\limits_{\cos\varphi}^{1} (1-t^2)\,dt \right] =$$

$$= \pi\rho^3 \left[ k^2\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\cos\varphi} + \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{\cos\varphi}^{1} \right] =$$

$$= \pi\rho^3 \left[ \frac{1}{3}k^2\cos^3\varphi + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) \right] =$$

$$= \frac{\pi\rho^3}{3} \left[ \operatorname{tg}^2\varphi\cos^3\varphi + 2 - 3\cos\varphi + \cos^3\varphi \right].$$

Нехай кут $\varphi$ збільшується на $d\varphi$. Тепер обертатиметься сектор $AOA'$ більшого об'єму $V(\varphi + d\varphi)$. Обчислимо об'єм тіла, утвореного при обертанні «додаткового» сектора $A_0OA$:

$$V(\varphi + d\varphi) - V(\varphi) = \Delta V \approx dV = V'(\varphi)\,d\varphi.$$

Тут наближена рівність перетворюється на точну при прямуванні $d\varphi \to 0$. Маємо:

$$V'(\varphi) = \frac{\pi\rho^3}{3} \left[ 2\operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \cos^3\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi \cdot 3\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + 3\sin\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) \right] =$$

$$= \frac{\pi\rho^3}{3} \left[ 2\sin\varphi - 3\sin^3\varphi + 3\sin\varphi(1 - \cos^2\varphi) \right] = \frac{2\pi}{3}\rho^3\sin\varphi.$$

Отже,

$$dV = \frac{2\pi}{3}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi. \tag{2.20}$$

Нехай тепер криву задано в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ в інтервалі $\varphi \in [\alpha;\beta]$. Як і у випадку рис. 2.18, розіб'ємо цей інтервал променями $\varphi = \varphi_k$ на диференціально

малі сектори (зміною полярного радіусу всередині кожного з них, взятого окремо, можна нехтувати). При обертанні навколо осі $Ox$ кожен з них утворить тіло обертання об'ємом (2.20). Сума усіх таких внесків і буде інтегральною сумою, а її границя при $\max \Delta\varphi_k \to 0$ – шуканим інтегралом:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi. \tag{2.21}$$

◁ *Приклад 2.43.* Обчислимо об'єм кулі, яка виникає при обертанні кола $\rho(\varphi) = 2R\cos\varphi$ навколо осі $Ox$. Маємо:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2R\cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{16\pi R^3}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} t = \cos\varphi \\ dt = -\sin\varphi \, d\varphi \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{array} \right\| = \frac{16\pi R^3}{3} \int\limits_{1}^{0} t^3 \, (-dt) = \frac{16\pi R^3}{3} \int\limits_{0}^{1} t^3 \, dt =$$

$$= \frac{16\pi R^3}{3} \cdot \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{16\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}\pi R^3. \triangleright$$

Нехай тепер крива $AB$, задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, обертається навколо осі $Oy$. Через половину оберту крива $AB$ займе положення $A'B'$ (рис. 2.25). Очевидно, сектори $AOB$ і $A'OB'$ рівні. Тому формулу (2.21) можна застосувати до тіла обертання, яке виникає при обертанні сектора $A'OB'$:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\beta'}^{\alpha'} r^3(\varphi') \sin\varphi' \, d\varphi'.$$

Тут полярний кут $\varphi'$ тепер відміряється від осі $Oy$ і змінюється в межах $\varphi' \in [\beta';\alpha']$, причому $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$, $\beta + \beta' = \frac{\pi}{2}$. Функція $r(\varphi')$ задає зміну полярного радіусу при русі вздовж кривої $B'A'$. Принципово, що $\rho$ і $r$ є *різними* функціями. Наприклад, з рис. 2.25 можна бачити, що перша з них може бути спадною:

$$\varphi > \alpha \Rightarrow \rho(\varphi) = OM < \rho(\alpha) = OA.$$

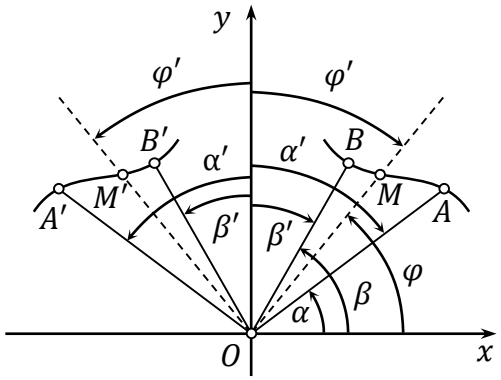



Рисунок 2.25 – Випадок обертання сектора відносно осі $Oy$

Тоді друга з міркувань симетрії повинна бути зростаючою:

$$\varphi' > \beta' \Rightarrow r(\varphi') = OM' > r(\beta') = OB'.$$

Однак, для *довільної* поточної точки $M$ маємо $OM' = OM$, $r(\varphi') = \rho(\varphi)$, тобто різні функції в різних (але відповідних) точках набули однакових значень.

Для поточного кута $\varphi$ і відповідного йому кута $\varphi'$ маємо $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$. Віднімаючи звідси аналогічне співвідношення для пари кутів $\alpha$, $\alpha'$, знаходимо: $(\varphi - \alpha) + (\varphi' - \alpha') = 0$. Отже, якщо $\varphi' = \alpha'$, то $\varphi = \alpha$. Аналогічно встановлюємо: якщо $\varphi' = \beta'$, то $\varphi = \beta$. Тепер усе підготовлено для введення в останній інтеграл заміни $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $d\varphi' = -d\varphi$. Отримуємо:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\beta}^{\alpha} \rho^3(\varphi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) (-d\varphi) = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi.$$

#### 2.3.2.5 Площа поверхні тіла обертання

Ідея обчислення, як і в попередньому пункті, полягає в розбитті тіла на диференціально тонкі диски системою площин, перпендикулярних осі обертання.

**Випадок функції, заданої явно.** Нехай крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a;b]$, обертається навколо осі $Ox$. Проведемо дві площини перпендикулярно цій осі в точках з координатами $x_0$ і $x_0 + dx$. При цьому виділяється крива $AB$ (рис. 2.26). При її обертанні утворюється диск $AA'B'B$. Раніше

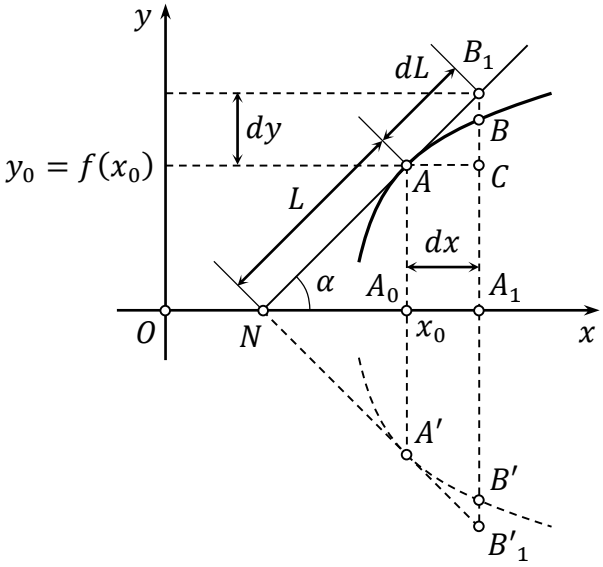



Рисунок 2.26 – До обчислення площі поверхні тіла обертання

при обчисленні об'єму такого диску ми відкидали криволінійний трикутник $ABC$ і підміняли дугу $AB$ горизонталлю $AC$. Фактично ми підміняли диск циліндром радіусом $AA_0$ і висотою $AC$. Об'єми диска і циліндра є малими першого порядку малості ($\sim dx$), а похибка підміни – другого порядку малості ($AC \to 0$ і $BC \to 0$).

Тепер же мова йде про порівняння площ бічних поверхонь циліндра і диска. Ці площі прямо пропорційні твірним циліндра $AC$ та диска $AB$ відповідно. Але $AC = dx$,

$$AB \sim AB_1 = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{dx}{\cos\alpha}.$$

Тут $AB_1$ – дотична, проведена до графіка функції в точці $x_0$.

Кут нахилу дорівнює $\alpha$, де $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Співвідношення еквівалентності $AB \sim AB_1$ ми пояснили при обговоренні довжини кривої. Маємо:

$$AB - AC \sim \frac{AC}{\cos\alpha} - AC = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) dx.$$

Тому різниця площ бічних поверхонь циліндра і диска, яка пропорційна різниці твірних, також є малою першого порядку малості. Отже, при обчисленні бічної поверхні тіла обертання підміна диска циліндром веде до похибки, яка не усувається при $dx \to 0$. Тому твірну $AB$ потрібно підмінити не горизонталлю $AC$, а відрізком $AB_1$. Відповідно, диск підміняємо зрізаним конусом, який виникає при обертанні трапеції $AA_0A_1B_1$. Очевидно, тепер оцінка похибки $AB - AB_1 = o(AB)$.

Нехай дотична $AB_1$ перетинає вісь $Ox$ в точці $N$. При обертанні трикутника $AA_0N$ утворюється конус, твірна якого дорівнює $L(x_0) = NA$, а радіус основи $R = AA_0 = y_0$. Площа бічної поверхні конусу становить $S = \pi RL = \pi L^2 \sin\alpha$, $\alpha = \text{const}$. Надамо абсцисі точки $A_0$ приросту $dx$. Тоді площа бічної поверхні зрізаного конусу дорівнює приросту площі бічної поверхні незрізаного конусу і становить:

$$dS = 2\pi L \sin\alpha \, dL = 2\pi R \, dL. \tag{2.22}$$

Геометричний зміст цього результату дуже простий. Розгортка зрізаного конусу є фрагментом кільця з внутрішнім радіусом $L$ і шириною $dL$. Оскільки $dL \ll L$, то цей фрагмент можна «розпрямити» в плоский[15] прямокутник розмірами $2\pi R \times dL$.

Тоді, враховуючи, що $R = y_0$, і використовуючи (2.15), маємо типовий внесок розглядуваного диску в шукану площу:

$$dS = 2\pi y_0 \sqrt{1 + \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\right)^2} \, dx.$$

Підсумовуючи усі такі доданки і здійснюючи граничний пере-

[15]Якщо $L$ і $dL$ мають порівняні розміри, то внутрішній і зовнішній радіуси кільця суттєво відрізняються. Тому спроба «розпрямити» викривлені сторони призведе до того, що фігура перестане бути плоскою.

хід при $\max \Delta x \to 0$, остаточно отримуємо:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx. \tag{2.23}$$

◁ *Приклад 2.44.* Обчислимо поверхню сфери радіуса $R$. Задамося рівнянням кола $x^2 + y^2 = R^2$. Рівняння півкола при $y \geqslant 0$ має вигляд $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, звідки $y'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$. При обертанні півкола утворюється потрібна сфера, половина площі поверхні якої

$$\frac{1}{2}S = 2\pi \int\limits_0^R y\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\, dx = 2\pi \int\limits_0^R \sqrt{y^2 + x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R R\, dx = 2\pi Rx|_0^R = 2\pi R^2,$$

звідки $S = 4\pi R^2$. ▷

Нехай тепер крива $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $a \geqslant 0$, обертається навколо осі $Oy$. Позначимо значення функції на кінцях інтервалу через $c = f(a)$, $d = f(b)$. Якщо $f(x)$ є зростаючою функцією, то $d > c$. В цьому разі аналогічні міркування призводять до результату

$$S = 2\pi \int\limits_c^d x(y)\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\, dx,$$

де $x(y)$ є функцією, оберненою до $f(x)$. Якщо функція $f(x)$ є спадною, то достатньо межі інтегрування $c$, $d$ поміняти ролями.

**Випадок функції, заданої параметрично.** При використанні замін (2.11) отримані результати набувають вигляду:

$$S = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt \qquad (Ox),$$

$$S = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt \qquad (Oy).$$

Тут числа $t_1$, $t_2$ відповідають межам $a$, $b$ ($c$, $d$ відповідно). Якщо при обраній параметризації напрямок обходу кривої виявиться «несприятливим» (ми дізнаємось про це за від'ємністю отримуваного результату), то числа $t_1$, $t_2$ достатньо поміняти місцями.

**Випадок функції, заданої в полярних координатах.** Використаємо тепер заміни (2.12). Їх зручно вносити до результату, отриманого в диференціальній формі (2.22). Враховуючи (2.17), одержуємо:

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \qquad (Ox),$$

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho \cos\varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \qquad (Oy),$$

◁ *Приклад 2.45.* Обчислимо площу поверхні тіла, яке виникає при обертанні кардіоїди $\rho(\varphi) = 2a(1 - \cos\varphi)$ навколо полярної осі. Маємо: $\frac{d\rho}{d\varphi} = 2a\sin\varphi$, $\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} = 4a\sin\frac{\varphi}{2}$ (див. приклад на с. 113). З міркувань симетрії обмежуємось верхньою половиною кардіоїди, тобто інтервалом $\varphi \in [0;\pi]$. Відповідний інтеграл легко обчислити з використанням формул п. 1.3.3.1, 6°. Остаточна відповідь набуває вигляду $S = \frac{32}{5}\pi a^2$. ▷

#### 2.3.2.6 Узагальнюючі результати

На завершення цього пункту наведемо узагальнення викладених відомостей в таблиці 2.1. Позначено: 1) площа плоскої фігури; 2) довжина плоскої кривої; 3) об'єм тіла обертання при обертанні навколо осі $Ox$; 4) об'єм тіла обертання при обертанні навколо осі $Oy$; 5) площа поверхні тіла обертання при обертанні навколо осі $Ox$; 6) площа поверхні тіла обертання при обертанні навколо осі $Oy$.

Таблиця 2.1 – Вирази для площ, довжин і об'ємів

| | Задання функції | | |
|---|---|---|---|
| № | Явно | Параметрично | В полярних координатах |
| 1 | $\int\limits_a^b y\,dx$ | $\int\limits_{t_1}^{t_2} yx'_t\,dt$ | $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi$ |
| 2 | $\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$ | $\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$ | $\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$ |
| 3 | $\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ | $\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y^2x'_t\,dt$ | $\frac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,d\varphi$ |
| 4 | $\pi\int\limits_a^b x^2\,dy$ | $\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} x^2y'_t\,dt$ | $\frac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta \rho^3\cos\varphi\,d\varphi$ |
| 5 | $2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$ | $2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$ | $2\pi\int\limits_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\cdot R\,d\varphi$, $R=\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}$ |
| 6 | $2\pi\int\limits_c^d x\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy$ | $2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} x\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$ | $2\pi\int\limits_\alpha^\beta \rho\cos\varphi\cdot R\,d\varphi$, $R=\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}$ |

## 2.4 Питання для перевірки

1. Що таке криволінійна трапеція?
2. Як будують інтегральну суму для функції $y = f(x)$ на інтервалі $x \in [a, b]$? В чому полягає геометричний зміст інтегральної суми?
3. За рахунок чого виникає похибка при підміні площі криволінійної трапеції площею відповідної ступінчастої фігури?
4. Означення визначеного інтеграла. Верхня і нижня межі інтегрування.
5. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
6. Формула Ньютона-Лейбніца.
7. Властивості визначеного інтеграла.
8. Лінійність визначеного інтеграла і два її аспекти.
9. Геометричний зміст адитивності визначеного інтегралу.
10. Що специфічного виникає при інтегруванні частинами визначеного інтегралу порівняно з невизначеним?
11. Як провадять заміну змінної у визначеному інтегралі?
12. Інтегрування парної і непарної функцій в симетричних межах.
13. Схема застосування визначеного інтегралу. Чому кажуть, що визначений інтеграл є інструментом, здатним враховувати зміну параметрів процесу в ході цього процесу?
14. Інтегральне середнє функції однієї змінної на заданому інтервалі.
15. Знаходження моменту інерції плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу.
16. Що таке поверхнева густина? За яких умов вона є сталою величиною? Чим відрізняються означення поверхневої густини для однорідних і неоднорідних пластин?

17. Як обчислити координати центру мас плоскої фігури за допомогою визначеного інтегралу?

18. Як виглядають форули, які задають функцію явно? параметрично? в полярних координатах?

19. Як параметрично задати коло $x^2 + y^2 = R^2$, якщо його обходять проти годинникової стрілки? за годинниковою стрілкою?

20. Як параметризувати відрізок $AB$ в напрямку обходу від $A$ до $B$? від $B$ до $A$?

21. Що таке полярні координати?

22. Як знайти полярний радіус за відомими декартовими координатами?

23. Як знайти полярний кут за відомими декартовими координатами?

24. Як знаходять область визначення функції, заданої в полярних координатах? Чим принципово це відрізняється від випадку декартових координат?

25. Як знайти площу фігури, заданої явно? параметрично? в полярних координатах?

26. Як знайти довжину кривої, заданої явно? параметрично? в полярних координатах?

27. Як знайти об'єм тіла обертання при заданні явно? параметрично? в полярних координатах?

28. Як знайти площу поверхні тіла обертання при заданні явно? параметрично? в полярних координатах?

# 3 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

## 3.1 Невласні інтеграли першого роду

### 3.1.1 Означення і приклади

При застосуванні визначеного інтегралу іноді виявляється, що одна з меж інтегрування (або обидві одночасно) стає нескінченно великою.

◁ *Приклад 3.1.* Нехай човну масою $m$ надали початкову швидкість $v_0$, і він почав уповільнено рухатись під дією сили опору, яка пропорційна швидкості руху, $F = -kv(t)$. Такий рух не є рівноприскореним. Проекція другого закону Ньютона на напрямок руху має вигляд $ma = F$, $m\frac{dv}{dt} = -kv$. Легко переконатись, що швидкість руху згасає за законом $v(t) = v_0 e^{-\frac{kt}{m}}$.

Спробуємо знайти шлях човна до зупинки. Момент $t$ зупинки мав би бути коренем рівняння $v = 0$. Формально з рівняння $v_0 e^{-\frac{kt}{m}} = 0$ отримуємо: $t = +\infty$, тобто процес гальмування є нескінченно довгим.

Обчислимо неповний шлях, який човен пройде за час $T$:

$$s(T) = \int v(t)\,dt = \int_0^T v_0 e^{-\frac{kt}{m}}\,dt = -v_0\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\Big|_0^T = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{kT}{m}}\right).$$

Тоді повний шлях має сенс розуміти як границю при $T \to +\infty$:

$$S = \lim_{T\to+\infty} s(T) = \frac{mv_0}{k}\lim_{T\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{kT}{m}}\right) = \frac{mv_0}{k}. \triangleright$$

Узагальнення цих міркувань веде до наступного означення.

♦ **Означення 3.1.** Інтеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ називають **невласним інтегралом першого роду** і розуміють як границю

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{x_0}^{A} f(x)\,dx.$$

Якщо ця границя існує і є скінченною, то інтеграл називають **збіжним**, а цю границю – його значенням. В іншому разі інтеграл називають **розбіжним**; в цьому разі про його значення не йдеться.

◁ *Приклад 3.2.* Нехай $f(x) = 3x^2$. Інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A 3x^2\,dx = \lim_{A\to+\infty} x^3\big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} A^3 = +\infty.$$

Інтеграл є розбіжним. ▷

◁ *Приклад 3.3.* Нехай $f(x) = \cos x$. Інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \cos x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \sin A.$$

Ця границя не існує ні як скінченна, ані як нескінченна, і інтеграл є розбіжним. ▷

Здавалося б, для збіжності інтегралу достатньо, щоб підінтегральна функція, на відміну від розглянутих прикладів, прямувала до нуля, і тоді площа відповідної криволінійної трапеції існуватиме і буде скінченною. Це хибне твердження спростовується наступним контрприкладом.

◁ *Приклад 3.4.* Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$. Інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \ln A = +\infty.$$

Інтеграл є розбіжним. ▷

Справа в тому, що прямування функції до нуля є необхідною, але не достатньою умовою збіжності. Потрібно, щоб функція не просто прямувала до нуля, а робила це досить швидко. Обмежимось якісними міркуваннями. Нехай $\langle y\rangle$ є інтегральним середнім функції на проміжку $x \in [x_0; A]$. Тоді площа криволінійної трапеції дорівнює $\langle y\rangle \cdot (A - x_0)$. При прямуванні $A \to +\infty$ отримуємо невизначеність типу $[0 \cdot \infty]$. Очевидно, інтеграл буде збіжним, якщо ця невизначеність при розкритті перетвориться на константу. Саме для цього і потрібно, щоб

величина $\langle y \rangle$ не тільки прямувала до нуля, а ще й робила це достатньо швидко. В наступному прикладі маємо швидкість прямування підінтегральної функції до нуля, достатню для збіжності.

$\lhd$ *Приклад 3.5.* Нехай $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}$. $\rhd$

### 3.1.2 Деякі елементарні теореми

Сформулюємо без доведення деякі елементарні теореми про невласні інтеграли.

1°. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається і $b > a$, то інтеграл $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ також збігається, причому

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ця теорема означає, що відкидання скінченної частини інтервалу інтегрування не впливає на поведінку інтегралу в сенсі його збіжності.

2°. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, то

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$

Цю теорему можна вважати **необхідною умовою збіжності.** Їй легко надати форму **достатньої ознаки розбіжності:** якщо

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx \neq 0,$$

то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається.

3°. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається і $C = \text{const}$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} Cf(x)\,dx$ також збігається, причому

$$\int\limits_a^{+\infty} Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

4°. Якщо інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються, то інтеграл $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx$ також збігається, причому

$$\int\limits_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Зауважимо, тут збіжність лівої частини ще не тягне за собою існування кожного інтегралу правої частини, взятого окремо. Наприклад, якщо $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^x$, то ліва частина тотожно дорівнює нулю, а в правій частині обидва інтеграли є розбіжними.

Додамо також, що дві останні теореми визначають лінійність невласного інтегралу першого роду.

### 3.1.3 Ознаки порівняння

Досі дослідження на збіжність відбувалось за схемою: знайти первісну – скористатись формулою Ньютона-Лейбніца – здійснити граничний перехід. А саме, якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то збіжність інтегралу $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає з існування і скінченності границі $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$. Однак, існують випадки, коли первісну не вдається подати у вигляді комбінації скінченної кількості елементарних функцій. В цьому разі користуються *ознаками порівняння*. Ці ознаки не надають можливості знайти значення інтегралу в разі його збіжності, але вони принаймні дозволяють вирішити питання про збіжність. В разі позитивного рішення інтеграл знаходять чисельними методами. При цьому грунтуються на очевидному співвідношенні: якщо інтеграл збіжний і $A$ є достатньо великим числом, то

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0}^{A} f(x)\,dx.$$

### 3.1.3.1 Перша ознака порівняння

В цьому і наступному підпункті розглянемо випадок, коли підінтегральна функція набуває невід'ємних значень, а потім – загальний випадок.

Розглянемо два невласних інтеграли:

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (J_1), \qquad\qquad \int\limits_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx \qquad (J_2).$$

Нехай для усіх $x \in [x_0; +\infty)$ виконано нерівність $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тоді 1) якщо інтеграл $(J_1)$ розбігається, то інтеграл $(J_2)$ розбігається тим паче; 2) якщо інтеграл $(J_2)$ збігається, то інтеграл $(J_1)$ збігається тим паче.

Доведемо це. Нехай $F(A)$, $G(A)$ – відповідні первісні, де $A$ – верхня межа інтегрування перед здійсненням граничного переходу. Оскільки підінтегральні функції невід'ємні, то при збільшенні $A$ відбувається подальше накопичення площі під графіками, тобто первісні є монотонно зростаючими функціями. Тому питання про існування і скінченність границь $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$, $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A)$ еквівалентне питанню про обмеженість цих первісних (якщо вони обмежені, то границі скінченні). З умови ознаки очевидно, що $0 \leqslant F(A) \leqslant G(A)$. Отже, з обмеженості $G$ випливає обмеженість $F$, а з необмеженості $F$ випливає необмеженість $G$, що і доводить нашу ознаку.

Щоб застосувати цю ознаку, потрібно для функції $f(x)$ підібрати *еталон*, про збіжність якого відомо заздалегідь. Таким еталоном може бути степенева функція.

Доведемо наступне: якщо $x_0 > 0$, то інтеграл

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$$

є збіжним при $n > 1$ і розбіжним при $n \leqslant 1$ (в тому числі, розбіжність цього інтегралу при $n = 1$ нами вже встановлено вище). Справді, за означенням збіжності маємо:

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{x_0}^{A} \frac{dx}{x^n} = \lim_{A\to+\infty} \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\bigg|_{x_0}^{A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{A^{n-1}} - \frac{1}{x_0^{n-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)x_0^{n-1}}, & n>1, \\ +\infty, & n<1. \end{cases}$$

◁ *Приклад 3.6.* Дослідимо на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx$. Покладемо $f(x) = \frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}}$. Очевидно, $f(x) \leqslant g(x)$. Приймемо еталон $\varphi(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Інтеграл від функції $\varphi$ збігається ($n = \frac{3}{2} > 1$). Тоді інтеграл від функції $g$ збігається за теоремою $3^\circ$ при $C = 2$. Тоді інтеграл від функції $f$ тим паче збігається за першою ознакою порівняння. ▷

◁ *Приклад 3.7.* Дослідимо на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x}\,dx$. Покладемо $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$. Приймемо еталон $g(x) = \frac{1}{x}$. Очевидно, $f(x) \geqslant g(x)$. Інтеграл від функції $g$ розбігається ($n = 1$). Тоді інтеграл від функції $f$ тим паче розбігається за першою ознакою порівняння. ▷

#### 3.1.3.2 Друга ознака порівняння

Ця ознака є граничною формою першої ознаки.

Нехай для усіх $x \in [x_0;+\infty)$ виконано нерівності $f(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$ і границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K = \text{const}$, $K \neq 0$. Тоді інтеграли $(J_1)$ і $(J_2)$ збігаються або розбігаються одночасно.

Доведемо це. 1) Доведемо, що зі збіжності інтегралу $(J_2)$ випливає збіжність інтегралу $(J_1)$. За означенням границі маємо:

$$\left|\frac{f}{g} - K\right| < \varepsilon, \qquad f < (K+\varepsilon)g.$$

Тоді збіжність інтегралу $(J_1)$ випливає зі збіжності інтегралу $(J_2)$ за першою ознакою порівняння.

2) Доведемо, що з розбіжності інтегралу $(J_2)$ випливає розбіжність інтегралу $(J_1)$. Припустимо, це не так, і інтеграл $(J_1)$ – збіжний. Маємо:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g}{f} = \frac{1}{K}, \qquad \left|\frac{g}{f} - \frac{1}{K}\right| < \varepsilon, \qquad g < f\left(\frac{1}{K}+\varepsilon\right).$$

Тоді зі збіжності інтегралу $(J_1)$ за першою ознакою порівняння випливала б також збіжність інтегралу $(J_1)$, що протирічить початковому припущенню.

◁ *Приклад 3.8.* Дослідимо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{5x^5-2x^2\sin\sqrt{x}}{x^8}\,dx$. Покладемо $f(x)=\frac{5x^5-2x^2\sin\sqrt{x}}{x^8}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}$. Маємо:

$$K=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5-2x^2\sin\sqrt{x}}{x^8}\cdot x^3=5\neq 0.$$

Інтеграл від функції $g$ збігається ($n=3>1$). Тоді інтеграл від функції $f$ також збігається за другою ознакою порівняння. ▷

### 3.1.4 Про абсолютну збіжність

Випадок, коли підінтегральна функція може набувати від'ємних значень, більш складний. Поряд з інтегралом

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{$J_1$}$$

розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{$J_3$}$$

Під знаком останнього інтегралу розташовано невід'ємну функцію, і він може бути досліджений на збіжність методами попереднього підпункту.

♦ **Означення 3.2.** Невласний інтеграл $(J_1)$ називають **збіжним абсолютно,** якщо інтеграл $(J_3)$ виявляється збіжним. Про підінтегральну функцію $f(x)$ в цьому разі кажуть, що вона є **інтегровною абсолютно**.

Підкреслимо, якщо інтеграл збігається абсолютно, то поки що ніякої гарантії його збіжності у нас немає. Інакше, якщо інтеграл $(J_1)$ збігається абсолютно, то це не означає, що він збігається; за означенням це лише означає, що збігається *інший* інтеграл $(J_3)$.

Насправді зі збіжності інтегралу $(J_3)$ збіжність інтегралу $(J_1)$ випливає, але це потрібно доводити.

■ **Теорема 3.1.** Якщо невласний інтеграл першого роду збігається абсолютно, то він збігається.

□ *Доведення.* Дано: інтеграл $(J_3)$ є збіжним. Потрібно довести: інтеграл $(J_1)$ також є збіжним.

Розіб'ємо інтервал $x \in [x_0; +\infty)$ на дві множини[1] $X^+$ і $X^-$, які не перетинаються. Нехай на цих множинах підінтегральна функція приймає значення різних знаків:

$$x \in X^+ \Rightarrow f(x) \geqslant 0, \qquad x \in X^- \Rightarrow f(x) < 0.$$

Нехай $X_1 = X^+ \setminus \{x > A\}$, тобто нехай $X_1$ містить усі значення $x$, при яких $f(x) \geqslant 0$, і які не перевищують $A$. Аналогічно, нехай $X_2 = X^- \setminus \{x > A\}$, тобто нехай $X_2$ містить усі значення $x$, при яких $f(x) < 0$, і які не перевищують $A$. За адитивністю визначеного інтегралу маємо:

$$\int\limits_{x_0}^{A} |f(x)|\, dx = \int\limits_{X_1} |f(x)|\, dx + \int\limits_{X_2} |f(x)|\, dx = \int\limits_{X_1} f(x)\, dx - \int\limits_{X_2} f(x)\, dx.$$

Тут модуль знято з урахуванням знаків підінтегральної функції на множинах $X_1$, $X_2$. Позначимо

$$I_1 = \int\limits_{X_1} f(x)\, dx, \qquad I_2 = -\int\limits_{X_2} f(x)\, dx.$$

Тут $I_1 > 0$, $I_2 > 0$ (у другому інтегралі множина $X_2$ інтегрування така, що $f(x) < 0$, і саме тому $I_2 > 0$). Тоді

$$\int\limits_{x_0}^{A} |f(x)|\, dx = I_1 + I_2.$$

При здійсненні граничного переходу при $A \to +\infty$ отримаємо $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{x_0}^{A} |f(x)|\, dx = I = \text{const}$, оскільки інтеграл $(J_3)$ збіжний. З іншого боку, інтеграл $\int_{x_0}^{A} |f(x)|\, dx$ зростає при збільшенні $A$ (відбувається подальше накопичення додатної площі), тому цей інтеграл не перевищує своєї границі $I$. Тоді

$$I_1 = \int\limits_{x_0}^{A} |f(x)|\, dx - I_2 \leqslant I - I_2 \leqslant I = \text{const},$$

[1] Обидві множини є або інтервалами, або сукупностями скінченної або необмеженої кількості інтервалів. Фактично інтерес становить лише останній випадок, оскільки в разі скінченної кількості інтервалів їх можна позбавитись, збільшуючи в певний спосіб число $x_0$, і на характер збіжності це не вплине.

оскільки $I_2 > 0$. Це доводить, що $I_1$ є обмеженою функцією параметру $A$. З іншого боку, $I_1$ є монотонно зростаючою функцією параметру $A$. Тому границя $I_1^* = \lim\limits_{A\to+\infty} I_1$ існує і є скінченною (при останньому граничному переході множина $X_1$ перетворюється на множину $X^+$). Аналогічно, границя $I_2^* = \lim\limits_{A\to+\infty} I_2$ існує і є скінченною. Тоді

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{x_0}^{A} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{X_1\cup X_2} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_{X_1} f(x)\,dx + \int\limits_{X_2} f(x)\,dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(I_1 - I_2) = I_1^* - I_2^* = \text{const},$$

що і треба було довести. □

В разі абсолютної збіжності інтегралу $(J_1)$ означення гарантує нам збіжність інтегралу $(J_3)$, а доведена теорема – на додачу до цього – збіжність ще й самого інтегралу $(J_1)$.

◁ *Приклад 3.9.* Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2}$.

Всупереч умові, дослідимо на збіжність *інший* інтеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\cos x|\,dx}{x^2}.$$

Покладемо $f(x) = \frac{|\cos x|}{x^2}$. Приймемо еталон $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Очевидно, $f(x) \leqslant g(x)$. Інтеграл від функції $g$ збігається ($n = 2 > 1$). Тоді інтеграл від функції $f$ збігається за першою ознакою порівняння. Тоді інтеграл в умові задачі збігається абсолютно. ▷

В розглянутій теоремі доведено: зі збіжності інтегралу $(J_3)$ випливає збіжність інтегралу $(J_1)$. Але іноді інтеграл $(J_1)$ може збігатись, навіть якщо інтеграл $(J_3)$ розбігається. Така збіжність інтегралу $(J_1)$ вже не є абсолютною[2]. Встановити її можна за допомогою інших[3] ознак. Наприклад, можна довести, що інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x}$ збігається, але не абсолютно, тобто попри цю збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|\,dx}{x}$ розбігається.

[2]Якби $(J_1)$ збігався абсолютно, то $(J_3)$ також би збігався.

[3]Наприклад, відомі ознаки Абеля і Діріхле збіжності невласних інтегралів. Але вони виходять за межі рівня нашого викладання.

### 3.1.5 Заключні зауваження

До невласних інтегралів першого роду відносять також інтеграли вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx, \qquad\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Перший з них може бути визначений як

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{x_0} f(x)\,dx,$$

або зведений до розглянутого вище інтегралу $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ заміною $\xi = -x$. Другий інтеграл можна звести до вже розглянутих інтегралів шляхом розбиття області інтегрування:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Отже, ніяких нових теорій ці різновиди невласного інтегралу першого роду не потребують.

## 3.2 Невласні інтеграли другого роду

Невласні інтеграли другого роду виникають, коли функція на скінченному інтервалі інтегрування приймає необмежені значення (і отже, є розривною). Розглянемо випадок, коли особливість підінтегральної функції локалізована в лівому кінці інтервалу $[a;b]$ інтегрування: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$. В цьому разі має сенс, видаляючи «небезпечну» точку $x = a$ з інтервалу інтегрування, прийняти наступне означення.

♦ **Означення 3.3.** Інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ називають **невласним інтегралом другого роду** і розуміють як границю

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо ця границя існує і є скінченною, то інтеграл називають **збіжним**, а цю границю – його значенням. В іншому разі інтеграл називають **розбіжним**; в цьому разі про його значення не йдеться.

Відповідно, якщо особливість локалізована на правому кінці інтервалу інтегрування, то має сенс, видаляючи «небезпечну» точку $x = b$ з інтервалу інтегрування, прийняти наступне означення.

♦ **Означення 3.4.** Інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ називають **невласним інтегралом другого роду** і розуміють як границю

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Якщо ця границя існує і є скінченною, то інтеграл називають **збіжним**, а цю границю – його значенням. В іншому разі інтеграл називають **розбіжним**; в цьому разі про його значення не йдеться.

Зауважимо, в обох наведених означеннях використано поняття однобічної границі, яка враховує поведінку підінтегральної функції саме всередині інтервалу інтегрування. В разі першого означення маємо правобічну границю, і нас не цікавить поведінка функції зовні інтервалу, тобто при $x < a$. В разі другого означення маємо лівобічну границю, і нас не цікавить поведінка функції зовні інтервалу, тобто при $x > b$.

Якщо особливість має місце на обох кінцях одночасно, то природно розбити інтервал інтегрування деякою внутрішньою точкою $x_0$ і скористатись обома наведеними означеннями для інтервалів $x \in [a; x_0]$, $x \in [x_0; b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0} \int\limits_{a+\varepsilon_1}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0} \int\limits_{x_0}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx.$$

Тут ми вважаємо, що в точці $x_0$ (а також у довільній внутрішній точці інтервалу інтегрування) особливості немає, тому положення точки $x_0$ можна обрати в довільний спосіб, аби лише вона була внутрішньою точкою інтервалу $x \in [a; b]$.

◁ *Приклад 3.10.* Розглянемо коло $(x - R)^2 + y^2 = R^2$. Обчи-

слимо довжину його чверті при $x \in [R; 2R]$, $y \geqslant 0$. Маємо:

$$y = \sqrt{R^2 - (x-R)^2}, \qquad y' = -\frac{x-R}{\sqrt{R^2-(x-R)^2}},$$

$$dL = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{(x-R)^2}{R^2-(x-R)^2}}\,dx = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-(x-R)^2}}.$$

Тоді

$$L = \int dL = \int\limits_R^{2R} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-(x-R)^2}}.$$

Цей інтеграл є невласним, оскільки спроба підставити до підінтегральної функції значення $x = 2R$ веде до нуля у знаменнику, тобто до необмеженого зростання. Втім, так і мало бути, оскільки дотична до кола в точці $x = 2R$ є вертикальною, а сама функція $y = \sqrt{R^2-(x-R)^2}$ в цій точці – недиференційовною. Тому визначимо шукану величину так:

$$L = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_R^{2R-\varepsilon} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} = \left\| \begin{array}{l} x - R = R\sin t \\ dx = R\cos t\,dt \\ t_1 = 0 \\ t_2(\varepsilon) = \arcsin\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{t_1}^{t_2(\varepsilon)} \frac{R\cdot R\cos t\,dt}{\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} R \int\limits_0^{t_2(\varepsilon)} dt = R \lim_{\varepsilon\to 0+0} t_2(\varepsilon) =$$

$$= R \lim_{\varepsilon\to 0+0} \arcsin\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) = R\arcsin\left(1 - \frac{0}{R}\right) = R\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R}{2}. \triangleright$$

Між невласними інтегралами першого і другого роду існує тісний зв'язок: інтеграл першого роду завжди можна перетворити на інтеграл другого роду, і навпаки. Наприклад, якщо $x_0 > 0$, то заміна $x = \frac{1}{t}$ перетворює інтеграл $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ на інтеграл[4] $\int_0^{\frac{1}{x_0}} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$. Навпаки, якщо невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x)\,dx$ містить лише одну особливу точку $b$, то заміна $x = b - \frac{1}{t}$ призводить його до вигляду $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\cdot\frac{dt}{t^2}$.

[4]Цей останній може бути невласним інтегралом другого роду або власним інтегралом.

Однак, існує один важливий окремий випадок, який зручно розглянути в термінах інтегралу саме другого роду.

Нехай особлива точка $x_0$ розташована всередині інтервалу $[a;b]$. Ідея обчислення полягає в усуненні з області інтегрування цієї точки разом з її околом $(x_0-\varepsilon_1; x_0+\varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0+0} \left( \int\limits_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \right). \qquad (3.1)$$

Тут величини $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ вважають незалежними. При цьому границя (3.1) повинна існувати, бути скінченною і кожного разу однаковою при довільних і незалежних швидкостях прямування величин $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ до нуля.

Виявляється, що в деяких випадках, вводячи спеціальну залежність між $\varepsilon_1$ і $\varepsilon_2$, вдається змусити границю (3.1) бути рівною довільному числу $M$.

$\lhd$ *Приклад 3.11.* Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$. За формулою (3.1) ми б мали:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0+0} \left( \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0+0} \left( \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon_2}^1 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0+0} (\ln|\varepsilon_1| - \ln|\varepsilon_2|) = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0+0} \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Якщо $\varepsilon_1$ прямує до нуля швидше за $\varepsilon_2$, тобто якщо $\varepsilon_1 = o(\varepsilon_2)$, то $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to 0$, і $\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to -\infty$. Навпаки, при $\varepsilon_2 = o(\varepsilon_1)$ ми отримуємо: $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to +\infty$, і $\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to +\infty$. Нехай $\varepsilon_1$ і $\varepsilon_2$ – нескінченно малі одного порядку малості, тоді $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to C = \text{const} > 0$, і $\lim \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \ln C$. Тоді при довільному $M = \text{const}$ можна покласти $C = e^M$. Зокрема, нехай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 e^M$. Тоді:

$$\lim \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \lim \ln e^M = \lim M = M.$$

Отже, підлаштовуючи швидкості прямування до нуля величин $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ одна під одну, можна зробити розглядуваний інтеграл рівним будь-чому, в тому числі і $\pm\infty$. $\rhd$

Якщо при різних співвідношеннях швидкостей прямування $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ до нуля границя (3.1) приймає різні значення, то вважають, що відповідний інтеграл розбігається. Очевидно, це можливо за рахунок того, що не існує кожна границя

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\int\limits_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,dx, \qquad \lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\int\limits_{x_0+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx,$$

взята окремо, хоча існує границя *суми* цих інтегралів. Для її знаходження домовились в (3.1) покладати[5] $\varepsilon_2=\varepsilon_1$. Границю, яка при цьому виникає, називають **головним значенням за Коші** і позначають літерами «V.P.» (від фр. *valeur principale* – головне значення):

$$V.P.\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right). \tag{3.2}$$

Отже, інтеграл, розглянутий в останньому прикладі, не існує, хоча існує його головне значення за Коші:

$$V.P.\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=\ln 1=0.$$

Втім, легко навести приклад, коли існує і головне значення інтегралу за Коші, і сам цей інтеграл (і вони рівні).

◁ *Приклад 3.12.*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{2\sqrt{|x|}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{2\sqrt{|x|}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{2\sqrt{|x|}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0+0}(1-\sqrt{\varepsilon_1})+\lim_{\varepsilon_2\to 0+0}(1-\sqrt{\varepsilon_2})=2.$$

Очевидно, якщо покласти $\varepsilon_2=\varepsilon_1$, ми отримаємо той самий результат. Отже, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2\sqrt{|x|}}=V.P.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2\sqrt{|x|}}=2$. ▷

[5]Зауважимо, в результаті цієї домовленості величини $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ перестають бути незалежними.

## 3.3 Питання для перевірки

1. Що таке невласний інтеграл першого роду?
2. Як за допомогою першої ознаки порівняння встановити збіжність (розбіжність) невласного інтегралу першого роду?
3. Сформулюйте і доведіть другу (граничну) ознаку порівняння для встановлення збіжності (розбіжності) невласного інтегралу першого роду.
4. Який невласний інтеграл першого роду називають збіжним абсолютно?
5. Чи правильне твердження: якщо невласний інтеграл першого роду збігається, то він збігається абсолютно?
6. Чи правильне твердження: якщо невласний інтеграл першого роду збігається абсолютно, то він збігається? Чи потрібно це доводити?
7. Надайте означення невласного інтегралу другого роду.
8. Як модифікується означення невласного інтегралу другого роду, якщо підінтегральна функція прямує до нескінченності на обох кінцях інтервалу $x \in (a, b)$?
9. Якою заміною змінних можна перетворити невласний інтеграл першого роду на невласний інтеграл другого роду?
10. Якою заміною змінних можна перетворити невласний інтеграл другого роду на невласний інтеграл першого роду?
11. Що таке головне значення за Коші для невласного інтегралу другого роду, коли особлива точка міститься всередині інтервалу $x \in [a, b]$?
12. Чи можлива ситуація, коли невласний інтеграл другого роду розбігається, а його головне значення за Коші існує і є скінченним? Наведіть приклади.

# 4 ІНТЕГРАЛ РІМАНА

Визначений інтеграл є границею[1] інтегральної суми (2.1). Послідовність дій «розбиття області інтегрування; обрання точки всередині елементу розбиття; обчислення значення функції в цій точці; побудова добутку значення функції і міри елементу області; побудова (інтегральної) суми усіх таких добутків; здійснення граничного переходу» припускає певні узагальнення, пов'язані з геометрією області інтегрування. Наприклад, на елементи довжини можна розбивати не прямолінійний відрізок $[a;b]$, а деякий фрагмент кривої. Мірою елементу області буде елемент довжини $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, і ми отримаємо **криволінійний** інтеграл. Область на площині $Oxy$ можна розбити на елементи площі. Мірою елементу області буде елемент площі $dS = dx\,dy$, і ми отримаємо **подвійний** інтеграл. Просторову область можна розбити на елементи об'єму. Мірою елементу області буде елемент об'єму $dV = dx\,dy\,dz$, і ми отримаємо **потрійний** інтеграл. Ділянку викривленої поверхні також можна розбити на елементи площі, і ми отримаємо **поверхневий** інтеграл.

Усі перелічені інтеграли (подвійний, потрійний, криволінійний, поверхневий) визначаються як границі відповідних інтегральних сум. Тому ці інтеграли природно об'єднати під збірною назвою – **інтеграл Рімана**. Визначений інтеграл є лише окремим випадком інтегралу Рімана. Перейдемо до розгляду інших випадків.

## 4.1 Криволінійні інтеграли

### 4.1.1 Криволінійні інтеграли першого роду

#### 4.1.1.1 Означення криволінійного інтегралу першого роду

До поняття криволінійного інтегралу першого роду легко прийти, розглядаючи задачу про масу викривленого неоднорідного дроту.

[1] Якщо така границя існує, є скінченною і не залежить ні від способу розбиття, ані від способу обрати точку всередині елементу розбиття, то вона за означенням і є інтегралом.

Розглянемо спочатку прямолінійний однорідний дріт. Нехай його довжина, площа поперечного перерізу і густина матеріалу дорівнюють $\ell$, $S$, $\rho$ відповідно. Об'єм матеріалу $V = S\ell$, маса матеріалу $m = \rho V = \rho S\ell$. Позначимо $\gamma = \rho S$, тоді $m = \gamma\ell$. Маємо: $\gamma = \frac{m}{\ell} = \text{const}$. Це елементарне співвідношення встановлює пряму пропорційність маси і довжини: при збільшенні довжини дроту в певну кількість разів його маса збільшується в таку ж кількість разів, тому їх відношення залишається сталим. Відношення $\gamma = \frac{m}{\ell}$ дорівнює масі в розрахунку на одиницю довжини (якщо $\ell = 1$, то $\gamma = m$), тому його називають **лінійною густиною** (масою, зосередженою на одиниці довжини).

Розглянемо тепер неоднорідний викривлений дріт. Розіб'ємо його на елементи довжини $\Delta\ell_k$. Нехай кожний елемент довжини настільки короткий, що зміною лінійної густини, а також його викривленням можна знехтувати. Кожному $k$-му елементу довжини притаманне індивідуальне[2] значення лінійної густини $\gamma_k$. Тоді елемент маси $dm_k = \gamma_k\,\Delta\ell_k$, отже,

$$m = \sum_{(k)} \Delta m_k \approx \sum_{(k)} dm_k = \sum_{(k)} \gamma_k\,\Delta\ell_k.$$

Але це і є інтегральна сума. Здійснюючи граничний перехід, отримуємо:

$$m = \lim_{\max \Delta\ell_k \to 0} \sum_{(k)} \gamma_k\,\Delta\ell_k.$$

Якщо ця границя існує, є скінченною і не залежить від способу розбиття і способу обрання точок, в яких обчислюються $\gamma_k$, то ця границя і буде криволінійним інтегралом першого роду від лінійної густини вздовж кривої:

$$m = \int\limits_L \gamma\,d\ell.$$

Узагальнимо наведені міркування. Нехай в деякій області $D$ на площині $Oxy$ задано криву $L$, кінці якої – точки $A(x_A, y_A)$,

[2]Лінійна густина $\gamma$ може відрізнятись в різних точках дроту або за рахунок густини $\rho$, або за рахунок площі $S$, або за рахунок обох факторів одночасно. Але *всередині* кожного окремо взятого елементу довжини маємо $\gamma = \gamma_k = \text{const}$, оскільки величина $\Delta\ell_k$ є малою, і густина $\gamma$ протягом довжини $\Delta\ell_k$ не встигає змінитись. Отже, як і у випадку визначеного інтегралу, методика розрахунків враховує плавну зміну лінійної густини при переборі великої кількості елементів довжини.

$B(x_B, y_B)$. Ця крива може бути графіком функції $y = \varphi(x)$, заданої явно, або графіком функції $x = \psi(y)$, заданої явно, або графіком функції $y(x)$, заданої параметрично системою рівнянь $x(t)$, $y(t)$, або графіком рівняння $F(x, y) = 0$, або може бути заданою в інший спосіб. Наприклад, нехай $s$ позначає відстань від точки $A(x_A, y_A)$ до поточної точки $M(x, y) \in L$, виміряну вздовж кривої $L$, $s \geqslant 0$. Тоді положення поточної точки на кривій можна однозначно визначити парою функцій $x(s)$, $y(s)$. Втім, це специфічно визначене параметричне задання. Його називають **натуральною параметризацією.**

Розглянемо функцію двох змінних $f(x, y)$. Обмежимось розглядом лише тих значень, яких ця функція набуває в точках кривої: $f(M) = f(M(x, y))$, $M(x, y) \in L$. Потрібно розуміти, що таке обмеження перетворює функцію $f$ на функцію однієї змінної. Наприклад, якщо крива $L$ задана функцією $y = \varphi(x)$, то $f(x, y) = f(x, \varphi(x))$. Ця обставина дозволяє надалі вважати *$f$ функцією положення однієї точки*, причому це положення керується єдиним параметром. У випадку $f(x, \varphi(x))$ таким параметром і є абсциса $x$.

Оберемо на кривій $(N + 1)$ точок $C_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{0, N}$, причому $C_0 = A$, $C_N = B$ (ці рівності розуміємо в сенсі збігу точок, тобто як рівності $x_0 = x_A$, $y_0 = y_A$, $x_N = x_B$, $y_N = y_B$). Числова послідовність $\{x_k\}$ вже не повинна монотонно зростати. Але домовимось вважати, що збільшенню номеру $k$ відповідає монотонне збільшення довжини дуги $AC_k$. Це буде гарантувати, що при довільному $k$ точки $C_{k-1}$ і $C_k$ є безпосередніми «сусідами», тобто інших точок $C_j$ на кривій між ними немає. Усі точки кривої $L$ зараз утворюють множину (область) інтегрування, а система точок $C_k$ здійснює її розбиття.

На кожному елементі розбиття $C_{k-1}C_k$ оберемо точку $M_k$ (рис. 4.1). Нехай її координати $M_k(\xi_k, \eta_k)$. Нехай точки $C_{k-1}$ і $C_k$ є настільки близькими, що хорда $C_{k-1}C_k$, яка стягує дугу $C_{k-1}C_k$, зливається з нею. Довжина хорди (і в граничному сенсі – дуги)

$$\Delta\ell_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

Побудуємо добуток $f(M_k)\,\Delta\ell_k = f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\ell_k$ і просумуємо усі такі добутки:

$$\sum_{(k)} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\ell_k.$$

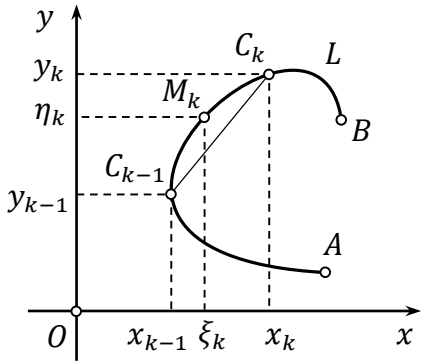



Рисунок 4.1 – До означення криволінійного інтегралу першого роду

Цей вираз і є інтегральною сумою.

♦ **Означення 4.1. Криволінійним інтегралом першого роду** функції $f(x,y)$ на кривій $L$ називається границя інтегральної суми

$$\int\limits_L f(x,y)\,d\ell = \lim_{\max \Delta\ell_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k,\eta_k)\,\Delta\ell_k,$$

якщо вона 1) існує і є скінченною та 2) не залежить від а) способу розбиття кривої $L$ на дуги $\Delta\ell_k$ і б) способу вибору точок $M_k$ всередині цих дуг.

#### 4.1.1.2 Обчислення криволінійного інтегралу першого роду

Для обчислення криволінійного інтегралу першого роду його достатньо звести до визначеного інтегралу.

1°. Розглянемо випадок, коли контур $L$ інтегрування є графіком функції[3] $y=\varphi(x)$ в межах $x\in[a,b]$. Згідно з (2.15):

$$\int\limits_L f(x,y)\,d\ell = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

[3]Зауважимо, цей випадок не осягає усіх можливостей. Наприклад, крива $L$ на рис. 4.1 не є графіком однозначної функції.

Аналогічно, якщо контур $L$ інтегрування є графіком функції $x = \psi(y)$ в межах $y \in [c, d]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,d\ell = \int\limits_c^d f(\psi(y),y)\sqrt{1+[\psi'(y)]^2}\,dy.$$

2°. Нехай тепер контур $L$ інтегрування задано параметрично системою рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$ в межах $t \in [t_1, t_2]$. З використанням відповідних замін маємо:

$$\int\limits_L f(x,y)\,d\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \qquad (4.1)$$

Ця формула узагальнює обидві попередні. Зокрема, покладаючи $t = x$, параметричне задання зводять до явного: $y(t) = y(x)$. Але остання формула, на відміну від двох попередніх, дозволяє провести обчислення навіть у випадку, коли контур інтегрування не є графіком однозначної функції.

◁ *Приклад 4.1.* Дріт довжиною $2\pi R$ викладено вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$. Лінійна густина дроту є змінною і дорівнює $\gamma(x,y) = \frac{4m_0}{R^5} \cdot x^2y^2$. Обчислити масу дроту.

Вводячи параметризацію $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $d\ell = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = R\,dt$, маємо:

$$m = \int\limits_L \gamma(x,y)\,d\ell = \int\limits_0^{2\pi} \frac{4m_0}{R^5} \cdot R^2\cos^2 t \cdot R^2\sin^2 t\,R\,dt =$$

$$= m_0 \int\limits_0^{2\pi} (2\sin t\cos t)^2\,dt = m_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = m_0 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{m_0}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi m_0. \triangleright$$

#### 4.1.1.3 Властивості криволінійного інтегралу першого роду

Оскільки криволінійний інтеграл зводиться до визначеного, то він «успадковує» його властивості.

1°. **Лінійність:**

$$\int\limits_L [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, d\ell = \alpha \int\limits_L f(x,y)\, d\ell + \beta \int\limits_L g(x,y)\, d\ell.$$

2°. **Адитивність.** Нехай контур інтегрування розбито на дві частини, які не перекриваються: $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Тоді

$$\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\, d\ell = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, d\ell + \int\limits_{L_2} f(x,y)\, d\ell.$$

3°. Нова властивість, яка відрізняє криволінійний інтеграл першого роду від визначеного інтегралу, полягає в тому, що цей інтеграл **не залежить від напрямку** інтегрування:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\, d\ell = \int\limits_{BA} f(x,y)\, d\ell.$$

Справді, при збереженні параметризації для зміни напрямку обходу контуру в (4.1) достатньо обміняти місцями межі $t_1$ і $t_2$. Але водночас із цим $dt$ також змінить знак на протилежний. Ця властивість очевидна з огляду на те, що елемент довжини $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ не залежить від напрямку обходу.

В цьому ж підпункті доречно сформулювати **фізичний і геометричний зміст криволінійного інтегралу першого роду.** Якщо підінтегральна функція є лінійною густиною, то цей інтеграл дорівнює масі відповідного дроту. Якщо підінтегральна функція $f(x,y) \equiv 1$, то цей інтеграл дорівнює довжині відповідного дроту.

#### 4.1.1.4 Узагальнення на тривимірний випадок

Нехай контур $L$ інтегрування є просторовою кривою, заданою параметрично:

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Для визначення початку $A$ і кінця $B$ контуру $L$, як і раніше, потрібно обмежитись інтервалом $t \in [t_1; t_2]$. Кінці цього інтервалу такі, що $x(t_1) = x_A, y(t_1) = y_A, \cdots, z(t_2) = z_B$.

Нехай в просторі задано функцію трьох змінних $f(x,y,z)$. Обмежимось розгляданням лише тих значень, яких ця функція набуває в точках кривої: $f(M) = f(M(x,y,z))$, $M(x,y,z) \in L$. Потрібно розуміти, що таке обмеження перетворює функцію $f$ на функцію однієї змінної: з використанням параметризації маємо $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Розіб'ємо контур $L$ на елементи довжини $\Delta\ell_k$. Всередині кожного елементу оберемо точку $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ і обчислимо добуток $f(M_k)\,\Delta\ell_k$. Сумуючи усі такі добутки, отримуємо інтегральну суму, а здійснюючи граничний перехід – криволінійний інтеграл першого роду вздовж просторової кривої:

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell = \lim_{\max \Delta\ell_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta\ell_k.$$

Аніяких новацій техніка обчислення такої границі не містить. Справді, аналогічно до (2.15) маємо:

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

Тому розглядуваний інтеграл зводиться до визначеного:

$$\int\limits_{L=\overset{\smile}{AB}} f(x,y,z)\,d\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

Властивості такого інтегралу, а також його фізичний і геометричний зміст залишаються незмінними порівняно з двовимірним випадком.

Параметризація просторової кривої може мати прозорий зміст рівнянь руху. Наприклад, нехай параметр $t$ відіграє роль часу і

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t, \\ z = z_0 + vt. \end{cases} \tag{4.2}$$

За рахунок перших двох рівнянь поточна точка здійснює рівномірне обертання по колу $x^2+y^2 = R^2$ з кутовою швидкістю $\omega$, але площина цього кола рівномірно рухається вздовж осі $Oz$ з лінійною швидкістю $v$. Виникає просторова спіраль радіусом $R$

і кроком $h = vT = v \cdot \frac{2\pi}{\omega}$, де $T$ – період обертання. В наступному прикладі обчислюється довжина одного кроку такої спіралі.

$\triangleleft$ *Приклад 4.2.* Розглянемо спіраль (4.2). Обчислимо елемент довжини одного кроку спіралі:

$$d\ell = \sqrt{[-R\omega \sin \omega t]^2 + [R\omega \cos \omega t]^2 + v^2}\, dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}\, dt.$$

Вважаючи підінтегральну функцію тотожно рівною одиниці, отримуємо:

$$\ell = \int\limits_{L=\overset{\smile}{AB}} d\ell = \int\limits_0^T \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}\, dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}\, t\Big|_0^T =$$

$$= T\sqrt{R^2\omega^2 + v^2} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{R^2\omega^2 + v^2}. \triangleright$$

## 4.1.2 Криволінійні інтеграли другого роду

### 4.1.2.1 Означення криволінійного інтегралу другого роду

До поняття криволінійного інтегралу другого роду легко прийти, розглядаючи задачу про роботу змінної сили при русі частинки вздовж деякого контуру $L$.

Обмежимось плоским рухом, тобто випадком, коли частинка рухається лише в площині $Oxy$. Нехай сила, яка діє на частинку, залежить лише від положення $M(x, y)$ частинки, в який би момент часу це положення не настало. Тоді вираз для сили має вигляд $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y)$. Якщо кожній точці $M(x, y)$ площини ставиться у відповідність вектор $\overrightarrow{F}(x, y)$ сили, то кажуть, що на площині задано стаціонарне[4] **силове поле.**

Звичайно, розглядуване силове поле є векторним. Нехай проекції[5] вектора сили на осі дорівнюють $P$ і $Q$. Тоді вектор сили є $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} \equiv \{P; Q\}$. Оскільки сила в загальному випадку є різною в різних точках площини як за модулем, так

[4]Якщо сила залежить не тільки від координат, а ще й від моменту часу, то поле називають *нестаціонарним*.

[5]Нагадаємо, якщо (двовимірний) простір натягнуто на ортонормований базис $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$, то координати $x$, $y$ розкладання $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ довільного вектора $\overrightarrow{a}$ за цим базисом водночас є проекціями цього вектора на координатні осі.

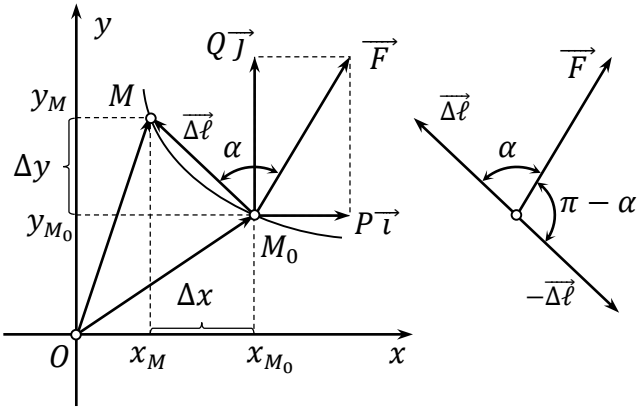



Рисунок 4.2 – До обчислення роботи змінної сили

і за напрямком, то координати вектора $\vec{F}$ повинні залежати від координат точки на площині: $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. Тоді:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}. \tag{4.3}$$

Отже, задати плоске стаціонарне векторне поле – це те ж саме, що задати дві функції двох змінних: $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Розглянемо тепер довільний плоский рух частинки. Нехай вона за час $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$ переміщується з положення $M_0$ в положення $M$ (рис. 4.2). Нехай цей рух задається системою рівнянь руху: $x = x(t)$, $y = y(t)$, причому в момент $t_0$ ці функції приймають значення координат точки $M_0$, а в момент $t_0 + \Delta t$ – координат точки $M$. Тоді вектор переміщення становить

$$\vec{\Delta\ell} = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} =$$

$$= \left(x_M\,\vec{i} + y_M\,\vec{j}\right) - \left(x_{M_0}\,\vec{i} + y_{M_0}\,\vec{j}\right) =$$

$$= (x_M - x_{M_0})\,\vec{i} + (y_M - y_{M_0})\,\vec{j} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} = \{\Delta x; \Delta y\}.$$

Нехай проміжок $\Delta t$ є настільки малим, що протягом цього часу сила $\vec{F}$ змінитись не встигає. Тоді елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta\ell} = P(x_0, y_0)\,\Delta x + Q(x_0, y_0)\,\Delta y. \tag{$*$}$$

Розіб'ємо траєкторію $L$ на *спрямовані* елементи довжини $\overrightarrow{\Delta\ell}$. Застосовуючи формулу $(*)$ до кожного з них і додаючи усі елементарні роботи, отримаємо інтегральну суму. Відповідь виникає при здійсненні в цій сумі граничного переходу при $\max\left|\overrightarrow{\Delta\ell}\right| \to 0$. Якщо ця границя існує, є скінченною і не залежить від способу розбиття і способу обрання точки $M_0$, в якій обчислюється сила, то ця границя і буде криволінійним інтегралом другого роду від вектору сили вздовж траєкторії:

$$A = \int\limits_L \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx.$$

Іноді, розмірковуючи аналогічно, використовують векторний добуток замість скалярного і отримують вираз $\int_L \overrightarrow{F} \times d\overrightarrow{\ell}$. Наприклад, саме так обчислюють магнітну індукцію $\overrightarrow{B}$ із застосуванням закону Біо–Савара–Лапласа, або силу Ампера тощо. Втім, нічого нового в цьому випадку немає, оскільки при обчисленні векторного добутку виникають три доданки, подібні до $(*)$.

Узагальнимо наведені міркування. Нехай в деякій області $D$ на площині $Oxy$ задано криву $L$. Розглянемо *вектор-функцію* двох змінних

$$\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j} = \{P(x,y); Q(x,y)\}.$$

Обмежимось розглядом лише тих значень, яких ця функція набуває в точках кривої: $\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{F}(M(x,y))$, $M(x,y) \in L$. Потрібно розуміти, що таке обмеження перетворює функцію $\overrightarrow{F}$ на функцію однієї скалярної змінної. Наприклад, такою змінною може бути $t$, якщо крива $L$ задана параметрично.

Оберемо на кривій $(N+1)$ точок $C_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{0,N}$. Система точок $C_k$ здійснює розбиття кривої на *спрямовані* елементи довжини $\overrightarrow{\Delta\ell_k} = \overrightarrow{C_{k-1}C_k} = \Delta x_k \overrightarrow{i} + \Delta y_k \overrightarrow{j} = \{\Delta x_k; \Delta y_k\}$. На кожному елементі розбиття $\overrightarrow{\Delta\ell_k}$ оберемо точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$. Побудуємо скалярний добуток $\overrightarrow{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\ell_k}$ і підсумуємо усі такі добутки:

$$\sum_{(k)} \overrightarrow{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\ell_k} = \sum_{(k)} P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k.$$

Цей вираз і є інтегральною сумою.

♦ **Означення 4.2. Криволінійним інтегралом другого роду** вектор-функції $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ вздовж плоскої кривої $L$ називається границя інтегральної суми

$$\int\limits_L \overrightarrow{F}(x,y)\cdot d\overrightarrow{\ell} = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{\max\left|\Delta\overrightarrow{\ell_k}\right|\to 0} \sum_{k=1}^{N} P(\xi_k,\eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\,\Delta y_k,$$

якщо вона 1) існує і є скінченною та 2) не залежить від а) способу розбиття кривої $L$ на спрямовані елементи $\overrightarrow{\Delta\ell_k}$ і б) способу вибору точок $M_k$ всередині цих елементів.

В аналогічний спосіб визначається криволінійний інтеграл другого роду і на просторовій кривій:

$$\int\limits_L \overrightarrow{F}(x,y,z)\cdot d\overrightarrow{\ell} = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \lim_{\max\left|\Delta\overrightarrow{\ell_k}\right|\to 0} \sum_{k=1}^{N} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k.$$

Оскільки $P$, $Q$ (в тривимірному випадку – $P$, $Q$, $R$) є проекціями векторного поля на координатні осі, то криволінійний інтеграл другого роду називають також криволінійним інтегралом *в проекціях*.

#### 4.1.2.2 Обчислення криволінійного інтегралу другого роду

Для обчислення криволінійного інтегралу другого роду його достатньо звести до визначеного інтегралу. Для цього в *лінійну диференціальну форму* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ вводять заміну, яка перетворює криволінійний інтеграл на визначений. Наприклад, якщо контур $L$ є графіком функції $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b [P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)]\,dx.$$

Якщо контур $L$ є графіком функції $x = \psi(y)$, $y \in [c; d]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_c^d [P(\psi(y), y)\,\psi'(y) + Q(\psi(y), y)]\,dy.$$

Якщо контур $L$ задано параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, причому $t \in [t_1; t_2]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Останній інтеграл, очевидно, існує, якщо функції $x(t)$, $y(t)$ є неперервними разом зі своїми похідними. Ця формула легко узагальнюється на тривимірний випадок: якщо просторову криву $L$ задано параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, то інтеграл від вектор-функції

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\,\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\,\overrightarrow{k}$$

дорівнює

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t)]\,dt,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і їх похідні неперервні.

◁ *Приклад 4.3.* Дано точки $A(0,0)$ і $B(1,2)$. Обчислити криволінійний інтеграл $J = \int_L x\,dx + xy\,dy$ від точки $A$ до точки $B$ вздовж кривої $L$ в двох наступних випадках: а) $L$ є відрізком прямої $y = 2x$; б) $L$ є дугою параболи $y = 2x^2$.

а) Маємо: $y = 2x \Rightarrow dy = 2\,dx$,

$$J = \int\limits_L x\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx + x \cdot 2x \cdot 2\,dx = \int\limits_0^1 \left(x + 4x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}.$$

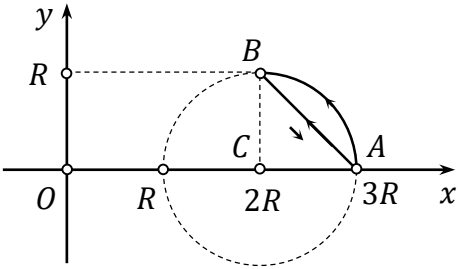



Рисунок 4.3 – Приклад обчислення криволінійного інтегралу

б) Маємо: $y = 2x^2 \Rightarrow dy = 4x\,dx$,

$$J = \int\limits_L x\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx + x \cdot 2x^2 \cdot 4x\,dx = \int\limits_0^1 \left(x + 8x^4\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{8}{5} = \frac{21}{10}. \triangleright$$

$\triangleleft$ *Приклад 4.4.* Дано точки $A(3R, 0)$ і $B(2R, R)$ (рис. 4.3). Обчислити криволінійний інтеграл $J = \int_L y^2\,dx + 2xy\,dy$ в трьох наступних випадках:

а) вздовж тієї частина кола $(x - 2R)^2 + y^2 = R^2$, для якої $x \geqslant 2R$, $y \geqslant 0$, в напрямку від точки $A$ до точки $B$;

б) вздовж прямої $AB$ в напрямку від точки $A$ до точки $B$;

в) вздовж прямої $AB$ в напрямку від точки $B$ до точки $A$.

а) Задамось параметризацією

$$\begin{cases} x(t) = R(2 + \cos t), \\ y(t) = R\sin t, \\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

По-перше, очевидно, що ця параметризація задає потрібне коло. Справді:

$$\begin{cases} x - 2R = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Підносячи ці рівняння до квадрату і додаючи їх, отримаємо потрібне коло. По-друге, введена параметризація задає потрі-

бний напрямок обходу контуру. Справді, при $t = 0$ маємо $x = 3R = x_A$, $y = 0 = y_A$ – початок обходу. При $t = \frac{\pi}{2}$ маємо $x = 2R = x_B$, $y = R = y_B$ – кінець обходу.

Диференціюємо рівняння параметризації:

$$\begin{cases} dx = -R\sin t\,dt, \\ dy = R\cos t\,dt. \end{cases}$$

Тоді:

$$J = \int\limits_L y^2\,dx + 2xy\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2 t\,(-R\sin t)\,dt + 2R(2+\cos t)\cdot R\sin t\cdot R\cos t\,dt =$$

$$= R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\cos^2 t - 1\right) + 2(2\cos t + \cos^2 t)\right]\sin t\,dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \cos t = z \\ -\sin t\,dt = dz \\ z_1 = 1 \\ z_2 = 0 \end{array} \right\| = R^3\int\limits_1^0 \left[\left(z^2-1\right) + 2(2z+z^2)\right](-dz) =$$

$$= R^3\int\limits_0^1 \left(3z^2 + 4z - 1\right)dz = R^3\left(z^3 + 2z^2 - z\right)\Big|_0^1 = 2R^3.$$

б) Оскільки тепер контуром інтегрування є прямолінійний відрізок, то шукатимемо параметризацію у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta, \\ y(t) = \gamma t + \delta, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Підберемо коефіцієнти $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, «прив'язавши» рівняння до точки $A$ при $t_1 = 0$ і до точки $B$ при $t_2 = 1$:

$$\begin{cases} x(t_1) = x_A, \\ y(t_1) = y_A, \\ x(t_2) = x_B, \\ y(t_2) = y_B, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 3R, \\ y(0) = 0, \\ x(1) = 2R, \\ y(1) = R, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 0 + \beta = 3R, \\ \gamma\cdot 0 + \delta = 0, \\ \alpha\cdot 1 + \beta = 2R, \\ \gamma\cdot 1 + \delta = R. \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $\alpha = -R$, $\beta = 3R$, $\gamma = R$, $\delta = 0$. Тоді шукана параметризація має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = R(3-t), \\ y(t) = Rt. \end{cases}$$

Справді, додамо ці рівняння: $x + y = 3R$, $y = 3R - x$. Очевидно, це і є пряма $AB$. Диференціюємо рівняння параметризації:

$$\begin{cases} dx = -R\,dt, \\ dy = R\,dt. \end{cases}$$

Тоді:

$$J = \int\limits_L y^2\,dx + 2xy\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 R^2t^2\,(-R)\,dt + 2R(3-t)\cdot Rt\cdot R\,dt =$$

$$= R^3 \int\limits_0^1 \left(6t - 3t^2\right)dt = R^3\,\left(3t^2 - t^3\right)\Big|_0^1 = 2R^3.$$

в) Знову шукаємо параметризацію у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta, \\ y(t) = \gamma t + \delta, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Коефіцієнти $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ шукаємо в той же спосіб. Але тепер початковому значенню $t_1 = 0$ слід поставити у відповідність, навпаки, точку $B$, а кінцевому $t_2 = 1$ – точку $A$:

$$\begin{cases} x(t_1) = x_B, \\ y(t_1) = y_B, \\ x(t_2) = x_A, \\ y(t_2) = y_A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 2R, \\ y(0) = R, \\ x(1) = 3R, \\ y(1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 0 + \beta = 2R, \\ \gamma\cdot 0 + \delta = R, \\ \alpha\cdot 1 + \beta = 3R, \\ \gamma\cdot 1 + \delta = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $\alpha = R$, $\beta = 2R$, $\gamma = -R$, $\delta = R$. Тоді шукана параметризація має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = R(t+2), \\ y(t) = R(1-t). \end{cases}$$

Справді, додамо ці рівняння: $x + y = 3R$, $y = 3R - x$. Очевидно, це і є пряма $AB$. Але цього разу при збільшенні параметру $t$ від нуля до одиниці відбувається обхід контуру в зворотному напрямку – від точки $B$ до точки $A$. Диференціюємо рівняння параметризації:

$$\begin{cases} dx = R\,dt, \\ dy = -R\,dt. \end{cases}$$

Тоді:

$$J = \int\limits_L y^2\,dx + 2xy\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 R^2(1-t)^2 R\,dt + 2R(t+2)\cdot R(1-t)\cdot(-R)\,dt =$$

$$= R^3 \int\limits_0^1 \left[(t-1)^2 + 2(t+2)(t-1)\right] dt =$$

$$= R^3 \int\limits_0^1 \left(3t^2 - 3\right) dt = R^3\,\left(t^3 - 3t\right)\Big|_0^1 = -2R^3. \triangleright$$

#### 4.1.2.3 Властивості криволінійного інтегралу другого роду

Криволінійний інтеграл другого роду, як і першого, є **лінійним** і **адитивним.**

Нова властивість, яка відрізняє криволінійний інтеграл другого роду, полягає в тому, що цей інтеграл **залежить від напрямку** інтегрування. А саме, він змінює знак на протилежний при зміні напрямку обходу контуру на протилежний:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Справді, припустимо, спрямований елемент довжини $\overrightarrow{\Delta\ell}$ змінили на протилежний, $\overrightarrow{\Delta\ell'} = -\overrightarrow{\Delta\ell}$. Тоді новий кут між спрямованим елементом довжини і підінтегральною вектор-функцією $\alpha' = \pi - \alpha$ (рис. 4.2). Тоді внесок в інтегральну суму

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\Delta\ell'} = \left|\overrightarrow{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta\ell'}\right|\cdot\cos\alpha' = \left|\overrightarrow{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta\ell}\right|\cdot\cos(\pi-\alpha) =$$

$$= -\left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta\ell}\right| \cdot \cos\alpha = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta\ell}.$$

Втім, безпосередньо використавши $\overrightarrow{\Delta\ell'} = -\overrightarrow{\Delta\ell}$ замість $\overrightarrow{\Delta\ell}$, отримаємо той самий результат. Зауважимо, зміну знаку інтегралу при зміні напрямку обходу контуру на протилежний ми спостерігали в останньому прикладі попереднього підпункту (приклад 4.4, п. в) при русі вздовж прямолінійного відрізку $AB$.

В цьому ж підпункті доречно сформулювати **фізичний зміст криволінійного інтегралу другого роду.** Якщо підінтегральна векор-функція є силою, то криволінійний інтеграл другого роду дорівнює роботі цієї сили при русі частинки вздовж даного контуру в даному напрямку, причому інтеграл враховує можливі зміни модуля і напрямку сили в процесі руху.

Має місце ще одна важлива властивість криволінійного інтегралу другого роду, якій присвячено наступний пункт.

#### 4.1.2.4 Про повноту диференціалу

Порівняємо два останніх приклади. Інтеграл від *лінійної диференціальної форми*[6] (ЛДФ) $y^2\,dx + 2xy\,dy$ виявлявся однаковим при різних формах кривої $L$ (пряма або дуга кола) і лише змінював знак на протилежний при зміні напрямку обходу. В той же час, ЛДФ $x\,dx + xy\,dy$ при інтегруванні призводила до різних значень при різних формах контуру. Виявляється, що це пов'язано не з властивістю контуру, а зі специфікою підінтегрального виразу. В разі ЛДФ $y^2\,dx + 2xy\,dy$ існує функція двох змінних $u(x, y)$, диференціал якої збігається з даною ЛДФ. Справді, нехай $u(x, y) = xy^2$. Тоді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y}\,dy = y^2\,dx + 2xy\,dy.$$

В разі ЛДФ $x\,dx + xy\,dy$ такої функції не існує. Справді, припустимо, це не так, і існує $u(x, y)$ така, що

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = x\,dx + xy\,dy.$$

[6] Лінійною диференціальною формою тут і далі називатимемо вираз вигляду $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

Оскільки $dx$ і $dy$ незалежні, то ми б отримували систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xy. \end{cases}$$

Але ця система є несумісною. Справді, з другого рівняння ми б отримували $u(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ є невизначеною константою при інтегруванні за $y$, і перше рівняння набувало б вигляду $\frac{y^2}{2} + \varphi'(x) = x$. Ясно, що це рівняння не може бути виконаним тотожно, оскільки ліва частина залежить від $y$, а права – не залежить.

Кажуть, що ЛДФ $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ **є повним диференціалом**, якщо існує функція двох змінних $u(x,y)$ така, що

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Метою цього підпункту є доведення наступних тверджень: 1) *якщо криволінійний інтеграл другого роду вздовж кривої $L$ не залежить від форми контуру інтегрування, а залежить лише від положення початкової і кінцевої точок контуру, то підінтегральний вираз є повним диференціалом*; 2) *якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом, то криволінійний інтеграл другого роду вздовж кривої $L$ не залежить від форми контуру інтегрування, а залежить лише від положення початкової і кінцевої точок контуру.*

При доведенні ми будемо вважати, що крива $L$ є кусково-гладкою і цілком належить деякій області $D$, і функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ є диференційовними усюди в цій області.

1°. Зафіксуємо точку $A(x_A, y_A)$ і будемо точку $B(x,y)$ вважати рухомою. Нехай деякий інтеграл $\int_L P\,dx + Q\,dy$, $L = \overset{\smile}{AB}$, не залежить від шляху інтегрування. Тоді він цілком визначається лише положенням точки $B$, тобто

$$u(x,y) = \int\limits_{A(x_A,y_A)}^{B(x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точці $B_0(x_0,y_0)$. Для цього змістимо точку $B$ з положення $B_0(x_0,y_0)$ в положення $B'(x_0+\Delta x, y_0)$ (рис. 4.4). При цьому приріст інтегралу $u(x,y)$ з урахуванням його адитивності

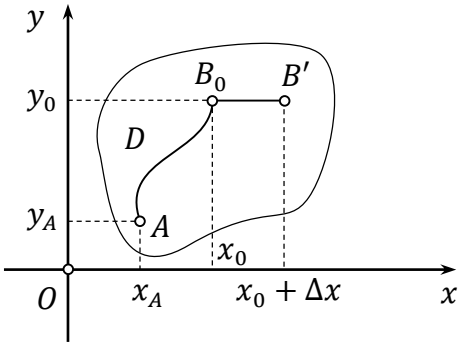



Рисунок 4.4 – До обчислення похідної $\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$

становить

$$\Delta u = u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) = \int\limits_{AB_0B'} - \int\limits_{AB_0} =$$

$$= \left(\int\limits_{AB_0} + \int\limits_{B_0B'}\right) - \int\limits_{AB_0} = \int\limits_{B_0B'} = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x, y_0)\,dx.$$

Криволінійний інтеграл зведено до визначеного, причому враховано, що для усіх точок відрізку $B_0B'$ виконано рівності

$$y = y_0 = \text{const}, \qquad dy \equiv 0.$$

З цієї причини доданок $Q(x,y)\,dy$ відкинуто. Тоді маємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{B_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x, y_0)\,dx}{\Delta x} = P(x_0, y_0).$$

Нагадаємо, схожу границю ми обчислювали при отриманні формули (2.2). Аналогічно отримуємо $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{B_0} = Q(x_0, y_0)$. Очевидно, ці міркування можна розповсюдити на довільну точку $B(x,y)$ області $D$. Тоді $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$, і підінтегральний вираз набуває вигляду

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = du.$$

Отже, доведено: якщо інтеграл не залежить від шляху, а залежить лише від положення початку і кінця контуру інтегрування, то ЛДФ $P\,dx+Q\,dy$ під знаком інтегралу є повним диференціалом. І ми навіть пред'явили ту функцію $u(x,y)$, чиїм повним диференціалом є ця ЛДФ.

2°. Навпаки, якщо ЛДФ $P\,dx+Q\,dy$ під знаком інтегралу є повним диференціалом, тобто якщо існує *однозначна* функція $u(x,y)$ така, що $du=P\,dx+Q\,dy$, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від положення початку і кінця контуру інтегрування. Доведемо це.

Дано: існує функція $u(x,y)$ така, що $du=P\,dx+Q\,dy$. Оскільки, з іншого боку, $du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy$ і $dx$, $dy$ незалежні, то $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$.

Розглянемо довільний контур $L=\overset{\smile}{AB}$, який не залишає меж області $D$. Нехай його параметризовано системою співвідношень $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, причому $x(t_1)=x_A$, $y(t_1)=y_A$, $x(t_2)=x_B$, $y(t_2)=y_B$. В цьому разі функція $u$ перетворюється на функцію однієї змінної $t$: $u=u(x,y)=u(x(t),y(t))$. Її похідна

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=P(x,y)\cdot\frac{dx}{dt}+Q(x,y)\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Тоді криволінійний інтеграл зводиться до визначеного:

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(P(x,y)\cdot\frac{dx}{dt}+Q(x,y)\cdot\frac{dy}{dt}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{du}{dt}\right)dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}u'_t\,dt=\,u(t)\big|_{t_1}^{t_2}=u(t_2)-u(t_1)=$$

$$=u(x(t_2),y(t_2))-u(x(t_1),y(t_1))=u(B)-u(A)=\,u\big|_A^B\,.$$

Отримали результат, цілком аналогічний до формули Ньютона-Лейбніца. Очевидно, цей результат залежить лише від положення точок $A$ і $B$ і не залежить від форми контуру $L$, що і треба було довести.

Зауважимо, що *можна заздалегідь передбачити, чи є ЛДФ повним диференціалом*. Якщо ця форма є повним диференціалом, то існує функція $u(x,u)$ така, що $\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$. Але

друга мішана похідна функції $u(x,u)$ не залежить від порядку диференціювання: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, тобто

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4.4}$$

Отже, якщо ЛДФ – повний диференціал, то (4.4) виконано. Відповідно, якщо (4.4) порушено, то відповідна ЛДФ не є повним диференціалом. Тому умову (4.4) називають **необхідною**[7] **умовою повноти диференціалу.**

Повернемось до вже розглянутого прикладу, трохи змінивши його умову.

◁ *Приклад 4.5.* Дано точки $A(3R,0)$ і $B(2R,R)$ (див. рис. 4.3). Обчислити криволінійний інтеграл $J = \int\limits_{\smile AB} y^2\,dx + 2xy\,dy$.

Маємо: $P = y^2$, $Q = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, отже, умову (4.4) виконано, і ми маємо право обрати довільний шлях інтегрування, наприклад $ACB$.

Для ділянки $AC$ покладемо $y = 0$, а для ділянки $CB$ – $x = 2R$, $dx = 0$, $y \in [0;R]$:

$$\int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC} 0^2\,dx + 2x\cdot 0\,dy + \int\limits_{CB} y^2\cdot 0 + 2\cdot 2R\cdot y\,dy =$$

$$= 4R\int\limits_0^R y\,dy = 2Ry^2\big|_0^R = 2R^3,$$

що збігається з відповіддю, отриманою вище.

Можна було вдіяти ще простіше: достатньо покласти $u = xy^2 + C$ (оскільки $(xy^2+C)'_x = y^2 = P$, $(xy^2+C)'_y = 2xy = Q$), і тоді

$$\int\limits_{\smile AB} y^2\,dx + 2xy\,dy = \int\limits_{\smile AB} du = u\big|_A^B =$$

[7] Якщо область $D$ є однозв'язною, то ця умова буде також і достатньою. Двовимірну область називають **однозв'язною,** якщо довільний замкнений контур, який належить області, можна неперервно стягнути у точку, не залишаючи меж області. Наприклад, круг є однозв'язною областю. В той же час кільце (круг з отвором) не є однозв'язною областю. Справді, будь-який контур, який охоплює отвір, при стягування (деформації) не зробиться менше отвору, якщо не перетне його границю.

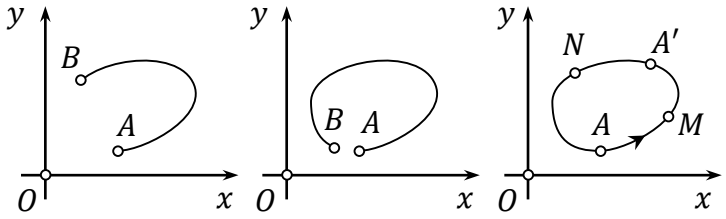



Рисунок 4.5 – Замикання контуру інтегрування

$$= \left(xy^2 + C\right)\Big|_{x=3R,y=0}^{x=2R,y=R} = \left(2R \cdot R^2 + C\right) - \left(3R \cdot 0^2 + C\right) = 2R^3.$$

Звичайно, отримана відповідь не залежить від $C$, і можна було покласти $C = 0$, $u(x, y) = xy^2$. $\triangleright$

#### 4.1.2.5 Випадок замкненого контуру

Уявімо контур $L = \overset{\smile}{AB}$, в якому точку $A$ зафіксовано, а точка $B$ є рухомою (рис. 4.5, ліворуч). Після певних блукань (рис. 4.5, в центрі) точка $B$ може суміститись з точкою $A$, і утвориться замкнений контур (рис. 4.5, праворуч). Інтеграл вздовж такого контуру позначають символом $\oint$. Тепер втрачає сенс поняття «початок контуру». Справді, починаючи з точки $A$, з урахуванням адитивності маємо:

$$\oint = \int\limits_{\overset{\smile}{AM}} + \int\limits_{\overset{\smile}{MA'}} + \int\limits_{\overset{\smile}{A'N}} + \int\limits_{\overset{\smile}{NA}}.$$

Якщо ми почнемо, наприклад, з точки $M$, то отримаємо

$$\oint = \int\limits_{\overset{\smile}{MA'}} + \int\limits_{\overset{\smile}{A'N}} + \int\limits_{\overset{\smile}{NA}} + \int\limits_{\overset{\smile}{AM}},$$

тобто відбудеться лише циклічна перестановка доданків, а їх сума залишиться незмінною; ця сума і є інтегралом в-довж замкненого контуру.

Попри відмову від поняття «початок контуру» *напрямок обходу контуру залишається актуальним*. Якщо контур є однією замкненою лінією скінченних розмірів, яка не перетинає сама

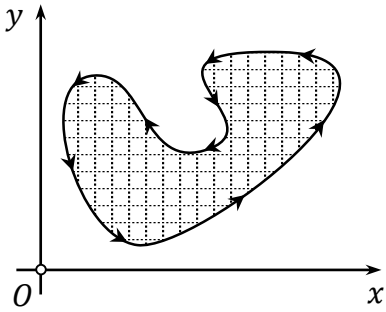
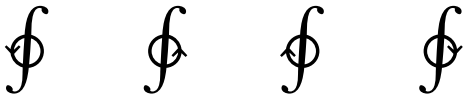



Рисунок 4.6 – Додатний напрямок обходу контуру



а) б) в) г)

Рисунок 4.7 – Позначення напрямку обходу контуру

себе, то **додатним** домовляються вважати *напрямок проти годинникової стрілки* (див. рис. 4.5, праворуч; додатний напрямок показано стрілкою). Якщо контур є колом або лінією, близькою до нього, то така домовленість інтуїтивно зрозуміла.

В менш очевидних випадках цю домовленість формулюють так. Нехай контур обмежує деяку скінченну однозв'язну область. Додатним вважають напрямок, при русі вздовж якого ця *область залишається ліворуч від спостерігача* (рис. 4.6). При використанні символа $\oint$, якщо на інше не вказано, мають на увазі інтегрування саме в додатному напрямку. При бажанні додатково це підкреслити користуються символами а) або б) (рис. 4.7). При інтегруванні вздовж замкненого контуру в протилежному напрямку користуються символам в) або г) (рис. 4.7).

Доведемо наступне: якщо криволінійний інтеграл від деякої ЛДФ вздовж довільного незамкненого контуру не залежить

від форми контура, то криволінійний інтеграл від тієї ж ЛДФ вздовж замкненого контуру дорівнює нулю. З використанням позначень рис. 4.5 маємо:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AMA'NA} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{AMA'} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{A'NA} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{AMA'} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{ANA'} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Тут ми спочатку скористались адитивністю, розбивши замкнений контур на дві частини $AMA'$ і $A'NA$, а потім в останньому інтегралі змінили напрямок інтегрування на протилежний ($ANA'$ замість $A'NA$). В результаті обидва останні інтеграли обчислюються в напрямку від точки $A$ до точки $A'$. В тому числі, один з них – через точку $M$, а інший – через точку $N$. Але це не має значення: різною є лише форма контурів $AMA'$ і $ANA'$, але від неї інтеграл за умовою не залежить. Тому два останніх інтеграли дорівнюють один одному, а їх різниця дорівнює нулю, що і треба було довести.

Отже, доведено **еквівалентність трьох тверджень:** *1) інтеграл вздовж незамкненого контуру не залежить від форми контура; 2) інтеграл вздовж замкненого контуру дорівнює нулю; 3) підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої однозначної функції.* Цю еквівалентність треба розуміти так: якщо з трьох тверджень виконане принаймні одне, то виконані і обидва інших; якщо з трьох тверджень порушене принаймні одне, то порушені і обидва інших.

Для тривимірного випадку можна отримати аналогічні висновки. Тільки тепер підінтегральним виразом буде ЛДФ

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

а умовою повноти диференціалу (тобто умовою існування функції $u$, диференціал $du = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz$ якої збігається з даною ЛДФ) замість формули (4.4) буде система наступних рівнянь, яка теж виникає з незалежності других мішаних частин-

них похідних від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Еквівалентність трьох тверджень (повнота диференціалу підінтегральної ЛДФ; незалежність криволінійного інтегралу від шляху інтегрування; рівність нулю криволінійного інтегралу при інтегруванні вздовж замкненого контуру) в теоретичній фізиці і електродинаміці є підгрунтям для формулювання означення потенціального поля. За означенням, силове поле називають *потенціальним*, якщо робота сил цього поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю. Альтернативно, силове поле є потенціальним, якщо робота сил цього поля вздовж довільного незамкненого контуру не залежить від його форми і визначається лише положенням початкової і кінцевої точок. Виявляється, для того, щоб поле було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб воно дорівнювало градієнту деякої скалярної функції; її називають потенціалом.

Розглянемо силове поле

$$\overrightarrow{F}\,\{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}\,.$$

Нехай існує функція $\varphi(x,y,z)$ така, що $\overrightarrow{F} = \operatorname{grad}\varphi$. Тоді в кожній точці $M_0$ простору маємо векторну рівність $\{P;Q;R\} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$, звідки $P = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $R = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Нехай під дією сили $\overrightarrow{F}$ здійснено диференціально мале переміщення з точки $M_0$ на вектор $\overrightarrow{d\ell} = \{dx; dy; dz\}$. Тоді елементарна робота цієї сили є скалярним добутком

$$dA = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{d\ell} = P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = d\varphi.$$

Отже, $dA$ – повний диференціал, що і треба було довести.

Неважко довести і обернене твердження: якщо елементарна робота $dA$ сили $\overrightarrow{F}$ при переміщенні на довільний вектор $\overrightarrow{d\ell}$ є повним диференціалом, то існує функція $\varphi$ така, що $\overrightarrow{F} = \operatorname{grad}\varphi$.

◁ *Приклад 4.6.* Нехай нерухомий точковий електричний заряд $Q$ знаходиться у початку системи координат. Нехай положення довільної точки $M(x,y,z)$ у просторі визначається радіус-вектором $\overrightarrow{r}\,\{x,y,z\} = x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j} + z\cdot\overrightarrow{k}$. Як відомо з електростатики, напруженість поля в точці $M$ дорівнює $\overrightarrow{E} = \frac{kQ}{r^3}\cdot\overrightarrow{r}$, а електричний потенціал дорівнює $\varphi = \frac{kQ}{r}$. Тут $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0$ – електрична стала. Переконаємось, що $\overrightarrow{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

Маємо:

$$r = \left|\overrightarrow{r}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = kQ\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{kQ}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{kQx}{r^3}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{kQy}{r^3}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{kQz}{r^3}.$$

Маємо

$$-\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{kQx}{r^3}\cdot\vec{i} + \frac{kQy}{r^3}\cdot\vec{j} + \frac{kQz}{r^3}\cdot\vec{k} =$$

$$= \frac{kQ}{r^3}\left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\right) = \frac{kQ}{r^3}\cdot\vec{r} = \vec{E}.$$

Отже, доведено, що електростатичне поле точкового електричного заряду є потенціальним, і пред'явлено його потенціал. ▷

Якщо поле не є потенціальним, то для нього потенціал не існує.

◁ *Приклад 4.7.* Розглянемо плоске силове поле $\vec{F} = \left\{-\frac{F_0 y}{R}, \frac{F_0 x}{R}, 0\right\}$. Умова (4.4) набуває вигляду

$$\frac{\partial\left(-\frac{F_0 y}{R}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{F_0 x}{R}\right)}{\partial x}, \qquad -\frac{F_0}{R} = \frac{F_0}{R}.$$

При $F_0 \neq 0$ маємо неусувне протиріччя, отже, потенціал $\varphi$ не існує.

Розглянемо роботу цього поля при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$, $z \equiv 0$ в додатному напрямку. Маємо:

$$dA = P\,dx + Q\,dy = -\frac{F_0 y}{R}\,dx + \frac{F_0 x}{R}\,dy = \frac{F_0}{R}\,(x\,dy - y\,dx)\,.$$

Задамося параметризацією кола у вигляді

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi; \\ y = R\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -R\sin\varphi\,d\varphi; \\ y = R\cos\varphi\,d\varphi; \\ \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Тоді

$$A = \oint dA = \frac{F_0}{R}\oint (x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{F_0}{R}\int\limits_0^{2\pi} (R\cos\varphi\cdot R\cos\varphi\,d\varphi + R\sin\varphi\cdot R\sin\varphi\,d\varphi) = F_0 R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = F_0\cdot 2\pi R \neq 0.$$

Отже, розглядуване поле не є потенціальним і не може бути поданим у вигляді градієнта скалярної функції. ▷

# 4.2 Подвійні інтеграли

## 4.2.1 Означення і зміст подвійного інтегралу

Досі ми інтегрували функції однієї змінної. Звернемось тепер до інтегрування функцій двох змінних. До поняття (подвійного) інтегралу від функції $z = f(x, y)$ легко прийти, розглядаючи наступну задачу. Нехай в області $D$, яку обмежено контуром $\Gamma$ на площині $Oxy$, задано функцію $z = f(x, y)$. Її «графіком» є деяка криволінійна поверхня (рис. 4.8). Побудуємо циліндричну

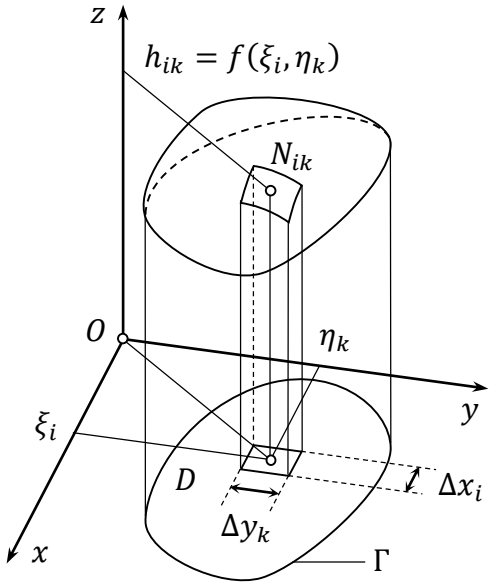



Рисунок 4.8 – До означення подвійного інтегралу

поверхню («бічну стінку»), спрямувавши твірну вздовж осі $Oz$ і здійснивши її рух вздовж контуру Γ. Утворюється циліндричне тіло, обмежене цією «бічною стінкою», площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x, y)$. Поставимо за мету обчислення об'єму цього тіла.

Якби всередині області $D$ функція $f(x, y)$ приймала стале значення, рівне $h$, то об'єм циліндру дорівнював би добутку цієї висоти $h$ і площі області $D$. Проблема полягає саме в тому, що висота точки $N$ на криволінійній поверхні є різною в різних місцях області $D$. Для розв'язання цієї проблеми як раз і потрібен інтеграл: саме він здатен врахувати зміну висоти при переході від однієї точки області $D$ до іншої.

Побудуємо *розбиття* області $D$ (рис. 4.9). Для цього проведемо систему координатних ліній $x = x_i$, де числа $x_i = \text{const}$ утворюють монотонно зростаючу послідовність. Проведені лінії розбивають площину $Oxy$ на вертикальні смуги (в загальному випадку – різної ширини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$). Пронумеруємо ці

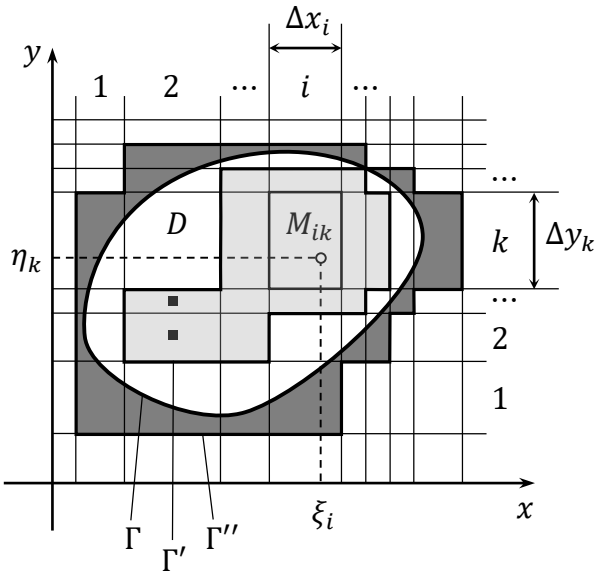



Рисунок 4.9 – Розбиття області $D$

смуги в напрямку збільшення $x$. До нумерації будемо включати лише ті смуги, всередині яких знаходиться хоча б яка-небудь частина області $D$. Проведемо також систему координатних ліній $y = y_i$, де $y_i = \text{const}$, і отримаємо горизонтальні смуги шириною $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Пронумеруємо ці смуги в такий же спосіб. Область $D$ розбивається на елементарні прямокутники. Кожен з них має два номери, $i$ та $k$, відповідно до того, на перетині яких смуг він виникає (рис. 4.9). Очевидно, площа кожного такого прямокутника дорівнює $\Delta S_{ik} = \Delta x_i \, \Delta y_k$.

Всередині $ik$-го прямокутника оберемо довільну точку з координатами $M_{ik}(\xi_i, \eta_k)$. Нехай значення функції в цій точці дорівнює $h_{ik} = f(\xi_i, \eta_k)$. Відповідно, точка $N_{ik}(\xi_i, \eta_k, h_{ik})$ належить розглядуваній поверхні. Тому її апліката $h_{ik}$ відіграє роль висоти «стовпчика», основою якого і є даний прямокутник. Нехай тепер цей прямокутник настільки малий, що зміною висоти $h_{ik}$ всередині нього можна знехтувати. Тоді відновлюється наше

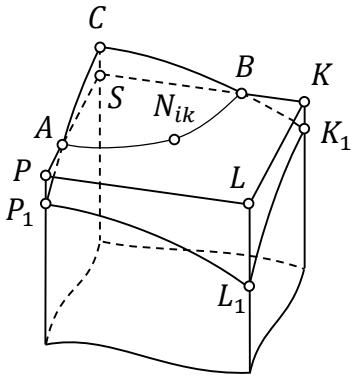



Рисунок 4.10 – Надлишок і нестача об'єму

право[8] застосувати формулу

$$\text{об'єм} = \text{висота} \times \text{площа основи}.$$

Вважаючи, що «стовпчик» зверху обмежено горизонтальною площиною $z = h_{ik}$, для його об'єму маємо:

$$dV_{ik} = h_{ik}\,\Delta S_{ik}.$$

Насправді, шуканий об'єм $\Delta V_{ik}$ «стовпчика» з криволінійною верхньою основою відрізняється від цього виразу. Детально цю відмінність можна побачити на рис. 4.10. Наприклад, за рахунок криволінійної піраміди $SABC$ об'єм $dV_{ik}$ є наближенням шуканого об'єму $\Delta V_{ik}$ *з нестачею*. Але ця нестача при подрібненні розбиття стає некінченно малою третього порядку малості (пропорційною до добутку $SA \times SB \times SC$), в той час як величина $dV_{ik}$ має другий порядок (вона є пропорційною до добутку $\Delta S_{ik} = \Delta x_i \cdot \Delta y_k$). Так само зрізана криволінійна призма $ABKLPK_1L_1P_1$ зумовлює наближення *з надлишком*; цим надлишком можна нехтувати з аналогічної причини. Тому наближено можна покласти:

$$\Delta V_{ik} \approx dV_{ik} = f(\xi_i, \eta_k)\,\Delta S_{ik}.$$

[8]Щоправда, не для усього тіла, а тільки для «стовпчика». Проте – для *кожного* такого «стовпчика».

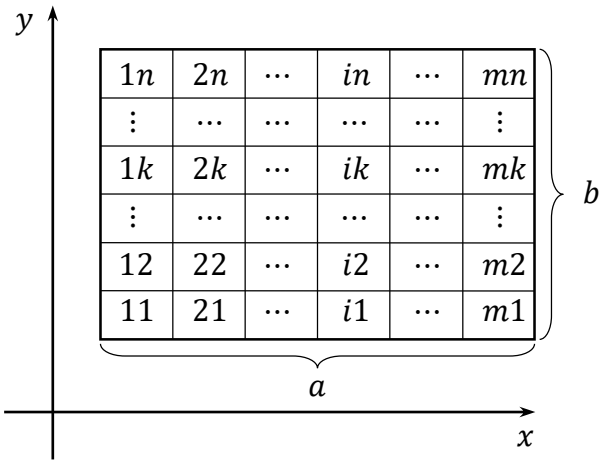



Рисунок 4.11 – Нумерація елементів інтегральної суми

Отже, шуканий об'єм

$$V = \sum_{(i,k)} \Delta V_{ik} \approx \sum_{(i,k)} dV_{ik} = \sum_{(i,k)} f(\xi_i, \eta_k)\, \Delta S_{ik}.$$

Цей вираз є інтегральною сумою. Зробимо два зауваження стосовно цього виразу.

1°. Подвоєний нижній індекс $(i,k)$ відповідає подвоєній сумі. Припустимо поки, що область $D$ – прямокутник, сторони якого дорівнюють $a$ і $b$ і паралельні осям координат. Нехай його ширину $a$ розбито на $m$ рівних частин $dx = \frac{a}{m}$, а висоту $b$ – на $n$ рівних частин $dy = \frac{b}{n}$. Тоді при розбитті виникає $m \times n$ елементарних прямокутників $\Delta S_{ik} = dx\, dy$. Інтегральна сума повинна містити $m \times n$ доданків. Їх нумерацію подано на рис. 4.11. Організувати перебір усіх цих доданків можна в такий спосіб. Спочатку проводимо сумування всередині кожної вертикальної смуги, а потім – за усіма вертикальними смугами:

$$\sum_{(i,k)} dV_{ik} = (dV_{11} + dV_{12} + \cdots + dV_{1n}) +$$

$$+ (dV_{21} + dV_{22} + \cdots + dV_{2n}) + \cdots + (dV_{m1} + dV_{m2} + \cdots + dV_{mn}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} dV_{1k} + \sum_{k=1}^{n} dV_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} dV_{mk} = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n} dV_{ik} \right).$$

Але можна вдіяти і навпаки: спочатку провести сумування всередині кожної горизонтальної смуги, а потім – за усіма горизонтальними смугами:

$$\sum_{(i,k)} dV_{ik} = (dV_{11} + dV_{21} + \cdots + dV_{m1}) +$$

$$+ (dV_{12} + dV_{22} + \cdots + dV_{m2}) + \cdots + (dV_{1n} + dV_{2n} + \cdots + dV_{mn}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} dV_{i1} + \sum_{i=1}^{m} dV_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} dV_{in} = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} dV_{ik} \right).$$

В будь-якому випадку інтегральна сума – це сума сум. В першому разі сума по $k$ є *внутрішньою*, а по $i$ – *зовнішньою*, а у другому – навпаки. Але кінець кінцем усі доданки мають бути враховані, і в якому порядку – неважливо. Тому при зміні порядку сумування дужки не ставлять:

$$\sum_{(i,k)} dV_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} dV_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} dV_{ik}.$$

Ситуація якісно змінюється, коли область $D$ перестає бути прямокутною. Припустимо, вона має форму кола. Зрозуміло, що смуги, які містять центр кола або принаймні розташовані поблизу нього, налічують багато елементів $\Delta S_{ik}$, а смуги біля країв – менше. Тому, проводячи сумування, наприклад, за першою вертикальною смугою, потрібно починати не з $k = 1$, а з деякого більшого номеру, і завершувати не при $k = n$, а раніше. Отже, початок і кінець сумування у різних вертикальних смугах будуть в загальному випадку різними. Інакше кажучи, для врахування геометрії області $D$ потрібно встановити деяку залежність меж сумування у внутрішній сумі від значення поточного індексу зовнішньої суми:

$$\sum_{(i,k)} dV_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=k_1(i)}^{k_2(i)} dV_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=i_1(k)}^{i_2(k)} dV_{ik}.$$

Для даного розбиття залежності $i_{1,2}(k)$ або $k_{1,2}(i)$ повинні бути такими, щоб до інтегральної суми булі залучені 1) усі ті і 2) лише ті елементарні прямокутники, які належать області $D$. Наприклад, якщо враховувати лише прямокутники, які повністю належать області $D$, то для розбиття, наведеного на рис. 4.9, всередині смуги $i = 2$ достатньо обмежитись значеннями $k = 2$ і $k = 3$. Відповідні елементарні прямокутники помічено квадратними маркерами.

Розстановка меж сумування у внутрішній сумі може виявитись доволі делікатною процедурою. Наприклад, нехай область $D$ – кільце з центром в початку координат і внутрішнім і зовнішнім радіусами $r$, $R$. Очевидно, при $x = 0$ маємо: $y \in [-R; -r] \cup [r; R]$. Тому при сумуванні за вертикальною смугою, яка містить центр кільця, внутрішню суму слід розбити на дві: $\sum\limits_{k=1}^{k'} + \sum\limits_{k=k''}^{n}$, а інтервал від $k'$ до $k''$, який відповідає внутрішньому вертикальному діаметру, до процесу сумування залучати не потрібно. Нескладно вигадати і більш складні штучні приклади.

2°. Друге зауваження зробимо стосовно тих приграничних елементарних прямокутників, які входять до області $D$ лише частково. Виявляється, що доданки, які їм відповідають, можна за власним бажанням включати або не включати до інтегральної суми, і це не вплине на остаточний результат.

Справді, інтерес становить не інтегральна сума, а її границя за умови, що розміри усіх елементарних прямокутників стають нескінченно малим. В разі відкидання приграничних прямокутників ми фактично переходимо від контуру $\Gamma$ до «внутрішнього» контуру $\Gamma'$, а в разі врахування – до «зовнішнього» контуру $\Gamma''$ (рис. 4.9). Побудуємо на контурах $\Gamma'$ і $\Gamma''$ циліндричні «бічні стінки». Утворюються вписаний і описаний циліндри. Нехай їх об'єми дорівнюють $V'$ і $V''$. Очевидно, $V' \leqslant V \leqslant V''$. Здійснюючи граничний перехід, отримаємо: $\lim V' = \lim V = \lim V''$.

Тепер можна надати наступне означення.

♦ **Означення 4.3. Подвійним інтегралом** функції $f(x, y)$ по області $D$ називається подвійна границя інтегральної суми

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{(i,k)} f(\xi_i, \eta_k)\, \Delta S_{ik},$$

якщо вона існує, є скінченною і не залежить від способу розбиття області $D$ і способу вибору точок $M_{ik}(\xi_i, \eta_k)$ всередині елементарних прямокутників. Функцію двох змінних, для якої

існує інтеграл в області $D$, називають **інтегровною в області.**

З'ясуємо зміст подвійного інтегралу. Геометричний зміст випливає з наведеного означення: *подвійний інтеграл дорівнює об'єму* циліндричного тіла з нижньою основою $D$ і верхньою криволінійною основою $f(x,y)$:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = V.$$

Ще один аспект геометричного змісту виникає при розгляді інтегралу від функції $f(x,y) \equiv 1$. Маємо:

$$dV = f(x,y)\,dS = 1 \cdot dS = dS,$$

тобто черговий доданок інтегральної сумі в цьому разі дорівнює площі елементарного прямокутника. Тоді ясно, що границя інтегральної сумми *дорівнює площі* області $D$:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = S_D.$$

Поєднуючи ці два аспекти, неважко сформулювати поняття інтегрального середнього функції двох змінних в даній області. Аналогічно до одновимірного випадку (див. п. 2.3.1.2), домовимось інтегральним середнім функції двох змінних в даній області називати висоту $\langle f \rangle$ циліндру з плоскою верхньою основою, рівновеликого даному циліндрові: $\langle f \rangle \cdot S_D = V$. Тоді

$$\langle f \rangle = \frac{V}{S_D} = \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,dS}{\iint\limits_D dS}.$$

Розглянемо також механічний зміст подвійного інтегралу. Нехай підінтегральна функція $\sigma(x,y)$ є поверхневою густиною в точці $M(x,y)$ області $D$ (див. с. 86). Тоді черговий доданок інтегральної сумі дорівнює масі елементу області: $dm = \sigma\,dS$, а границя інтегральної сумми *дорівнює масі* області $D$:

$$\iint\limits_D \sigma(x,y)\,dS = m_D.$$

### 4.2.2 Властивості подвійного інтегралу

Як і усім інтегралам Рімана, подвійному інтегралу притаманні обидві наступні властивості.

1°. **Лінійність:**

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, dS = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\, dS + \beta \iint\limits_D g(x,y)\, dS.$$

2°. **Адитивність.** Нехай область інтегрування розбито на дві частини, які не перекриваються: $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Тоді

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\, dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dS.$$

### 4.2.3 Обчислення подвійного інтегралу

З метою практичного обчислення подвійний інтеграл зводять до *повторного*. Ми вже знаємо що подвійний інтеграл дорівнює об'єму під поверхнею. Обчислимо цей об'єм в інший спосіб, два рази поспіль застосувавши звичайний визначений інтеграл.

Нехай функцію $z = f(x,y)$ визначено в області $D$, яку обмежено прямими $x = a$, $x = b$ і графіками функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ при $x \in [a;b]$). «Графіком» функції $z = f(x,y)$ є деяка поверхня $\Sigma$ (рис. 4.12). Побудуємо її переріз площиною $x = x_0$, де $x_0 \in (a;b)$, $x_0 = \text{const}$. В перерізі утворюється деяка крива $LMN$. Її рівняння: $z = g(y)$, де $g(y) = f(x_0, y)$ – функція однієї змінної[9]. Нас цікавить поведінка цієї функції лише в інтервалі $y \in [y_L, y_N]$. Важливо зауважити, що ординати $y_L$, $y_N$ в загальному випадку залежать від того, в якому місці проведено переріз $x = x_0$. З урахуванням геометрії області $D$ маємо: $y_L = \varphi_1(x_0)$, $y_N = \varphi_2(x_0)$. Тоді згідно геометричного змісту визначеного інтеграла площа криволінійної трапеції $KLMNP$ дорівнює

$$Q(x_0) = \int\limits_{y_L}^{y_N} g(y)\, dy = \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\, dy.$$

[9] Звичайно, обираючи в інший спосіб число $x_0$, ми отримаємо іншу криву $\tilde{L}\tilde{M}\tilde{N}$. Вона матиме інше рівняння $\tilde{g}(y) = f(\tilde{x}_0, y)$.

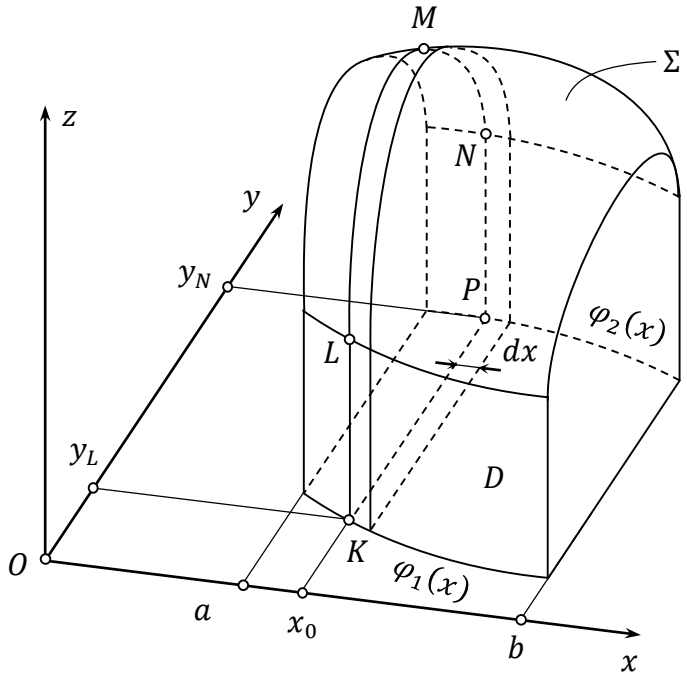



Рисунок 4.12 – Зведення подвійного інтегралу до повторного

При проведенні «сусіднього» перерізу $x = x_0 + dx$ утворюється шар, об'єм якого з точністю до малих вищих порядків становить $dV(x_0) = Q(x_0)\,dx$. Оскільки цей об'єм обчислений в загальному вигляді для довільної абсциси, то індекс «нульове» можна опустити. Підсумовуючи об'єми усіх таких шарів, отримуємо об'єм, укладений між областю $D$ і поверхнею $\Sigma$:

$$V = \int dV(x) = \int_a^b Q(x)\,dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Тепер, прирівнюючи об'єм $V$ до самого себе, отримуємо пра-

ктичну формулу для обчислення подвійного інтегралу:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Тут інтеграл за змінною $y$ називають внутрішнім, а за змінною $x$ – зовнішнім. Виходячи з логіки виведення цієї формули, внутрішній інтеграл обчислюють, вважаючи $x$ сталим параметром. Тому внутрішній інтеграл залежить від $x$, тобто є функцією від $x$. (Зовнішній) інтеграл від цієї функції – стале число. Зауважимо, межі інтегрування у внутрішньому інтегралі можуть залежати від зовнішньої змінної, а межі інтегрування у зовнішньому інтегралі повинні бути сталими. Можна сказати, інтегруючи вперше (тобто обчислюючи внутрішній інтеграл), ми позбавляємось однієї змінної $y$, а інтегруючи вдруге (тобто обчислюючи зовнішній інтеграл) – іншої змінної $x$. Додамо також, оскільки порядок інтегрування вже встановлено, дужки у виведеній формулі не пишуть. Натомість, їй надають вигляду:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.}$$

Тут спочатку при сталому $x$ за формулою Ньютона-Лейбніца обчислюють інтеграл за змінною $y$, а потім «вставляють» його між символами $\int_a^b$ і $dx$.

Розглянемо тепер випадок, коли область $D$ обмежено прямими $y = c$, $y = d$ і графіками функцій $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ ($\psi_1(y) < \psi_2(y)$ при $y \in [c;d]$). Розмірковуючи аналогічно, отримуємо:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.}$$

Тепер внутрішнім є інтеграл за змінною $x$. Його обчислюють за формулою Ньютона-Лейбніца і «вставляють» між символами $\int_c^d$ і $dy$.

◁ *Приклад 4.8.* Обчислимо об'єм піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (рис. 4.13).

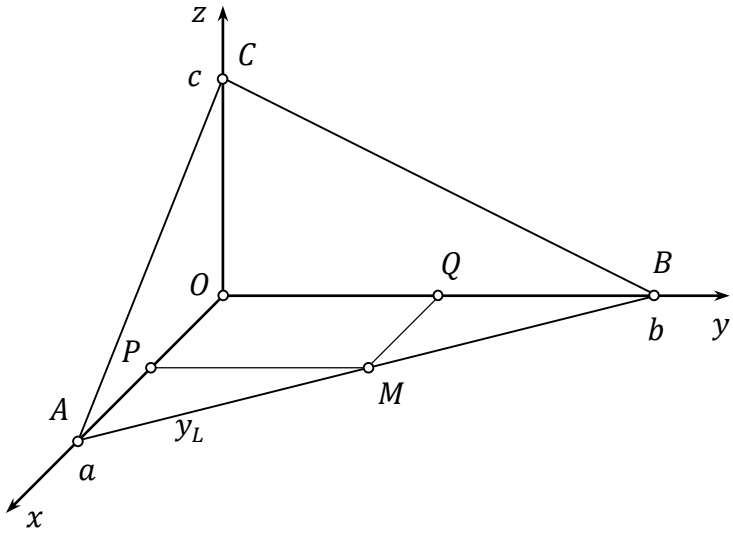



Рисунок 4.13 – Інтегрування за трикутною областю

Очевидно, цей об'єм дорівнює

$$V = \iint\limits_D z(x,y)\,dS = \iint\limits_{\triangle AOB} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\,dx\,dy.$$

Зведемо цей подвійний інтеграл до повторного. Нехай внутрішнім є інтегрування за $y$. Воно відбувається для кожного сталого $x$ із інтервалу від точки $O$ до точки $A$, тобто з інтервалу $x \in [0;a]$. Це і є межі зовнішнього інтегрування. Межі внутрішнього інтегрування потрібно розставити так, щоб були враховані усі ті і лише ті точки, які належать трикутнику $AOB$. Наприклад, якщо $x = x_P$, то $y$ має змінюватись в інтервалі від $y_P$ до $y_M$, тобто від нуля до $y = \varphi_2(x) = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ (останній вираз знайдено з рівняння прямої $AB$, яке «у відрізках» є $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$). Маємо:

$$V = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\,dy =$$

$$= c \int\limits_0^a dx \left( y - \frac{xy}{a} - \frac{y^2}{2b} \right) \Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} =$$

$$= c \int\limits_0^a \left[ b\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{xb\left(1-\frac{x}{a}\right)}{a} - \frac{b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2}{2b} \right] dx =$$

$$= \frac{c}{2a^2} \int\limits_0^a \left[ 2ab\,(a-x) - 2xb\,(a-x) - b\,(a-x)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{c}{2a^2} \int\limits_0^a \left( bx^2 - 2abx + a^2 b \right) dx =$$

$$= \frac{c}{2a^2} \left( \frac{1}{3} bx^3 - abx^2 + a^2 bx \right) \Bigg|_0^a = \frac{c}{2a^2} \cdot \frac{1}{3} ba^3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} ab \right) c,$$

тобто третина добутку площі основи на висоту, як і має бути.

Нехай тепер внутрішнім є інтегрування за $x$. Воно відбувається для кожного сталого $y$ із інтервалу від точки $O$ до точки $B$, тобто з інтервалу $y \in [0; b]$. Це і є межі зовнішнього інтегрування. Межі внутрішнього інтегрування потрібно розставити так, щоб були враховані усі ті і лише ті точки, які належать трикутнику $AOB$. Наприклад, якщо $y = y_Q$, то $x$ має змінюватись в інтервалі від $x_Q$ до $x_M$, тобто від нуля до $x = \psi_2(y) = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$ (останній вираз знову знайдено з рівняння прямої $AB$). Маємо:

$$V = \int\limits_0^b dy \int\limits_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dx =$$

$$= c \int\limits_0^b dy \left( x - \frac{x^2}{2a} - \frac{xy}{b} \right) \Bigg|_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} =$$

$$= c \int\limits_0^b \left[ a\left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{a^2\left(1-\frac{y}{b}\right)^2}{2a} - \frac{ya\left(1-\frac{y}{b}\right)}{b} \right] dy =$$

$$= \frac{c}{2b^2} \int\limits_0^b \left[ 2ab\,(b-y) - a\,(b-y)^2 - 2ya\,(b-y) \right] dy =$$

$$= \frac{c}{2b^2} \int\limits_0^b \left(ay^2 - 2aby + ab^2\right) dy =$$

$$= \frac{c}{2b^2} \left(\frac{1}{3}ay^3 - aby^2 + ab^2 y\right)\Big|_0^b = \frac{c}{2b^2} \cdot \frac{1}{3}ab^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ab\right)c.$$

Звичайно, результат – такий самий. ▷

Окремий випадок виникає, коли область $D$ є прямокутником, обмеженим прямими $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. В цьому разі сталими будуть не лише зовнішні, а також і внутрішні межі інтегрування:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx.$$

Якщо при цьому підінтегральна функція «розпадається» на добуток двох функцій від однієї змінної кожна, то подвійний інтеграл перетворюється на добуток двох визначених інтегралів:

$$\iint\limits_D f_1(x) \cdot f_2(y)\, dS = \int\limits_a^b f_1(x)\, dx \cdot \int\limits_c^d f_2(y)\, dy.$$

Справді, нехай $F_1(x)$, $F_2(y)$ – первісні для $f_1(x)$, $f_2(y)$. Тоді:

$$\iint\limits_D f_1(x) \cdot f_2(y)\, dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f_1(x) \cdot f_2(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx\, \left(f_1(x) \cdot F_2(y)\right)\Big|_c^d = \int\limits_a^b f_1(x)\left(F_2(d) - F_2(c)\right) dx =$$

$$= \left(F_2(d) - F_2(c)\right) \int\limits_a^b f_1(x)\, dx =$$

$$= \left(F_2(d) - F_2(c)\right) F_1(x)\Big|_a^b = \left(F_2(d) - F_2(c)\right)\left(F_1(b) - F_1(a)\right).$$

Очевидно, таку саму відповідь ми отримаємо при обчисленні визначених інтегралів окремо.

Нехай тепер границя області $D$ не містить ні ліній $x = \text{const}$, ані ліній $y = \text{const}$. В цьому разі можливе розбиття області на окремі частини і подальше використання адитивності подвійного інтегралу.

◁ *Приклад 4.9.* Нехай область $D$ обмежено прямими $y = 2x$, $y = 2x - 6$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 3$ (рис. 4.14). Необхідно розставити

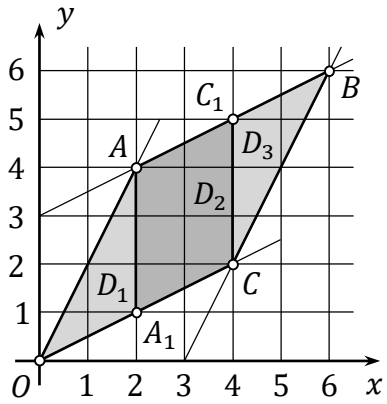



Рисунок 4.14 – Розбиття області

межі інтегрування.

Розв'язуючи сумісно пари заданих рівнянь непаралельних прямих, отримуємо координати кутових точок границі:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow O(0;0); \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Rightarrow A(2;4);$$

$$\begin{cases} y = 2x - 6, \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Rightarrow B(6;6); \qquad \begin{cases} y = 2x - 6, \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow C(4;2).$$

Проведемо вертикальні прямі через точки $A$ і $C$ і отримаємо на контурі точки $A_1(2;1)$ і $C_1(4;5)$. Тепер область $D$ розбито на три підобласті $D_1$ (трикутник $OAA_1$), $D_2$ (паралелограм $AC_1CA_1$) і $D_3$ (трикутник $CC_1B$). За адитивністю маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1 \cup D_2 \cup D_3} f(x,y)\,dS =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dS =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}x+3} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{2x-6}^{\frac{1}{2}x+3} f(x,y)\,dy.$$

Тут для області $D_1$ маємо: $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x$, $\varphi_2(x) = 2x$; для області $D_2$ маємо: $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x + 3$; для області $D_3$ маємо: $\varphi_1(x) = 2x - 6$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

Зауважимо, внутрішнім можна було б зробити і інтегрування за змінною $x$. Але тоді область $D$ потрібно було б розбивати горизонтальними прямими, поведеними через точки $A$ і $C$, а у внутрішніх межах замість $\varphi_{1,2}(x)$ використовувати функції $\psi_{1,2}(y)$. Їх вигляд можна знайти, виражаючи $x$ через $y$ із заданих рівнянь прямих. Вираз для подвійного інтегралу набував би вигляду

$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{2y} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{\frac{1}{2}y+3} f(x,y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{2y-6}^{\frac{1}{2}y+3} f(x,y)\,dx. \triangleright$$

Зміна порядку інтегрування іноді може спрощувати розрахунки завдяки об'єднанню областей інтегрування.

$\triangleleft$ *Приклад 4.10.* Змінимо порядок інтегрування у сумі

$$J = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^8 dx \int\limits_0^{4-\frac{1}{2}x} f(x,y)\,dy.$$

З огляду на дані межі інтегрування, зобразимо обидві області інтегрування. В першому випадку область $D_1$ обмежена прямими $y = 0$, $x = 4$ і кривою $y = \sqrt{x}$, а у другому – область $D_2$ обмежена прямими $y = 0$, $x = 4$, $y = 4 - \frac{1}{2}x$ (рис. 4.15). Маємо:

$$J = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dS.$$

З рівнянь $y = \sqrt{x}$, $y = 4 - \frac{1}{2}x$ кривих, які обмежують області $D_1$, $D_2$, знаходимо: $x = \psi_1(y) = y^2$, $x = \psi_2(y) = 8 - 2y$. Оскільки

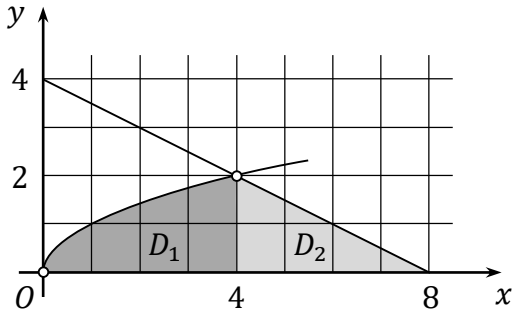



Рисунок 4.15 – Розбиття області

в області $D_1 \cup D_2$ ордината обмежена нерівністю $0 \leqslant y \leqslant 2$, то при зміні порядку інтегрування оримуємо:

$$J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{8-2y} f(x,y)\,dx. \triangleright$$

### 4.2.4 Заміна змінних у подвійному інтегралі

Заміну змінних у подвійному інтегралі в загальному випадку вводять за допомогою системи рівнянь

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta); \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases} \tag{4.5}$$

Функції $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ будемо вважати диференційовними, а їх частинні похідні $x'_\xi$, $x'_\eta$, $y'_\xi$, $y'_\eta$ – неперервними.

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка замкненої[10] області $D$ в «старій» системі координат $Oxy$. Нехай $\Delta$ – множина усіх розв'язків $(\xi,\eta)$ системи (4.5) при $\forall (x,y) \in D$. Кожен такий розв'язок можна інтерпретувати як точку $\mu(\xi,\eta)$ в «новій» системі координат $O\xi\eta$.

Якщо 1) кожній точці $M \in D$ відповідає тільки одна[11] точка

[10] Область $D$ називають **замкненою,** якщо точки границі також належать цій області.

[11] Тобто якщо система (4.5) при довільних $x$, $y$ має розв'язок $(\xi,\eta)$, причому тільки один.

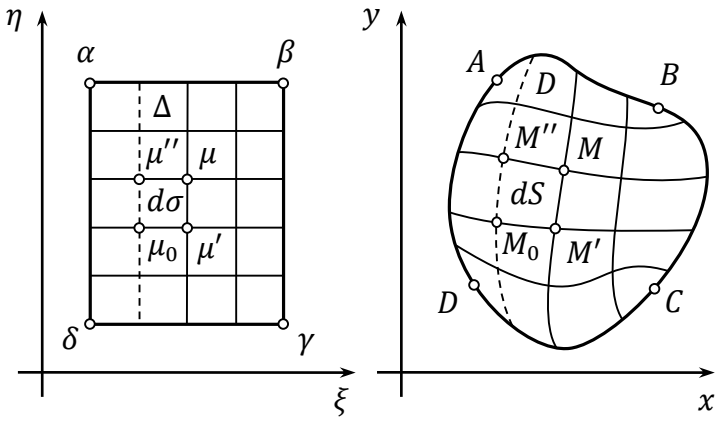



Рисунок 4.16 – Криволінійні координати

$\mu \in \Delta$ і 2) будь-яким різним точкам $M' \in D$, $M'' \in D$ відповідають різні точки $\mu' \in \Delta$, $\mu'' \in \Delta$, то кажуть, що система (4.5) встановлює **взаємно однозначну** відповідність між областями $D$ і $\Delta$ (взаємно однозначне відображення областей $D$ і $\Delta$). Це означає, що за точкою $M(x, y)$ можна знайти точку $\mu(\xi, \eta)$, і причому тільки одну. І навпаки, за точкою $\mu(\xi, \eta)$ можна знайти точку $M(x, y)$, і причому тільки одну. Взаємну відповідність цих точок позначатимемо символом $M \leftrightarrow \mu$. Будемо вважати, що ця відповідність розповсюджується на усі точки областей $D$, $\Delta$ аж до границі. Надалі розглядатимемо лише такі функції $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, які забезпечують взаємну однозначність відображення областей $D$ і $\Delta$.

Нехай область $\Delta$ є прямокутником, сторони якого паралельні осям $O\xi$, $O\eta$ «нової» системи координат (рис. 4.16).

Нехай $\xi = \xi_0 = \text{const}$. Це рівняння описує вертикальну координатну лінію в «новій» системі; на рис. 4.16 вона зображена як штрихова. Система (4.5) набуває вигляду

$$\begin{cases} x = x(\xi_0, \eta); \\ y = y(\xi_0, \eta). \end{cases}$$

Тепер тут праві частини – функції однієї змінної $\eta$. Тому можна вважати, що ця система є параметричним заданням деякої

функції $y(x)$ ($\eta$ – параметр, який, принаймні в принципі, можна з цієї системи виключити). Графік цієї функції в «старій» системі $Oxy$ на рис. 4.16 також зображено штриховою лінією. Можна сказати, рівняння цієї штрихової кривої в термінах «нових» координат має вигляд $\xi = \xi_0$. Перебираючи різні значення $\xi_0$, отримаємо сімейство вертикалей в «новій» системі. Йому відповідає сімейство кривих в «старій» системі.

Аналогічно, покладаючи $\eta = \eta_0 = \text{const}$, отримаємо сімейство горизонталей в «новій» системі і відповідне до нього сімейство кривих в «старій» системі. Обидва сімейства кривих в «старій» системі утворюють криволінійну координатну сітку. Очевидно, якщо $\mu_0(\xi_0, \eta_0) \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$, то точка $M_0$ знаходится на перетині кривих $\xi = \xi_0$ і $\eta = \eta_0$. Отже, можна сказати, що система (4.5) в «старій» області $D$ визначає деяку криволінійну систему координат.

◁ *Приклад 4.11.* Розглянемо перетворення координат

$$\begin{cases} x = 2\xi - 2\eta; \\ y = \xi + \eta. \end{cases}$$

Матриця перетворення має визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Тому ця система має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Отже, взаємна однозначність відображення $\mu(\xi, \eta) \leftrightarrow M(x, y)$ ґарантується.

Покладемо $\xi = \xi_0 = \text{const}$:

$$\begin{cases} x(\eta) = 2\xi_0 - 2\eta; \\ y(\eta) = \xi_0 + \eta. \end{cases}$$

Отримали параметричне задання сімейства координатних ліній $\xi = \text{const}$. Перейдемо до явного задання, позбавившись параметру $\eta$. Для цього домножимо друге рівняння на 2 і додамо обидва рівняння:

$$x + 2y = 4\xi_0, \qquad y(x) = -\frac{1}{2}x + 2\xi_0.$$

Покладемо, наприклад $\xi_0 = 2$. Тоді координатна лінія $\xi = 2$ в «старих» координатах має рівняння $y = -\frac{1}{2}x + 4$ (рис. 4.17).

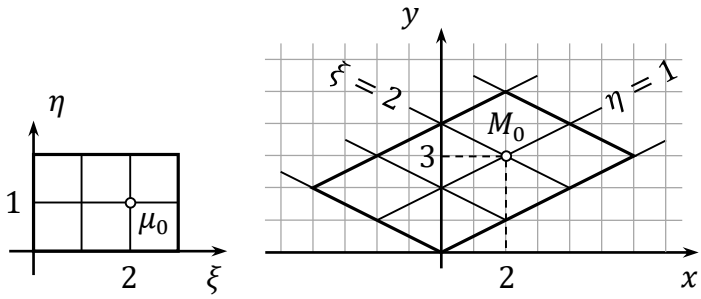



Рисунок 4.17 – Приклад лінійного перетворення координат

Покладемо тепер $\eta = \eta_0 = \text{const}$:

$$\begin{cases} x(\xi) = 2\xi - 2\eta_0; \\ y(\xi) = \xi + \eta_0. \end{cases}$$

Отримали параметричне задання сімейства координатних ліній $\eta = \text{const}$. Перейдемо до явного задання, позбавившись параметру $\xi$. Для цього домножимо друге рівняння на 2 і віднімемо перше рівняння з другого:

$$2y - x = 4\eta_0, \qquad y(x) = \frac{1}{2}x + 2\eta_0.$$

Покладемо, наприклад, $\eta_0 = 1$. Тоді координатна лінія $\eta = 1$ в «старих» координатах має рівняння $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Нехай в «нових» координатах деяка точка $\mu_0$ має координати $\mu_0(2;1)$. Вона відображається на точку $M_0(x_0, y_0)$, координати якої з умови задачі

$$\begin{cases} x_0 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2; \\ y_0 = 2 + 1 = 3. \end{cases}$$

Отже, точка $M_0$ має координати $M_0(2;3)$. Легко бачити, що в «старих» координатах точка $M_0$ лежить на перетині ліній $\xi = 2$ і $\eta = 1$, тобто на перетині ліній $y = -\frac{1}{2}x + 4$ і $y = \frac{1}{2}x + 2$. ▷

При побудові сімейств кривих $\xi = \xi_0$ і $\eta = \eta_0$ область $D$ розбивається на елементарні криволінійні чотирикутники, кожен з яких відображається на елементарний прямолінійний прямокутник в «новій» системі. Поставимо за мету знаходження

зв'язку між площами «старого» криволінійного чотирикутника $M_0M'MM''$ і відповідного «нового» прямолінійного прямокутника $\mu_0\mu'\mu\mu''$.

Розглянемо прямокутник $\mu_0\mu'\mu\mu''$ (рис. 4.16). Нехай розміри ґратки, утвореної сусідніми координатними лініями, становлять $d\xi \times d\eta$. Тоді в «новій» системі координати вершин

$$\mu_0(\xi_0, \eta_0), \quad \mu'(\xi_0 + d\xi, \eta_0), \quad \mu(\xi_0 + d\xi, \eta_0 + d\eta), \quad \mu'(\xi_0, \eta_0 + d\eta).$$

Нехай $\mu_0 \leftrightarrow M_0$, $\mu' \leftrightarrow M'$, $\mu \leftrightarrow M$, $\mu'' \leftrightarrow M''$. Нехай $d\xi \to 0$, $d\eta \to 0$. Тоді в першому наближенні (при нехтуванні малими вищих порядків) чотирикутник $M_0M'MM''$ є паралелограмом. Справді, побудуємо *лінеаризацію* системи (4.5) в околі точки $\mu_0$. Оскільки праві частини – диференційовні функції, підмінимо їх прирости першими диференціалами і нехтуємо малими вищих порядків. Тоді:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = x(\xi_0, \eta_0) + \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{\mu_0} d\xi + \left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{\mu_0} d\eta; \\ y(\xi, \eta) = y(\xi_0, \eta_0) + \left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\mu_0} d\xi + \left.\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|_{\mu_0} d\eta, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_\xi \, d\xi + x'_\eta \, d\eta; \\ y = y_0 + y'_\xi \, d\xi + y'_\eta \, d\eta. \end{cases} \tag{4.6}$$

Оскільки тут усі частинні похідні обчислено в даній точці $\mu_0$, то вони є сталими числами. Тоді (принаймні для точок $\mu$, близьких до точки $\mu_0$), це перетворення є лінійним. А воно, як ми встановили в останньому прикладі, перетворює прямокутник $\mu_0\mu'\mu\mu''$ на паралелограм $M_0M'MM''$. Перейдемо до обчислення його площі. Оскільки $M' \leftrightarrow \mu'$ і точки $\mu_0$ і $\mu'$ лежать на одній координатній лінії $\eta = \text{const}$, то $d\eta = 0$. Тоді з використанням (4.6) маємо: $M'(x_0 + x'_\xi \, d\xi, y_0 + y'_\xi \, d\xi)$. Аналогічно, оскільки $M'' \leftrightarrow \mu''$ і точки $\mu_0$ і $\mu''$ лежать на одній координатній лінії $\xi = \text{const}$, то $d\xi = 0$. Тоді з (4.6) випливає: $M''(x_0 + x'_\eta \, d\eta, y_0 + y'_\eta \, d\eta)$. Тоді вектори, побудовані на суміжних сторонах паралелограма, мають координати:

$$\overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM_0} = \left\{x'_\xi \, d\xi; y'_\xi \, d\xi; 0\right\},$$

$$\overrightarrow{M_0M''} = \overrightarrow{OM''} - \overrightarrow{OM_0} = \left\{x'_\eta \, d\eta; y'_\eta \, d\eta; 0\right\}.$$

Площа паралелограма $M_0M'MM''$ дорівнює модулю векторного добутку цих векторів. Маємо:

$$\overrightarrow{M_0M'} \times \overrightarrow{M_0M''} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x'_\xi\, d\xi & y'_\xi\, d\xi & 0 \\ x'_\eta\, d\eta & y'_\eta\, d\eta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x'_\xi\, d\xi & y'_\xi\, d\xi \\ x'_\eta\, d\eta & y'_\eta\, d\eta \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix} d\xi\, d\eta \cdot \overrightarrow{k}.$$

Позначимо

$$J = \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}.$$

Цей визначник на честь Якóбі[12] називають **якобіáном** перетворення координат. Позначаючи площу прямокутника $\mu_0\mu'\mu\mu''$ через $d\sigma = d\xi\, d\eta$, для площі паралелограма $M_0M'MM''$ маємо:

$$dS = \left|\overrightarrow{M_0M'} \times \overrightarrow{M_0M''}\right| = |J|\, d\sigma.$$

Отже, **відношення елементарних площ в «старих» і «нових» координатах дорівнює модулю якобіана перетворення.**

Особливий випадок виникає, якщо $|J| = 0$. При цьому система (4.6) стає виродженою, а стовпці якобіану – лінійно залежними. Отже, існує число $k$ таке, що $y'_\xi = kx'_\xi$ і $y'_\eta = kx'_\eta$. Тоді друге рівняння системи (4.6) набуває вигляду:

$$y - y_0 = y'_\xi\, d\xi + y'_\eta\, d\eta = k\left(x'_\xi\, d\xi + x'_\eta\, d\eta\right) = k(x - x_0).$$

Отже, якщо в області $\Delta$ реалізувати обидва ступеня свободи (рух точки $\mu$ і вздовж осі $O\xi$, і вздовж осі $O\eta$), то в області $D$ буде реалізований лише один ступінь свободи – рух точки $M$ вздовж прямої[13] $(\ell)\ :\ y - y_0 = k(x - x_0)$. Це означає, що такою заміною ми не зможемо «покрити» усі потрібні точки області $D$, оскільки будемо залишати точку $M$ тільки на цій прямій.

Якщо система (4.6) стає виродженою, то разом з цим і перетворення координат, яке вона визначає, називають *виродженим*. Воно є непридатним для обчислення подвійних інтегралів.

[12]Карл Густав Якоб Якобі (1804-1851) – німецький математик і механік. Вніс величезний внесок до комплексного аналізу, лінійної алгебри та інших розділів математики і механіки.

[13]До речі, напрямним вектором цієї прямої є одночасно і вектор $\overrightarrow{M_0M'}$, і вектор $\overrightarrow{M_0M''}$, оскільки при $|J| = 0$ вони стають колінеарними.

Зауважимо також, взаємна однозначність відображення областей $D$ і $\Delta$ у випадку виродженого перетворення координат порушується. Справді, в «нових» координатах розглянемо пряму $(\lambda)$ : $x'_\xi(\xi-\xi_0)+x'_\eta(\eta-\eta_0)=C=\text{const}$. Система (4.6) набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = x_0 + C; \\ y = y_0 + kC. \end{cases}$$

Власне, це і є параметричне задання прямої $(\ell)$. В цьому легко переконатись, виключивши звідси $C$. Отже, будь-яка точка $\mu$ прямої $(\lambda)$ відображається на одну й ту ж саму точку $M(x_0+C, y_0+kC)$ прямої $(\ell)$. Якщо обрати інше значення $\tilde{C}$ (замість $C$), отримаємо іншу пряму $(\tilde{\lambda})$. Кожна її точка $\tilde{\mu}$ відобразиться на іншу точку $\tilde{M}(x_0+\tilde{C}, y_0+k\tilde{C})$ тієї самої прямої $(\ell)$.

Додамо також наступне. Якщо перетворення координат є лінійним, то $|J| = \text{const}$. Тому якщо виродження настає, то одразу в усій області $\Delta$. В разі нелінійних перетворень якобіан є функцією точки $\mu$. Тому нелінійне перетворення може виявитись виродженим в одній точці і про цьому невиродженим в іншій. Проте усе сказане має місце принаймні в околі точки $\mu^*$, в якій настає виродження $(J(\mu^*)=0)$.

◁ *Приклад 4.12.* Розглянемо знову перетворення координат

$$\begin{cases} x = 2\xi - 2\eta; \\ y = \xi + \eta. \end{cases}$$

Модуль якобіана:

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = |4| = 4 \neq 0.$$

Отже, перетворення невироджене. Площа елементарного паралелограму в «старих» координатах дорівнює $dS = 4\,d\xi\,d\eta$. Справді, як видно з рис. 4.17, при $d\xi = d\eta = 1$ в «старих» координатах виникають паралелограми з площею, рівною $4$. ▷

◁ *Приклад 4.13.* Розглянемо перетворення координат

$$\begin{cases} x = \xi + \eta; \\ y = 2\xi + 2\eta. \end{cases}$$

Модуль якобіана:

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = |0| = 0.$$

Отже, перетворення вироджене і для заміни змінних непридатне. Справді, навіть якщо $\xi$ і $\eta$ незалежні, між $x$ і $y$ виникає

очевидна залежність: $y = 2x$. Цією прямою всю область $D$ в «старих» координатах покрити неможливо. ▷

Обчислення визначника матриці Якобі дозволяє розглянути додаткове питання про взаємну орієнтацію «старої» і «нової» систем координат. Припустимо, ми здійснили ще одне перетворення: $\xi = \tilde{\eta}$, $\eta = \tilde{\xi}$. Воно зводиться лише до взаємної заміни «нових» абсциси і ординати одна на одну і тому виглядає як здійснення осьової симетрії відносно осі $\eta = \xi$. В «новихнових» координатах $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ ми отримаємо дзеркальне відображення області $\Delta$. Напрямок обходу її контура зміниться на протилежний. На рис. 4.16, який відповідає випадку $\det J > 0$, обходу контура $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \alpha$ за годинниковою стрілкою відповідає обхід контура $A \to B \to C \to D \to A$ також за годинниковою стрілкою. Отже, «стара» і «нова» системи мають однакові орієнтації. При взаємозаміні $\xi \leftrightarrow \eta$ рядки матриці Якобі міняються місцями, і знак визначника змінюється на протилежний. Орієнтації систем також стають протилежними.

Якобі побудував загальну теорію якобіанів. Вона має різноманітні застосування, наприклад, при аналізі неявних функцій багатьох змінних. Ми обмежились лише геометричним застосуванням якобіану: його модуль встановлює відношення елементарних площ при заміні змінних. Наведене нами геометричне доведення цього факту належить Остроградському[14]. В разі узагальнення системи (4.5) на випадок трьох змінних координатні лінії замінюють на координатні поверхні, прямокутники – на паралелепіпеди, а елементи площі – на елементи об'єму. Натомість, остаточний висновок залишається незмінним:

$$dV = |J| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3.$$

Тут $J$ – матриця Якобі порядку $3 \times 3$. Її $ik$-й матричний елемент дорівнює частинній похідній $i$-ї «старої» координати за $k$-ю «новою» координатою.

Знайдемо якобіан переходу до полярних координат. Система (4.5) набуває вигляду

$$\begin{cases} x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi; \\ y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

[14]Михайло Васильович Остроградський (1801-1861) – український математик, механік і фізик. У 2001 році ЮНЕСКО внесла Михайла Васильовича Остроградського до списку видатних математиків світу.

Матриця Якобі:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Її визначник:

$$\det J = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Отже, при переході до полярних координат вираз для елементу площі $dS = dx\,dy$ потрібно заміняти на добуток

$$\boxed{dS = \rho\,d\rho\,d\varphi.}$$

Цей факт має настільки важливе практичне значення, що ми не можемо не приділити уваги його геометричному тлумаченню. Нехай деяка точка $M_0(x, y)$ має «нові» полярні координати $\rho$ і $\varphi$ (рис. 4.18). Проведемо два кола радіусами $\rho$ і $\rho + d\rho$, і

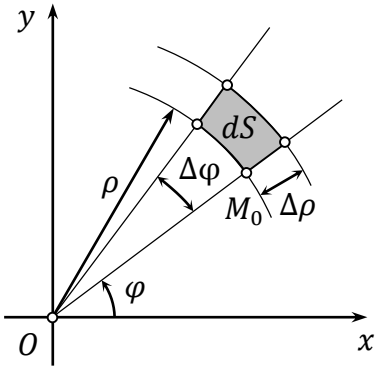



Рисунок 4.18 – Елемент площі в полярних координатах

утворюється кільце. Проведемо два променя під кутами $\varphi$ і $\varphi + d\varphi$ до додатного напрямку осі $Ox$, і таким чином утворюється сектор. На перетині цих кільця і сектору виникає елемент площі $dS$ в полярних координатах. Обчислимо його. Площа усього кільця дорівнює $S_{\text{кільця}} = \pi\left((\rho + d\rho)^2 - \rho^2\right)$. Оскільки в повному оберті міститься $2\pi$ радіан, то на один радіан приходиться площа $\frac{1}{2\pi}S_{\text{кільця}}$, а на $d\varphi$ радіан – площа, в $d\varphi$ разів більша. Отже,

точний вираз для елементу площі

$$\Delta S = \frac{1}{2\pi} S_{\text{кільця}} \cdot d\varphi = \frac{1}{2}\left((\rho + d\rho)^2 - \rho^2\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\rho\, d\rho + (d\rho)^2\right) d\varphi.$$

Нехтуючи малою $(d\rho)^2$ другого порядку малості, отримуємо потрібне:

$$dS = \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

◁ *Приклад 4.14.* Обчислимо *інтеграл Пуассона*

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Враховуючи незалежність інтегралу від позначення змінної інтегрування, маємо:

$$J^2 = J \cdot J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx\, dy =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi & x^2 + y^2 = \rho^2 \\ y = \rho\sin\varphi & dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{matrix} \right\| = \iint\limits_D e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \left\| \begin{matrix} z = \rho^2 & \rho = 0 \Rightarrow z = 0 \\ dz = 2\rho\, d\rho & \rho \to +\infty \Rightarrow z \to +\infty \\ \rho\, d\rho = \frac{1}{2} dz & \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\left(e^{-z}\Big|_{+\infty}^{0}\right)}_{=1} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Оскільки $J^2 = \pi$, то остаточно отримуємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Зауважимо, цей інтеграл знаходить широке застосування в теорії ймовірностей і математичній статистиці, а також у багатьох прикладних дисциплінах. ▷

### 4.2.5 Формула Гріна

Формула Гріна встановлює тісний зв'язок між подвійним інтегралом і криволінійним інтегралом другого роду.

Розглянемо криволінійну трапецію $KLMN$ (рис. 4.19), яку

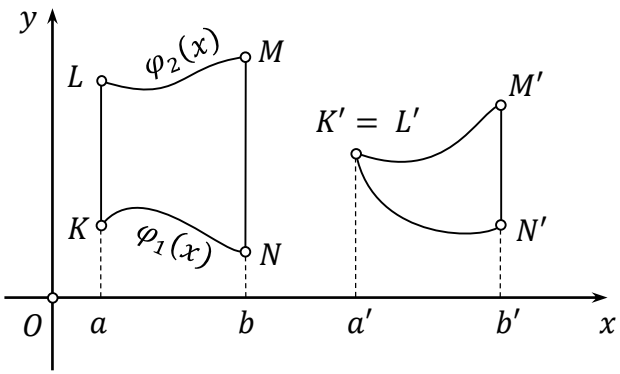



Рисунок 4.19 – До виводу формули Гріна

обмежено прямими $x = a$ (ділянка $KL$), $x = b$ (ділянка $MN$) і графіками функцій $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ (ділянки $KN$, $LM$). Нехай функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ є однозначними (кожна з кривих $KN$, $LM$ перетинається будь-якою вертикаллю $x = x_0 = \text{const}$, $x_0 \in [a; b]$, тільки один раз). Нехай $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ при $\forall x \in (a, b)$ (тобто $\varphi_1(x)$ – «нижня» крива, а $\varphi_2(x)$ – «верхня»).

При цьому не виключається можливість того, що одна з бічних ділянок (або навіть обидві одночасно) може бути стягнутою у точку. Наприклад, нас влаштує випадок, зображений на рис. 4.19 праворуч: довжина $K'L'$ стає рівною нулю за рахунок рівності $\varphi_1(a') = \varphi_2(a')$, але попри це крива $\varphi_1(x)$ залишається «нижньою», а крива $\varphi_2(x)$ – «верхньою». Криволінійні трапеції, які задовольняють викладеним вимогам, назвемо криволінійними трапеціями *першого типу*[15]. Зокрема, такою трапецією є коло $x^2 + y^2 = R^2$. Для нього $a = -R$, $b = R$, $\varphi_{1,2}(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, а роль точки $K'$ відіграє точка $K'(-R, 0)$.

Область, обмежену трапецією $KLMN$, позначимо через $D$, а її границю (власне трапецію) – через Г. Нехай в області $D$

[15]Такий термін використовує Г.М. Фіхтенгольц [2] на с. 176.

задано деяку функцію $P(x,y)$, неперервну разом зі своєю частинною похідною $p(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}$. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dS$. Зводячи його до повторного, маємо:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} p(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y)\big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\,dx = \int\limits_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx + \int\limits_b^a P(x,\varphi_1(x))dx =$$

$$= \int\limits_{LM} P\,dx + \overbrace{\int\limits_{MN} P\,dx}^{=0} + \int\limits_{NK} P\,dx + \overbrace{\int\limits_{KL} P\,dx}^{=0} = -\oint\limits_\Gamma P\,dx.$$

Тут інтеграл $\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$ за рахунок використання аргументу $\varphi_2(x)$ є криволінійним інтегралом другого роду вздовж «верхньої» кривої $LM$ в напрямку праворуч, тобто в напрямку від $L$ до $M$. Відповідно, інтеграл $\int_b^a P(x,\varphi_1(x))dx$ за рахунок використання аргументу $\varphi_1(x)$ є криволінійним інтегралом другого роду вздовж «нижньої» кривої $NK$, причому в напрямку *ліворуч*, тобто в напрямку від $N$ до $K$. Інтеграли вздовж відрізків $MN$, $KL$ дорівнюють нулю, оскільки на цих відрізках $dx=0$. Але наявність цих інтегралів робить контур $LMNKL$ замкненим. Його обхід відбувається за годинниковою стрілкою. Тому перед інтегралом $\oint_\Gamma P\,dx$ ми поставили знак «мінус» (при його обчисленні за замовчуванням контур $\Gamma$ обходиться в додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки, що і змінює його знак на протилежний). Остаточно:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dS = -\oint\limits_\Gamma P\,dx. \tag{4.7}$$

Доведемо, що отримана формула (4.7) залишається справедливою при деякому послабленні початкових припущень. А саме, знімемо вимогу однозначності функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Це дозволить розширити множину областей $D$, для яких виконується формула (4.7). А саме, будемо вважати, що область $D$ або обмежена криволінійною трапецією першого типу, або (чого досі не було) може бути розбита системою прямих $x = \text{const}$ на скінченну кількість таких підобластей.

Обмежимось випадком, зображеним на рис. 4.20, оскільки

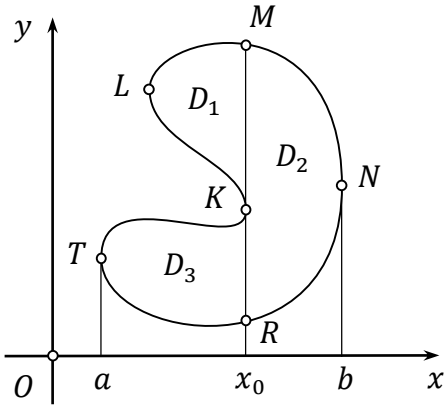



Рисунок 4.20 – До розширення множини областей $D$

при подальшому ускладненні геометрії контуру достатньо застосувати описаний нижче прийом відповідну кількість разів.

Проведемо вертикаль $x = x_0$. Область $D$ розбивається на підобласті $D_1$, $D_2$, $D_3$, кожна з яких обмежується криволінійною трапецією першого типу. Застосовуючи формулу (4.7) до кожної з підобластей, маємо:

$$\begin{cases} \iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dS = -\oint\limits_{\Gamma_1} P\,dx = -\left( \int\limits_{KM} P\,dx + \int\limits_{ML} P\,dx + \int\limits_{LK} P\,dx \right); \\ \iint\limits_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dS = -\oint\limits_{\Gamma_1} P\,dx = -\left( \int\limits_{MK} P\,dx + \int\limits_{KR} P\,dx + \int\limits_{RN} P\,dx + \int\limits_{MN} P\,dx \right); \\ \iint\limits_{D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dS = -\oint\limits_{\Gamma_1} P\,dx = -\left( \int\limits_{RK} P\,dx + \int\limits_{KT} P\,dx + \int\limits_{TR} P\,dx \right). \end{cases}$$

Додамо ці рівняння. Оскільки зміна напрямку на протилежний змінює знак криволінійного інтегралу на протилежний, то

$$\int\limits_{MK} P\,dx + \int\limits_{KM} P\,dx = 0, \qquad \int\limits_{RK} P\,dx + \int\limits_{KR} P\,dx = 0.$$

В загальному випадку аналогічні співвідношення потрібно написати стільки разів, скільки розрізів матиме область $D$. Тому після додавання отримаємо:

$$\iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dS + \iint\limits_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dS + \iint\limits_{D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dS =$$

$$= -\left( \int\limits_{NM} P\,dx + \int\limits_{ML} P\,dx + \int\limits_{LK} P\,dx + \int\limits_{KT} P\,dx + \int\limits_{TR} P\,dx + \int\limits_{RN} P\,dx \right).$$

Отже, додавання рівнянь позбавляє нас інтегрування вздовж внутрішніх розрізів області $D$. Користуючись тепер адитивністю інтегралів Рімана, маємо:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2 \cup D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dS = - \int\limits_{NM \cup ML \cup LK \cup KT \cup TR \cup RN} P\,dx,$$

тобто

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dS = - \oint\limits_{\Gamma} P\,dx.$$

Але це і є формула (4.7), що і треба було довести.

На рис. 4.21 подано криволінійну трапецію *другого типу*. Її обмежено горизонталями $y = c$, $y = d$ (ділянки $KL$, $NM$) і графіками функцій $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ (ділянки $NK$, $ML$). Нехай функції $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ є однозначними (кожна з кривих $NK$, $ML$ перетинається будь-якою горизонталлю $y = y_0 = \text{const}$, $y_0 \in [c; d]$, тільки один раз). Нехай $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ при $\forall y \in (c, d)$ (тобто $\psi_1(y)$ – «ліва» крива, а $\psi_2(y)$ – «права»).

При цьому не виключається можливість того, що одна з бічних ділянок (або навіть обидві одночасно) може бути стягнутою у точку. Наприклад, нас влаштує випадок, зображений на рис. 4.21 праворуч: довжина $K'L'$ стає рівною нулю за рахунок рівності $\psi_1(d') = \psi_2(d')$, але крива $\psi_1(y)$ залишається «лівою»,

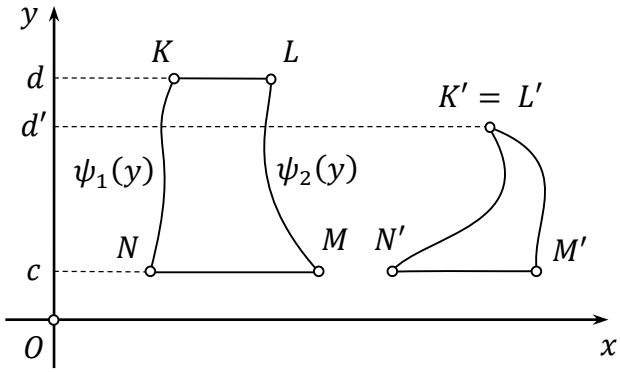



Рисунок 4.21 – Криволінійна трапеція другого типу

а крива $\psi_2(y)$ – «правою». Криволінійні трапеції, які задовольняють викладеним вимогам, – *другого типу*. Зокрема, такою трапецією є коло $x^2+y^2=R^2$. Для нього $c=-R$, $d=R$, $\psi_{1,2}(y)=$ $=\pm\sqrt{R^2-y^2}$, а роль точки $K'$ відіграє точка $K'(0,R)$. До речі, «бути трапецією другого типу» не значить «не бути трапецією першого типу». Як бачимо, наше коло одночасно підпадає і під перший тип, і під другий.

Нехай тепер в області $D$, обмеженій криволінійною трапецією другого типу, визначено деяку функцію $Q(x,y)$, неперервну разом зі своєю частинною похідною $q(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dS$. Зводячи його до повторного, аналогічно маємо:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dS=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} q(x,y)\,dx=$$

$$=\int\limits_c^d Q(x,y)\big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\,dy=\int\limits_c^d\left[Q(\psi_2(y),y)-Q(\psi_1(y),y)\right]dy=$$

$$=\int\limits_c^d Q(\psi_2(y),y)dy-\int\limits_c^d Q(\psi_1(y),y)dy=$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy + \int_d^c Q(\psi_1(y), y)dy =$$

$$= \int_{ML} Q\,dy + \overbrace{\int_{LK} Q\,dy}^{=0} + \int_{KN} Q\,dy + \overbrace{\int_{NM} Q\,dy}^{=0} = \oint_\Gamma Q\,dy.$$

Остаточно, оскільки зміна напрямку обходу контуру цього разу не відбувається, одержуємо:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dS = \oint_\Gamma Q\,dy. \tag{4.8}$$

Дію цієї формули також можна розповсюдити на більш широку множину областей. А саме, нехай область можна розрізати горизонталями $y = y_0 = \text{const}$ на скінченну кількість підобластей, кожна з яких обмежується криволінійною трапецією другого типу. Додавання рівнянь (4.8), записаних для кожної такої підобласті, знову позбавляє нас інтегрування вздовж внутрішніх розрізів області $D$.

Нарешті, приступимо до виводу формули Гріна. Нехай в деякій області $D$ задані функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, неперервні разом зі своїми частинними похідними. Нехай область $D$ є криволінійною трапецією першого типу або може бути розбита на скінченну кількість таких областей. Тоді справджується формула (4.7). Нехай, одночасно з цим, область $D$ є криволінійноюо трапецією другого типу або може бути розбита на скінченну кількість таких областей. Тоді справджується також і формула (4.8). Віднімаючи формулу (4.7) з формули (4.8) і користуючись лінійністю інтегралів Рімана, отримуємо:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS = \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy.}$$

Це і є **формула Гріна.** За її допомогою тепер можна в більш простий спосіб дослідити властивість криволінійних інтегралів: якщо $P\,dx + Q\,dy$ – повний диференціал, то $\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0$. Справді, якщо $P\,dx + Q\,dy$ – повний диференціал, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, і ліва частина формули Гріна перетворюється на тотожний нуль.

### 4.2.6 Застосування подвійного інтегралу

Застосування подвійного інтегралу є доречним всюди, де потрібне врахування зміни деякої величини, розподіленої всередині двовимірної плоскої області. В механічних застосуваннях такою величиною може бути поверхнева густина. За означенням вона дорівнює масі, зосередженій в одиниці площі поверхні, $\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta S}$ (див. також с. 86). В разі однорідних пластин $\sigma = \text{const}$, і можна писати $\sigma = \frac{m}{S}$. В разі неоднорідних пластин поверхнева густина є функцією, і потрібно писати $\sigma(x, y) \equiv \sigma(M) = \frac{dm}{dS}$.

#### 4.2.6.1 Центр мас неоднорідної пластини

Нехай в області $D$ розміщено неоднорідну пластину, поверхнева густина якої в довільній точці $M(x, y)$ дорівнює $\sigma(M)$. Тоді маса елементу $dS$ площі, який охоплює поточну точку $M$, з точністю до малих вищих порядків становить $dm = \sigma(M)\, dS$. Підсумовуючи за всіма елементами площі, отримуємо:

$$m = \iint\limits_D dm = \iint\limits_D \sigma\, dS.$$

Цим інтегралом врахована зміна густини $\sigma$ при переході від однієї точки до іншої.

Зокрема, для однорідних пластин можливо винести константу $\sigma$ за знак інтегралу:

$$m = \sigma \iint\limits_D dS = \sigma S.$$

Тут $\iint_D dS = S$ – площа області $D$, тобто площа пластини. Форма пластини при цьому значення не має.

Нехай точка $C$ – центр мас неоднорідної пластини. Абсциса центру мас системи дискретних матеріальних точок за означенням (2.10) дорівнює

$$x_C = \frac{\sum\limits_{(i)} x_i\, m_i}{\sum\limits_{(i)} m_i}.$$

Тут $x_i$ – абсциси точок, в яких розташовано маси $m_i$. При розбитті області $D$ кожний елемент $dS$ площі стає носієм маси $dm = \sigma\, dS$, яка і виконує роль маси $m_i$ чергової матеріальної точки. Тоді

$$x_C \approx \frac{\sum\limits_{(i)} x_i \sigma_i\, dS_i}{\sum\limits_{(i)} \sigma_i\, dS_i}.$$

Тут $\sigma_i = \sigma(M_i)$, де $M_i$ – довільна точка всередині елементу $dS_i$. Отримана рівність є наближеною, оскільки при її складанні вважається, що густина $\sigma$ є сталою всередині елементу $dS_i$ (і такою, як в точці $M_i$). Відмінність густини в сусідніх точках цього ж елементу зумовлює похибку вищого порядку малості. Границя цієї похибки дорівнює нулю. Тому при здійсненні граничного переходу наближена рівність перетворюється на точну, і ми отримуємо:

$$x_C = \frac{\iint\limits_D x\sigma\, dS}{\iint\limits_D \sigma\, dS} = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\sigma\, dS.$$

Нагадаємо, аналогічний вигляд мав вираз (2.9).

В разі однорідної пластини можливо винести константу $\sigma$ за знак інтегралу:

$$x_C = \frac{\iint\limits_D x\, dS}{\iint\limits_D dS}.$$

Зміст отриманого виразу – інтегральне середнє (див. п. 4.2.1) для абсциси, усередненої за усіма точкам області $D$. Аналогічно, для ординати центру мас

$$y_C = \frac{\iint\limits_D y\sigma\, dS}{\iint\limits_D \sigma\, dS} = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\sigma\, dS.$$

◁ *Приклад 4.15.* Знайдемо положення центру мас суцільного однорідного рівнобічного трикутника з основою $2a$ і висотою $h$ (рис. 4.22, ліворуч). Очевидно, з міркувань симетрії абсциса центру мас $x_C = 0$. Для ординати центру мас за рахунок

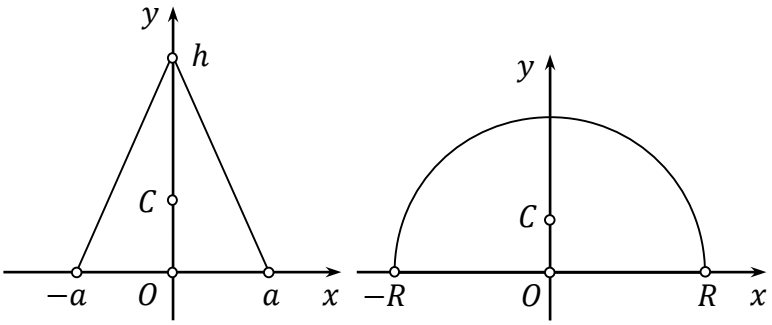



Рисунок 4.22 – Центри мас трикутника і півкола

однорідності ($\sigma = \text{const}$; на цю величину скорочуємо) маємо:

$$y_C = \frac{\iint\limits_D y\,dS}{\iint\limits_D dS}.$$

Тут знаменник дорівнює площі трикутника: $\iint_D dS = ah$.

Область трикутника є криволінійною трапецією другого типу, тому інтегрування за $x$ зробимо внутрішнім, а за $y$ – зовнішнім. Рівняння бічних сторін $\frac{x}{\pm a} + \frac{y}{h} = 1$. Знаходячи звідси $x$, зводимо чисельник до повторного інтегралу:

$$\iint\limits_D y\,dS = \int\limits_0^h dy \int\limits_{-a\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{a\left(1-\frac{y}{h}\right)} y\,dx = \int\limits_0^h xy\Big|_{-a\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{a\left(1-\frac{y}{h}\right)} dy =$$

$$= \int\limits_0^h 2ay\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = 2a\int\limits_0^h \left(y-\frac{y^2}{h}\right)dy =$$

$$= 2a\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3h}\right)\Big|_0^h = 2a\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{3}\right) = \frac{ah^2}{3}.$$

Отже, $y_C = \frac{h}{3}$ і не залежить від $a$, що збігається з відомим результатом (див. приклад 2.20 на с. 90). ▷

◁ *Приклад 4.16.* Знайдемо положення центру мас суцільного однорідного півкола радіуса $R$ (рис. 4.22, праворуч). Аналогічно до попереднього прикладу маємо $x_C = 0$, а також:

$$y_C = \frac{\iint\limits_D y\,dS}{\iint\limits_D dS}.$$

Тут знаменник дорівнює площі півкола: $\iint_D dS = \frac{1}{2}\pi R^2$. Чисельник обчислимо, переходячи до полярних координат:

$$\iint\limits_D y\,dS = \iint\limits_D \underbrace{\rho\sin\varphi}_{=y}\,\underbrace{\rho\,d\rho\,d\varphi}_{=dS} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^2\,d\rho = \cos\varphi\Big|_{\pi}^{0} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2R^3}{3}.$$

Тут подвійний інтеграл перетворено на добуток визначених інтегралів (див. с. 182). Отже,

$$y_C = \frac{\frac{2R^3}{3}}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}. \triangleright$$

#### 4.2.6.2 Моменти інерції неоднорідної пластини

Як ми вже обговорювали, при обертальному русі різні «шматочки» (диференціально малі елементи) твердого тіла обертаються за колами різних радіусів, і тому мають різні лінійні швидкості $v$. Тому внесок чергового «шматочку» до кінетичної енергії доцільно обчислювати не у вигляді $dK = \frac{1}{2}v^2\,dm$, а у вигляді $dK = \frac{1}{2}\omega^2\,dJ$ (лінійні швидкості $v$ у різних «шматочків» різні, а кутова швидкість $\omega$ – однакова). Тут внесок $dJ$ визначається формулою (2.8). Для зручності наведемо її ще раз:

$$dJ = r^2\,dm.$$

Тут $dm$ – маса елементу тіла, $r$ – відстань від цього елементу до осі обертання.

Нехай в області $D$ розміщено тонку неоднорідну пластину з поверхневою густиною $\sigma(M)$, де $M(x, y)$ – довільна точка

області $D$. Розіб'ємо область $D$ на елементи $dS$. Маса елементу становить $dm = \sigma(M)\,dS$. При обертанні пластини навколо осі $Ox$ відстань від елементу до цієї осі дорівнює $r = y$. Тоді внесок цього елементу до загального моменту інерції дорівнює $dJ_x = y^2\sigma\,dS$. Отже, при обертанні навколо осі $Ox$ маємо:

$$J_x = \iint\limits_D dJ = \iint\limits_D y^2\sigma\,dS.$$

Аналогічно, при обертанні навколо осі $Oy$ маємо:

$$J_y = \iint\limits_D dJ = \iint\limits_D x^2\sigma\,dS.$$

Звичайно, для однорідних пластин $\sigma = \text{const}$, і цю величину можливо винести за знак інтегралу.

◁ *Приклад 4.17.* Нехай тонку однорідну прямокутну пластину з поверхневою густиною $\sigma$ обмежено прямими $x = \pm\frac{b}{2}$, $y = \pm\frac{h}{2}$. Обчислимо момент інерції пластини при обертанні навколо осі $Ox$. Маємо:

$$J_x = \iint\limits_D y^2\sigma\,dS = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\sigma\,dy = \sigma \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \cdot \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,dy = \frac{\sigma b h^3}{12}.$$

Тут знову подвійний інтеграл перетворено на добуток визначених інтегралів (див. с. 182). Знайдений результат збігається з отриманим в прикладі 2.19. ▷

Уточнімо цей результат.

◁ *Приклад 4.18.* Нехай тепер пластина не є «тонкою» і має скінченну товщину $\delta$ (рис. 4.23). Виділимо елемент маси у формі стержня висотою $b$ і основою $dS = dy\,dz$. Його маса дорівнює $dm = \rho\,dV = \rho b\,dy\,dz$. Внесок до моменту інерції $dJ = r^2\,dm$. Але тепер відстань від кожної точки елемента до осі $Ox$ дорівнює $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ (а не $y$, як було раніше). Маємо:

$$\tilde{J}_x = \iint\limits_D r^2\,dm = \iint\limits_D \left(y^2 + z^2\right)\rho b\,dy\,dz =$$

$$= \rho b \int\limits_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} dz \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(y^2 + z^2\right)\,dy = \rho b \int\limits_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y\right)\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz =$$

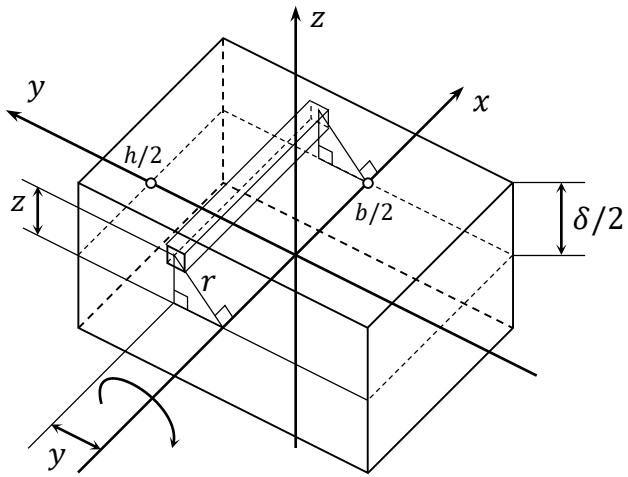



Рисунок 4.23 – До врахування товщини пластини

$$= \rho b \int\limits_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left( \frac{h^3}{12} + z^2 h \right) dz = \rho b \left( \frac{h^3}{12} z + \frac{z^3}{3} h \right) \Big|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} =$$

$$= \rho b \left( \frac{h^3}{12} \delta + \frac{\delta^3}{12} h \right) = \rho \delta \frac{b h^3}{12} \left( 1 + \frac{\delta^2}{h^2} \right).$$

Прирівнюючи масу пластини до самої себе, маємо: $\rho V = \sigma S$, $\rho \frac{V}{S} = \sigma$, $\sigma = \rho\delta$. Тоді

$$\tilde{J}_x = \sigma \frac{b h^3}{12} \left( 1 + \frac{\delta^2}{h^2} \right) = J_x \left( 1 + \frac{\delta^2}{h^2} \right).$$

Отже, врахування скінченності товщини пластини веде до поправки другого порядку малості. Якщо $\delta = 0{,}1h$ (настільки товсті пластини називають *плитами*), то відмінність $\tilde{J}_x$ і $J_x$ складе усього 1 %. ▷

Розглядають також **полярний момент інерції.** Він виникає при обертанні навколо осі, яка проходить через центр мас пластини перпендикулярно до її площини. Очевидно, у цьому разі

потрібно покласти $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, і ми отримаємо:

$$J = \iint\limits_D r^2 \, dm = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \sigma(x, y) \, dS.$$

#### 4.2.6.3 Інші застосування

Прикладом ще однієї величини, розподіленої всередині двовимірної плоскої області, може бути поверхнева густина електричного заряду $\sigma = \frac{dQ}{dS}$.

◁ *Приклад 4.19.* Обчислимо напруженість електричного поля, створюваного зарядом, рівномірно розподіленим по диску радіуса $R$ з поверхневою густиною $\sigma$ (рис. 4.24). Точка спостереження поля знаходится на осі диска на відстані $h$ від його площини.

Розіб'ємо область $D$ диска на елементи площі. Нехай в точці $M$ виділено елемент $dS$. Він містить заряд $dQ = \sigma \, dS$. Поле цього заряду $dE = \frac{k \, dQ}{r^2}$. Тут $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0$ – електрична стала; $r = Mh$ – відстань між зарядом і точкою спостереження поля.

За міркуваннями симетрії поле в точці $h$ спрямовано вздовж осі диска. Тому до розрахунків потрібно залучати лише вертикальну компоненту поля $dE_\perp = dE \cos\alpha$, де $\alpha$ – кут між вектором $\overrightarrow{dE}$ і вертикаллю (горизонтальні компоненти векторів $\overrightarrow{dE}$ і $\overrightarrow{dE'}$, створюваних симетрично розташованими зарядами, компенсуються).

З трикутника $OMh$ маємо: $\cos\alpha = \frac{h}{r}$, і тоді $dE_\perp = \frac{kh\sigma \, dS}{r^3}$. Нехай полярний радіус точки $M$ дорівнює $\rho$. Тоді з цього ж трикутника маємо $r = \left(\rho^2 + h^2\right)^{1/2}$. Тоді

$$dE_\perp = \frac{kh\sigma \, dS}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Отже,

$$E = \iint\limits_D dE_\perp = kh\sigma \iint\limits_D \frac{dS}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} = kh\sigma \iint\limits_D \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} =$$

$$= kh\sigma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho \, d\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} = \left\| \begin{array}{l} \rho^2 + h^2 = r^2 \\ 2\rho \, d\rho = 2r \, dr \\ h \leqslant r \leqslant \sqrt{R^2 + h^2} \end{array} \right\| =$$

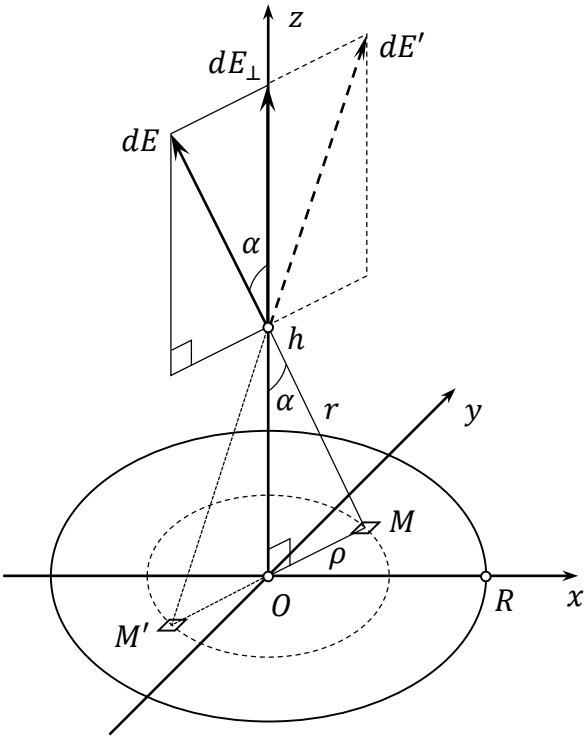



Рисунок 4.24 – Напруженість поля диска

$$= kh\sigma\ \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_h^{\sqrt{R^2+h^2}} \frac{r\,dr}{r^3} = 2\pi kh\sigma \cdot \frac{1}{r}\Big|_{\sqrt{R^2+h^2}}^{h} =$$

$$= 2\pi kh\sigma \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right).$$

До речі, поле, створюване нескінченною площиною, можна знайти як границю цього виразу при $R \to \infty$:

$$E_{\text{пл.}} = \lim_{R\to\infty} 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) = 2\pi k\sigma = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

і не залежить від $h$. Це збігається з результатом, відомим з електростатики. $\triangleright$

## 4.3 Питання для перевірки

1. Які механічні міркування призводять до поняття криволінійного інтегралу першого роду?
2. Означення криволінійного інтегралу першого роду.
3. Як обчислюють криволінійний інтеграл першого роду, коли контур $L$ інтегрування є графіком функції $y = \varphi(x)$?
4. Як обчислюють криволінійний інтеграл першого роду, коли контур $L$ інтегрування задано параметрично?
5. Властивості криволінійного інтегралу першого роду.
6. Як криволінійний інтеграл першого роду залежить від напрямку обходу контуру інтегрування?
7. В чому полягає геометричний зміст криволінійного інтегралу першого роду?
8. В чому полягає фізичний зміст криволінійного інтегралу першого роду?
9. Як узагальнюється означення криволінійного інтегралу першого роду на випадок, коли контур інтегрування є просторовою кривою?
10. Які механічні міркування призводять до поняття криволінійного інтегралу другого роду?
11. Означення криволінійного інтегралу другого роду.
12. В чому полягає фізичний зміст криволінійного інтегралу другого роду?
13. Чому криволінійний інтеграл другого роду називають інтегралом «в проекціях»?
14. Як обчислюють криволінійний інтеграл другого роду, коли контур $L$ інтегрування є графіком функції $y = \varphi(x)$? графіком функції $x = \psi(y)$?

15. Як обчислюють криволінійний інтеграл другого роду, коли контур $L$ інтегрування задано параметрично?

16. Властивості криволінійного інтегралу другого роду.

17. Як криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку обходу контуру інтегрування?

18. Що таке лінійна диференціальна форма (ЛДФ)?

19. Яка необхідна умова того, що ЛДФ $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ двох змінних?

20. Що можна сказати про підінтегральний вираз криволінійного інтегралу другого роду, якщо цей інтеграл не залежить від форми контуру інтегрування, а залежить лише від положення початку і кінця цього контуру?

21. Що можна сказати про залежність криволінійного інтегралу другого роду від форми контуру інтегрування, якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом?

22. За яких умов $\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$?

23. Що таке потенціальне силове поле? Який зв'язок між потенціальністю поля $\overrightarrow{F}$ і виразом $\oint\limits_L \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}$?

24. Що таке потенціал потенціального силового поля? Наведіть фізичні приклади.

25. Які геометричні міркування призводять до поняття подвійного інтегралу?

26. Як здійснюють розбиття області інтегрування при формулюванні означення подвійного інтегралу?

27. Як організують врахування усіх доданків інтегральної суми при формулюванні означення подвійного інтегралу? Що таке зовнішня сума? Внутрішня сума? Як розставляють межі сумування у подвійній сумі?

28. Чи потрібно до інтегральної суми подвійного інтегралу включати доданки, які відповідають елементам розбиття, що входять до області інтегрування лише частково?

29. Означення подвійного інтегралу $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$.

30. Два аспекти геометричного змісту подвійного інтегралу.

31. Що таке інтегральне середнє функції двох змінних в даній області?

32. Механічний зміст подвійного інтегралу.

33. Властивості подвійного інтегралу.

34. Якими двома способами можна звести подвійний інтеграл до повторного?

35. Як визначити межі внутрішнього інтегрування при зведенні подвійного інтегралу до повторного?

36. Від якої змінної можуть залежати межі внутрішнього інтегрування після зведення подвійного інтегралу до повторного?

37. Як визначити межі зовнішнього інтегрування при зведенні подвійного інтегралу до повторного?

38. Як змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі?

39. За яких умов подвійний інтеграл може бути перетворено на добуток двох визначених інтегралів?

40. Як в загальному випадку виглядає постановка задачі про заміну змінних в подвійному інтегралі?

41. Як виникає криволінійна система координат в «старій» області при введенні заміни в подвійному інтегралі?

42. Що таке якобіан перетворення координат?

43. Як пов'язані елементи площі в «старих» і «нових» координатах при введенні заміни в подвійному інтегралі?

44. Що таке вироджене перетворення координат? Чому його не можна використовувати при введенні заміни в подвійному інтегралі?

45. Чим замінити елемент площі при переході в подвійному інтегралі від декартових координат до полярних?

46. Чому дорівнює інтеграл Пуассона?

47. Як виглядає формула Гріна? Виведіть її.

48. Як за допомогою подвійного інтегралу обчислюють координати центру мас плоскої неоднорідної пластини?

49. Як за допомогою подвійного інтегралу обчислюють моменти інерції плоскої неоднорідної пластини?

50. Як обчислити напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої площини за допомогою подвійного інтегралу?

# 5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання, цього розділу **потрібно виконувати аналітично** згідно з прикладами розв'язків, наведеними далі. Проте, доцільно робити самоперевірку. Для цього можна використати інтернет-ресурс `wolframalpha.com`. Наприклад, для обчислення інтегралу $\int(2x+3)\,dx$ в рядок по центру екрану можна ввести послідовність символів `integral of (2x+3)`, або послідовність символів `int(2x+3)` (і натиснути клавішу «`Enter`»). Для врахування меж інтегрування на цьому ресурсі використовують знак `_` нижнього підкреслювання та знак `^`. Офіційно в поліграфії знак `^` називають *циркумфлéкс* (він відноситься до т.зв. *діакритичних символів*). В україномовному математичному середовищі $\hat{x}$ читають «ікс з дашком» («ікс з дахом»), а в російськомовному – «икс со шляпкой» («икс с крышкой»). Наприклад, для обчислення $\int_0^1(2x+3)\,dx$ потрібно ввести `int_0^1(2x+3)` (і натиснути клавішу «`Enter`»).

**Задача 1.** Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

В-1. $\int e^{2x+3}\,dx.$
В-2. $\int \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\,dx.$
В-3. $\int \frac{dx}{1+(3x+2)^2}.$
В-4. $\int \frac{dx}{2x+7}.$
В-5. $\int(5x+1)^8\,dx.$
В-6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}.$
В-7. $\int \frac{dx}{e^{x-1}}.$
В-8. $\int \frac{dx}{\cos^2\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)}.$
В-9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$
В-10. $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}.$
В-11. $\int \sqrt[3]{5x+7}\,dx.$
В-12. $\int \sqrt{2x+5}\,dx.$
В-13. $\int \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx.$
В-14. $\int(7x+1)^4\,dx.$
В-15. $\int \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx.$

**Задача 2.** Знайти невизначений інтеграл з використанням потрібної заміни змінної. Виконати перевірку.

В-1. $\int(2x+3)e^{x^2+3x}\,dx.$
В-2. $\int \frac{2-3x^2}{(x^3-2x)^2}\,dx.$
В-3. $\int(\cos x+1)(\sin x+x)^5\,dx.$
В-4. $\int \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}\,dx.$
В-5. $\int(2x+6)(x^2+6x)^7\,dx.$
В-6. $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\cos^2\left(x\sqrt{x}\right)}\,dx.$
В-7. $\int 3\left(e^x+5\right)\left(e^x+5x\right)^2\,dx.$
В-8. $\int \frac{6\ln^2(2x+5)}{(2x+5)}\,dx.$
В-9. $\int \frac{3x^2\,dx}{1+(x^3+1)^2}.$
В-10. $\int \frac{5x^4+8}{x^5+8x}\,dx.$
В-11. $\int \frac{3e^x}{2}\sqrt{e^x+1}\,dx.$
В-12. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$
В-13. $\int \cos x e^{\sin x}\,dx.$
В-14. $\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx.$
В-15. $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx.$

**Задача 3.** Знайти невизначений інтеграл, застосовуючи інтегрування частинами. Виконати перевірку.

В-1. $\int(2x+3)\cos x\,dx.$
В-2. $\int x\sin 2x\,dx.$
В-3. $\int(2x+5)e^x\,dx.$
В-4. $\int(x^2+3x)\cos x\,dx.$
В-5. $\int(3x+5)\sin x\,dx.$
В-6. $\int x^2e^{\frac{x}{2}}\,dx.$

В-7. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$. В-8. $\int x\ln x\,dx$.
В-9. $\int x\operatorname{arctg} 2x\,dx$. В-10. $\int (x-x^2)\cos x\,dx$.
В-11. $\int x\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\,dx$. В-12. $\int (3x-1)e^{2x}\,dx$.
В-13. $\int (2x+5)\cos 3x\,dx$. В-14. $\int (4x-3)\sin 2x\,dx$.
В-15. $\int (3-x)e^{3x}\,dx$.

**Задача 4.** Проінтегрувати правильний дріб.

В-1. а) $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}\,dx$; б) $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+1}\,dx$; в) $\int \frac{4x-1}{x^2-2x+2}\,dx$.
В-2. а) $\int \frac{3x-7}{x^2-4x+3}\,dx$; б) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx$; в) $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,dx$.
В-3. а) $\int \frac{4x-7}{x^2-5x+4}\,dx$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+1}\,dx$; в) $\int \frac{4x}{x^2-4x+8}\,dx$.
В-4. а) $\int \frac{-x}{x^2-5x+6}\,dx$; б) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx$; в) $\int \frac{2x+10}{x^2+4x+8}\,dx$.
В-5. а) $\int \frac{x-6}{x^2-6x+8}\,dx$; б) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}\,dx$; в) $\int \frac{2x-3}{x^2-6x+18}\,dx$.
В-6. а) $\int \frac{5-2x}{x^2-7x+12}\,dx$; б) $\int \frac{x+6}{x^2+4x+4}\,dx$; в) $\int \frac{2x+18}{x^2+6x+18}\,dx$.
В-7. а) $\int \frac{5x+7}{x^2+x-2}\,dx$; б) $\int \frac{2x-2}{x^2-6x+9}\,dx$; в) $\int \frac{6x-22}{x^2-8x+17}\,dx$.
В-8. а) $\int \frac{6x+10}{x^2+2x-3}\,dx$; б) $\int \frac{7x+24}{x^2+6x+9}\,dx$; в) $\int \frac{6x+25}{x^2+8x+17}\,dx$.
В-9. а) $\int \frac{7x+13}{x^2+3x-4}\,dx$; б) $\int \frac{2x-11}{x^2-8x+16}\,dx$; в) $\int \frac{6x-4}{x^2-2x+5}\,dx$.
В-10. а) $\int \frac{3x+14}{x^2+x-6}\,dx$; б) $\int \frac{2x+10}{x^2+8x+16}\,dx$; в) $\int \frac{8x+12}{x^2+2x+5}\,dx$.
В-11. а) $\int \frac{2x+20}{x^2+2x-8}\,dx$; б) $\int \frac{6x-1}{x^2-2x+1}\,dx$; в) $\int \frac{8x-22}{x^2-4x+13}\,dx$.
В-12. а) $\int \frac{x+25}{x^2+x-12}\,dx$; б) $\int \frac{5x+9}{x^2+2x+1}\,dx$; в) $\int \frac{6x+6}{x^2+4x+13}\,dx$.
В-13. а) $\int \frac{9x-29}{x^2-6x+5}\,dx$; б) $\int \frac{5x-9}{x^2-4x+4}\,dx$; в) $\int \frac{6x-22}{x^2-6x+25}\,dx$.
В-14. а) $\int \frac{x+29}{x^2+4x-5}\,dx$; б) $\int \frac{3x+11}{x^2+4x+4}\,dx$; в) $\int \frac{10x+38}{x^2+6x+25}\,dx$.
В-15. а) $\int \frac{4x-5}{x^2-7x+10}\,dx$; б) $\int \frac{15-4x}{x^2-6x+9}\,dx$; в) $\int \frac{10x-42}{x^2-8x+17}\,dx$.

**Задача 5.** Проінтегрувати правильний дріб з кратним коренем знаменника.

В-1. $\int \frac{4x^3-13x^2+16x-9}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$. В-2. $\int \frac{x^3+4x^2+4x-5}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$.
В-3. $\int \frac{3x^3-4x^2+8x+2}{(x-1)^3(x+2)}\,dx$. В-4. $\int \frac{2x^3+7x^2+12x+10}{(x+1)^3(x+2)}\,dx$.
В-5. $\int \frac{4x^3-14x^2+18x-12}{(x-1)^3(x-3)}\,dx$. В-6. $\int \frac{x^3+4x^2+3x-8}{(x+1)^3(x-3)}\,dx$.
В-7. $\int \frac{2x^3+4x+2}{(x-1)^3(x+3)}\,dx$. В-8. $\int \frac{x^3-6x-7}{(x+1)^3(x+3)}\,dx$.
В-9. $\int \frac{3x^3-17x^2+32x-19}{(x-2)^3(x-1)}\,dx$. В-10. $\int \frac{2x^3+13x^2+26x+13}{(x+2)^3(x-1)}\,dx$.
В-11. $\int \frac{2x^3+11x^2+19x+11}{(x+2)^3(x+1)}\,dx$. В-12. $\int \frac{2x^3-11x^2+24x-17}{(x-2)^3(x+1)}\,dx$.
В-13. $\int \frac{2x^3-9x^2+13x-9}{(x-1)^3(x-4)}\,dx$. В-14. $\int \frac{2x^3-x^2-3x+7}{(x-1)^3(x+4)}\,dx$.
В-15. $\int \frac{2x^3+7x^2+5x-10}{(x+1)^3(x-4)}\,dx$.

**Задача 6.** Проінтегрувати неправильний дріб.

В-1. $\int \frac{x^3-2x^2-2x-1}{x^2-4x+3}\,dx$. В-2. $\int \frac{x^3-2x^2-7x+5}{x^2-5x+4}\,dx$.
В-3. $\int \frac{2x^3-7x^2-4x+18}{x^2-5x+6}\,dx$. В-4. $\int \frac{3x^3-16x^2+13x+10}{x^2-6x+8}\,dx$.
В-5. $\int \frac{x^3-8x^2+17x-7}{x^2-7x+12}\,dx$. В-6. $\int \frac{2x^3+x^2+9}{x^2+x-2}\,dx$.

В-7. $\int \frac{3x^3+4x^2-7x+16}{x^2+2x-3}\,dx$.
В-8. $\int \frac{2x^3+3x^2-10x+25}{x^2+3x-4}\,dx$.
В-9. $\int \frac{4x^3+5x^2-20x+8}{x^2+x-6}\,dx$.
В-10. $\int \frac{3x^3+5x^2-24x+28}{x^2+2x-8}\,dx$.
В-11. $\int \frac{2x^3+3x^2-22x+13}{x^2+x-12}\,dx$.
В-12. $\int \frac{2x^3-13x^2+25x-34}{x^2-6x+5}\,dx$.
В-13. $\int \frac{3x^3+8x^2-30x+49}{x^2+4x-5}\,dx$.
В-14. $\int \frac{4x^3-31x^2+65x-35}{x^2-7x+10}\,dx$.
В-15. $\int \frac{3x^3+8x^2-30x-10}{x^2+3x-10}\,dx$.

**Задача 7.** Знайти невизначений інтеграл.

В-1. $\int\sqrt{\frac{9x+1}{x+1}}\,dx$;
В-2. $\int\sqrt{\frac{4x-1}{x}}\,dx$;
В-3. $\int\sqrt{\frac{4x+3}{x+2}}\,dx$;
В-4. $\int\sqrt{\frac{16x-7}{x+1}}\,dx$;
В-5. $\int\sqrt{\frac{9x-2}{x-3}}\,dx$;
В-6. $\int\sqrt{\frac{4x+2}{x-1}}\,dx$;
В-7. $\int\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$;
В-8. $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}\,dx$;
В-9. $\int\sqrt{\frac{25x-1}{x+2}}\,dx$;
В-10. $\int\sqrt{\frac{16x+4}{x-1}}\,dx$;
В-11. $\int\sqrt{\frac{x+3}{x+4}}\,dx$;
В-12. $\int\sqrt{\frac{4x+1}{x+2}}\,dx$;
В-13. $\int\sqrt{\frac{4x+7}{x+1}}\,dx$;
В-14. $\int\sqrt{4+\frac{2}{x}}\,dx$;
В-15. $\int\sqrt{9+\frac{3}{x+2}}\,dx$.

**Задача 8.** Знайти невизначений інтеграл.

В-1. а) $\int(2x+3)\sqrt{x^2-4x+5}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{8-2x-x^2}}$.
В-2. а) $\int(5x+1)\sqrt{x^2-6x+10}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.
В-3. а) $\int(x+3)\sqrt{x^2-6x+13}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{7+6x-x^2}}$.
В-4. а) $\int(3x-1)\sqrt{x^2-2x+17}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{5+4x-x^2}}$.
В-5. а) $\int(x+4)\sqrt{x^2-4x+29}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{15+2x-x^2}}$.
В-6. а) $\int(2x-1)\sqrt{x^2-8x+17}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{5+4x-x^2}}$.
В-7. а) $\int(2x-3)\sqrt{x^2-8x+25}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{3+2x-x^2}}$.
В-8. а) $\int(3x+1)\sqrt{x^2-10x+41}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{15+2x-x^2}}$.
В-9. а) $\int(4x+1)\sqrt{x^2-8x+41}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{35+2x-x^2}}$.
В-10. а) $\int(4x-3)\sqrt{x^2+4x+40}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{32+4x-x^2}}$.
В-11. а) $\int(2x+5)\sqrt{x^2-6x+45}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{12+4x-x^2}}$.
В-12. а) $\int(5x+3)\sqrt{x^2-8x+52}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{60+4x-x^2}}$.
В-13. а) $\int(4x-1)\sqrt{x^2-10x+29}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{24+2x-x^2}}$.
В-14. а) $\int(4x-3)\sqrt{x^2-6x+18}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{20+8x-x^2}}$.
В-15. а) $\int(2x+5)\sqrt{x^2-10x+26}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{8+2x-x^2}}$.

**Задача 9.** Знайти невизначений інтеграл.

В-1. а) $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$; б) $\int\frac{4\operatorname{tg}x-5}{\sin^2 x-7\sin x\cos x+10\cos^2 x}\,dx$.
В-2. а) $\int\cos^2 x\sin 2x\,dx$; б) $\int\frac{5\operatorname{tg}x-7}{\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x}\,dx$.

В-3. а) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^2 x}$; б) $\int \frac{3\operatorname{tg} x-7}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}\,dx$.

В-4. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$; б) $\int \frac{4\operatorname{tg} x-7}{\sin^2 x-5\sin x\cos x+4\cos^2 x}\,dx$.

В-5. а) $\int \left(\sin^2 x+1\right)^2 \cos x\,dx$; б) $\int \frac{-\operatorname{tg} x}{\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x}\,dx$.

В-6. а) $\int \left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)\cos x\,dx$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} x-6}{\sin^2 x-6\sin x\cos x+8\cos^2 x}\,dx$.

В-7. а) $\int \frac{\left(3\sin^2 x+1\right)\cos x\,dx}{\sin^3 x}$; б) $\int \frac{5-2\operatorname{tg} x}{\sin^2 x-7\sin x\cos x+12\cos^2 x}\,dx$.

В-8. а) $\int (1-\sin x)^3\cos x\,dx$; б) $\int \frac{5\operatorname{tg} x+7}{\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x}\,dx$.

В-9. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-\sin x}$; б) $\int \frac{6\operatorname{tg} x+10}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x}\,dx$.

В-10. а) $\int \sin^2\frac{x}{2}\sin x\,dx$; б) $\int \frac{7\operatorname{tg} x+13}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-4\cos^2 x}\,dx$.

В-11. а) $\int \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x\,dx$; б) $\int \frac{3\operatorname{tg} x+14}{\sin^2 x+\sin x\cos x-6\cos^2 x}\,dx$.

В-12. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x+5}$; б) $\int \frac{2\operatorname{tg} x+20}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-8\cos^2 x}\,dx$.

В-13. а) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} x+25}{\sin^2 x+\sin x\cos x-12\cos^2 x}\,dx$.

В-14. а) $\int \frac{\sin x+1}{\sin x-1}\cos x\,dx$; б) $\int \frac{9\operatorname{tg} x-29}{\sin^2 x-6\sin x\cos x+5\cos^2 x}\,dx$.

В-15. а) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+5}$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} x+29}{\sin^2 x+4\sin x\cos x-5\cos^2 x}\,dx$.

**Задача 10.** Знайти визначений інтеграл.

В-1. $\int\limits_0^{\pi/2} 3\sin^2 x\cos x\,dx$.

В-2. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} 4xe^{2x^2}\,dx$.

В-3. $\int\limits_0^1 \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+3}$.

В-4. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{13}-1}{2}} \frac{(2x+1)\,dx}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

В-5. $\int\limits_0^1 (x^2+3x)^3(2x+3)\,dx$.

В-6. $\int\limits_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}\,dx$.

В-7. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{(2x+4)\,dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

В-8. $\int\limits_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x}\,dx$.

В-9. $\int\limits_0^{\sqrt[3]{e-1}} \frac{3x^2\,dx}{x^3+1}$.

В-10. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{e-1+\sin x}$.

В-11. $\int\limits_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{2x\,dx}{1+x^4}$.

В-12. $\int\limits_0^{\pi/6} 18\sin^5 3x\cos 3x\,dx$.

В-13. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

В-14. $\int\limits_0^1 \frac{3x^2\,dx}{(x^3+1)^2}$.

В-15. $\int\limits_0^1 \frac{(2x^3+x)\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

**Задача 11.** Знайти площу фігури, обмеженої на площині $Oxy$ наступними умовами. Побудувати креслення.

В-1. $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x. \end{cases}$ В-2. $\begin{cases} y = \frac{2x}{x^2+1}, \\ y = 0, \\ x = \sqrt{e-1}. \end{cases}$ В-3. $\begin{cases} y = xe^{-x^2}, \\ y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$

В-4. $\begin{cases} y = \sin^2 x, \\ y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ В-5. $\begin{cases} y = \frac{\ln x}{x}, \\ y = 0, \\ x \in [1; e]. \end{cases}$ В-6. $\begin{cases} y = \sqrt{x+1}, \\ y = \frac{x+1}{2}. \end{cases}$

В-7. $\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ y = x - 1, \\ x \in [1; 2]. \end{cases}$ В-8. $\begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = 0, \\ x \in [0; 1]. \end{cases}$ В-9. $\begin{cases} y = \frac{1}{x^2+1}, \\ y = 0, \\ x \in [0; 1]. \end{cases}$

В-10. $\begin{cases} y = \frac{1}{x^2+1}, \\ x = 0, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$ В-11. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x + 2. \end{cases}$ В-12. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x. \end{cases}$

В-13. $\begin{cases} y = 2\cos x, \\ y = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}x, \\ x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$ В-14. $\begin{cases} y = \operatorname{ch} x, \\ y = 0, \\ x \in [0; 1]. \end{cases}$ В-15. $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x - 2. \end{cases}$

**Задача 12.** Розв'язати задачу з фізичним змістом.

В-1. Тіло у формі чверті кола ($x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) виготовлено з однорідного листового матеріалу. Знайти момент інерції цього тіла при обертанні навколо осі $Ox$, якщо його маса дорівнює $m$.

В-2. Тіло у формі чверті кола ($x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) виготовлено з однорідного листового матеріалу. Знайти абсцису центру мас тіла.

В-3. Електрична напруга лінійно збільшується за законом $U(t) = \frac{U_0}{T} \cdot t$, в момент часу $t = T$ стрибкоподібно зменшується до нуля і далі періодично повторюється. Знайти середньоквадратичне значення напруги на періоді.

В-4. Конденсатор ємністю $C$ зарядили до напруги $U_0$ і з'єднали з резистором опором $R$. Як відомо, розрядний струм у ланцюгу за цих умов згасатиме за законом $I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. Обчислити заряд $Q$, який пройде через поперечний переріз ланцюга за час $\tau = RC$. Врахувати, що за означенням сила струму $I(t) = \frac{dQ}{dt}$.

В-5. Плоский виток площею $S$ зі сталим струмом $I$ розташовано в однорідному магнітному полі індукцією $B$, перпендикулярному площині витка. Яку роботу треба виконати для подолання моменту сил Ампера, щоб зорієнтувати площину витка паралельно магнітному полю? Момент сил Ампера обчислюють за формулою $M(\varphi) = ISB\sin\varphi$, $\varphi$ – кут між вектором

індукції і нормаллю до площини витка; елементарну роботу моменту сил при повороті на кут $d\varphi$ обчислюють за формулою $dA = M(\varphi)\,d\varphi$.

В-6. Тонкий діелектричний стержень довжиною $L$ рівномірно заряджений електричним зарядом $Q$. З якою силою відштовхується від нього точковий заряд $q$, розташований на уявному продовженні стержня на відстані $a$ від найближчого кінця? *Вказівка.* Розбити заряд стержня на елементарні заряди $dQ$ і скористатись законом Кулона: $dF = \frac{kq\,dQ}{x^2}$, $x$ – відстань між зарядами $q$ і $dQ$. Перевірити отриманий результат на відповідність до закону Кулона у граничному випадку при $L \ll a$.

В-7. Тонкий діелектричний стержень довжиною $L$ рівномірно заряджений електричним зарядом $Q$. З якою силою відштовхується від нього точковий заряд $q$, розташований на серединному перпендикулярі стержня на відстані $h$ від середини стержня? *Вказівка.* Розбити заряд стержня на елементарні заряди $dQ$ і скористатись законом Кулона: $dF = \frac{kq\,dQ}{x^2}$, $x$ – відстань між зарядами $q$ і $dQ$. З міркувань симетрії до інтегральної суми включити лише компоненту сили, перпендикулярну до стержня.

В-8. Тонкий дріт довжиною $\frac{\pi R}{2}$ і масою $m$ зігнули у формі чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Обчислити момент інерції дроту при обертанні навколо осі $Ox$.

В-9. Тонкий дріт довжиною $\frac{\pi R}{2}$ зігнули у формі чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Знайти абсцису центру мас дроту.

В-10. Знайти роботу, яку виконують $\nu$ молів ідеального газу, ізотермічно розширюючись від об'єму $V_1$ до об'єму $V_2$ при абсолютній температурі $T$. Використати рівняння стану ідеального газу (Менделєєва–Клапейрона) $pV = \nu RT$, де $R$ – універсальна газова стала. Елементарна робота розширення газу дорівнює $dA = p(V)\,dV$.

В-11. Тонкий круглий диск радіусу $R$ розташували вертикально і повністю занурили під воду так, що його центр опинився на глибині $H$. Обчислити силу тиску води на один бік диску. Тиск води на глибині $h$ дорівнює $p(h) = p_0 + \rho g h$, де $p_0$ – атмосферний тиск, $\rho$ – густина води, $g$ – прискорення вільного падіння. Елементарну силу обчислюють за формулою $dF = p\,dS$.

В-12. Тонкий круглий діелектричний диск радіусу $R$ рівномірно заряджений електричним зарядом $Q$. З якою силою він діє на точковий заряд $q$, розташований на осі диску на відстані $h$

від його площини? *Вказівка.* Розбити заряд диску на концентричні кільця.

В-13. Тонке кругле діелектричне кільце з зовнішнім і внутрішнім радіусами $r$, $R$ нерівномірно заряджене електричним зарядом з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{x-r}{R-r}\right)$, де $x$ – відстань від центру. Знайти напруженість магнітного поля в центрі кільця при обертанні з кутовою швидкістю $\omega$ навколо осі, що проходить через центр кільця перпендикулярно його площині. *Вказівка.* Розбити кільце на диференціально тонкі концентричні кільця зарядами $dQ = \sigma\, dS$. Кожному кільцю поставити у відповідність струм $dI = \frac{dQ}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – період обертання. Врахувати, що в центрі витка радіусом $x$ зі струмом $dI$ створюється магнітне поле напруженістю $dH = \frac{dI}{2x}$.

В-14. Обчислити роботу, яку порібно виконати для збільшння напруги на конденсаторі ємністю $C$ від значення $U_1$ до значення $U_2$. *Вказівка.* За означенням електричною ємністю конденсатора називають коефіцієнт пропорційності між напругою та зарядом: $Q = CU$. Робота по переносу порції $dQ$ заряду з однієї обкладинки на другу при сталій напрузі $U$ дорівнює $dA = U\, dQ$.

В-15. Якщо тіло падає без початкової швидкості з деякої висоти $H$, то в момент падіння його кінетична енергія дорівнює роботі сили тяжіння. Зокрема, якщо висота $H$ настільки мала, що зміною сили тяжіння можна знехтувати, то $\frac{mv^2}{2} = mg \cdot H$, звідки $v = \sqrt{2gH}$. На скільки відсотків ця відповідь відрізняється від точної при падінні з висоти $H = 3R$, де $R$ – радіус Землі? *Вказівка.* Врахувати, що на висоті $x$ сила тяжіння дорівнює $F = \frac{GMm}{(R+x)^2} = \frac{GMm}{R^2} \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2} = mg \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2}$, $x \in [0; H]$.

**Задача 13.** Розв'язати задачу з геометричним змістом.

В-1. Обчислити довжину кривої $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ в інтервалі $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

В-2. Обчислити довжину кривої $\rho = ae^{\varphi}$ в інтервалі $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

В-3. Знайти площу одного пелюстка «трипелюсткової троянди» $\rho = a\cos 3\varphi$.

В-4. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої графіком, заданим параметрично: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

В-5. Обчислити довжину частини кривої $y = \ln x$, обмежену інтервалом $x \in \left[\sqrt{3}; \sqrt{15}\right]$.

В-6. Крива $\rho = a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, обертається навколо по-

лярної осі. Знайти об'єм тіла обертання.

В-7. Знайти об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні сегменту параболи $y = 4x - x^2$, $x \in [0; 4]$, навколо осі $Ox$.

В-8. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні кривої $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; 1]$, навколо осі $Ox$.

В-9. Крива $\rho = R = \text{const}$, $\varphi \in [0; \varphi_0]$, обертається навколо полярної осі. Обчислити площу поверхні тіла обертання і переконатись, що при $\varphi_0 = \pi$ відповідь збігається з формулою площі поверхні сфери радіуса $R$.

В-10. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні навколо осі $Ox$ прямої, заданої параметрично: $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases}$ $t \in [1; 2]$.

В-11. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні кривої $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ навколо полярної осі.

В-12. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої кривою, заданою в полярних координатах: $\rho = a(1 + 2\cos\varphi)$.

В-13. Обчислити довжину частини кривої $y = e^x$, обмежену інтервалом $x \in \left[\ln\sqrt{15}; \ln\sqrt{24}\right]$.

В-14. Обчислити довжину частини кривої, заданої параметрично: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

В-15. Криву задано параметрично: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні цієї кривої навколо осі $Ox$.

**Задача 14.** Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

В-1. а) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$.

В-2. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x\, dx}{(1+x^2)^2}$; б) $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$.

В-3. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(5+\cos 3x)\, dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

В-4. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+3x}}{x^3+1}\, dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

В-5. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

В-6. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg} x\,dx$.

В-7. а) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{1} \ln \frac{1}{x}\,dx$.

В-8. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(3-\sin 2x)\,dx}{x}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{e^{-1/x^2}\,dx}{x^3}$.

В-9. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3x^2\,dx}{1+x^6}$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$.

В-10. а) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_0^{1} x\ln x\,dx$.

В-11. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{x^7+1}}\,dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$.

В-12. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(x-2x^2\right)dx}{x^3+5x^2+3x+2}$; б) $\int\limits_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\frac{1}{x}\,dx}{x^2}$.

В-13. а) $\int\limits_1^{+\infty} \arcsin\frac{1}{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dx}{\sin 2x}$.

В-14. а) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

В-15. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{e^x\,dx}{e^x-1}$.

**Задача 15.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж прямої в напрямку від точки $A$ до точки $B$.

В-1. $\int\limits_{\smile AB} (2x+y)\,d\ell$, $A(2;1)$, $B(-1;5)$.

В-2. $\int\limits_{\smile AB} (2x-y)\,d\ell$, $A(3;0)$, $B(0;4)$.

В-3. $\int\limits_{\smile AB} (2x-y)\,d\ell$, $A(4;4)$, $B(1;0)$.

В-4. $\int\limits_{\smile AB} (2x-2y)\,d\ell$, $A(5;5)$, $B(2;1)$.

В-5. $\int\limits_{\smile AB} (2x+4y)\,d\ell$, $A(-1;2)$, $B(2;-2)$.

В-6. $\int\limits_{\smile AB} (2x+2y)\,d\ell$, $A(2;0)$, $B(5;-4)$.

В-7. $\int\limits_{\smile AB} (4x-2y)\,d\ell$, $A(4;2)$, $B(0;-1)$.

В-8. $\int\limits_{\smile AB} (2x-2y)\,d\ell$, $A(3;1)$, $B(0;5)$.

В-9. $\int\limits_{\smile AB} (2x+y)\,d\ell$, $A(5;3)$, $B(2;-1)$.

В-10. $\int\limits_{\smile AB} (4x+2y)\,d\ell$, $A(-4;1)$, $B(0;4)$.

В-11. $\int\limits_{\smile AB} (2x+y)\,d\ell$, $A(4;1)$, $B(1;-3)$.

В-12. $\int\limits_{\smile AB} (x+2y)\,d\ell$, $A(-5;1)$, $B(-1;4)$.

В-13. $\int\limits_{\smile AB} (4x+2y)\,d\ell$, $A(-6;-2)$, $B(6;3)$.

В-14. $\int\limits_{\smile AB} (x+4y)\,d\ell$, $A(2;1)$, $B(-2;4)$.

В-15. $\int\limits_{\smile AB} (x+6y)\,d\ell$, $A(7;-2)$, $B(3;1)$.

**Задача 16.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду в напрямку від точки $A$ до точки $B$ вздовж кривої, визначеної заданим рівнянням. У відповіді надати: 1) параметризацію контуру інтегрування; 2) інтервал зміни параметру; 3) шукане значення криволінійного інтегралу.

В-1. $\int\limits_{\smile AB} \frac{x}{y}\,dx + y^2\,dy$, $A(0;0)$, $B(1;1)$, $y=\sqrt{x}$.

В-2. $\int\limits_{\smile AB} 3xy\,dx + 5xy^3\,dy$, $A(0;0)$, $B(1;2)$, $y=2x$.

В-3. $\int\limits_{\smile AB} 4xy\,dx + 6x^2y\,dy$, $A(0;0)$, $B(1;1)$, $y=x^2$.

В-4. $\int\limits_{\smile AB} (x+y)\,dx + 6xy\,dy$, $A(0;1)$, $B(1;0)$, $y=1-x$.

В-5. $\int\limits_{\smile AB} (x^2+y^2)\,dx + 3(x^2-y^2)\,dy$, $A(0;-1)$, $B(0;1)$, $x=\sqrt{1-y^2}$.

В-6. $\int\limits_{\smile AB} (4y-2x)\,dx + 7xy\,dy$, $A(0;0)$, $B(1;1)$, $y=x^3$.

В-7. $\int\limits_{\smile AB} (x-y^3)\,dx + 6xy^2\,dy$, $A(0;0)$, $B(1;1)$, $y=\sqrt[3]{x}$.

В-8. $\int\limits_{\smile AB} (x^2+y^2)\,dx + (x^2+y^2-1)\,dy$, $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $y=\sqrt{1-x^2}$.

В-9. $\int\limits_{\smile AB} xy^2\,dx + 3y\,dy$, $A\left(-1;-\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\arcsin x$.

В-10. $\int\limits_{\smile AB} 2x\,dx + \frac{4x}{y}\,dy$, $A(0;1)$, $B(1;e)$, $y = e^x$.

В-11. $\int\limits_{\smile AB} \frac{2y}{x}\,dx + (4y + x - e^y)\,dy$, $A(1;0)$, $B(e;1)$, $y = \ln x$.

В-12. $\int\limits_{\smile AB} (2x - y)\,dx + 3xy^2\,dy$, $A(1;0)$, $B(0;2)$, $y = 2 - 2x$.

В-13. $\int\limits_{\smile AB} 4\operatorname{tg} x(1 + y^2)\,dx + 2y\,dy$, $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{4};1\right)$, $y = \operatorname{tg} x$.

В-14. $\int\limits_{\smile AB} \frac{y\,dx}{e-1} + \frac{2x}{y}\,dy$, $A(0;1)$, $B(1;e)$, $y = e^x$.

В-15. $\int\limits_{\smile AB} x^2 y\,dx - x^3 y\,dy$, $A(1;2)$, $B(2;1)$, $y = \frac{2}{x}$.

**Задача 17.** Задано функцію $\varphi(x, y)$ і точку $A$. Обчислити криволінійний інтеграл дугого роду $\int\limits_{\smile OA} \operatorname{grad}\varphi \cdot \overrightarrow{d\ell}$, де $O$ – початок координат.

В-1. $\varphi = \frac{2x+4y}{1+x^2y^2}$, $A(1;1)$.
В-2. $\varphi = 2^{x^2-y^2-2y}$, $A(3;2)$.
В-3. $\varphi = \frac{4y}{\sqrt{2+x^2+y^2}}$, $A(1;1)$.
В-4. $\varphi = \sqrt[3]{xy}$, $A(4;2)$.
В-5. $\varphi = (2x - y)^4$, $A(3;5)$.
В-6. $\varphi = \sin(x + y)$, $A\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.
В-7. $\varphi = (3x^2 - y)^3$, $A(1;2)$.
В-8. $\varphi = y\ln(1 + x^2)$, $A(0;2)$.
В-9. $\varphi = xy^4 - 13$, $A(1;2)$.
В-10. $\varphi = \sin^2(xy)$, $A\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.
В-11. $\varphi = (x^2 - 3y)^3$, $A(2;1)$.
В-12. $\varphi = x^5y^3$, $A(1;1)$.
В-13. $\varphi = y^2 - x^3$, $A(2;3)$.
В-14. $\varphi = \frac{x^2+y^2+1}{\sqrt{x^2+3}}$, $A(1;0)$.
В-15. $\varphi = \frac{2x+y}{x^2+y^2+1}$, $A(1;0)$.

**Задача 18.** Обчислити даний криволінійний інтеграл другого роду вздовж замкненого трикутного контуру $ABC$ в додатному напрямку. Скористатись формулою Гріна.

В-1. $J = \oint\limits_L \left(y^2 + 1\right) e^x dx + (x + 2 + 2ye^x)\,dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(0;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$.

В-2. $J = \oint\limits_L 6x\ln\left(1 + y^2\right) dx + \left(2x + 1 + \frac{2y\left(3x^2+5\right)}{1+y^2}\right) dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(0;2)$, $B(2;3)$, $C(0;5)$.

В-3. $J = \oint\limits_L \left(y^2 + 3y\right)\cos x\,dx + (4x + (2y + 3)\sin x)\,dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(-2;5)$.

B-4. $J = \oint\limits_L 2xy^3\,dx + \left(2x + 7 + 3y^2\left(x^2+1\right)\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(0;1)$, $B(0;5)$, $C(-2;3)$.

B-5. $J = \oint\limits_L 2xe^{3y}dx + \left(x + 1 + 3x^2e^{3y}\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(2;1)$, $B(2;7)$, $C(-2;3)$.

B-6. $J = \oint\limits_L (y+2)e^{2x+xy}dx + \left(2x + 3 + xe^{2x+xy}\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(-1;2)$.

B-7. $J = \oint\limits_L 2x\left(x^2 - e^y\right)dx + \left(3x + 1 - e^y\left(x^2 - e^y\right)\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$.

B-8. $J = \oint\limits_L \cos x\left(\sin x + y^2\right)dx + \left(2x + 2y\left(\sin x + y^2\right)\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(4;1)$, $B(4;5)$, $C(0;5)$.

B-9. $J = \oint\limits_L 3x^2y^4dx + \left(x - 5 + 4x^3y^3\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(3;5)$.

B-10. $J = \oint\limits_L 3\cos(3x+2y)dx + (2x + 6 + 2\cos(3x+2y))\,dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(3;1)$, $B(5;3)$, $C(1;3)$.

B-11. $J = \oint\limits_L e^x \operatorname{arctg} y\,dx + \left(3x + 3 + \frac{e^x}{1+y^2}\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(0;3)$.

B-12. $J = \oint\limits_L 3\left(x+y^2\right)^2dx + \left(2x + 4 + 6y\left(x+y^2\right)^2\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(-2;1)$, $B(4;1)$, $C(0;5)$.

B-13. $J = \oint\limits_L \frac{1}{1+y^2}\,dx + \left(5x + 2 - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(2;1)$, $B(2;5)$, $C(0;5)$.

B-14. $J = \oint\limits_L 5x^4e^{3y}\,dx + \left(2x + 5 + 3x^5e^{3y}\right)dy$;
$L(\triangle ABC)$: $A(0;2)$, $B(4;4)$, $C(1;4)$.

В-15. $J = \oint\limits_L \cos x e^y dx + (x + 2 + \sin x e^y)\, dy$;
$L(\triangle ABC)$ : $A(2;1)$, $B(4;1)$, $C(0;5)$.

**Задача 19.** В наведеній сумі інтегралів змінити порядок інтегрування. У відповіді надати: 1) креслення на папері в клітинку з дотриманням масштабу; 2) явний вигляд залежностей «нових» меж внутрішнього інтегрування від «нової» змінної зовнішнього інтегрування; 3) один подвійний інтеграл, зведений до повторного.

В-1. $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\, dy + \int\limits_1^5 dx \int\limits_0^{\sqrt{5-x}} f(x,y)\, dy.$

В-2. $J = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)\, dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-(y-4)^2}} f(x,y)\, dx.$

В-3. $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)\, dy.$

В-4. $J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2y} f(x,y)\, dx + \int\limits_2^6 dy \int\limits_0^{4-\sqrt{16-(y-6)^2}} f(x,y)\, dx.$

В-5. $J = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy + \int\limits_4^5 dx \int\limits_0^{10-2x} f(x,y)\, dy.$

В-6. $J = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)\, dx.$

В-7. $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{3x} f(x,y)\, dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-(x-1)^2}} f(x,y)\, dy.$

В-8. $J = \int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f(x,y)\, dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2y}-2}^0 f(x,y)\, dx.$

В-9. $J = \int\limits_{-4}^0 dx \int\limits_0^{x+4} f(x,y)\, dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{(x-2)^2} f(x,y)\, dy.$

В-10. $J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\, dx + \int\limits_1^{1+\pi/2} dy \int\limits_0^{1+\pi/2-y} f(x,y)\, dx.$

В-11. $J = \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\, dy + \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2+1} dx \int\limits_0^{\pi/2+1-x} f(x,y)\, dy.$

В-12. $J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2y} f(x,y)\, dx + \int\limits_2^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)\, dx.$

В-13. $J = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{8-2x} f(x,y)\,dy.$

В-14. $J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx.$

В-15. $J = \int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\operatorname{tg} x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{2-4x/\pi} f(x,y)\,dy.$

**Задача 20.** Розв'язати задачу з використанням подвійного інтегралу.

В-1. Обчислити ординату центру мас однорідного параболічного сегменту, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$.
*Відповідь*: $y_C = \frac{3}{5}b$.

В-2. Обчислити абсцису центру мас однорідного криволінійного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$, $x = 0$. Трикутник належить першій координатній чверті.
*Відповідь*: $x_C = \frac{3}{8}a$.

В-3. Обчислити абсцису центру мас однорідного криволінійного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$.
*Відповідь*: $x_C = \frac{3}{4}a$.

В-4. Обчислити ординату центру мас однорідного криволінійного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$.
*Відповідь*: $y_C = \frac{3}{10}b$.

В-5. Обчислити масу неоднорідного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a} \cdot x$, $y = 0$, $x = a$. Поверхнева густина змінюється за законом $\sigma(x,y) = \sigma_0\left(1 - \frac{x}{a}\right)$.
*Відповідь*: $m = \frac{1}{6}\sigma_0 ab$.

В-6. Обчислити масу неоднорідного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a} \cdot x$, $y = 0$, $x = a$. Поверхнева густина змінюється за законом $\sigma(x,y) = \sigma_0 \cdot \frac{x}{a}$.
*Відповідь*: $m = \frac{1}{3}\sigma_0 ab$.

В-7. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною $\sigma$ обмежений лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$, $x = 0$ і розташований в першій координатній чверті. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі $Ox$.
*Відповідь*: $J_x = \frac{2}{7}\sigma ab^3$.

В-8. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною $\sigma$ обмежений лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$, $x = 0$ і розташований в першій координатній чверті. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі $Oy$.
*Відповідь*: $J_x = \frac{2}{15}\sigma a^3 b$.

В-9. Неоднорідну прямокутну пластину обмежено прямими $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Поверхнева густина змінюється за законом $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cdot \frac{y}{b}$. Обчислити момент інерції пластини при обертанні навколо осі $Ox$.
*Відповідь*: $J_x = \frac{1}{4}\sigma_0 ab^3$.

В-10. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною $\sigma$ обмежено лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі $Ox$.
*Відповідь*: $J_x = \frac{1}{21}\sigma ab^3$.

В-11. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною $\sigma$ обмежено лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі $Oy$.
*Відповідь*: $J_x = \frac{1}{5}\sigma a^3 b$.

В-12. Однорідний сектор обмежено колом $x^2 + y^2 = R^2$ і прямими $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha$ – даний сталий гострий кут. Обчислити абсцису центру мас сектора.
*Відповідь*: $x_C = \frac{2}{3}R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

В-13. Однорідний сектор з поверхневою густиною $\sigma$ обмежено колом $x^2 + y^2 = R^2$ і прямими $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha$ – даний сталий гострий кут. Обчислити момент інерції сектора при обертанні навколо осі $Ox$.
*Відповідь*: $J_x = \frac{\sigma R^4}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$.

В-14. Однорідний сектор з поверхневою густиною $\sigma$ обмежено колом $x^2 + y^2 = R^2$ і двома прямими: $y = 0$ і $y = x \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha$ – даний сталий гострий кут. Обчислити момент інерції сектора при обертанні навколо осі $Oy$.
*Відповідь*: $J_y = \frac{\sigma R^4}{8}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$.

В-15. Неоднорідне коло обмежено лінією $x^2 + y^2 = R^2$. Поверхнева густина залежить від відстані $\rho$ між початком координат і поточною точкою за законом $\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{\rho}{R}$. Обчислити масу кола.
*Відповідь*: $m = \frac{2}{3}\pi\sigma_0 R^2$.

# 6 РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

**Задача 1.** Знайти невизначений інтеграл $\int (2x+3)^6\,dx$. Виконати перевірку.

**Розв'язок.** Функція під знаком інтегралу є складною, причому внутрішня функція лінійна, а первісна зовнішньої функції таблична. Вводимо заміну $t = 2x+3$, $dt = 2\,dx$, $dx = \frac{dt}{2}$. Маємо:

$$\int (2x+3)^6\,dx = \int t^6\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^6\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^7}{7} + C = \frac{(2x+3)^7}{14} + C.$$

Зробимо перевірку:

$$\left(\frac{(2x+3)^7}{14} + C\right)' = \frac{7(2x+3)^6\cdot(2x+3)'}{14} = \frac{(2x+3)^6\cdot 2}{2} = (2x+3)^6,$$

що збігається з підінтегральною функцією.

*Відповідь*: $\frac{(2x+3)^7}{14} + C$.

**Задача 2.** Знайти невизначений інтеграл

$$\int \left(e^x + x^2 + 3x\right)^3 \left(e^x + 2x + 3\right)\,dx,$$

використовуючи потрібну заміну змінної. Виконати перевірку.

**Розв'язок.** Введемо заміну $t = e^x + x^2 + 3x$. Диференціюємо її:

$$dt = \left(e^x + 2x + 3\right)\,dx.$$

Тоді

$$\int \underbrace{\left(e^x + x^2 + 3x\right)^3}_{t^3}\underbrace{\left(e^x + 2x + 3\right)\,dx}_{dt} = \int t^3\,dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} + C = \frac{\left(e^x + x^2 + 3x\right)^4}{4} + C.$$

Зробимо перевірку:

$$\left(\frac{\left(e^x + x^2 + 3x\right)^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4\left(e^x + x^2 + 3x\right)^3\cdot\left(e^x + x^2 + 3x\right)' =$$

$$= \left(e^x + x^2 + 3x\right)^3 \cdot (e^x + 2x + 3)\,,$$

що збігається з підінтегральною функцією.

*Відповідь*: $\frac{\left(e^x+x^2+3x\right)^4}{4} + C$.

**Задача 3.** Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt[3]{x} \ln x\, dx$, застосовуючи інтегрування частинами. Виконати перевірку.

**Розв'язок.** Покладемо $u = \ln x$, $dv = \sqrt[3]{x}\, dx = x^{\frac{1}{3}}\, dx$, і підінтегральний вираз вичерпано. Маємо: $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int dv = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}$. Тоді за формулою інтегрування частинами маємо:

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x\, dx = uv - \int v\, du = \ln x \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \int \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

Зробимо перевірку:

$$\left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + C\right)' = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \ln x + x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{x}\right) - \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{x} \ln x + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} \ln x,$$

що збігається з підінтегральною функцією.

*Відповідь*: $\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + C$.

**Задача 4.** Проінтегрувати правильний дріб:

а) $\int \frac{3x - 20}{x^2 + 3x - 10}\, dx$; б) $\int \frac{7x + 23}{x^2 + 6x + 9}\, dx$; в) $\int \frac{10x + 43}{x^2 + 8x + 17}\, dx$.

**Розв'язок.** а) Дискримінант знаменника $D = 3^2 + 4 \cdot 10 = 49 > 0$. Отже, маємо випадок двох дійсних коренів. Очевидно, вони дорівнюють $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. Розкладемо дріб на елементарні методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{3x - 20}{x^2 + 3x - 10} = \frac{3x - 20}{(x + 5)(x - 2)} = \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 2}.$$

Домножимо на $(x + 5)$:

$$\frac{3x - 20}{x - 2} = A + \frac{B(x + 5)}{x - 2}.$$

При $x=-5$ отримуємо: $A=5$. Домножимо на $(x-2)$:

$$\frac{3x-20}{x+5}=\frac{A(x-2)}{x+5}+B.$$

При $x=2$ отримуємо: $B=-2$. Маємо:

$$\int\frac{3x-20}{x^2+3x-10}\,dx=\int\left(\frac{5}{x+5}-\frac{2}{x-2}\right)\,dx=$$

$$=5\ln|x+5|-2\ln|x-2|+C.$$

б) Дискримінант знаменника $D=6^2-4\cdot 9=0$. Отже, маємо випадок одного дійсного кратного кореня. Очевидно, він дорівнює $x_{1,2}=-3$. Розкладемо дріб на елементарні методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{7x+23}{x^2+6x+9}=\frac{7x+23}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}=\frac{Ax+(3A+B)}{(x+3)^2}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$, отримуємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1: & A=7; \\ x^0: & 3A+B=23. \end{array}\right\}$$

Її розв'язок $A=7$, $B=2$. Тоді

$$\int\frac{7x+23}{x^2+6x+9}\,dx=\int\left(\frac{7}{x+3}+\frac{2}{(x+3)^2}\right)\,dx=$$

$$=7\ln|x+3|-\frac{2}{x+3}+C.$$

Зауважимо, в цьому прикладі можна уникнути методу невизначених коефіцієнтів:

$$\int\frac{7x+23}{x^2+6x+9}\,dx=\int\frac{7x+23}{(x+3)^2}\,dx=\left\|\begin{array}{l} x+3=t \\ x=t-3 \\ dx=dt \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{7(t-3)+23}{t^2}\,dx=\int\frac{7t+2}{t^2}\,dx=\int\left(\frac{7}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\,dx=$$

$$= 7\ln|t| - \frac{2}{t} + C = 7\ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + C.$$

в) Дискримінант знаменника $D = 8^2 - 4\cdot 17 = -4 < 0$. Отже, дійсних коренів немає. Виділимо у знаменнику повний квадрат:

$$x^2 + 8x + 17 = \left(x^2 + 2\cdot x\cdot 4 + 4^2\right) - 16 + 17 = (x+4)^2 + 1.$$

Тому введемо заміну змінної $x + 4 = t$, $x = t - 4$, $dx = dt$:

$$\int \frac{10x+43}{x^2+8x+17}\,dx = \int \frac{10(t-4)+43}{t^2+1}\,dt = \int \frac{10t+3}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 5\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + 3\int \frac{dt}{t^2+1} = 5\ln\left(t^2+1\right) + 3\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 5\ln\left((x+4)^2+1\right) + 3\operatorname{arctg}(x+4) + C =$$

$$= 5\ln\left(x^2+8x+17\right) + 3\operatorname{arctg}(x+4) + C.$$

*Відповідь*: а) $5\ln|x+5| - 2\ln|x-2| + C$; б) $7\ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + C$; в) $5\ln\left(x^2+8x+17\right) + 3\operatorname{arctg}(x+4) + C$.

**Задача 5.** Проінтегрувати правильний дріб з кратним коренем знаменника: $\int \frac{3x^3+12x^2+18x+18}{(x+1)^3(x+4)}\,dx$.

**Розв'язок.** Розкладемо дріб на елементарні. Корінь $x = -1$ є кратним кратності 3, тому «дужці» $(x+1)^3$ ставимо у відповідність групу з трьох доданків аж до вичерпання третьої кратності: $\frac{A}{x+1}$, $\frac{B}{(x+1)^2}$, $\frac{C}{(x+1)^3}$. Корінь $x = -4$ є простим, тому «дужці» $(x+4)$ ставимо у відповідність один доданок вигляду $\frac{D}{x+4}$. Отже, розкладення підінтегральної функції на елементарні дроби потрібно шукати у вигляді

$$\frac{3x^3+12x^2+18x+18}{(x+1)^3(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x+4}.$$

Замість складання і подальшого розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь скористаємось спрощеною модифікацією методу невизначених коефіцієнтів. Домножимо ліву і праву частини на знаменник лівої частини:

$$3x^3 + 12x^2 + 18x + 18 =$$

$$= A(x+1)^2(x+4) + B(x+1)(x+4) + C(x+4) + D(x+1)^3. \quad (*)$$

При підстановці до $(*)$ значення $x = -4$ отримуємо:

$$-3 \cdot 64 + 12 \cdot 16 - 18 \cdot 4 + 18 = -27D, \qquad D = 2.$$

При підстановці до $(*)$ значення $x = -1$ отримуємо:

$$-3 + 12 - 18 + 18 = 3C, \qquad C = 3.$$

Тепер тотожність $(*)$ набуває вигляду

$$3x^3 + 12x^2 + 18x + 18 =$$

$$= A(x+1)^2(x+4) + B(x+1)(x+4) + 3(x+4) + 2(x+1)^3. \quad (**)$$

Це – не рівняння, яке може справджуватись лише при вдалому піборі $x$, а тотожність, яка виконана за довільних значень $x$. Тому $(**)$ можна продиференціювати за $x$:

$$9x^2 + 24x + 18 = A\left[2(x+1)(x+4) + (x+1)^2\right] +$$

$$+B\left[(x+4) + (x+1)\right] + 3 + 6(x+1)^2. \qquad (***)$$

При $x = -1$ отримуємо:

$$9 - 24 + 18 = 3B + 3, \qquad B = 0.$$

Тоді тотожність $(***)$ набуває вигляду

$$9x^2 + 24x + 18 = A\left[2(x^2 + 5x + 4) + (x+1)^2\right] + 3 + 6(x+1)^2.$$

Ще раз диференціюючи, знаходимо:

$$18x + 24 = A\left[2(2x+5) + 2(x+1)\right] + 12(x+1).$$

При $x = -1$ отримуємо:

$$-18 + 24 = 6A, \qquad A = 1.$$

Отже, якщо спрощену модифікацію методу невизначених коефіцієнтів доповнити послідовним диференціюванням потрібну кількість разів, то її можна розповсюдити і на випадок кратних коренів.

Тепер шукане розкладення має вигляд:

$$\frac{3x^3 + 12x^2 + 18x + 18}{(x+1)^3(x+4)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{x+4}.$$

Відповідно,

$$\int \frac{3x^3+12x^2+18x+18}{(x+1)^3(x+4)}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{x+4}\right) dx =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{3}{2(x+1)^2} + 2\ln|x+4| + C.$$

*Відповідь*: $\ln|x+1| - \frac{3}{2(x+1)^2} + 2\ln|x+4| + C$.

**Задача 6.** Проінтегрувати неправильний дріб:

$$\int \frac{4x^3-13x^2+16x-9}{x^2-3x+2}\,dx.$$

**Розв'язок.** З підінтегральної функції виділимо цілу частину шляхом ділення многочленів у стовпчик:

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-13x^2+16x-9 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} \underline{4x^3-12x^2+8x} & 4x-1 \\ \quad -x^2+8x-9 & \\ \quad \underline{-x^2+3x-2} & \\ \quad\quad 5x-7 & \end{array}$$

Отримали:

$$\frac{4x^3-13x^2+16x-9}{x^2-3x+2} = 4x-1+\frac{5x-7}{x^2-3x+2}.$$

Останній дріб розкладемо на елементарні методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Домножимо на $(x-1)$:

$$\frac{5x-7}{x-2} = A + \frac{B(x-1)}{x-2}.$$

При $x=1$ отримуємо: $A=2$. Домножимо на $(x-2)$:

$$\frac{5x-7}{x-1} = \frac{A(x-2)}{x-1} + B.$$

При $x = 2$ отримуємо: $B = 3$. Розкладення набуває вигляду

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Маємо:

$$\int \frac{4x^3-13x^2+16x-9}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(4x-1+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx =$$

$$= 2x^2 - x + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C.$$

*Відповідь*: $2x^2 - x + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$.

**Задача 7.** Знайти невизначений інтеграл $\int\sqrt{4+\frac{1}{x-1}}\,dx$.

**Розв'язок.** Маємо: $4 + \frac{1}{x-1} = \frac{4(x-1)+1}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$. Отже, підінтегральна функція є дробово-лінійною. Тому для раціоналізації підінтегрального виразу (тобто для здобування кореня націло) потрібно ввести заміну $\frac{4x-3}{x-1} = t^2$. Маємо:

$$4x - 3 = xt^2 - t^2, \qquad x = \frac{t^2-3}{t^2-4},$$

$$dx = \frac{2t(t^2-4) - (t^2-3)\cdot 2t}{(t^2-4)^2}\,dt = -\frac{2t\,dt}{(t^2-4)^2} = -\frac{2t\,dt}{(t-2)^2(t+2)^2}.$$

Тоді

$$J = -\int \sqrt{t^2}\cdot\frac{2t\,dt}{(t-2)^2(t+2)^2} = -\int\frac{2t^2\,dt}{(t-2)^2(t+2)^2}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(t) = \frac{2t^2}{(t-2)^2(t+2)^2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{t+2} + \frac{D}{(t+2)^2}.$$

Домножимо на знаменник лівої частини:

$$2t^2 = A(t-2)(t+2)^2 + B(t+2)^2 + C(t+2)(t-2)^2 + D(t-2)^2.$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3: & A + C = 0 \\ x^2: & 2A + B - 2C + D = 2 \\ x^1: & -4A + 4B - 4C - 4D = 0 \\ x^0: & -8A + 4B + 8C + 4D = 0 \end{array}\right\}$$

Її розв'язок: $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{2}$. Тоді

$$J=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}+\frac{2}{(t-2)^2}-\frac{1}{t+2}+\frac{2}{(t+2)^2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\ln|t-2|-\frac{2}{t-2}-\ln|t+2|-\frac{2}{t+2}\right)+C.$$

*Відповідь*: $-\frac{1}{4}\left(\ln|t-2|-\frac{2}{t-2}-\ln|t+2|-\frac{2}{t+2}\right)+C$, де $t=\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}$.

**Задача 8.** Знайти невизначений інтеграл:

а) $I=\int x\sqrt{x^2-12x+61}\,dx$; б) $J=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{91+6x-x^2}}$.

**Розв'язок.** а) Виділимо повний квадрат:

$$x^2-12x+61=\left(x^2-2\cdot 6\cdot x+6^2\right)+61-6^2=(x-6)^2+25.$$

Отже, зручною є заміна $x-6=y$, $x=y+6$, $dx=dy$. Тоді

$$I=\int(y+6)\sqrt{y^2+25}\,dy.$$

Зручно також ввести подальшу заміну $y=5z$, $dy=5\,dz$:

$$I=\int(5z+6)\sqrt{25z^2+25}\cdot 5\,dz=25\int(5z+6)\sqrt{z^2+1}\,dz. \qquad (*)$$

Під знаком кореня знаходиться квадратична функція з додатним старшим коефіцієнтом. Тому введемо заміну Ейлера:

$$\sqrt{z^2+1}=t-z, \qquad z^2+1=t^2-2tz+z^2,$$

$$2tz=t^2-1, \qquad z=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}.$$

Диференціюємо цю заміну:

$$dz=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)dt=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt.$$

Оскільки тепер

$$\sqrt{z^2+1}=t-z=t-\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\right)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t},$$

то ми отримуємо:

$$\frac{I}{25} = \int (5z+6)\sqrt{z^2+1}\,dz = \int \left(5\cdot\frac{t^2-1}{2t}+6\right)\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{5t^2-5+12t}{2t}\cdot\frac{\left(t^2+1\right)^2}{4t^3}\,dt = \int \frac{\left(5t^2+12t-5\right)\left(t^2+1\right)^2}{8t^4}\,dt =$$

$$= \int \frac{\left(5t^2+12t-5\right)\left(t^4+2t^2+1\right)}{8t^4}\,dt =$$

$$= \int \frac{5t^6+10t^4+5t^2+12t^5+24t^3+12t-5t^4-10t^2-5}{8t^4}\,dt =$$

$$= \int \frac{5t^6+12t^5+5t^4+24t^3-5t^2+12t-5}{8t^4}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{5t^2}{8}+\frac{3t}{2}+\frac{5}{8}+\frac{3}{t}-\frac{5}{8t^2}+\frac{3}{2t^3}-\frac{5}{8t^4}\right)dt =$$

$$= \frac{5t^3}{24}+\frac{3t^2}{4}+\frac{5t}{8}+3\ln|t|+\frac{5}{8t}-\frac{3}{4t^2}+\frac{5}{24t^3}+C =$$

$$= \frac{5}{24}\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)+\frac{3}{4}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{5}{8}\left(t+\frac{1}{t}\right)+3\ln|t|+C.$$

При введенні зворотної заміни цей вираз припускає значне спрощення:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}+z} = \frac{\sqrt{z^2+1}-z}{\left(\sqrt{z^2+1}+z\right)\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{z^2+1}-z}{\left(\sqrt{z^2+1}\right)^2-z^2} = \frac{\sqrt{z^2+1}-z}{z^2+1-z^2} = \frac{\sqrt{z^2+1}-z}{1} = \sqrt{z^2+1}-z.$$

Тоді:

$$t+\frac{1}{t} = \left(\sqrt{z^2+1}+z\right)+\left(\sqrt{z^2+1}-z\right) = 2\sqrt{z^2+1};$$

$$t^2-\frac{1}{t^2} = \left(\sqrt{z^2+1}+z\right)^2-\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)^2 = 4z\sqrt{z^2+1}.$$

Використаємо формули скороченого множення:

$$(a+b)^3+(a-b)^3 = \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)+$$

$$+\left(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\right)=2a^3+6ab^2=2a(a^2+3b^2).$$

Покладаючи тут $a=\sqrt{z^2+1}$, $b=z$, отримуємо:

$$t^3+\frac{1}{t^3}=\left(\sqrt{z^2+1}+z\right)^3-\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)^3=$$

$$=2\sqrt{z^2+1}\left[\left(\sqrt{z^2+1}\right)^2+3z^2\right]=2\sqrt{z^2+1}\left(4z^2+1\right).$$

Тоді маємо:

$$\frac{I}{25}=\frac{5}{24}\cdot 2\sqrt{z^2+1}\left(4z^2+1\right)+\frac{3}{4}\cdot 4z\sqrt{z^2+1}+\frac{5}{8}\cdot 2\sqrt{z^2+1}+$$

$$+3\ln\left|\sqrt{z^2+1}+z\right|+C=$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{z^2+1}\left[\left(20z^2+5\right)+36z+15\right]+3\ln\left|\sqrt{z^2+1}+z\right|+C=$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{z^2+1}\left(20z^2+36z+20\right)+3\ln\left|\sqrt{z^2+1}+z\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{z^2+1}\left(5z^2+9z+5\right)+3\ln\left|\sqrt{z^2+1}+z\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{y}{5}\right)^2+1}\left(5\left(\frac{y}{5}\right)^2+9\cdot\frac{y}{5}+5\right)+3\ln\left|\sqrt{\left(\frac{y}{5}\right)^2+1}+\frac{y}{5}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{y^2+25}}{5}\cdot\frac{y^2+9y+25}{5}+3\ln\left|\frac{\sqrt{y^2+25}+y}{5}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{75}\sqrt{y^2+25}\left(y^2+9y+25\right)+3\ln\left|\sqrt{y^2+25}+y\right|-3\ln 5+C.$$

Позначаючи $C_1=\frac{C-3\ln 5}{25}$ і домножаючи на 25, отримуємо:

$$I=\frac{1}{3}\sqrt{y^2+25}\left(y^2+9y+25\right)+75\ln\left|\sqrt{y^2+25}+y\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x-6)^2+25}\left((x-6)^2+9(x-6)+25\right)+$$

$$+75\ln\left|\sqrt{(x-6)^2+25}+(x-6)\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{x^2-12x+61}\left(x^2-3x+7\right)+75\ln\left|\sqrt{x^2-12x+61}+x-6\right|+C_1.$$

Безпосереднє диференціювання дозволяє переконатись в правильності цієї відповіді.

Як бачимо, значна кількість роботи пов'язана не з інтегрування, а з перетвореннями отриманої відповіді. Цікаво зауважити, що цій відповіді можна надати зовсім іншої форми при введенні в інтегралі $(*)$ іншої заміни.

Покладемо $z = \operatorname{sh} u$, $dz = \operatorname{ch} u\, du$, $\sqrt{z^2+1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{ch} u$:

$$\frac{I}{25} = \int (5 \operatorname{sh} u + 6) \operatorname{ch} u \cdot \operatorname{ch} u\, du = 5 \int \operatorname{sh} u \operatorname{ch}^2 u\, du + \int \operatorname{ch}^2 u\, du.$$

Тут перший інтеграл обчислюється заміною $w = \operatorname{ch} u$, $dw = \operatorname{sh} u\, du$ і становить

$$\int \operatorname{ch}^2 u \cdot \operatorname{sh} u\, du = \int w^2\, dw = \frac{w^3}{3} + C = \frac{\operatorname{ch}^3 u}{3} + C.$$

Для обчислення другого інтегралу отримаємо формулу зниження степеня:

$$\operatorname{ch}^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} + 2e^u \cdot e^{-u} + e^{-2u}}{4} =$$

$$= \frac{2e^0 + e^{2u} + e^{-2u}}{4} = \frac{1 + \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{2}}{2} = \frac{1 + \operatorname{ch} 2u}{2}.$$

Тоді

$$\int \operatorname{ch}^2 u\, du = \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2u}{2}\, du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch} 2u}{2}\right) du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2u}{4} + C.$$

Втім, зворотна заміна в цьому разі не є більш простою; пропонуємо виконати її самостійно.

б) Виділимо повний квадрат:

$$91 + 6x - x^2 = -\left(x^2 - 6x - 91\right) = -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 91\right) =$$

$$= -\left((x-3)^2 - 100\right) = 100 - (x-3)^2.$$

Отже, зручною є заміна $x - 3 = y$, $x = y + 3$, $dx = dy$. Тоді

$$J = \int \frac{dy}{(y+3+2)\sqrt{100 - y^2}} = \int \frac{dy}{(y+5)\sqrt{100 - y^2}}.$$

Зручно також ввести подальшу заміну $y = 10z$, $dy = 10\,dz$:

$$J = \int \frac{10\,dz}{(10z+5)\sqrt{100-100z^2}} = \int \frac{dz}{5(2z+1)\sqrt{1-z^2}}.$$

Під знаком кореня знаходиться квадратична функція, старший коефіцієнт якої від'ємний. Тому введемо заміну Ейлера:

$$\sqrt{1-z^2} = tz - 1, \qquad 1 - z^2 = t^2z^2 - 2tz + 1,$$

$$t^2z^2 + z^2 = 2tz, \qquad z = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Диференціюємо цю заміну:

$$dz = \frac{2\left(t^2+1\right) - 2t\cdot 2t}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt = \frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt.$$

Оскільки тепер

$$\sqrt{1-z^2} = tz - 1 = \frac{2t^2}{t^2+1} - 1 = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

то ми отримуємо:

$$5J = \int \frac{\frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt}{\left(2\cdot\frac{2t}{t^2+1}+1\right)\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}} = \int \frac{2\left(1-t^2\right)\,dt}{\left(4t+\left(t^2+1\right)\right)\left(t^2-1\right)},$$

$$-\frac{5}{2}J = \int \frac{dt}{t^2+4t+1}.$$

Маємо:

$$t^2+4t+1 = t^2+4t+4-3 = (t+2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$$

Тому заміна $u = t+2$, $du = dt$ зводить останній інтеграл до табличного з параметром $a = \sqrt{3}$:

$$-\frac{5}{2}J = \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{3}}{t+2+\sqrt{3}}\right| + C$$

Позначаючи $C_1 = -\frac{2}{5}C$, отримуємо:

$$J = -\frac{1}{5\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{3}}{t+2+\sqrt{3}}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{5\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} + 2 - \sqrt{3}}{\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} + 2 + \sqrt{3}} \right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{5\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-z^2} + \left(2-\sqrt{3}\right) z}{1 + \sqrt{1-z^2} + \left(2+\sqrt{3}\right) z} \right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{5\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-\left(\frac{y}{10}\right)^2} + \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \frac{y}{10}}{1 + \sqrt{1-\left(\frac{y}{10}\right)^2} + \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{y}{10}} \right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{5\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-\left(\frac{x-3}{10}\right)^2} + \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \frac{x-3}{10}}{1 + \sqrt{1-\left(\frac{x-3}{10}\right)^2} + \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{x-3}{10}} \right| + C_1.$$

Аналогічно, для цього прикладу також можна використовувати інші заміни, наприклад, $u = \sin z$.

*Відповідь*: а)

$$\frac{1}{3}\sqrt{x^2-12x+61}\left(x^2-3x+7\right) + 75 \ln \left| \sqrt{x^2-12x+61} + x - 6 \right| + C_1;$$

б) $-\frac{1}{5\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{10}\right)^2}+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{x-3}{10}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{10}\right)^2}+\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{x-3}{10}} \right| + C_1.$

**Задача 9.** Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а)} \quad \int \frac{\sin^3 x \cos x \, dx}{\sin^2 x + 1}; \quad \text{б)} \quad \int \frac{(\operatorname{tg} x + 3)\, dx}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$$

**Розв'язок.** а) Підінтегральна функція є добутком косинусу і раціональної функції синусу, тому вводимо заміну $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$:

$$\int \frac{\sin^3 x \cos x \, dx}{\sin^2 x + 1} = \int \frac{t^3 \, dt}{t^2+1} = \int \frac{t^3 + t - t}{t^2+1} \, dt =$$

$$= \int \frac{t(t^2+1) - t}{t^2+1} \, dt = \int \left( t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t \, dt}{t^2+1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} t^2+1 = z \\ 2t \, dt = dz \end{matrix} \right\| = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |z| + C =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2} \ln \left(\sin^2 x + 1\right) + C.$$

б) Підінтегральна функція не змінюється при одночасній заміні $\sin x$ на $(-\sin x)$ і $\cos x$ на $(-\cos x)$, тому доцільно ввести заміну $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$:

$$\int \frac{(\operatorname{tg} x + 3)\,dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x + 3}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 5} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{t+3}{t^2+4t+5}\,dt = \int \frac{t+2+1}{(t+2)^2+1}\,dt = \left\| \begin{matrix} t+2 = z \\ dt = dz \end{matrix} \right\| = \int \frac{z+1}{z^2+1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2z}{z^2+1}\,dz + \int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \operatorname{arctg} z + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+4t+5) + \operatorname{arctg}(t+2) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 5) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + 2) + C.$$

*Відповідь*: а) $\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x + 1\right) + C$;
б) $\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 5) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + 2) + C$.

**Задача 10.** Знайти визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{|x|\,dx}{x^2+1}$.

**Розв'язок.** Враховуючи парність підінтегральної функції, а також рівність $|x| = x$ при $x \geqslant 0$, маємо:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|\,dx}{x^2+1} = 2\int_{0}^{1} \frac{|x|\,dx}{x^2+1} = \int_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \left\| \begin{matrix} x^2+1 = t \\ 2x\,dx = dt \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

*Відповідь*: $\ln 2$.

**Задача 11.** Знайти площу фігури, обмеженої на площині $Oxy$ умовами

$$\begin{cases} y = \arcsin x, \\ y = 0, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Побудувати креслення.

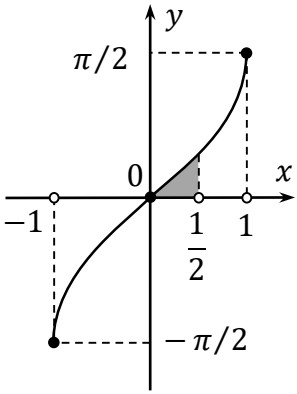



Рисунок 6.1 – Площа під графіком арксинусу

**Розв'язок.** Графіки рівнянь $y = 0$ і $x = \frac{1}{2}$ – це вісь $Ox$ і вертикальна пряма. Отже, маємо криволінійний трикутник (рис. 6.1). Очевидно, його площа дорівнює

$$S = \int\limits_0^{1/2} \arcsin x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = \arcsin x & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x \arcsin x \Big|_0^{1/2} - \int\limits_0^{1/2} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{matrix} 1 - x^2 = t(x) \\ -2x\, dx = dt \\ t_1 = t(0) = 1 \\ t_2 = t\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - 0\right) + \int\limits_1^{3/4} \frac{\frac{1}{2}\, dx}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{t}\Big|_1^{3/4} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

*Відповідь*: $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$; див. рис. 6.1.

**Задача 12.** Електричний заряд $Q$ рівномірно розподілений по сфері радіусу $R$. Знайти силу взаємодії заряду $Q$ і точкового заряду $q$, розташованого на відстані $a$ від центру сфери ззовні неї ($a > R$).

**Розв'язок.** Розв'яжемо спочатку допоміжну задачу. Нехай заряд $Q$ рівномірно розподілений за довжиною тонкого кільця

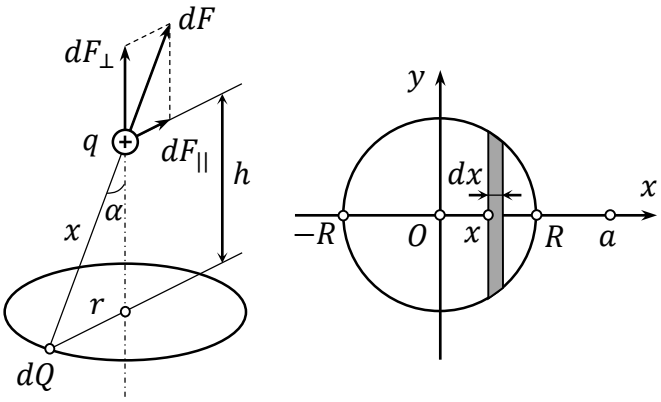



Рисунок 6.2 – Взаємодія точки і сфери

радіусу $r$, а точковий заряд $q$ розташовано на осі кільця на висоті $h$ над його площиною (рис. 6.2, ліворуч). Оскільки закон Кулона можна застосовувати лише для точкових зарядів, то розіб'ємо заряд кільця на диференціально малі елементи $dQ$. За законом Кулона елементарна сила $dF = \frac{kq\,dQ}{x^2}$. Розкладемо її на дві компоненти паралельно і перпендикулярно площині кільця. При векторному додаванні усіх таких внесків паралельні компоненти $dF_{\parallel}$ скомпенсуються, тому до інтегральної суми треба включити лише поперечну компоненту $dF_{\perp} = dF\cos\alpha = dF \cdot \frac{h}{x} = \frac{kqh\,dQ}{x^3}$. Очевидно, $x = \left(h^2 + r^2\right)^{1/2}$. Тоді

$$F = \int dF_{\perp} = \frac{kqh}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \int dQ = \frac{kqQh}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}. \qquad (*)$$

Зокрема, при $h \gg r$ отримуємо

$$F \approx \frac{kqQh}{\left(h^2 + 0^2\right)^{3/2}} = \frac{kqQ}{h^2}$$

у відповідності до закону Кулона.

Розв'яжемо тепер основну задачу. Розіб'ємо сферу на кільця системою площин, перпендикулярних осі $Ox$ (рис. 6.2, праворуч). Бічна поверхня кільця виникає при обертанні кола $x^2 + y^2 = R^2$ навколо осі $Ox$, і тому дорівнює $dS = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$.

Диференціюючи рівняння кола і вважаючи, що воно є неявним заданням функції $y(x)$, отримуємо $2x + 2y \cdot y' = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$. Тоді

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\, dx = 2\pi \sqrt{y^2 + x^2}\, dx = 2\pi R\, dx.$$

Цікаво зауважити, що при збільшенні $x$ фактичний радіус кільця $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ зменшується, але твірна відповідного зрізаного конусу збільшується за рахунок її подальшого нахилу. При цьому елементарні площі кілець, розташованих в різних точках $x$, залежать від ширини $dx$, але не залежать від $x$. Інакше кажучи, для кільця довільного радіусу має місце формула $dS = 2\pi R\, dx$, де $R$ – радіус саме сфери (а не кільця).

Поверхнева густина заряду при його рівномірному розподілі $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$. Тоді елементарний заряд кільця

$$dQ = \sigma\, dS = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R\, dx = \frac{Q}{2R}\, dx.$$

Саме цей вираз потрібно використати в $(*)$ замість $Q$. Звичайно, і сила, яка при цьому виникає, буде диференціально малою. Крім того, до $(*)$ замість $h$ (відстань від точкового заряду до площини кільця) потрібно підставити різницю $h = a - x$, а замість $r^2$ (квадрат радіусу чергового кільця) потрібно підставити $y^2 = R^2 - x^2$:

$$dF = \frac{kqh\, dQ}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{kq(a-x) \cdot \frac{Q}{2R}\, dx}{((a-x)^2 + (R^2 - x^2))^{3/2}} =$$

$$= \frac{kqQ}{2R} \cdot \frac{(a-x)\, dx}{(a^2 - 2ax + R^2)^{3/2}}.$$

Тоді

$$F = \int dF = \frac{kqQ}{2R} \int\limits_{-R}^{R} \frac{(a-x)\, dx}{(a^2 - 2ax + R^2)^{3/2}} = \left\| \begin{array}{l} a^2 - 2ax + R^2 = z \\ dx = -\frac{1}{2a}\, dz \\ x = \frac{a^2 + R^2 - z}{2a} \\ z_1 = (a+R)^2 \\ z_2 = (a-R)^2 \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{kqQ}{2R} \int\limits_{(a+R)^2}^{(a-R)^2} \frac{\left(a - \frac{a^2 + R^2 - z}{2a}\right)\, dz}{z^{3/2} \cdot 2a} = \frac{kqQ}{8a^2 R} \int\limits_{(a-R)^2}^{(a+R)^2} \frac{\left(a^2 - R^2 + z\right)\, dz}{z^{3/2}} =$$

$$= \frac{kqQ}{8a^2R} \int\limits_{(a-R)^2}^{(a+R)^2} \left[ \left(a^2 - R^2\right) z^{-3/2} + z^{-1/2} \right] dz =$$

$$= \frac{kqQ}{8a^2R} \left[ -2\left(a^2 - R^2\right) z^{-1/2} + 2z^{1/2} \right] \Big|_{(a-R)^2}^{(a+R)^2} =$$

$$= \frac{kqQ}{8a^2R} \left[ -2\left(a^2 - R^2\right) \left\{ \frac{1}{a+R} - \frac{1}{a-R} \right\} + 2\left\{ (a+R) - (a-R) \right\} \right] =$$

$$= \frac{kqQ}{8a^2R} \left[ 2\left(a^2 - R^2\right) \cdot \frac{2R}{a^2 - R^2} + 4R \right] = \frac{kqQ}{a^2}.$$

Ми отримали фундаментальний результат: сила взаємодії заряду, розподіленого по сфері, і точкового заряду ззовні сфери така сама, як і в разі, коли весь заряд сфери перемістити в її центр. Цей результат був відомий ще І. Ньютону, щоправда, для взаємодії точкової і сферичної мас. Втім, закон Кулона і закон всесвітнього тяжіння математично тотожні: обидва є законами обернених квадратів.

*Відповідь*: $F = \frac{kqQ}{a^2}$.

**Задача 13.** Крива $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, обертається навколо осі $Ox$. Обчислити об'єм тіла обертання.

**Розв'язок.** За таблицею 2.1 маємо: $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 x'_t \, dt$,

$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\cos^3 t\right)^2 \cdot 3a\sin^2 t\cos t \, dt = 3a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\right)^3 \sin^2 t\cos t \, dt =$$

$$= 3a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)^3 \sin^2 t\cos t \, dt = \left\| \begin{array}{l} \sin t = z \\ \cos t \, dt = dz \\ z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{array} \right\| =$$

$$= 3a^3 \int\limits_0^1 \left(1 - z^2\right)^3 z^2 \, dz = 3a^3 \int\limits_0^1 \left(1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6\right) z^2 \, dz =$$

$$= 3a^3 \int\limits_0^1 \left(z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8\right) dz = 3a^3 \left( \frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 3a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{105}a^3.$$

*Відповідь*: $\frac{16}{105}a^3$.

**Задача 14.** Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: а) $\int_1^{+\infty}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^7+1}}$; б) $\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$.

**Розв'язок.** а) Покладемо $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^7+1}}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{1/2}}$. Очевидно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 = \text{const} \neq 0.$$

Але інтеграл $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ розбігається, оскільки показник степеня $\frac{1}{2}<1$, тому інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ також розбігається за другою (граничною) ознакою порівняння.

б) За означенням невласного інтегралу другого роду маємо:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\int_\varepsilon^1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u=\operatorname{arctg}\frac{1}{x} & du=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{dx}{x^2}\right)=-\frac{dx}{x^2+1} \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\left( x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\operatorname{arctg}1-\varepsilon\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_\varepsilon^1\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\ln\left(\varepsilon^2+1\right)\right).$$

Оскільки $\varepsilon\to0+0$, то $\ln\left(\varepsilon^2+1\right)\to\ln1=0$. Крім того, $\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty$, і отже, $\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\to+\frac{\pi}{2}$. Тому вираз $\varepsilon\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}$ є добутком нескінченно малої величини і обмеженої величини. Очевидно, границя цього добутку дорівнює нулю. Тоді отримана нами границя дорівнює

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\pi}{4}-0+\frac{1}{2}\ln2-0\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln2.$$

*Відповідь*: а) розбігається; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln2$.

**Задача 15.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

$$J = \int\limits_{\smile AB} (4x - 8y)\, d\ell$$

вздовж прямої в напрямку від точки $A(2; -1)$ до точки $B(5; 3)$.
**Розв'язок.** Побудуємо параметризацію відрізку $AB$. Приймемо її у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta; \\ y(t) = \gamma t + \delta. \end{cases}$$

Нехай $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тоді необхідно виконати умови

$$x(0) = x_A, \qquad y(0) = y_A, \qquad x(1) = x_B, \qquad y(1) = y_B.$$

Маємо систему для знаходження коефіцієнтів $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$:

$$\begin{cases} x(0) = \beta = 2; \\ y(0) = \delta = -1; \\ x(1) = \alpha + \beta = 5; \\ y(1) = \gamma + \delta = 3. \end{cases}$$

Її розв'язок:

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 4, \qquad \delta = -1.$$

Шукана параметризація відрізку $AB$:

$$\begin{cases} x(t) = 3t + 2; \\ y(t) = 4t - 1, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Елемент довжини:

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{3^2 + 4^2} dt = 5\, dt.$$

Зводимо інтеграл до визначеного:

$$J = \int\limits_0^1 (4(3t + 2) - 8(4t - 1)) \cdot 5\, dt = 5 \int\limits_0^1 (16 - 20t) \cdot 5\, dt = 30.$$

*Відповідь*: 30.

**Задача 16.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$J = \int\limits_{\smile AB} xy\,dx + \frac{x}{\sqrt{y^2-1}}\,dy$$

в напрямку від точки $A(-1;\operatorname{ch}1)$ до точки $B(1;\operatorname{ch}1)$ вздовж кривої, визначеної рівнянням $y = \operatorname{ch}x$. У відповіді надати: 1) параметризацію контуру інтегрування; 2) інтервал зміни параметру; 3) значення $J$.

**Розв'язок.** Покладемо $x = t$. За умови $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тоді $-1 \leqslant t \leqslant 1$. За умови $y = \operatorname{ch}x$. Тоді $y = \operatorname{ch}t$. Отже, параметризація контуру має вигляд

$$\begin{cases} x = t; \\ y = \operatorname{ch}t, \end{cases} \qquad t \in [-1;1].$$

Диференціюючи ці рівняння, маємо:

$$\begin{cases} dx = dt; \\ dy = \operatorname{sh}t\,dt. \end{cases}$$

Тоді криволінійний інтеграл зводиться до визначеного:

$$J = \int\limits_{-1}^{1} t\operatorname{ch}t\,dt + \int\limits_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} \cdot \operatorname{sh}t\,dt = 2\int\limits_{0}^{1} t \cdot \frac{\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}\,dt = 1.$$

Тут перший інтеграл дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції в симетричних межах. При обчисленні другого інтегралу використано основну тригонометричну тотожність гіперболічної тригонометрії: $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

*Відповідь*: 1) $\begin{cases} x = t; \\ y = \operatorname{ch}t; \end{cases}$ 2) $t \in [-1;1]$; 3) $J = 1$.

**Задача 17.** Задано функцію $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$ і точку $A(1;2)$. Обчислити криволінійний інтеграл дугого роду $\int\limits_{\smile OA} \operatorname{grad}\varphi \cdot \overrightarrow{d\ell}$, де $O$ – початок координат.

**Розв'язок.** Нехай $\overrightarrow{d\ell}$ – елемент довжини контуру $\smile OA$. Тоді

$$\int\limits_{\smile OA} \operatorname{grad}\varphi \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int\limits_{\smile OA} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j}\right) \cdot \left(\overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dy\right) =$$

$$= \int\limits_{\smile OA} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy \right) = \int\limits_{\smile OA} d\varphi = \varphi \Big|_O^A = \varphi(A) - \varphi(O) =$$

$$= \sqrt{1^2 + 2 \cdot 2^2} - \sqrt{0^2 + 2 \cdot 0^2} = 3 - 0 = 3.$$

Підінтегральний вираз виявився повним диференціалом, тому інтеграл не залежить від форми контуру $OA$, а визначається лише положенням точок $O$ і $A$.

*Відповідь*: 3.

**Задача 18.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$J = \oint\limits_L 3x^2 \sin y\, dx + \left(3x + 8 + x^3 \cos y\right) dy$$

вздовж замкненого трикутного контуру $ABC$ в додатному напрямку, якщо координати вершин: $A(0;1)$, $B(4;5)$, $C(-2;5)$. Скористатись формулою Гріна.

**Розв'язок.** Позначимо: $P(x,y) = 3x^2 \sin y$, $Q(x,y) = 3x + 8 + x^3 \cos y$. За формулою Гріна маємо:

$$J = \oint\limits_L P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_{\triangle ABC} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{\triangle ABC} \left(3 + 3x^2 \cos y - 3x^2 \cos y\right) dS = 3 \iint\limits_{\triangle ABC} dS.$$

Очевидно, рівняння прямої $AC$ має вигляд $y = 1 - 2x$, а прямої $AB$ – вигляд $y = x + 1$ (рис. 6.3). Оскільки трикутник $ABC$ є трапецією другого типу, то з цих рівнянь потрібно виразити $x$. Маємо: $\psi_1(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y$, $\psi_2(y) = y - 1$. Тоді шуканий інтеграл зводиться до повторного:

$$J = 3 \int\limits_1^5 dy \int\limits_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y}^{y-1} dx = 3 \int\limits_1^5 \left( (y-1) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \right) \right) dy =$$

$$= 3 \int\limits_1^5 \left( \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} \right) dy = 3 \left( \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y \right) \Big|_1^5 = 3 \cdot 12 = 36.$$

*Відповідь*: 36.

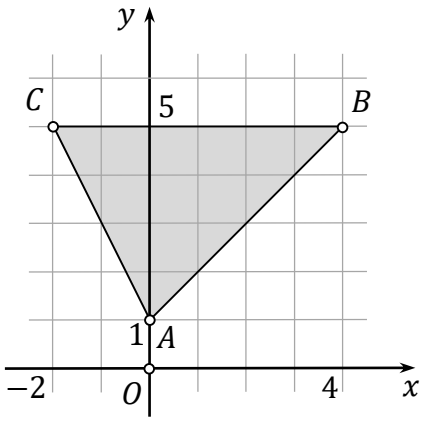



Рисунок 6.3 – До задачі 18

**Задача 19.** В сумі інтегралів

$$J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2-3}^{3y/2-3} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^6 dy \int\limits_{y/2-3}^{0} f(x,y)\,dx$$

змінити порядок інтегрування. У відповіді надати: 1) креслення на папері в клітинку з дотриманням масштабу; 2) явний вигляд залежностей «нових» меж внутрішнього інтегрування від «нової» змінної зовнішнього інтегрування; 3) один подвійний інтеграл, зведений до повторного.

**Розв'язок.** Позначимо вирази для меж внутрішнього інтегрування у першому інтегралі через $\psi_1(y) = \frac{1}{2}y - 3$, $\psi_2(y) = \frac{3}{2}y - 3$. Розв'язуючи рівняння $x = \psi_1(y)$, одержуємо $y = 2x + 6$. Це рівняння прямої $AC$ (рис. 6.4). Вона перетинає вісь $Ox$ в точці $A(-3;0)$. З рівняння $x = \psi_2(y)$ маємо $y = \frac{2}{3}x + 2$. Це рівняння прямої $AB$. Тоді перший інтеграл в заданій сумі дорівнює

$$J_1 = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS.$$

Тут $D_1$ – трикутник $APB$. Справді, він розташований в інтервалі $0 \leqslant y \leqslant 2$, що відповідає межам зовнішнього інтегрування у

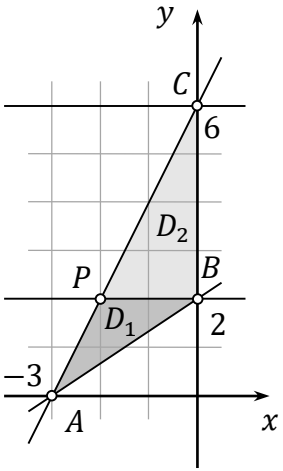



Рисунок 6.4 – До задачі 19

першому інтегралі. При кожному сталому значенні зовнішньої змінної $y$ з цього інтервалу абсциса поточної точки трикутника $APB$ змінюється в інтервалі від абсциси точки на прямій $AC$ до абсциси точки на прямій $AB$.

Нехай тепер $\psi_1(y) = \frac{1}{2}y - 3$, $\psi_2(y) = 0$. Рівняння $x = \psi_1(y)$, як і раніше, задає пряму $AC$, а рівняння $x = \psi_2(y)$, тобто $x = 0$ – пряму $CB$. Тоді другий інтеграл в заданій сумі дорівнює

$$J_2 = \int\limits_2^6 dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx = \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

Тут $D_2$ – трикутник $PCB$. Справді, він розташований в інтервалі $2 \leqslant y \leqslant 6$, що відповідає межам зовнішнього інтегрування у другому інтегралі. При кожному сталому значенні зовнішньої змінної $y$ інтервал зміни абсциси (тобто інтервал внутрішнього інтегрування) охоплює точки від прямої $AC$ до прямої $CB$. Тоді, враховуючи, що області $D_1$ і $D_2$ не перекриваються, з урахуванням адитивності подвійного інтегралу маємо:

$$J = J_1 + J_2 = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS =$$

$$= \iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{\triangle ABC} f(x,y)\,dS = \int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Тут $\varphi_1(x) = \frac{2}{3}x + 2$ – рівняння прямої $AB$, а $\varphi_2(x) = 2x + 6$ – рівняння прямої $AC$. Справді, трикутник $ABC$ розташований в інтервалі $-3 \leqslant x \leqslant 0$, що відповідає межам зовнішнього інтегрування. Для покриття області $D = D_1 \cup D_2$ при кожному сталому значенні зовнішньої змінної $x$ точку всередині трикутника $ABC$ потрібно рухати вздовж вертикалі від прямої $AB$ до прямої $AC$.

*Відповідь*: 1) рис. 6.4; 2) $\varphi_1(x) = \frac{2}{3}x + 2$, $\varphi_2(x) = 2x + 6$;
3) $J = \int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{\frac{2}{3}x+2}^{\frac{2}{3}x+2} f(x,y)\,dy.$

**Задача 20.** Неоднорідне коло обмежено лінією $x^2 + y^2 = R^2$. Поверхнева густина залежить від відстані $\rho$ між початком координат і поточною точкою за законом $\sigma = \sigma_0\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)$. Обчислити масу кола.

**Розв'язок.** За означенням поверхневої густини $\sigma = \frac{dm}{dS}$, звідки елемент маси $dm = \sigma\,dS$. Переходячи до полярних координат, маємо:

$$m = \iint dm = \iint \sigma\,dS = \iint \sigma_0\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \sigma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(\rho - \frac{\rho^2}{R}\right) d\rho = \sigma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3R}\right)\Bigg|_0^R d\varphi =$$

$$= \sigma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) d\varphi = \sigma_0 \cdot \frac{R^2}{6} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2.$$

*Відповідь*: $m = \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2$.

# Література

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука, 1971. – 416 с.

[2] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М. : ГИФМЛ, 1966. – 228 с.

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

[4] Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. и др. – К. : Вища школа, 1974. – 680 с.

[5] Математический анализ в примерах и задачах, ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы / Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. и др. – К. : Вища школа, 1977. – 672 с.

[6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1970. – 808 с.

[7] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1973. – 656 с.

*Навчальне видання*

**Анпілогов Дмитро Ігорович**
**Сніжко Наталія Вікторівна**

# Інтегральне числення

*Навчальний посібник*

Комп'ютерний набір *Анпілогов Д.І.*
Верстання *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 09.11.2021. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 14,76.
Тираж 100 прим. Зам. № 906.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.