

УДК 681.865.8

Єфименко М.В.¹, Миронова Н.О.², Баранова О.А.³

¹ д-р техн. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

² канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

³ студ. гр.БК-613м НУ «Запорізька політехніка»

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КУТОВОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРІГА-ГАМІЛЬТОНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Серед різних моделей кутового руху твердого тіла найпоширенішою є модель, в якій динаміка описується рівнянням Ейлера, а кінематика - кінематичним рівнянням в параметрах Родріга-Гамільтона. Рівняння цієї моделі мають такий вигляд: [1]

$$J\dot{\omega} + \omega \times (J\omega) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\Phi(\omega) \end{bmatrix} \Lambda,$$

де

ω – кутова швидкість обертання тіла,

J – тензор інерції тіла.

M_u – керуючий момент,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} - \text{лінійний кососиметричний оператор}$$

векторного добутку, який визначається рівнянням

$$\Phi(x)y = x \times y;$$

$$\Lambda = (\lambda_0 \quad \lambda)^T - \text{вектор параметрів Родріга Гамільтона.}$$

Модель описує динаміку кутового руху твердого тіла відносно нерухомої системи координат. Перевагою цієї моделі є відсутність обчислювальних особливостей і мінімальна надлишковість вектору стану. Недоліками – нелінійність моделі, що ускладнює синтез законів керування кутовим рухом твердого тіла. Задачу синтезу можна суттєво спростити, якщо в якості моделі кутового руху КА використовувати модель кутового руху, побудовану на основі динамічного рівняння руху точки по одиничній сфері в чотиривимірному просторі

$$\ddot{X} = (I_4 - XX^T)U - \|\dot{X}\|^2 X$$

де I_4 – одинична матриця розміру 4×4 ;

$X \in R^4$ – нормований одиничний вектор ($\|X\| = 1$);

$U \in R^4$ – вільний параметр (керування).

Це рівняння запропоновано М.Ф. Кириченком [2] і описує множину всіх допустимих керованих переміщень точки на поверхні сфери з одиничним радіусом в чотиривимірному просторі. На основі цього динамічного рівняння в роботі розроблена нова модель обертального руху твердого тіла у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку відносно параметрів Родріга-Гамільтона. Модель має такий вигляд:

$$\ddot{\Lambda} = (I_4 - \Lambda\Lambda^T)U - \Lambda\|\dot{\Lambda}\|^2.$$

Для цієї моделі запропоновано перетворення правої частини динамічного рівняння Ейлера в новий вектор керування $U \in R^4$, що дозволяє

компактно записати праву частину динамічного рівняння як функцію параметрів Родріга-Гамільтона. Перетворення має такий вигляд:

$$U = \frac{1}{2} A(\Lambda)^T J^{-1} \times (M_u - \omega \times J \omega)$$

Знайдене перетворення оборотне, що дозволяє за допомогою оберненого перетворення:

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI}$$

повернутися до початкової форми правої частини динамічного рівняння Ейлера і знайти керуючий момент, який повинні створювати виконавчі органи системи керування. Так як модель кутового руху тіла в параметрах Родріга-Гамільтона є окремим випадком руху точки по сфері в просторі R^n ($n = 4$ то були досліджені основні властивості рівняння руху точки по сфері в n -вимірному просторі і доведені три твердження, які значно спрощують розв'язання задач керування кутовим рухом твердого тіла. Твердження формулюється наступним чином:

Твердження 1. Нехай задано нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}^{(m)} = F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots x^{(m-1)}).$$

Будемо розглядати компоненти вектора $x(t)$ як координати однойменної точки, яка рухається у просторі R^n за деякою траєкторією, яка визначається вектором $\dot{x}(t)$. При цьому вектор функції $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє умові $\|x(t)\| \neq 0$. Тоді рух проєкції цієї точки на одиничну сферу в просторі R^n , яка визначається ортом:

$$x_0(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|},$$

описується рівнянням

$$\ddot{x}_0 = (I_n - x_0 x_0^T) f - x_0 \|\dot{x}_0\|^2$$

де

$$f = \frac{\ddot{x}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{x}_0 + \alpha x_0, \quad \delta = \|x(t)\|, \quad \dot{\delta} = x_0^T \dot{x}_0,$$

а $\alpha(t)$ є довільною скалярною функцією часу.

Твердження 2. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку x_0 , рух якої описується рівнянням:

$$\ddot{x}_0 = (I_n - x_0 x_0^T) f - x_0 \|\dot{x}_0\|^2$$

Одиничному вектору $x_0(t)$ можна поставити у відповідність вектор $x(t)$, зміна координат якого в часі описується системою рівнянь:

$$\dot{x}(t) = \Psi,$$

де відповідно до твердження 1, функція Ψ має вигляд

$$\Psi = \delta f + \delta \dot{x}_0 + \alpha x_0$$

Якщо в початковий момент часу виконуються співвідношення:

$$x(t_0) = x_0(t_0), \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0(t_0),$$

то є взаємно-однозначна відповідність між векторами $x_0(t)$ і $x(t)$, визначається виразами:

$$x_0(t) = \frac{x(t)}{\delta}, \dot{x}_0(t) = (I_n - x_0 x_0^T) \frac{\dot{x}}{\delta},$$

$$x(t) = \delta x_0(t), \dot{x}(t) = \delta \dot{x}_0(t) + \delta \dot{x}_0(t)$$

Твердження 3. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $x_0(t)$, рух якої описується рівнянням:

$$\ddot{x}_0 = (I_n - x_0 x_0^T) f - x_0 \|\dot{x}_0\|^2$$

де f є вектором керування. Тоді вектори $\dot{x}_0$ та f пов'язані співвідношенням:

$$f = \ddot{x}_0 + \alpha x_0,$$

де змінна α – довільна скалярна функція.

Твердження 2 дозволяє при побудові вектору керування f перейти від рівняння руху по сфері, де накладено обмеження на координати, до рівняння руху в просторі R^n , яке, як правило, простіше, ніж рівняння руху точки по сфері і не містить обмежень. Для моделі без обмежень знаходять розв'язання задачі оптимального керування. Потім, використовуючи твердження 1, будують керування, що забезпечує заданий рух по сфері.

Твердження 3 дає можливість представити рівняння руху по сфері у вигляді:

$$\ddot{x}_0 = f - \alpha x_0$$

Так як змінна α не впливає на характер руху вектору x_0 , то її при побудові керування можна дорівняти нулю ($\alpha = 0$). У цьому випадку рівняння для вектору x_0 приймає простий вигляд:

$$\ddot{x}_0 = f$$

Для цього рівняння можна знайти аналітичне розв'язання практично для будь-якої задачі керування (знайти f).

Запропоновані вище твердження дозволяють будувати алгоритми керування кутовим рухом твердого тіла за наступною схемою:

Крок 1. Визначимо вектор параметрів Родріга -Гамільтона $\Lambda(t)$ наступним чином:

$$\Lambda(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|},$$

де рух вектору $x(t)$, $(x(t) \in R^4)$ описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$\ddot{x} = \Psi$$

а Ψ є вектором керування. Вектор x та керування Ψ знаходяться, як розв'язання задачі оптимального керування: *знайти закон керування ψ , що переводить систему*

$$\ddot{x} = \Psi$$

з поточного положення в момент часу t_0 в потрібне положення у момент часу t_1 і забезпечує мінімум деякому функціоналу:

$$L(t) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, \dot{x}, \Psi) dt$$

Права частина диференціального рівняння для вектору $x(t)$ має дуже простий вигляд, і для цього рівняння існують аналітичні розв'язання практично всіх задач оптимального керування.

Крок 2. Відповідно до твердження 1 знаходиться керування, що забезпечує потрібні вимоги до кутового руху.

$$U = \frac{\ddot{x}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}, \delta = \|x(t)\|, \dot{\Lambda}(t) = (I_4 - \Lambda \Lambda^T) \frac{\dot{x}}{\delta}, \dot{\delta} = \Lambda^T \dot{\Lambda}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wittenburg J. (1977). Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Vieweg+Teubner Verlag, 224 p. doi:10.1007/978-3-322-90942-8.
2. Кириченко М.Ф., Матвієнко В.Т. Алгоритми асимптотичної, термінальної та адаптивної стабілізації кутових рухів твердого тіла // Проблеми керування та інформатики. 2003. №1. С.5–15.