К.ф.-м.н. Нечипоренко Н.А., к.ф-м.н. Белая Н.И.
Запорожский национальный технический университет, Украина

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

Рассмотрим задачу вычисления производной функции $f(t)$, которая задана своими значениями $\widetilde{f}_k$ на равномерной сетке $\{t_k\}_{k=1}^N$. Значения $\widetilde{f}_k$ известны с погрешностью ε, то есть имеют место неравенства

$$\left|\widetilde{f}_k - f(t_k)\right| \le \varepsilon, \quad k=\overline{1,N},$$

и значение ε известно. Необходимо вычислить значение производной $f'(t)$ в узлах сетки $\{t_k\}_{k=1}^N$, используя указанную информацию. Известно [1], что задача численного дифференцирования функций, значение которых возможно иметь лишь с какой-нибудь погрешностью, является некорректной, поэтому нуждается в специальных алгоритмах.

К значениям функции $\widetilde{f}_k, k=\overline{1,N},$ применим алгоритм, который сглаживает эти значения и базируется на методе невязки. Значения $f'(t_k)$, $k=\overline{1,N}$ вычисляются по разностной формуле с использованием сглаженных значений. Вектор $F=\{f_1, f_2, ..., f_N\}$ сглаженных значений функции является решением такой экстремальной задачи:

$$\min_{f_k} \max_{2\le k\le N-1} \left|f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}\right| \quad (1)$$

при ограничениях

$$\left|f_k - \widetilde{f}_k\right| \le \varepsilon, \quad k=\overline{1,N} \quad (2)$$

Задача (1)-(2) может быть сведенна к решению следующей задачи линейного программирования:

$\max x_{N+1}$ (3)

при ограничениях

$$x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} + x_{N+1} \ge -B_k,$$

$$-x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} + x_{N+1} \ge B_k, \quad k=\overline{1,N-2}, \quad (4)$$

$$0 \le x_k \le 2\varepsilon, \quad k=\overline{1,N}, \quad x_{N+1} \ge 0 \quad (5)$$

где $B_k = \widetilde{f}_k - 2\widetilde{f}_{k+1} + \widetilde{f}_{k+2}$, $k=\overline{1,N-2}$; $\quad x_k = f_k - \widetilde{f}_k + \varepsilon$, $k=\overline{1,N}$.

Задача (3)-(5) решается методом последовательного улучшения [2]. За начальное приближение берем вектор $x_k=0$, $k=\overline{1,N}$; $x_{N+1} = \max\limits_k |B_k|$, то есть на первом шаге будет лишь одно активное ограничение. На каждом следующем шаге число активных ограничений (а, значит, и активных переменных) увеличивается на единицу. На *s*-ом шаге метода последовательных улучшений необходимо решать две системы алгебраических уравнений порядка *s*. Ограничения (5) учитываются алгоритмически, активными являются лишь ограничения системы неравенств (4). Поэтому матрица системы алгебраических уравнений имеет такую структуру (при соответствующем упорядочении строк и столбцов системы): первые *s-1* строка имеют каждая не больше 3 ненулевых элементов, а последняя строка составляется из s единиц. Учитывая указанную особенность матрицы, возможно решать систему линейных алгебраических уравнений со значительной экономией памяти и числа операций. Расчеты показали, что при решении системы число ненулевых элементов увеличивается менее, чем в два раза.

Для решения задачи линейного программирования (3)-(5) возможно также использовать метод последовательного улучшения с пересчетом обратной матрицы. В этом случае количество операций на каждом шагу, бесспорно, уменьшается, однако, большие погрешности пересчета обратной матрицы при замене строк и столбцов приводят к значительным отклонениям в решении. В этом смысле метод последовательных улучшений намного точнее.

Матрицу ограничений (5) нет необходимости сохранять в памяти компьютера, необходимые значения элементов матрицы вычисляются при помощи вызова соответствующей функции.

После того, как найден вектор $X=\{x_1, x_2, ..., x_{N+1}\}$ – решение задачи (3)-(5), сглаженные значения функции f_k вычисляются по формуле:

$$f_k = \widetilde{f}_k + x_k - \varepsilon, \quad k=\overline{1,N},$$

при этом

$$\max_{1\le k\le N-2} \left|f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k\right| = x_{N+1}$$

Значение производной $f'(t)$ в узлах $\{t_k\}_{k=2}^{N-1}$ вычисляются по одной из разностных формул:

$$f'(t_k) = \frac{f_{k+1} - f_k}{t_{k+1} - t_k}, \qquad f'(t_k) = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}.$$

Если известна оценка второй производной L_2, то имеем следующую оценку погрешности вычисления производной:

$$\max_k \left| f'(t_k) - \frac{f_{k+1} - f_k}{t_{k+1} - t_k} \right| \le$$

$$\max_k \left\{ \left| f'(t_k) - \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right| + \left| \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} - \frac{\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k}{t_{k+1} - t_k} \right| + \left| \frac{\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}}{t_{k+1} - t_k} \right| \right\}$$

$$\le \frac{L_2 \Delta t}{2} + \frac{4\varepsilon}{\Delta t}$$

где $\Delta t = \max_k (t_{k+1} - t_k)$.

Ясно, что перед решением задачи, если N довольно большое, следует увеличить шаг сетки Δt, уменьшая тем самым число N.

Проведенные расчеты с использованием приведенного алгоритма показали его эффективность.

Если о функции известна некоторая качественная информация, а именно, интервалы, на которых функция возрастает или убывает, и (или) интервалы выпуклости функции, то использование этой информации позволит значительно улучшить качество аппроксимации производной. В этом случае к неравенствам (2) добавим такие:

$$(-1)^{l_i} (f_{k+1} - f_k) \ge 0, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$(-1)^{n_j} (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) \ge 0, \quad k = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{1, m_1}, \tag{7}$$

здесь l_i и n_j могут принимать значение 1 или 2 в зависимости от возрастания или убывания функции при $t = t_k$ и в зависимости от вида выпуклости функции соответственно. m – количество интервалов монотонности функции, m_1 – количество интервалов монотонности производной функции.

Замена переменных $x_k = f_k - \tilde{f}_k + \varepsilon$ сводит задачу (1), (2), (6), (7) к задаче линейного программирования (3) при ограничениях (4), (5) и

$$-x_k + x_{k+1} \ge (-1)^{l_i} d_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

$$x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} \ge (-1)^{n_j} B_k, \quad k = \overline{1, N-2}, \quad j = \overline{1, m_1}, \tag{9}$$

где $d_k = \tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}$.

Решение последней задачи линейного программирования может быть осуществлено так же, как и задачи (3)-(5). Матрицы алгебраических систем сохраняют свою структуру. В этом случае немного увеличивается количество шагов метода последовательного улучшения и порядок систем алгебраических уравнений на последних шагах.

Литература:

1. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. -240с.
2. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, 1977. – 368с.

Ермоленко А.А., Садыков Р.А., д.т.н. Потапов В.И.
Южно-Уральский государственный университет, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ НАНЕСЕНИИ ВНУТРИТРУБНОГО ПОКРЫТИЯ МЕТОДОМ ЦЕНТРОБЕЖНОГО СВС

Самораспространяющийся высокотемпературный синтез (СВС) – новый метод производства материалов, сварки и нанесения покрытий. Преимуществом СВС-технологии являются высокая производительность, малое энергопотребление, большая скорость синтеза, простота используемого оборудования.

Центробежное СВС получило широкое распространение для производства в промышленном масштабе стальных композиционных труб, облицованных металлокерамикой. Стальные композиционные трубы, покрытые внутренним слоем металлокерамики, очень удобны для транспортировки абразивных материалов и весьма успешно используются в угольной и металлургической промышленности, теплоэнергетике и т.п., поскольку обладают устойчивостью к эрозии, коррозии, механическому износу, нагреву [1,2]

Чтобы с помощью метода центробежного СВС получить покрытие, удовлетворяющее эксплуатационным требованиям, необходимо обеспечить оптимальные условия теплового режима и синтеза его химического состава. Следовательно, возникает необходимость создания математической модели процесса нанесения внутритрубного покрытия методом центробежного СВС, которая бы