

ПРО ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Подальший розвиток методу граничних елементів (МГЕ) розв'язання граничних задач стримується необхідністю обчислювати граничні значення певних сингулярних інтегралів. Матриця МГЕ призведе до більш точного розв'язку при використанні аналітично отриманих (тобто точних) значень цих інтегралів. В роботі розглядається сингулярний інтеграл з тотожності Сомільяни [1] $K_j(\xi) = \int_{\Gamma} F_{ij}(x, \xi) u_i(x) d\Gamma(x)$ з ядром

$$F_{ik}(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = \frac{C_3}{R^2} \cdot \left[C_4(n_k y_i - n_i y_k) + \left(C_4 \delta_{ik} + \frac{2y_i y_k}{R^2} \right) y_j n_j \right], \quad (1)$$

Геометрію контуру Γ інтегрування обрано у вигляді ламаної *bre*, доповненої дугою малого радіусу ρ з центром в проміжній точці r (рис. 1). Через θ позначено внутрішній кут області при обході в додатному напрямку, що відповідає лівобічному граничному значенню у випадку фінітної області. Функції $u_i(x)$ вважаються кусково-лінійними. Також використано позначення $y_k = x_k - \xi_k$, $R = y_i y_i$, n_k – координати зовнішньої нормалі.

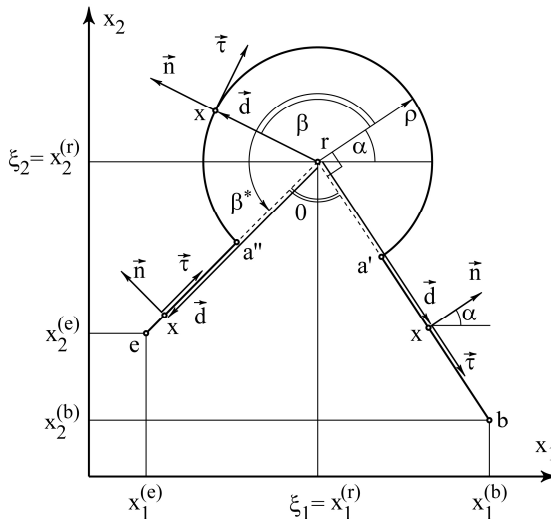


Рисунок 1 – Геометрія контуру інтегрування.

Спрощення вигляду ядер (1) виявилось можливим при використанні апарату векторної алгебри. Наприклад:

$$F_{12} = \frac{C_3 C_4}{|\vec{d}|^2} \cdot (\vec{d} \cdot \vec{\tau}), \quad x \in ba',$$

де $\vec{\tau}$ – антитангенціаль; $\vec{d}$ – радіус-вектор поточної точки в локальній системі координат з початком в точці r . Подальше спрощення призводить до вигляду $F_{12} = \pm C_3 C_4 / |\vec{d}|$, де знаки «плюс» і «мінус» відповідають ділянкам ba' , $a'e$. Границя інтегралу з використанням цього виразу є головним значенням за Коші.

Аналогічно на дузі $a'a''$ отримуємо

$$F_{12} = \frac{C_3}{\rho^2} \cdot \left[C_4 \cdot (\vec{d} \cdot \vec{\tau}) + \frac{2y_1 y_2}{\rho^2} \cdot (\vec{d} \cdot \vec{n}) \right] = \frac{C_3}{\rho} \sin 2(\alpha + \beta).$$

Границя інтегралу з використанням цього виразу є розривним членом. При додаванні головного значення за Коші і розривного члену з використанням подальшої параметризації контуру bre остаточно отримуємо лівобічне граничне значення:

$$\left(\int_{bre} F_{12} d\Gamma \right)^+ = C_3 \left[C_4 \ln \frac{L_{br}}{L_{re}} + \sin \theta \sin(2\alpha - \theta) \right].$$

В роботі здійснено порівняння значень, отримуваних за допомогою цієї формули, і значень, які виникають при застосуванні квадратурних формул Гауса-Лежандра [2]. Перевага цих квадратур в тому, що вони не вимагають обчислення значень функції на кінцях інтервалу інтегрування. Виявлено збіг аналітичного і чисельного результатів при дослідженні багатьох прямолінійних напрямків прямування точки $\xi(\xi_1; \xi_2)$ до точки r зсередини кута θ . Це підтверджує правильність результату, отриманого аналітично.

Висновок. В роботі побудовано геометричну інтерпретацію сингулярних ядер інтегралів тотожності Сомільяни. Це надало змогу аналітично обчислити лівобічні граничні значення відповідних сингулярних інтегралів, необхідних для побудови розв'язку внутрішніх граничних задач теорії пружності для областей з порушенням регулярності гладкості контуру.

Отримані результати протестовано за допомогою квадратур Гауса-Лежандра при довільних напрямках прямування до точки сингулярності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М : Наука, 1978. – 512 с.