

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ПРАКТИКУМ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
(II семестр)
(конспект лекцій)

для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку»
усіх форм навчання

2015

Практикум з математичного аналізу (II семестр) (конспект лекцій) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. – 62 с.

Укладачі: В.М. Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н.М. Антоненко, ст. викл., к.ф.-м.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: Л.М. Онуфрієнко, доцент, к.ф.-м. н.

Відповідальний
за випуск: Н.М. Антоненко, ст. викл., к.ф.-м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри вищої та
загальної математики ЗНТУ
Протокол № 4
від 21.10.15

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Кратні інтеграли	5
2 Криволінійні інтеграли.	19
3 Поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля	24
4 Найпростіші типи диференціальних рівнянь.	35
5 Лінійні диференціальні рівняння та системи зі сталими коефіцієнтами	48
Література	62

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання на протязі семестру типових розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач.

Даний практикум з математичного аналізу охоплює практично всі основні розділи курсу «Математичний аналіз», який читається для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» у другому семестрі. Він покликаний допомогти студентам у виконанні типових розрахунково-графічних завдань, викладених у [6]. Саме з цих міркувань нумерація завдань, прийнята у цьому посібнику, відповідає нумерації розрахунково-графічних завдань, викладених у [6].

Практикум складається із п'яти розділів, у кожному з яких наведено приклади розв'язання типових завдань. При написанні практикуму автори спирались на той факт, що студенти у повній мірі оволоділи лекційним матеріалом. Але, незважаючи на це, при розв'язанні кожного завдання наведено теоретичний матеріал, необхідний для його виконання. У кінці практикуму наведено список рекомендованої літератури, як основної, так і додаткової.

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Область D називається **правильною** в напрямі осі Oy (Ox), якщо будь-яка-пряма паралельна осі Oy (Ox) перетинає границю області не більше ніж у двох точках.

Розглянемо способи обчислення подвійних інтегралів по областях правильним в напрямках координатних осей. Обчислення подвійних інтегралів зводиться до послідовного обчислення двох визначених інтегралів.

1. Область інтегрування D обмежена зліва та справа прямими $x = a$ і $x = b$, а знизу та зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ такими, що $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всіх $x \in [a, b]$ (область правильна в напрямі осі Oy). Для області такого типу подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.1)$$

Внутрішнє інтегрування виконується за змінною y , а зовнішнє – за змінною x .

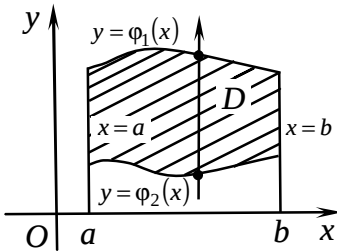


Рисунок 1.1

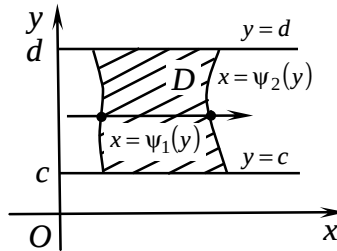


Рисунок 1.2

2. Область інтегрування обмежена знизу і зверху прямими $y = c$ і $y = d$, а зліва та справа кривими $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$ для всіх $y \in [c, d]$ (область правильна в напрямі осі Ox). Для області такого типу подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dx. \quad (1.2)$$

Внутрішнє інтегрування виконується за змінною x , а зовнішнє – за змінною y .

Вирази, які стоять в лівих частинах формул (1.1) та (1.2), називаються **повторними інтегралами**.

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dx. \quad (1.3)$$

Перехід від лівої частини рівності (1.3) до правої і навпаки називається **змінюю порядку інтегрування в повторному інтегралі**.

Завдання 1.1. Змінити порядок інтегрування, зобразити область інтегрування:

$$1) \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy;$$

$$3) \int_0^{\pi/12} dy \int_y^{\pi/6-y} f(x, y) dx.$$

Розв'язання.

1) Область інтегрування обмежена лініями $y = -\sqrt{4-x^2}$, $y = x-2$, $x = 0$, $x = 2$. Зобразимо область інтегрування (рис. 1.3). Область інтегрування розташована між прямими $y = -2$ та $y = 0$, змінна x змінюється в даній області при кожному фіксованому значенні y від точок нижньої частини круга $x = \sqrt{4-y^2}$ до точок прямої $x = y+2$. За формулою (1.3) маємо

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} f(x, y) dy = \int_{-2}^0 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{y+2} f(x, y) dx.$$

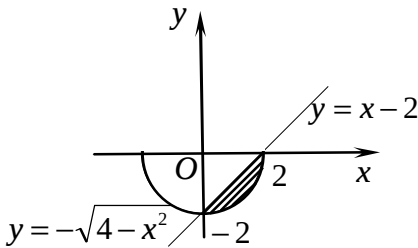


Рисунок 1.3

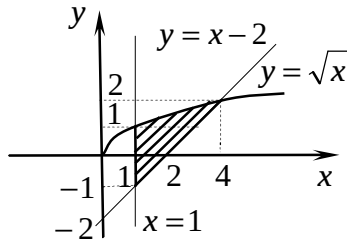


Рисунок 1.4

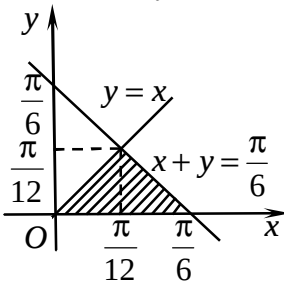


Рисунок 1.5

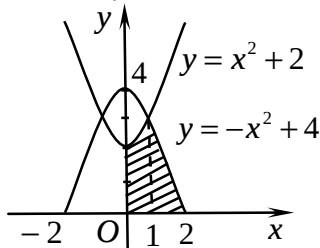


Рисунок 1.6

2) Область інтегрування обмежена лініями $x = 1$, $x = 4$, $y = x - 2$, $y = \sqrt{x}$. Зобразимо область інтегрування (рис. 1.4). Ліва частина границі області інтегрування задана двома лініями, тому розіб'ємо область інтегрування прямою $y = 1$ на дві області:

$$D_1: -1 \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq y + 2;$$

$$D_2: 1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2.$$

За формулою (1.3) маємо

$$\int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_1^{y+2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$$

3) Область інтегрування обмежена лініями $y = 0$, $y = \pi/12$, $x = y$, $x = \pi/6 - y$. Зобразимо область інтегрування (рис. 1.5). Верхня частина границі області інтегрування задана двома лініями, тому розіб'ємо її прямою $x = \pi/12$ на дві області:

$$D_1: 0 \leq x \leq \pi/12, 0 \leq y \leq x;$$

$$D_2: \pi/12 \leq x \leq \pi/6, 0 \leq y \leq \pi/6 - x.$$

За формулою (1.3) маємо

$$\int_0^{\pi/12} dy \int_y^{\pi/6-y} f(x, y) dx = \int_0^{\pi/12} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\pi/12}^{\pi/6} dx \int_0^{\pi/6-x} f(x, y) dy.$$

Відповідь: 1) $\int_{-2}^0 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{y+2} f(x, y) dx;$

2) $\int_{-1}^1 dy \int_1^{y+2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx;$

3) $\int_0^{\pi/12} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\pi/12}^{\pi/6} dx \int_0^{\pi/6-x} f(x, y) dy.$

Площа плоскої фігури в декартових координатах:

$$S = \iint_D dx dy. \quad (1.4)$$

Завдання 1.2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 4$, $x = 0$, $y = 0$. Зобразити фігуру.

Розв'язання. Зобразимо фігуру, обмежену заданими лініями (рис. 1.6). Знайдемо координати точок перетину ліній $y = x^2 + 2$ та $y = -x^2 + 4$:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = -x^2 + 4. \end{cases}$$

Розв'язки системи – $(-1;3)$, $(1;3)$. Верхня границя області інтегрування складається з двох ліній, тому розіб'ємо фігуру прямою $x = 1$ на дві області:

$$D_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 + 2;$$

$$D_2: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -x^2 + 4.$$

За формулою (1.4) отримуємо

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2+2} dy + \int_1^2 dx \int_0^{-x^2+4} dy = \int_0^1 (x^2 + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 4) dx = \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_1^2 = 4 \text{ ум. кв. од.}
 \end{aligned}$$

Відповідь: 4 ум. кв. од.

Завдання 1.3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x + 4y^3) dx dy$, $D: y = x^2$, $x = -y^2 + 2$, $x = 2$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.7).

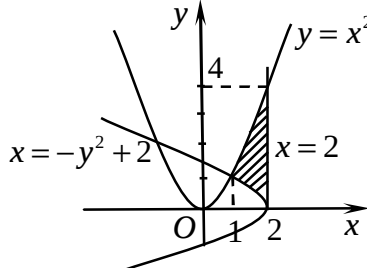


Рисунок 1.7

Знайдемо координати точок перетину кривих $y = x^2$, $x = -y^2 + 2$:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = -y^2 + 2. \end{cases}$$

Розв'язок системи – $(1; 1)$.

$$D: 1 \leq x \leq 2, \sqrt{-x+2} \leq y \leq x^2.$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x - 2xy) dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\sqrt{-x+2}}^{x^2} (x - 2xy) dy = \int_1^2 dx \cdot (xy - xy^2) \Big|_{\sqrt{-x+2}}^{x^2} = \\
 &= \int_1^2 (x^3 - x^5 - x\sqrt{2-x} + x(-x+2)) dx = \int_1^2 (x^3 - x^5 - x^2 + 2x) dx -
 \end{aligned}$$

$$-\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx = I_1 - I_2 = -\frac{73}{12} - \frac{14}{15} = -\frac{421}{60} = -70\frac{1}{6}.$$

Нижче наведено процес обчислення інтегралів I_1 , I_2 .

$$I_1 = \int_1^2 (x^3 - x^5 - x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_1^2 = -\frac{73}{12}.$$

$$I_2 = \int_1^2 x\sqrt{2-x} dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = 2-x, \\ x = 2-t^2, \\ dx = -2tdt, \end{array} \right| = -2 \int_1^0 (2-t^2) t^2 dt = -2 \int_1^0 (2t^2 - t^4) dt =$$

$$= -2 \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_1^0 = \frac{14}{15}.$$

Відповідь: $-70\frac{1}{6}.$

Якщо в якості області інтегрування виступає круг, кільце або їх частина, то при обчисленні подвійних інтегралів краще переходити до полярної системи координат. Прямокутні декартові координати (x, y) пов'язані з полярними (r, φ) такими співвідношеннями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Формула переходу в подвійному інтегралі від декартових координат до полярних:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.5)$$

Завдання 1.4. Обчислити подвійні інтеграли.

1) $\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; D: y = \sqrt{4-x^2}, y = 0.$

2) $\iint_D (x+y) dx dy; D: x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x.$

Розв'язання.

1) Область інтегрування – половина круга радіуса 2, яка лежить у верхній півплощині (рис. 1.8).

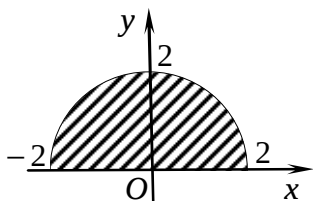


Рисунок 1.8

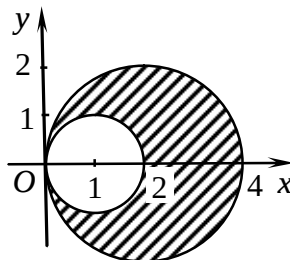


Рисунок 1.9

За формулою (1.5) отримуємо:

$$\iint_D \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ dx \, dy = r \, dr \, d\varphi, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = r \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq 2. \end{array} = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \frac{r \sin \varphi}{r} \cdot r \, dr =$$

$$= \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^2 r \, dr = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^2 = 2 \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi =$$

$$= 2 \cdot \cos \varphi \Big|_0^\pi = -4.$$

2) Зобразимо область інтегрування (рис. 1.9). За формулою (1.5) отримуємо:

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ dx \, dy = r \, dr \, d\varphi, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = r. \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi \end{array} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \cdot r \, dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r^2 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \frac{r^3}{3} \Big|_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} = \\
&= \frac{56}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \varphi + \cos^3 \varphi \sin \varphi) d\varphi = \frac{56}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi - \\
&- \frac{56}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d(\cos \varphi) = \frac{56}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi - \\
&- \frac{56}{3} \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{4} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{14}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi - 0 = \\
&= \frac{14}{3} \left(\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 7\pi.
\end{aligned}$$

Відповідь: 1) -4 ; 2) 7π .

Просторова область G називається **правильною**, якщо прямі паралельні осям координат перетинають границю області не більше ніж у двох точках.

Для правильної області G (рис. 1.10) справедливі нерівності: $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$ та формула для обчислення потрібного інтегралу

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (1.6)$$

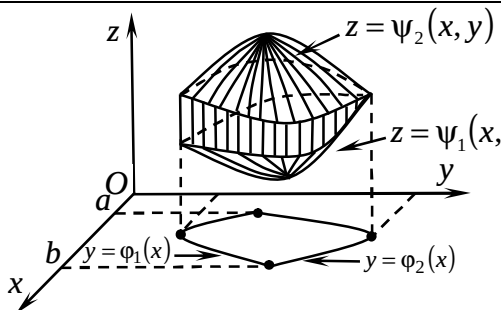


Рисунок 1.10

При обчисленні потрійного інтегралу за формулою (1.6) спочатку інтегрують функцію $f(x, y, z)$ за змінною z , вважаючи x та y константами. Потім результат інтегрують за змінною y , вважаючи x константою. Отриманий вираз інтегрують за змінною x .

Об'єм просторової області G обчислюється за формулою:

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (1.7)$$

Завдання 1.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, зробити рисунок.

1) $y = 2x^2$, $y + z = 2$, $2y + z = 4$.

2) $z = y^2$, $z = \sqrt{y}$, $x = 0$, $x = 2$.

Розв'язання.

1) Зобразимо тіло, об'єм якого необхідно обчислити (рис. 1.11), та його проекцію на площину Oxy (рис. 1.12). Із рис. 1.11 видно, що знизу тіло обмежене площиною $y + z = 2$, а зверху – $2y + z = 4$. Отже, $2 - y \leq z \leq 4 - 2y$. Із рис. 1.12 видно, що $-1 \leq x \leq 1$, $2x^2 \leq y \leq 2$. За формулою (1.7) отримуємо:

$$V = \iiint_G dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 dy \int_{2-y}^{4-2y} dz = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 (2-y) dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 dx \cdot \left(2y - \frac{y^2}{2} \right)_{2x^2}^2 = \int_{-1}^1 (2 - 4x^2 + 2x^4) dx = \\
 &= \left(2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} \right)_{-1}^1 = \frac{32}{15}.
 \end{aligned}$$

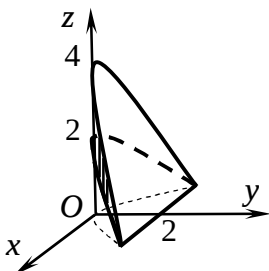


Рисунок 1.11

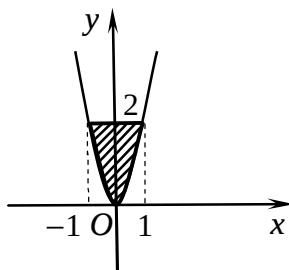


Рисунок 1.12

2) Зобразимо тіло, об'єм якого необхідно обчислити (рис. 1.13) та його проекцію на площину Oxy (рис. 1.14). Із рис. 1.13 видно, що $y^2 \leq z \leq \sqrt{y}$. Із рис. 1.14 видно, що $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

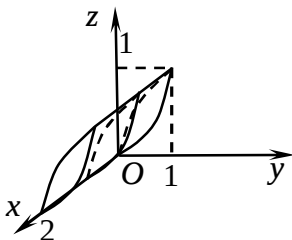


Рисунок 1.13

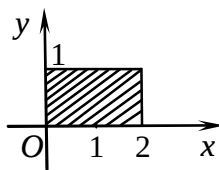


Рисунок 1.14

За формулою (1.7) отримуємо:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dz = \int_0^2 dx \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2) dy = \\
 &= \int_0^2 dx \cdot \left(\frac{2}{3} y \sqrt{y} - \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^1 = \frac{1}{3} \int_0^2 dx = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $32/15$; 2) $2/3$.

Якщо область інтегрування обмежена циліндричними поверхнями, параболоїдом чи конічною поверхнею, то для обчислення потрібних інтегралів доцільно переходити до циліндричної системи координат. В циліндричній системі координат положення точки в просторі визначається трьома числами r , φ , z , де r і φ – полярні координати проекції M' точки M на площину Oxy , а z – апліката точки M (рис. 1.15). Числа r , φ , z називаються **циліндричними координатами точки M** . Циліндричні координати пов'язані з декартовими наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \\ 0 &\leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < \infty, \quad -\infty < z < +\infty. \end{aligned}$$

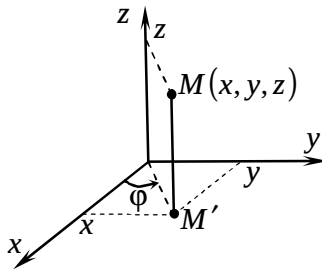


Рисунок 1.15

Формула переходу від потрібного інтегралу в прямокутних координатах до інтегралу в циліндричних координатах:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Об'єм просторової області G в циліндричних координатах обчислюється за формулою:

$$V = \iiint_G dx dy dz = \iiint_{G'} r dr d\varphi dz. \quad (1.8)$$

Завдання 1.6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, зробити рисунок.

1) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + 2z = 8$, $z = 0$.

2) $9y = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 9$, $y = 0$.

Розв'язання.

1) Зобразимо тіло, об'єм якого необхідно обчислити (рис. 1.15), та проекцію цього тіла на площину Oxy .

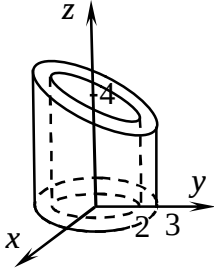


Рисунок 1.16

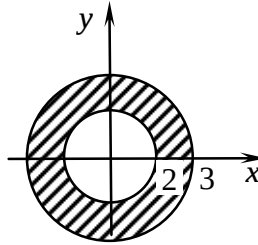


Рисунок 1.17

У даному випадку об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, зручно обчислювати в циліндричній системі координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Із рис. 1.16 видно, що знизу тіло обмежене площиною $z = 0$, а зверху – $z = \frac{8 - x - y}{2}$. В циліндричній системі координат рівняння

площини $z = \frac{8 - x - y}{2}$ набуває вигляду

$z = \frac{8 - r \cos \varphi - r \sin \varphi}{2}$. Із рис. 1.17 видно, що $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$2 \leq r \leq 3$. За формулою (1.8) отримуємо:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \leq r \leq 3, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0 \leq z \leq \frac{8 - r \cos \varphi - r \sin \varphi}{2} \end{array} \Bigg| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^3 r dr \int_0^{(8 - r \cos \varphi - r \sin \varphi)/2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^3 r (8 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(4r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \varphi - \frac{r^3}{3} \sin \varphi \right) \Big|_2^3 = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(20 - \frac{19}{3} \sin \varphi - \frac{19}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \left(20\varphi + \frac{19}{3} \cos \varphi - \frac{19}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 20\pi.
\end{aligned}$$

2) Зобразимо тіло, об'єм якого необхідно обчислити (рис. 1.18), та проекцію цього тіла на площину Oxz (рис. 1.19).

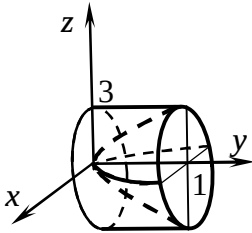


Рисунок 1.18

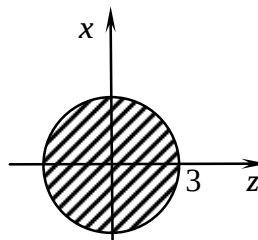


Рисунок 1.19

У даному випадку об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, зручно обчислювати в циліндричній системі координат $z = r \cos \varphi$, $x = r \sin \varphi$, $y = y$.

Внутрішнє інтегрування будемо виконувати за змінною y . Із рис. 1.18 видно, що $\frac{x^2 + z^2}{9} \leq y \leq 1$. В циліндричній системі

координат рівняння параболоїда $y = \frac{x^2 + z^2}{9}$ набуває вигляду $y = \frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}{9} = \frac{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{9} = \frac{r^2}{9}$. Із рис. 1.19

видно, що $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$.

За формулою (1.8) отримуємо:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \left| \begin{array}{l} z = r \cos \varphi, \\ x = r \sin \varphi, \\ y = y, \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq y \leq \frac{r^2}{9}, \\ 0 \leq r \leq 3, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r dr \int_0^{r^2/9} dy = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3 dr = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{9}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{9\pi}{2}.$$

Відповідь: 1) 20π ; 2) $\frac{9\pi}{2}$.

2 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, де $y(x)$ – неперервна диференційовна функція, то **криволінійний інтеграл першого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (2.1)$$

Завдання 2.1. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_l (2x - 3y) dl$, де l – відрізок прямої від точки $A(1; 2)$ до точки $B(4; 6)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої AB :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{4} \Rightarrow y = \frac{4x + 2}{3}.$$

За формулою (2.1) маємо:

$$\begin{aligned} \int_l (2x - 3y) dl &= \int_1^4 \left(2x - 3 \cdot \frac{4x + 2}{3} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3} \right)^2} dx = -\frac{5}{3} \int_1^4 (2x + 2) dx = \\ &= -\frac{5}{3} (x^2 + 2x) \Big|_1^4 = -35. \end{aligned}$$

Відповідь: -35.

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, де $y(x)$, $y'(x)$ – неперервні диференційовні функції, то **криволінійний інтеграл другого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx. \quad (2.2)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, де $x(y)$, $x'(y)$ – неперервні диференційовні функції, то **криволінійний інтеграл другого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy. \quad (2.3)$$

Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, де $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції, то **криволінійний інтеграл другого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt. \quad (2.4)$$

Завдання 2.2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$I = \int_l (3x + 2y)dx + (x + 2y)dy.$$

- 1) $l: y = -2x + 4$ від точки з $x_1 = 2$ до точки з $x_2 = 0$;
- 2) $l: 8x + y^2 = 16$ від точки з $y_1 = 0$ до точки з $y_2 = 4$;
- 3) $l: x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$ від точки з $t_1 = 0$ до точки з $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

1) Використовуючи рівняння лінії інтегрування та формулу (2.2), перетворимо даний криволінійний інтеграл у звичайний інтеграл за змінною x і обчислимо його:

$$l: y = -2x + 4, \quad dy = -2dx;$$

$$\begin{aligned} I &= \int_2^0 (3x + 2(-2x + 4))dx + (x + 2(-2x + 4))(-2dx) = \\ &= \int_2^0 (5x - 8)dx = \left(\frac{5x^2}{2} - 8x \right) \Big|_2^0 = 6. \end{aligned}$$

2) Використовуючи рівняння лінії інтегрування та формулу (2.3), перетворимо даний криволінійний інтеграл у звичайний інтеграл за змінною y та обчислимо його:

$$8x + y^2 = 16, \quad x = 2 - \frac{y^2}{8}, \quad dx = -\frac{y}{4} dy;$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \left(3 \left(2 - \frac{y^2}{8} \right) + 2y \right) \left(-\frac{y}{4} \right) dy + \left(2 - \frac{y^2}{8} + 2y \right) dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3y^3}{32} - \frac{5y^2}{8} + \frac{y}{2} + 2 \right) dy = \left(\frac{3y^4}{128} - \frac{5y^3}{24} + \frac{y^2}{4} + 2y \right) \Big|_0^4 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

3) Використовуючи формулу (2.4), перетворимо даний інтеграл у звичайний за змінною t та обчислимо його:

$$x = 2 \cos t, \quad dx = -2 \sin t \, dt; \quad y = 4 \sin t, \quad dy = 4 \cos t \, dt;$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} [3 \cdot 2 \cos t + 2 \cdot 4 \sin t] (-2 \sin t \, dt) + [2 \cos t + 2 \cdot 4 \sin t] (4 \cos t \, dt) = \\ &= \int_0^{\pi/2} (20 \sin t \cos t - 16 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (10 \sin 2t - 8(1 - \cos 2t) + 4(1 + \cos 2t)) dt = \\ &= (-5 \cos 2t - 8t + 4 \sin 2t + 4t + 2 \sin 2t) \Big|_0^{\pi/2} = 10 - 2\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: 1) 6; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $10 - 2\pi$.

Вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є **повним диференціалом функції** $u(x, y)$ в деякій однозв'язній області D , якщо виконується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

і функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в цій області.

Якщо відомий повний диференціал функції двох змінних

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

то функцію $u = u(x, y)$ можна відновити за однією з формул:

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C, \quad (2.5)$$

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C, \quad (2.6)$$

де $(x_0; y_0)$ – довільна фіксована точка.

Завдання 2.3. Відновити функцію $u = u(x, y)$ за її повним диференціалом $du = (3x^2 \cos y + x + 2y)dx + (-x^3 \sin y + 2x + 4)dy$.

Розв'язання.

Перевіримо чи є заданий вираз повним диференціалом:

$$P(x, y) = 3x^2 \cos y + x + 2y; \quad Q(x, y) = -x^3 \sin y + 2x + 4.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 \sin y + 2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 \sin y + 2.$$

1 спосіб. Знайдемо шукану функцію за формулою (2.5). В якості точки $(x_0; y_0)$ візьмемо точку $(0; 0)$. Маємо

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x (3x^2 \cos(0) + x + 2 \cdot 0)dx + \int_0^y (-x^3 \sin y + 2x + 4)dy + C = \\ &= \int_0^x (3x^2 + x)dx + \int_0^y (-x^3 \sin y + 2x + 4)dy + C = \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^x + \\ &+ (x^3 \cos y + 2xy + 4y) \Big|_0^y + C = x^3 + \frac{x^2}{2} + x^3 \cos y + 2xy + 4y - \\ &- x^3 + C = \frac{x^2}{2} + x^3 \cos y + 2xy + 4y + C. \end{aligned}$$

2 спосіб. Знайдемо шукану функцію за формулою (2.6). В якості точки $(x_0; y_0)$ візьмемо точку $(0; 0)$. Маємо

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x (3x^2 \cos y + x + 2y) dx + \int_0^y (-0^3 \sin y + 2 \cdot 0 + 4) dy + C = \\ &= \int_0^x (3x^2 \cos y + x + 2y) dx + \int_0^y 4 dy + C = \left(x^3 \cos y + \frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_0^x + \\ &\quad + 4y \Big|_0^y + C = \frac{x^2}{2} + x^3 \cos y + 2xy + 4y + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} + x^3 \cos y + 2xy + 4y + C.$

3 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Похідна функції $U = U(x, y, z)$ **у напрямі вектора** $\overline{A_1 A_2}$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{A_1 A_2}} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma,$$

де $(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – одиничний вектор напрямку $\overline{A_1 A_2}$.

Градiєнтом функції $U = U(x, y, z)$ називається вектор

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Завдання 3.1. Знайти похідну функції $U(x, y, z) = 3xyz + 2x^2z + 2y + xz + 4$ у напрямі вектора $\overline{A_1 A_2}$ в точці A_1 та $\text{grad} U(A_1)$, якщо $A_1(1; 1; -1)$, $A_2(0; -1; 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частині похідні функції $U = U(x, y, z)$ та обчислимо їх значення в точці A_1 :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3yz + 4xz + z, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{A_1} = -8;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3xz + 2, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{A_1} = -1;$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3xy + 2x^2 + x, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{A_1} = 6.$$

$$\overline{A_1 A_2}(-1; -2; 2), \quad |\overline{A_1 A_2}| = 3,$$

$$(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) = \frac{\overline{A_1 A_2}}{|\overline{A_1 A_2}|} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

$$\frac{\partial U}{\partial A_1 A_2} = (-8) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{3}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = -8\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}.$$

Відповідь: $\frac{\partial U}{\partial A_1 A_2} = \frac{22}{3}, \overrightarrow{\text{grad}} U = -8\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}.$

Потоком векторного поля

$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, $M \in S$, через поверхню S в сторону одиничного вектора нормалі $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ поверхні S називають поверхневий інтеграл першого роду:

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Якщо поверхня S задана функцією $z = f(x, y)$, тоді справедлива наступна формула для обчислення **поверхневого інтегралу першого роду**:

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{D_{xy}} \vec{a}(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{n}^0 \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy, \quad (3.1)$$

де область D_{xy} – проекція поверхні S на площину Oxy ,

$\vec{n} = \pm \overrightarrow{\text{grad}}(z - f(x, y))$, $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, $\vec{n}$ – нормаль до поверхні S .

Знак «+» у виразі $\vec{n} = \pm \overrightarrow{\text{grad}}(z - f(x, y))$ береться в тому випадку, якщо кут між нормаллю та віссю Oz – гострий, а знак «-» береться в тому випадку, якщо кут між нормаллю та віссю Oz тупий.

Якщо S – замкнена гладка поверхня, яка обмежує область V , і $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – функції, неперервні разом зі своїми похідними в області V , тоді справедлива **формула Остроградського-Гаусса**:

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (3.2)$$

Завдання 3.2. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (2x+1)\vec{i} + (3y+x)\vec{j} + (2y-z)\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною $(P): 2x - 3y + 2z = 6$ та координатними осями, двома способами:

а) за означенням;

б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання.

а) Зобразимо піраміду, обмежену заданою площиною та координатними осями (рис. 3.1).

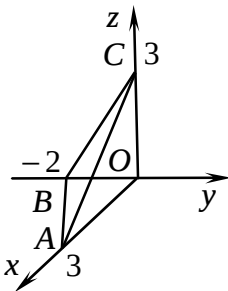


Рисунок 3.1

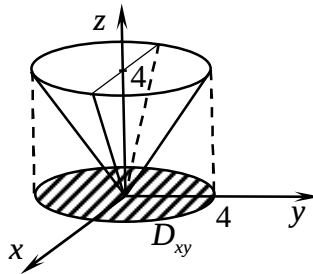


Рисунок 3.2

Використовуючи адитивність потоку, маємо

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4,$$

де Π_i – потік векторного поля через бічні грані піраміди $CAOB$, $i = \overline{1,4}$.

1) Розглянемо грань ABO : $z = 0$, $2x - 3y = 6$, $\vec{n}^0 = (0; 0; -1)$, $dS = dxdy$.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\Delta ABO} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = -2 \iint_{\Delta ABO} y dxdy = -2 \int_0^3 dx \int_{\frac{2x-6}{3}}^0 y dy = -2 \int_0^3 dx \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{2x-6}{3}}^0 = \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (2x-6)^2 dx = \frac{1}{9} \frac{(2x-6)^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^3 = 4. \end{aligned}$$

2) Розглянемо грань OBC : $x = 0$, $-3y + 2z = 6$, $\vec{n}^0 = (-1; 0; 0)$, $dS = dydz$.

$$\Pi_2 = \iint_{\Delta OBC} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = - \iint_{\Delta OBC} dydz = -S_{\Delta OBC} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = -3.$$

3) Розглянемо грань OAC: $y = 0$, $x + z = 3$, $\vec{n}^0 = (0; 1; 0)$, $dS = dx dz$.

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \iint_{\Delta OAC} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{\Delta OAC} x dx dz = \int_0^3 x dx \int_0^{3-x} dz = \int_0^3 x(3-x) dx = \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

4) Розглянемо грань ABC: $2x - 3y + 2z = 6$, $z = \frac{6-2x+3y}{2}$, $\vec{n} = (2; -3; 2)$, $|\vec{n}| = \sqrt{17}$, $\vec{n}^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{-3}{\sqrt{17}}; \frac{2}{\sqrt{17}} \right)$,

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \iint_{\Delta ABC} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{\Delta ABC} ((2x+1) \cdot 2 - (3y+x) \cdot 3 + (2y-z) \cdot 2) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{17}} \frac{\sqrt{17}}{2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (x - 5y - 2z + 2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} \left(x - 5y - 2 \frac{6-2x+3y}{2} + 2 \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 dx \int_{\frac{2x-6}{3}}^0 (3x - 8y - 4) dy = \frac{1}{2} \int_0^3 dx (3xy - 4y^2 - 4y) \Big|_{\frac{2x-6}{3}}^0 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^3 \left(2x^2 - \frac{26}{3}x + 8 - \frac{4}{9}(2x-6)^2 \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{13}{3}x^2 + 8x - \frac{2}{27}(2x-6)^3 \right) \Big|_0^3 = \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Остаточню отримуємо:

$$\Pi = 4 - 3 + \frac{9}{2} + \frac{13}{2} = 12.$$

б) За формулою Остроградського-Гаусса (3.2) отримуємо:

$$\begin{aligned}\Pi &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (2 + 3 - 1) dx dy dz = \\ &= 4 \iiint_V dx dy dz = 4 \cdot V_{\text{КАВО}} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 12.\end{aligned}$$

Відповідь: а) 12; б) 12.

Завдання 3.3. Обчислити двома способами потік вектора $\vec{a} = (1 + 2x^2)\vec{i} + y^2\vec{j} - z\vec{k}$ крізь замкнену поверхню $\sigma: \{z^2 = x^2 + y^2, z = 0, z = 4\}$ (нормаль зовнішня):

а) за означенням;

б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання.

а) Рівняння $z^2 = x^2 + y^2$ описує конус. Оскільки за умовою поверхня обмежена конусом і площинами $z = 0$ та $z = 4$, то нас цікавитиме частина конуса, яка описується рівнянням $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Зобразимо задану поверхню (рис. 3.2). Потік векторного поля через задану поверхню будемо шукати як суму потоків через бічну поверхню конуса та через площину $z = 4$.

Обчислимо потік через бічну поверхню конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Зробимо додаткові розрахунки:

$$\begin{aligned}z'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy &= \sqrt{2} dx dy, \\ \vec{n} &= \pm \overline{\text{grad}}(z - \sqrt{x^2 + y^2}) = \pm \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1 \right).\end{aligned}$$

Оскільки зовнішня нормаль до поверхні конуса утворює тупий кут з додатним напрямом осі Oz , то в якості нормального вектора візьмемо вектор

$$\bar{n} = -\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -1\right).$$

$$|\bar{n}| = \sqrt{2}, \quad \bar{n}^0 = \left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

За формулою (3.1) отримуємо

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{D_{xy}} \bar{a}(x, y, f(x, y)) \cdot \bar{n}^0 \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{x + 2x^3 + y^3 + z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \sqrt{2} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{x + 2x^3 + y^3 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ dx dy = r dr d\varphi, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = r. \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 (r \cos \varphi + 2r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi + r^2) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} \cos \varphi + \frac{r^4}{2} \cos^3 \varphi + \frac{r^4}{4} \sin^3 \varphi + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8 \cos \varphi + 128 \cos^3 \varphi + 64 \sin^3 \varphi + \frac{64}{3} \right) d\varphi = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + 128 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) - 64 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \left(8 \sin \varphi + 128 \sin \varphi - \frac{128}{3} \sin^3 \varphi - 64 \cos \varphi + \frac{64}{3} \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{64}{3} \varphi \right)_0^{2\pi} = \frac{128\pi}{3}.$$

Обчислимо потік через площину $z = 4$. В якості одиничного нормального вектора візьмемо вектор $\vec{n}^0 = (0; 0; 1)$. Отримаємо

$$\Pi_2 = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = -4 \iint_{D_{xy}} dx dy = -4 S_{\kappa p} = -64\pi.$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{128\pi}{3} - 64\pi = -\frac{64\pi}{3}.$$

б) За формулою Остроградського-Гаусса (3.2) отримуємо:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (4x + 2y - 1) dx dy dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad 0 \leq r \leq 4, \\ y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = z, \quad r \leq z \leq 4 \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_r^4 (4r \cos \varphi + 2r \sin \varphi - 1) dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} dx dy dz = r dr d\varphi dz. \end{array} \right| \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r (4r \cos \varphi + 2r \sin \varphi - 1)(4 - r) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 (16r^2 \cos \varphi + 8r^2 \sin \varphi - 4r - 4r^3 \cos \varphi - 2r^3 \sin \varphi + r^2) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\frac{16r^3}{3} \cos \varphi + \frac{8r^3}{3} \sin \varphi - 2r^2 - r^4 \cos \varphi - \frac{r^4}{2} \sin \varphi + \frac{r^3}{3} \right)_0^4 = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1024}{3} \cos \varphi + \frac{512}{3} \sin \varphi - 32 - 256 \cos \varphi - 128 \sin \varphi + \frac{64}{3} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1024}{3} \sin \varphi - \frac{512}{3} \cos \varphi - 32\varphi - 256 \sin \varphi + 128 \cos \varphi + \frac{64}{3} \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{64}{3} \pi.$$

Відповідь: а) $-\frac{64}{3} \pi$; б) $-\frac{64}{3} \pi$.

Дивергенцією	векторного	поля
$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається скаляр		
$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$		(3.3)
Ротором,	або	вихором,
векторного	поля	
$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається вектор		
$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix} =$ $= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$		
		(3.4)

Завдання 3.4. Для даного векторного поля $\vec{a} = (xy + 2xz)\vec{i} + (2x^2yz + 4)\vec{j} + (x + 2y + 3xz)\vec{k}$ знайти $\operatorname{div} \vec{a}$ і $\operatorname{rot} \vec{a}$ в точці $M_0(1; -2; 0)$.

Розв'язання. За формулою (3.3) обчислимо дивергенцію заданого векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{a} = y + 2z + 2x^2z + 3x, \quad \operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 1.$$

За формулою (3.4) обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy + 2xz & 2x^2yz + 4 & x + 2y + 3xz \end{vmatrix} = \\
 &= (2 - 2x^2y)\vec{i} - (1 + 3z - 2x)\vec{j} + (4xyz - x)\vec{k}. \\
 \operatorname{rot} \vec{a}(M_0) &= 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 1$, $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Нехай в області V , задане неперервне векторне поле $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ і замкнений орієнтований контур L .

Циркуляцією векторного поля $\vec{a}$ вздовж замкненого контуру L називається криволінійний інтеграл другого роду

$$C = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int Pdx + Qdy + Rdz,$$

де $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

Циркуляція залежить від вибору напрямку на кривій L .

Формула Стокса. Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по довільному кусково-гладкому контуру L дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot} \vec{a}$ через поверхню S , натягнуту на контур L

$$C = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS.$$

Завдання 3.5. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3x + 2y)\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + (2x + z)\vec{k}$ вздовж контура трикутника, який утворюється внаслідок перетину площини $x + 2y + 2z = 4$ з координатними площинами, двома способами:

а) за означенням;

б) із застосуванням формули Стокса.

Розв'язання.

а) Для заданого векторного поля циркуляція дорівнює

$$C = \int_L (3x + 2y)dx + (2y + z)dy + (2x + z)dz.$$

Зобразимо контур заданого трикутника L (рис. 3.3). Він складається з трьох відрізків AB , BC , CA , тому циркуляцію вздовж контура трикутника $ABCA$ будемо шукати як суму криволінійних інтегралів вздовж відрізків AB , BC , CA .

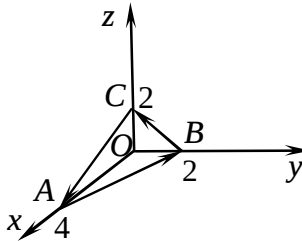


Рисунок 3.3

На відрізку AB : $z = 0$, $x + 2y = 4$, $x = -2y + 4$, $dx = -2dy$.

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} (3x + 2y)dx + 2ydy = \\ &= \int_0^2 (3(-2y + 4) + 2y)(-2dy) + 2ydy = \int_0^2 (10y - 24)dy = -28. \end{aligned}$$

На відрізку BC : $x = 0$, $y + z = 2$, $z = 2 - y$, $dz = -dy$.

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_{BC} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{BC} (2y + z)dy + zdz = \\ &= \int_2^0 (y + 2)dy + (2 - y)(-dy) = 2 \int_2^0 ydy = -4. \end{aligned}$$

На відрізку CA : $y = 0$, $x + 2z = 4$, $x = -2z + 4$, $dx = -2dz$.

$$\begin{aligned} C_3 &= \int_{CA} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{CA} 3xdx + (2x + z)dz = \\ &= \int_2^0 3(-2z + 4)(-2dz) + (2(-2z + 4) + z)dz = \int_2^0 (9z - 16)dz = 14. \end{aligned}$$

Остаточню отримуємо:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = -28 - 4 + 14 = -18.$$

б) В якості поверхні, яка натягнута на контур L , візьмемо частину площини $x + 2y + 2z = 4$, яка лежить в першому октанті. Виконаємо допоміжні розрахунки:

$$\bar{n} = (1; 2; 2), |\bar{n}| = 3, \bar{n}^0 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x+2y & 2y+z & 2x+z \end{vmatrix} = -\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}.$$

$$z = \frac{4-x-2y}{2}, z'_x = -\frac{1}{2}, z'_y = -1,$$

$$dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \frac{3}{2} dx dy.$$

За допомогою формули Стокса обчислимо циркуляцію:

$$\begin{aligned} C &= \iint_S \text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^0 dS - 3 \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{3}{2} \iint_{D_{xy}} \left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) dx dy = \\ &= -\frac{9}{2} \cdot S_{\triangle ABO} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = -18. \end{aligned}$$

Відповідь: а) -18; б) -18.

4 НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння виду

$$f_1(x) \cdot g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0. \quad (4.1)$$

або

$$y' = f_1(x) f_2(y). \quad (4.2)$$

називаються рівняннями з **відокремлюваними змінними**.

Для розв'язання рівняння (4.1) розділяємо змінні таким чином, щоб при dx стояла функція, яка залежить лише від x , а при dy – функція, яка залежить лише від y . Для цього поділимо (4.1) на $g_1(y) \cdot f_2(x)$ ($f_2(x) \neq 0, g_1(y) \neq 0$). Отримаємо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0.$$

Загальний інтеграл рівняння (4.1):

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = C.$$

Для розв'язання рівняння (4.2) розділимо змінні, вважаючи, що $f_2(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx.$$

Загальний інтеграл рівняння (4.2):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

Завдання 4.1. Знайти загальний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними.

- 1) $(x+1) \frac{dy}{dx} = y + 2$;
- 2) $(x^2 + 4)y' - y^2 = 16$;
- 3) $(y + yx^2)dx + (x - xy^2)dy = 0$.

Розв'язання.

$$1) (x+1)\frac{dy}{dx} = y+2.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{y+2} = \frac{dx}{x+1}, \int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{dx}{x+1} + \ln C, \ln|y+2| = \ln|x+1| + \ln C,$$

$$y+2 = C(x+1), y = C(x+1) - 2.$$

$$2) (x^2 + 4)y' - y^2 = 16.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = 16 + y^2, \frac{dy}{y^2 + 16} = \frac{dx}{x^2 + 4}, \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$3) (y + yx^2)dx + (x - xy^2)dy = 0.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$x(y^2 - 1)dy = y(1 + x^2)dx, \left(y - \frac{1}{y}\right)dy = \left(\frac{1}{x} + x\right)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln|y| = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C, \frac{y^2}{2} = \ln|xy| + \frac{x^2}{2} + C.$$

Відповідь: 1) $y = \pm C(x+1) - 2$; 2) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$;

3) $\frac{y^2}{2} = \ln|xy| + \frac{x^2}{2} + C.$

Функція $f(x, y)$ називається **однорідною функцією порядку** α відносно аргументів x і y , якщо виконується рівність

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Диференціальне рівняння в нормальній формі

$$y' = f(x, y)$$

називається **однорідним відносно змінних x і y** , якщо функція $f(x, y)$ – однорідна функція нульового порядку відносно своїх аргументів.

Диференціальне рівняння в диференціальній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

буде **однорідним**, якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однорідні функції однакових порядків α , тобто $P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^\alpha Q(x, y)$.

Однорідні рівняння з допомогою заміни $u = \frac{y}{x}$, $y = u \cdot x$, $y' = u + xu'$ зводять до рівнянь з відокремлюваними змінними відносно нової функції $u = u(x)$.

Завдання 4.2. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння.

$$1) \quad xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2};$$

$$2) \quad (y^2 + x^2)dx + (xy - 2x^2)dy = 0.$$

Розв'язання.

$$1) \quad xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2}.$$

Запишемо рівняння в нормальному вигляді:

$$y' = y/x + \sqrt{4 + (y/x)^2}.$$

Дане рівняння однорідне, оскільки функція $y/x + \sqrt{4 + (y/x)^2}$ – однорідна функція нульового порядку.

Зробимо заміну $u = \frac{y}{x}$, тоді $y = ux$, $y' = u + xu'$. Маємо:

$$u + xu' = u + \sqrt{4 + u^2}, \quad \frac{du}{\sqrt{4 + u^2}} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|u + \sqrt{4 + u^2}| = \ln|x| + \ln C,$$

$$u + \sqrt{4 + u^2} = Cx.$$

В останньому виразі повернемося до змінної y :

$$y + \sqrt{4x^2 + y^2} = Cx^2.$$

$$2) \quad (y^2 + x^2)dx + (xy - 2x^2)dy = 0.$$

Функції $y^2 + x^2$ та $xy - 2x^2$ – однорідні функції другого порядку. Отже, дане рівняння однорідне. Зробимо заміну $u = \frac{y}{x}$, тоді $y = ux$, $y' = u + xu'$. Маємо

$$y' = -\frac{y^2 + x^2}{xy - 2x^2} = -\frac{(y/x)^2 + 1}{y/x - 2}, \quad u'x + u = -\frac{u^2 + 1}{u - 2},$$

$$\frac{u - 2}{2u^2 - 2u + 1} du = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{u - 2}{2u^2 - 2u + 1} du = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо окремо ліву частину рівняння:

$$\int \frac{u - 2}{2u^2 - 2u + 1} du = \frac{1}{4} \int \frac{(4u - 2) - 6}{2u^2 - 2u + 1} du = \frac{1}{4} \int \frac{d(2u^2 - 2u + 1)}{2u^2 - 2u + 1} -$$

$$-\frac{3}{2} \int \frac{1}{2u^2 - 2u + 1} du = \frac{1}{4} \ln|2u^2 - 2u + 1| - \frac{3}{4} \int \frac{1}{(u - 1/2)^2 + 1/4} du =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|2u^2 - 2u + 1| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(2u - 1).$$

Загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{1}{4} \ln|2u^2 - 2u + 1| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(2u - 1) = -\ln|x| + C.$$

В отриманому виразі повернемося до змінної y :

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2y^2 - 2xy + x^2}{x^2} \right| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x} - 1 \right) = -\ln|x| + C.$$

Відповідь: 1) $y + \sqrt{4x^2 + y^2} = Cx^2$;

$$2) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2y^2 - 2xy + x^2}{x^2} \right| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x} - 1 \right) = -\ln|x| + C.$$

Диференціальне рівняння першого порядку називається **лінійним**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (4.3)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – задані функції.

Метод варіації довільної сталої розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Для рівняння (4.3) будемо однорідне рівняння $y' + P(x)y = 0$ та відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \quad \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C,$$

$$\left| \frac{y}{C} \right| = e^{-\int P(x)dx}, \quad y = C e^{-\int P(x)dx}.$$

Розв'язок рівняння (4.3) шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \quad (4.4)$$

Диференціюємо (4.4) за змінною x :

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляємо y та y' в (4.3) та знаходимо з отриманого рівняння $C(x)$:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} &= Q(x), \\ C'(x) &= Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \\ C(x) &= \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx} \right) dx + C. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Підставляємо (4.5) в (4.4), отримуємо розв'язок рівняння (4.3):

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} = \left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx} \right) dx + C \right) e^{-\int P(x)dx}.$$

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

де $\alpha = \text{const} \in R$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$, називається **рівнянням Бернуллі**.

За допомогою заміни $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного неоднорідного рівняння першого порядку відносно функції $z = z(x)$:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad y' y^{-\alpha} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x), \quad z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

Розв'язавши дане рівняння методом варіації довільної сталої, знаходимо $z(x, C)$ та виконуємо обернену заміну $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Завдання 4.3. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння першого порядку або рівняння Бернуллі.

$$1) \quad y' - \frac{1}{x}y = \ln(x) + x;$$

$$2) \quad y' - \frac{1}{x}y = y^2(\ln(x) + x).$$

Розв'язання.

$$1) \quad y' - \frac{1}{x}y = \ln(x) + x.$$

Дане диференціальне рівняння – лінійне однорідне першого порядку. Розв'язок шукатимемо методом варіації довільної сталої.

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \quad \ln|y| = \ln|Cx|, \quad y = Cx.$$

Розв'язок вихідного рівняння шукатимемо в формі

$$y = C(x)x.$$

Підставимо $y = C(x)x$ та $y' = C'(x)x + C(x)$ в задане рівняння:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = \ln(x) + x, \quad C'(x) = \frac{\ln(x)}{x} + 1,$$

$$C(x) = \int \left(\frac{\ln(x)}{x} + 1 \right) dx + C = \int \ln x d(\ln x) + x + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + x + C,$$

$$y = \left(\frac{1}{2} \ln^2 x + x + C \right) x.$$

$$2) \ y' - \frac{1}{x} y = y^2 (\ln(x) + x).$$

Дане рівняння – рівняння Бернуллі. Поділимо його на y^2 :

$$y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = \ln(x) + x.$$

Нехай $z = y^{-1}$, тоді $z' = -y^{-2} y'$. Отримуємо

$$-z' - \frac{1}{x} z = \ln x + x, \quad z' + \frac{1}{x} z = -(\ln x + x). \quad (4.6)$$

Розв'яжемо отримане рівняння методом варіації довільної сталої:

$$z' + \frac{1}{x} z = 0, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|z| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad \ln|z| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \quad z = \frac{C}{x}.$$

Розв'язок вихідного рівняння шукатимемо в формі $z = \frac{C(x)}{x}$.

Знаходимо z' та підставляємо z та z' в задане рівняння:

$$z' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2},$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{C(x)}{x} = -(\ln x + x),$$

$$C'(x) = -(x \ln x + x^2),$$

$$C(x) = -\int (x \ln x + x^2) dx + C = -\frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + C.$$

Загальний інтеграл рівняння (4.6):

$$z = \left(-\frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + C \right) \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{4} x - \frac{1}{3} x^2 + C \frac{1}{x}.$$

В останньому виразі повернемося до змінної y ($z = y^{-1}$):

$$y^{-1} = -\frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{4} x + C \frac{1}{x}, \quad y = -\frac{12x}{6x^2 \ln x + 4x^3 - 3x^2 - 12C}.$$

Відповідь: 1) $y = \left(\frac{1}{2} \ln x + x + C \right) x$;

2) $y = -\frac{12x}{6x^2 \ln x + 4x^3 - 3x^2 - 12C}$.

Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (4.7)$$

називається **рівнянням у повних диференціалах**, якщо в області визначення D функцій $P(x, y)$, $Q(x, y)$ виконується рівність

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Загальний інтеграл рівняння (4.7) визначається за однією з формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C, \quad (4.9)$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C, \quad (4.10)$$

де $(x_0; y_0) \in D$.

Завдання 4.4. Знайти загальний розв'язок рівняння в повних диференціалах $(2x - 4y^2 + 6xy^2)dx + (2 - 8xy + 6x^2y)dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умови (4.8):

$$P(x, y) = 2x - 4y^2 + 6xy^2; \quad Q(x, y) = 2 - 8xy + 6x^2y.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -8y + 12xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -8y + 12xy.$$

Умова (4.8) виконується, тому дане рівняння – рівняння в повних диференціалах. Розв'язок даного рівняння можна знайти за формулою (4.9) або (4.10). Точку $(x_0; y_0) \in D$ варто обирати так, щоб функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ набували якомога простішого вигляду. Візьмемо в якості точки $(x_0; y_0)$ точку $(0; 0)$.

За формулою (4.9) маємо

$$\int_0^x (2x - 4 \cdot 0 + 6x \cdot 0) dx + \int_0^y (2 - 8xy + 6x^2 y) dy = C,$$

$$x^2 + 2y - 4xy^2 + 3x^2 y^2 = C.$$

Відповідь: $x^2 + 2y - 4xy^2 + 3x^2 y^2 = C$.

Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

1) Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x) \quad (4.11)$$

розв'язують послідовним n -кратним інтегруванням. Загальний розв'язок рівняння (4.11):

$$y = \varphi(x) + C_1 \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \mathbf{K} + C_n.$$

2) Якщо задано рівняння виду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \mathbf{K}, y^{(n)}) = 0, \quad (4.12)$$

яке не містить явно шуканої функції та кілька її похідних до $(k-1)$ -го порядку, то для пониження порядку рівняння (4.12) на k одиниць необхідно зробити заміну $y^{(k)} = z(x)$, тоді $y^{(k+1)} = z'(x)$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Рівняння (4.12) зведеться до рівняння $(n-k)$ -го порядку відносно функції $z(x)$:

$$F(x, z', z'', \mathbf{K}, z^{(n-k)}) = 0.$$

3) Якщо задано рівняння виду

$$F(y, y', y'', \mathbf{K}, y^{(n)}) = 0, \quad (4.13)$$

яке не містить явно незалежної змінної x , то для пониження порядку рівняння такого типу на одиницю необхідно зробити заміну

$$y' = p(y), \text{ тоді } y'' = p \cdot \frac{dp}{dy} = p \cdot p', \quad y''' = p \left(\left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p \cdot \frac{d^2 p}{dy^2} \right) = \\ = p \left((p')^2 + p \cdot p'' \right) \text{ і т.д.}$$

Отримаємо рівняння виду

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \mathbf{K}, \frac{d^{(n-1)} p}{dy^{(n-1)}}\right) = 0.$$

Завдання 4.5. Знайти загальний розв'язок рівняння вищого порядку.

1) $y''' = x^3 + 2$;

2) $\cos x \cdot y'' + \sin x \cdot y' = 1$;

3) $1 + y'^2 - 2yy'' = 0$.

Розв'язання.

1) $y''' = x^3 + 2$.

Дане рівняння типу (4.11). Проінтегруємо тричі за змінною x задане рівняння:

$$y'' = \int (x^3 + 2) dx = \frac{x^4}{4} + 2x + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^4}{4} + 2x + C_1 \right) dx = \frac{x^5}{20} + x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^5}{20} + x^2 + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^6}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

2) $\cos x \cdot y'' + \sin x \cdot y' = 1$.

Дане рівняння типу (4.12), воно не містить явно шуканої функції $y(x)$. Понизимо його порядок на одиницю. Нехай $z = y'$, тоді $z' = y''$. Маємо

$$\cos x \cdot z' + \sin x \cdot z = 1, \quad z' + z \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}. \quad (4.14)$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язок якого знайдемо методом варіації довільної сталої.

$$z' + z \frac{\sin x}{\cos x} = 0, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x},$$

$$\ln|z| = \ln|\cos x| + \ln C, \quad z = C \cos x.$$

Розв'язок рівняння (4.14) шукатимемо у вигляді $z = C(x)\cos x$, тоді $z' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$. Отримуємо

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = \operatorname{tg} x + C_1, \quad z = (\operatorname{tg} x + C_1)\cos x.$$

Повернемося до змінної y :

$$z = y' = (\operatorname{tg} x + C_1)\cos x = \sin x + C_1 \cos x,$$

$$y = \int (\sin x + C_1 \cos x) dx = -\cos x + C_1 \sin x + C_2.$$

$$3) 1 + y'^2 - 2yy'' = 0.$$

Дане рівняння типу (4.13), воно не містить явно незалежної змінної x . Понизимо його порядок на одиницю. Нехай $y' = p(y)$, тоді $y'' = pp'$. Маємо

$$1 + p^2 - 2ypp' = 0, \quad 2ypp' = p^2 + 1, \quad \frac{2pdp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y},$$

$$\ln|p^2 + 1| = \ln|y| + \ln C, \quad p^2 = C_1 y - 1,$$

$$y' = \pm \sqrt{C_1 y - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx, \quad \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$$

Відповідь: 1) $y = \frac{x^6}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;

2) $y = -\cos x + C_1 \sin x + C_2$; 3) $\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$.

Завдання 4.6. Знайти розв'язок задачі Коші.

1) $y'' = \frac{1}{x^3}, \quad y(1) = \frac{3}{2}, \quad y'(1) = -\frac{1}{2}.$

2) $2y(y')^3 + y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2;$

3) $y' - xy'' = 2(1 + x^2 y''), \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 2;$

Розв'язання.

$$1) y'' = \frac{1}{x^3}, y(1) = \frac{3}{2}, y'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Проінтегруємо задане рівняння:

$$y' = \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C_1.$$

Використовуючи другу початкову умову знаходимо C_1 :

$$y'(1) = -\frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2}, C_1 = 0.$$

Із урахуванням того, що $C_1 = 0$, отримуємо

$$y = -\int \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2x} + C_2.$$

З першої початкової умови знаходимо C_2 :

$$y(1) = \frac{1}{2} + C_2 = \frac{3}{2}, C_2 = 1.$$

Остаточно отримуємо розв'язок задачі Коші:

$$y = \frac{1}{2x} + 1.$$

$$2) 2y(y')^3 + y'' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2.$$

Задане рівняння типу (4.13), воно не містить явно незалежної змінної x . Нехай $y' = p(y)$, тоді $y'' = p \cdot p'$. Маємо

$$2yp^3 + pp' = 0, p' = -2yp^2, p' = -2yp^2,$$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2, \frac{dp}{p^2} = -2ydy,$$

$$-\frac{1}{p} = -y^2 + C_1, -\frac{1}{y'} = -y^2 + C_1. \quad (4.15)$$

Використовуючи другу початкову умову, знайдемо C_1 :

$$-\frac{1}{-2} = -0^2 + C_1, C_1 = \frac{1}{2}.$$

Підставимо $C_1 = \frac{1}{2}$ в (4.15):

$$\frac{1}{y'} = y^2 - \frac{1}{2} \cdot y' = \frac{2}{2y^2 - 1}, \left(y^2 - \frac{1}{2} \right) dy = x, \frac{y^3}{3} - \frac{y}{2} = x + C_2.$$

Із першої початкової умови знаходимо, що $C_2 = 0$.

Розв'язок задачі Коші:

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y}{2} = x.$$

$$3) \ y' - xy'' = 2(1 + x^2 y''), \ y(1) = 3, \ y'(1) = 2.$$

Задане рівняння типу (4.12), воно не містить явно шуканої функції $y(x)$. Нехай $z = y'$, тоді $z' = y''$. Отримуємо

$$z'(2x^2 + x) = z - 2, \frac{dz}{z - 2} = \frac{dx}{x(2x + 1)},$$

$$\frac{dz}{z - 2} = \frac{dx}{x(2x + 1)}, \int \frac{dz}{z - 2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x + 1} \right) dx,$$

$$\ln|z - 2| = \ln|x| - \ln|2x + 1| + \ln C_1, \ z = \frac{C_1 x}{2x + 1} + 2.$$

Повернемось до змінної y :

$$y' = \frac{C_1 x}{2x + 1} + 2.$$

Із другої початкової умови одержуємо, що $C_1 = 0$, тоді

$$y' = 2, \ y = 2x + C_2.$$

Використовуючи першу початкову умову, знаходимо C_2 :

$$y(1) = 2 + C_2 = 3, \ C_2 = 1.$$

Остаточно отримуємо розв'язок задачі Коші:

$$y = 2x + 1.$$

Відповідь: 1) $y = \frac{1}{2x} + 1$; 2) $\frac{y^3}{3} - \frac{y}{2} = x$; 3) $y = 2x + 1$,

5 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \mathbf{K} + a_n y = f(x), \quad (5.1)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі, $f(x)$ – задана неперервна функція, називається **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) n -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \mathbf{K} + a_n y = 0, \quad (5.2)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі, називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Схема розв'язання ЛОДР n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Будуємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \mathbf{K} + a_n = 0. \quad (5.3)$$

1) Якщо всі корені рівняння дійсні та прості (різні), тоді загальний розв'язок рівняння (5.2) записуємо у вигляді:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \mathbf{K} + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2) Якщо всі корені рівняння дійсні, але серед них є корені кратності m ($m > 1$), тоді кожному простому кореню λ відповідає частинний розв'язок $e^{\lambda x}$, а кожному кореню λ кратності m відповідає m частинних розв'язків

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

3) Якщо серед коренів рівняння (5.3) є комплексно-спряжені, то кожній парі $\alpha \pm i\beta$ простих коренів

відповідає два частинних розв'язки $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$, а кожній парі $\alpha \pm i\beta$ комплексно-спряжених коренів кратності m відповідає $2m$ частинних розв'язків:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Структура загального розв'язку ЛНДР n -го порядку.

Загальний розв'язок рівняння (5.1) складається із суми частинного розв'язку y_c неоднорідного рівняння та загального розв'язку y_0 відповідного йому однорідного рівняння.

ЛНДР n -го порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального виду

Нехай права частина ЛНДР (5.1) має спеціальний вигляд:

$$f(x) = e^{ax} (P_r(x) \cos bx + Q_s(x) \sin bx), \quad (5.4)$$

де $P_r(x)$, $Q_s(x)$ – многочлени степенів r і s відповідно, a , b – деякі числа.

Для диференціальних рівнянь з правою виду (5.4) частинний розв'язок має аналогічну структуру:

$$y_c = x^k e^{ax} (\tilde{P}_m(x) \cos bx + \tilde{Q}_n(x) \sin bx),$$

де $\tilde{P}_m(x)$, $\tilde{Q}_n(x)$ – многочлени степеня $m = \max\{r, s\}$, k – кількість коренів характеристичного рівняння (з урахуванням їх кратності), які збігаються з числом $z = a + ib$.

Визначивши структуру загального розв'язку рівняння (5.1), в якому невідомими являються лише коефіцієнти многочленів $\tilde{P}_m(x)$, $\tilde{Q}_n(x)$, підставляємо частинний розв'язок y_c та його похідні в рівняння (5.1) та прирівнюємо коефіцієнти при подібних членах зліва і справа. Отримуємо необхідну кількість лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів.

Принцип суперпозиції. Якщо права частина рівняння (5.1) представляє собою суму двох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_{1q} та y_{2q} – частинні розв’язки рівнянь

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \mathbf{K} + a_n y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \mathbf{K} + a_n y = f_2(x)$$

відповідно, то функція $y_q = y_{1q} + y_{2q}$ – розв’язок рівняння (5.1).

Завдання 5.1. Знайти загальний розв’язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (з відшукуванням числових значень коефіцієнтів).

1) $y'' + 2y' + 2y = 40e^{3x} \cos x$;

2) $y'' + 2y' = (2x+1)\cos 2x + \sin 2x$;

3) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$;

4) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}((2x+1)\cos x + \sin x)$;

5) $y'' - 4y' + 5y = xe^x + \sin 2x$

Розв’язання.

1) $y'' + 2y' + 2y = 40e^{3x} \cos x$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0, \lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Розв’язок однорідного рівняння: $y_0 = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Для заданого рівняння $a = 3$, $b = 1$, $z = 3 + i$, тому $k = 0$.

Частинний розв’язок має вигляд:

$$y_q = e^{3x}(A \cos x + B \sin x).$$

Знайдемо y'_q та y''_q :

$$y'_q = e^{3x}((3A + B)\cos x + (-A + 3B)\sin x),$$

$$y''_q = e^{3x}((8A + 6B)\cos x + (-6A + 8B)\sin x).$$

Підставимо y'_q та y''_q у вихідне рівняння та поділимо обидві частини рівняння на e^{3x} , отримаємо:

$$(16A + 8B)\cos x + (-8A + 16B)\sin x = 40 \cos x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A та B :

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 16A + 8B = 40, \\ \sin x & -8A + 16B = 0. \end{array}$$

Маємо $A = 2$, $B = 1$. Отже, $y_c = e^{3x}(2 \cos x + \sin x)$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{3x}(2 \cos x + \sin x).$$

$$2) y'' + 2y' = (2x + 1)\cos 2x + \sin 2x.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

Для заданого рівняння $a = 0$, $b = 2$, $z = 2i$, тому $k = 0$.

Частинний розв'язок:

$$y_c = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x.$$

Знайдемо y'_c та y''_c :

$$y'_c = (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x,$$

$$y''_c = (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x.$$

Підставимо y'_c та y''_c у вихідне рівняння:

$$\begin{aligned} &((-4A + C)x + 2A - 4B + 4C + 4D)\cos 2x + ((-4A - 4C)x - \\ &- 4A - 4B + 2C - 4D)\sin 2x = (2x + 1)\cos 2x + \sin 2x. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\cos x$, $x \cos x$ та $\sin x$, $x \sin x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C та D :

$$\begin{array}{l|l} x \cos 2x & -4A + C = 2, \\ \cos 2x & 2A - 4B + 4C + 4D = 1, \\ x \sin 2x & -4A - 4C = 0, \\ \sin 2x & -4A - 4B + 2C - 4D = 1. \end{array}$$

З отриманої системи знаходимо, що $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{8}$.

Отже, $y_{\text{г}} = -\frac{1}{4}x \cos 2x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right) \sin 2x$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x \cos 2x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right) \sin 2x.$$

$$3) y^{IV} + 8y'' + 16y = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0, \lambda_{1,2} = 2i, \lambda_{3,4} = -2i.$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x.$$

Для заданого рівняння $a = 0$, $b = 0$, $z = 0$, тому $k = 0$.

Частинний розв'язок:

$$y_{\text{ч}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

$$y'_{\text{ч}} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{\text{ч}} = 6Ax + B, y'''_{\text{ч}} = 6A, y^{IV}_{\text{ч}} = 0.$$

Підставимо $y_{\text{ч}}^{IV}$ та $y''_{\text{ч}}$ у вихідне рівняння, отримаємо:

$$8(6Ax + B) + 16(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах останньої тотожності та отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C та D :

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 16A = 2, \\ x^2 & 16B = 4, \\ x^1 & 48A + 16C = 3, \\ x^0 & 16B + 16D = 1. \end{array}$$

Отримуємо, що $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = D = -\frac{3}{16}$.

Отже, $y_u = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{3}{16}$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{3}{16}.$$

4) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}((2x+1)\cos x + \sin x);$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$l^2 - 6l + 9 = 0, \quad l_{1,2} = 3.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

Для заданого рівняння $a = 3$, $b = 1$, $z = 3 + i$, тому $k = 0$.

Частинний розв'язок має вигляд:

$$y_u = e^{3x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$$

Знайдемо y'_u та y''_u :

$$\begin{aligned} y'_u &= e^{3x}(((3A + C)x + A + 3B + D)\cos x + \\ &\quad + ((-A + 3C)x - B + C + 3D)\sin x), \\ y''_u &= e^{3x}(((8A + 6C)x + 6A + 8B + 2C + 6D)\cos x + \\ &\quad + ((-6A + 8C)x - 2A - 6B + 6C + 8D)\sin x). \end{aligned}$$

Підставимо y'_u та y''_u у вихідне рівняння та поділимо обидві частини рівняння на e^{3x} , отримаємо:

$$(-2Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x = (2x + 1)\cos x + \sin x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\cos x$, $x \cos x$ та $\sin x$, $x \sin x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C та D :

$$\begin{array}{l|l} x \cos x & -A = 2, \\ \cos x & -B + 2C = 1, \\ x \sin x & -C = 0, \\ \sin x & -2A - D = 1. \end{array}$$

Маємо $A = -2$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 3$. Отже,

$$y_u = e^{3x}((-2x - 1)\cos x + 3\sin x).$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x}((-2x - 1)\cos x + 3\sin x).$$

$$5) y'' - 4y' + 5y = xe^x + \sin 2x.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

За принципом суперпозиції частинний розв'язок має вигляд:

$$y_{\text{ч}} = y_{1\text{ч}} + y_{2\text{ч}}.$$

$$\text{а) } f_1(x) = xe^x, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad z = 1, \quad k = 0, \quad y_{1\text{ч}} = (Ax + B)e^x.$$

$$\text{б) } f_2(x) = \sin 2x, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad z = 2i, \quad k = 0,$$

$$y_{2\text{ч}} = C \sin 2x + D \cos 2x.$$

Частинний розв'язок має вигляд:

$$y_{\text{ч}} = (Ax + B)e^x + C \sin 2x + D \cos 2x.$$

Знайдемо $y'_{\text{ч}}$ та $y''_{\text{ч}}$:

$$y'_{\text{ч}} = (Ax + A + B)e^x - 2C \sin 2x + 2D \cos 2x,$$

$$y''_{\text{ч}} = (Ax + 2A + B)e^x - 4C \sin 2x - 4D \cos 2x.$$

Підставимо $y'_{\text{ч}}$ та $y''_{\text{ч}}$ у вихідне рівняння:

$$(2Ax - 2A + 2B)e^x + (C + 8D)\sin 2x + (-8C + D)\cos 2x = xe^x + \sin 2x$$

Прирівнявши коефіцієнти при xe^x , e^x , $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C , D :

$$\begin{array}{l|l} xe^x & 2A = 1, \\ e^x & -2A + 2B = 0, \\ \sin 2x & C + 8D = 1, \\ \cos 2x & -8C + D = 0. \end{array}$$

$$\text{Маємо } A = B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{65}, \quad D = \frac{8}{65}.$$

Отже, $y_q = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{1}{65}\sin 2x + \frac{8}{65}\cos 2x$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{1}{65}\sin 2x + \frac{8}{65}\cos 2x.$$

Відповідь: 1) $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{3x}(2 \cos x + \sin x)$;

2) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x \cos 2x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)\sin 2x$;

3) $y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{3}{16}$;

4) $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x + (-2x - 1)\cos x + 3\sin x)$;

5) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{1}{65}\sin 2x + \frac{8}{65}\cos 2x$.

Завдання 5.2. Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (без відшукування числових значень коефіцієнтів):

1) $y''' + 4y'' + 3y' = e^x(x \cos 2x - \sin 2x)$;

2) $y'' - 16y' + 64 = 5x^2 e^{8x} + x \sin x$;

3) $4y'' - 5y' + y = 5x^2 + x + 2 + \cos x$

Розв'язання.

1) $y''' + 4y'' + 3y' = e^x(x \cos 2x - \sin 2x)$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x}$.

Оскільки, $a = 1$, $b = 2$, то $z = 1 + 2i$, $k = 0$.

Частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y_q = e^x((Ax + B)\cos 2x + (A_1 x + B_1)\sin 2x).$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} + e^x((Ax + B)\cos 2x + (A_1 x + B_1)\cos 2x).$$

$$2) y'' - 16y' + 64 = 5x^2 e^{8x} + x \sin x.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 8.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{8x}$.

Використовуючи принцип суперпозиції отримуємо, що частинний розв'язок: $y_u = y_{1u} + y_{2u}$.

$$а) f_1(x) = 5x^2 e^{8x}, \quad a = 8, \quad b = 0, \quad z = 8, \quad k = 2, \\ y_{1u} = x^2 (Ax^2 + Bx + C)e^{8x}.$$

$$б) f_2(x) = x \sin x, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad z = i, \quad k = 0, \\ y_{2u} = (A_1 x + B_1) \sin x + (A_2 x + B_2) \cos x.$$

Загальний розв'язок:

$$y = y_0 + y_u = (C_1 + C_2 x)e^{8x} + x^2 (Ax^2 + Bx + C)e^{8x} + \\ + (A_1 x + B_1) \sin x + (A_2 x + B_2) \cos x.$$

$$3) 4y'' - 5y' + y = 5x^2 + x + 2 + \cos x.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{4}.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{x/4}$.

Частинний розв'язок: $y_u = y_{1u} + y_{2u}$.

$$а) f_1(x) = 5x^2 + x + 2, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad z = 0, \quad k = 0, \\ y_{1u} = Ax^2 + Bx + C.$$

$$б) f_2(x) = \cos x, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad z = i, \quad k = 0, \\ y_{2u} = D \sin x + E \cos x.$$

Загальний розв'язок:

$$y = y_0 + y_u = C_1 e^x + C_2 e^{x/4} + Ax^2 + Bx + C + D \sin x + E \cos x.$$

Відповідь:

$$1) y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} + e^x ((Ax + B) \cos 2x + (A_1 x + B_1) \cos 2x);$$

$$2) y = (C_1 + C_2 x)e^{8x} + x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{8x} + (A_1x + B_1)\sin x + (A_2x + B_2)\cos x; 3) y = C_1 e^x + C_2 e^{x/4} + Ax^2 + Bx + C + D\sin x + E\cos x.$$

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Нехай задано лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (5.5)$$

де a_1, a_2 – сталі, $f(x)$ – задана неперервна на деякому проміжку функція.

Алгоритм розв'язування рівняння (5.5) методом варіації довільних сталих.

- 1) Знаходимо загальний розв'язок y_0 відповідного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$:

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

- 2) Частинний розв'язок рівняння (5.5) шукаємо у вигляді:

$$y_u = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (5.6)$$

- 3) Складаємо та розв'язуємо систему рівнянь Лагранжа відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

- 4) Інтегруємо знайдені в 3) функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ та підставляємо знайдені $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в (5.6).

Знаходимо загальний розв'язок рівняння (5.5): $y = y_0 + y_u$.

Завдання 5.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \text{ методом варіації довільних сталих.}$$

Розв'язання.

- 1) Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

2) Частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_u = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x}. \quad (5.7)$$

3) $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $y_1'(x) = -e^{-x}$, $y_2'(x) = -2e^{-2x}$.

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x) e^{-x} - 2C_2'(x) e^{-2x} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

За формулами Крамера маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{e^x}{1+e^{2x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{2x}},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{e^x}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^{2x}}.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}.$$

$$\begin{aligned} 4) \quad C_1(x) &= \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \left| \begin{matrix} t = e^x, \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|t^2+1| = \frac{1}{2} \ln|e^{2x}+1|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx = \left| \begin{matrix} t = e^x, \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{t^2}{t^2+1} dt = -\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = \\ &= -\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = -t + \operatorname{arctg} t = -e^x + \operatorname{arctg}(e^x). \end{aligned}$$

Підставляємо знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в (5.7), отримуємо:

$$y_u = \left(\frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| \right) e^{-x} + (-e^x + \arctg(e^x)) e^{-2x}.$$

5) Загальний розв'язок рівняння:

$$y = y_0 + y_u = \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| \right) e^{-x} + (C_2 - e^x + \arctg(e^x)) e^{-2x}.$$

Відповідь: $y = \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| \right) e^{-x} + (C_2 - e^x + \arctg(e^x)) e^{-2x}.$

Завдання 5.4. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y, \\ y' = -x + 3y. \end{cases}$$

а) методом виключення;

б) матричним методом.

а) При розв'язанні заданої системи необхідно пам'ятати, що $x = x(t)$, $y = y(t)$. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t :

$$x'' = -2x' + 4y'.$$

Підставимо $y' = -x + 3y$ в отриману рівність:

$$x'' = -2x' + 4(-x + 3y), \quad x'' + 2x' + 4x - 12y = 0.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y, \\ x'' + 2x' + 4x - 12y = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння останньої системи виражаємо y через x та x' :

$$y = \frac{x' + 2x}{4}. \quad (5.8)$$

Підставляємо отриманий вираз в друге рівняння системи:

$$x'' + 2x' + 4x - 12 \cdot \frac{x' + 2x}{4} = 0, \quad x'' - x' - 2x = 0$$

Отримали ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'яжемо його:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1;$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Знайдемо y . Підставимо $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$ та $x' = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$ в (5.8). Маємо

$$y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C_2 e^{-t}.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

б) Запишемо матрицю системи:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння даної системи:

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda_1 = 2$:

$$(A - E\lambda_1)\bar{B} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$-b_1 + b_2 = 0, \begin{cases} b_1 = b_2, \\ b_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1, \\ b_2 = 1. \end{cases}$$

Отримали власний вектор $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Власному числу $\lambda_1 = 2$

відповідає частинний розв'язок:

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda_2 = -1$:

$$(A - E\lambda_2)\bar{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$-b_1 + 4b_2 = 0, \quad \begin{cases} b_1 = 4b_2, \\ b_2 = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1, \\ b_2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Отримали власний вектор $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Власному числу $\lambda_2 = -1$

відповідає частинний розв'язок:

$$\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд у матричній формі:

$$\bar{X} = C_1 \bar{X}_1 + C_2 \bar{X}_2 = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

або в явному вигляді

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Відповідь: а) $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C_2 e^{-t}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C_2 e^{-t}. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980. – 365 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т.1. – 432 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т.2. – 560 с.
6. Розрахунково-графічні завдання з математичного аналізу (II семестр) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко, Н.М.Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 50 с.
7. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные курсы / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1984. – 610 с.
8. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Крчковича. – М.:Высш. шк., 1973. – 576 с.