

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з виконання розрахункових завдань
з дисципліни загально-інженерної підготовки
для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання

2025

Методичні вказівки з виконання розрахункових завдань з дисципліни загально-інженерної підготовки для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання / Укл.: А.А. Скребцов, О.С. Омельченко, Н.В. Шалева, О.В. Омельченко, А.В. Кононенко — Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2025 – 52 с.

Укладачі: А.А. Скребцов, к.т.н., доцент
 О.С. Омельченко, старший викладач
 Н.В. Шалева, асистент
 О.В. Омельченко, аспірант
 А.В. Кононенко, аспірант

Відповідальний
за випуск: А.А. Скребцов, к.т.н., доцент

Затверджено
на засіданні кафедри «Теоретична та прикладна механіка»
Протокол №8 від 18.02.2025 р.

Рекомендовано до видання
НМК ТФ
Протокол № 5 від 27.02. 2025р.

ЗМІСТ

1. РГР 1. «Визначення геометричних характеристик складного поперечного перерізу».....	4
2. РГР 2. «Побудова епюр поздовжніх сил і переміщень при розтяганні східчастого стрижня з урахуванням власної ваги».....	16
3. РГР 3. «Розрахунки на міцність та жорсткість при крученні вала круглого поперечного перерізу»	23
4. РГР 4. «Розрахунки на міцність при згинанні прямих балок».....	34
Список використаних джерел	

1.РГР 1. «ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ»

Теоретичні відомості та приклади

Міцність та жорсткість елементів конструкції визначаються розмірами поперечних перерізів і суттєво залежать від їх форми. Площа поперечного перерізу стрижня визначає затрати матеріалу, але не є мірою надійності.

Ці особливості враховуються у формулах опору матеріалів спеціальними характеристиками поперечних перерізів (геометричними характеристиками), що будуть вивчені в цьому розділі. Поперечні перерізи стержнів можна представити як плоскі фігури, та розглядати геометричні характеристики плоских фігур.

Приклад 1.1

Визначити координати центра ваги фігури.

Розбиваємо складну фігуру на прості частини, у яких легко визначити площі та центри ваги. Можливо розбити на два прямокутника:

– великий з розмірами a, b , з котрого вирізано менший прямокутник;

– два прямокутника, з яких складена фігура.

Розглянемо приклад, у якому переріз складається з двох прямокутників I та II (Рис.1.1).

Визначаємо площі: для I $F_1 = d \cdot (a - d)$;

для II $F_2 = b \cdot d$.

Загальна площа $F = F_1 + F_2 = d \cdot (a - d) + b \cdot d$.

Визначаємо положення та координати центрів ваги кожної частини. Необхідно обрати координатні осі, відносно яких будемо визначати координати центрів ваги. Осі обираємо так, щоб весь переріз був у першому квадранті.

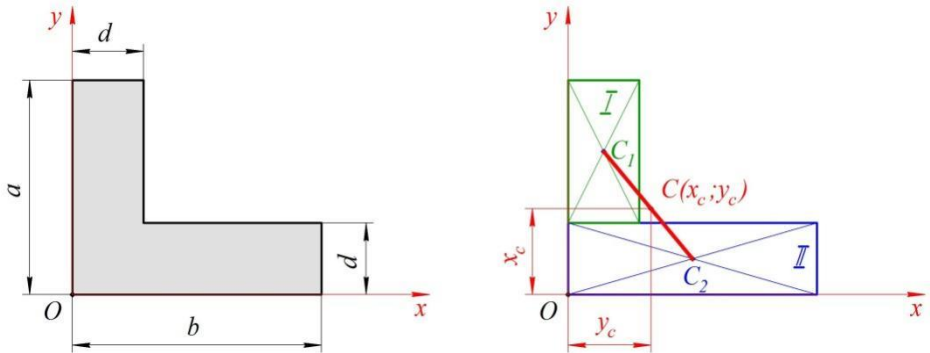


Рисунок 1.1 – Визначення центра ваги для несиметричного перерізу

Для фігури I:

$$x_{c_1} = \frac{d}{2}; \quad y_{c_1} = d + \frac{a-d}{2} = \frac{a-d+2d}{2} = \frac{a+d}{2};$$

для фігури II:

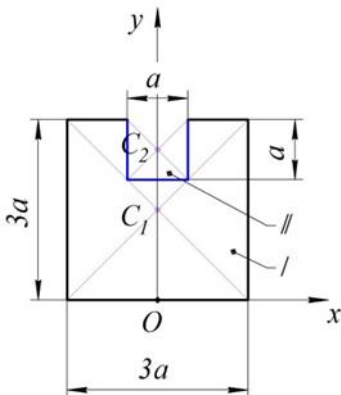
$$x_{c_2} = \frac{b}{2}; \quad y_{c_2} = \frac{d}{2}.$$

За формулами (2.4) обчислюємо координати загального центру ваги.

$$X_c = \frac{F_1 x_{c_1} + F_2 x_{c_2}}{F_1 + F_2} = \frac{d \cdot (a-d) \cdot \frac{d}{2} + b \cdot d \cdot \frac{b}{2}}{d \cdot (a-d) + b \cdot d};$$

$$y_c = \frac{F_1 y_{c_1} + F_2 y_{c_2}}{F_1 + F_2} = \frac{d \cdot (a-d) \cdot \frac{a+d}{2} + b \cdot d \cdot \frac{d}{2}}{d \cdot (a-d) + b \cdot d}.$$

В якості перевірки можна зазначити, що загальний центр ваги несиметричного перерізу повинен лежати на відрізку, який з'єднує центри ваги частин перерізу.



Приклад 1.2

Визначити координати центра ваги симетричного перерізу (Рис. 1.2).

Рисунок 1.2 – Визначення центра ваги для симетричного перерізу

Розбиваємо фігуру на два квадрата (великий з розмірами $3a \times 3a$, з котрого вирізано менший квадрат $a \times a$) (Рис. 1.2). Для кожного з них визначаємо площі: для I $F_1 = (3a)^2$; для II $F_2 = a^2$.

Осі координат обираємо таким чином, щоб одна ось (ось y) співпала з віссю симетрії. Ось x обирається в довільній точці. Координати центрів ваги кожної фігури:

$$x_{c1} = 0; \quad y_{c1} = \frac{3a}{2} = 1,5a;$$

$$x_{c2} = 0; \quad y_{c2} = 3a - \frac{a}{2} = 2,5a.$$

Координати центра ваги всієї фігури:

$$x_c = \frac{F_1 x_{c1} - F_2 x_{c2}}{F_1 - F_2} = 0;$$

$$y_c = \frac{F_1 y_{c1} - F_2 y_{c2}}{F_1 - F_2} = \frac{9a^2 \cdot 1,5a - a^2 \cdot 2,5a}{9a^2 - a^2} = \frac{11a^3}{8a^2} = 1,37a.$$

В якості перевірки можна зазначити, що загальний центр ваги симетричного перерізу повинен лежати на осі симетрії

РОЗРАХУНКОВА ЗАДАЧА

Умова задачі:

Для заданого поперечного перерізу необхідно:

а) виписати розміри прокатних профілів, з яких складається переріз, із таблиць сортаменту [1] і накреслити його в масштабі 1:2 на аркуші паперу формату А4;

б) провести допоміжні осі координат, відносно яких визначити положення центру ваги кожного профілю;

в) визначити положення центру ваги заданого перерізу та провести на кресленні центральні осі x_c, y_c ;

г) визначити осьові (екваторіальні) і відцентровий момент інерції відносно центральних осей;

д) визначити положення головних центральних осей (u, v) і провести їх на кресленні;

е) визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;

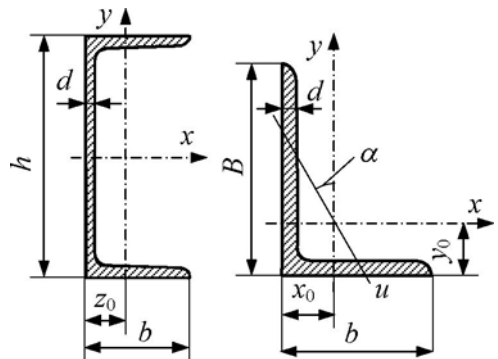
ж) визначити моменти опору заданого перерізу.

Схеми складних перерізів та номери їх профілів наведені на рисунках 1.3 і в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Номери профілів складного перерізу

№ рядка	Швелер	Двутавр	Рівнобічний кутник
1	14	12	№8: 80×80×8
2	16	14	№8: 80×80×6
3	18	16	№9: 90×90×8
4	20	18	№9: 90×90×7
5	22	20a	№9: 90×90×6
6	24	20	№10: 100×100×8
7	27	22a	№10: 100×100×10
8	30	22	№10: 100×100×12
9	33	24a	№12,5: 125×125×10
0	36	24	№12,5: 125×125×12

Нехай заданий переріз складається зі швелера №20 ГОСТ 8240-97) і нерівнобічного кутника №16/10 (ДСТУ 2251:2018), ескіз якого зображено на Рис. 1.4. Згідно таблиць сортаменту зазначених стандартів виписуємо розміри і геометричні характеристики швелера (Рис. 1.4) та нерівнобічного кутника, які наведені в табл. 1.2.



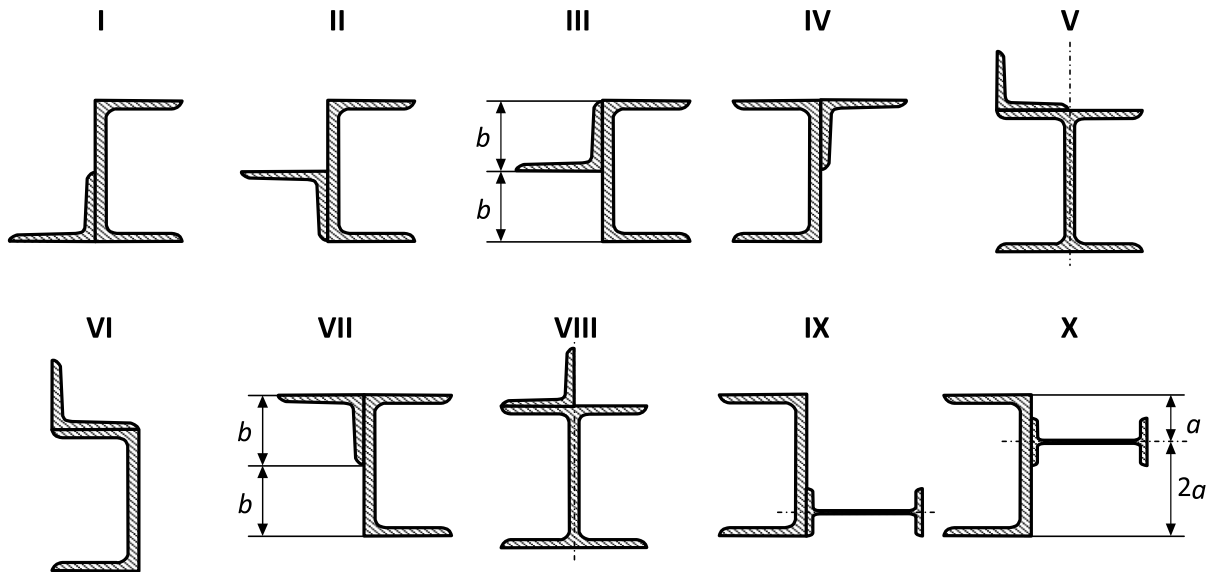


Рисунок 1.3 – Схеми складних перерізів з рівнобічним кутником

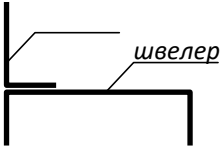


Рисунок 1.4 – Ескіз перерізу

Таблиця 1.2 – Основні дані профілів складного перерізу

Профіль	№	h, B , мм	b , мм	d , мм	F , см ²	J_x , см ⁴	J_y , см ⁴	J_{min} , см ⁴	y_0 , см	x_0, z_0 , см	$tg \alpha$
Швелер	20	200	76	5,2	23,4	1520	113	–	–	2,07	–
Кутник	16/10	160	10	1,0	25,3	667	204	121	5,23	2,28	0,39

Після цього накреслюємо заданий переріз в масштабі 1:2 і проводимо центральні осі, $x_1 y_1$ та $x_2 y_2$ кожного профілю з позначенням їх центрів ваги C_1, C_2 . Індекси 1 і 2 прийняті відповідно нумерації профілів в заданому складному перерізі (Рис. 1.5).

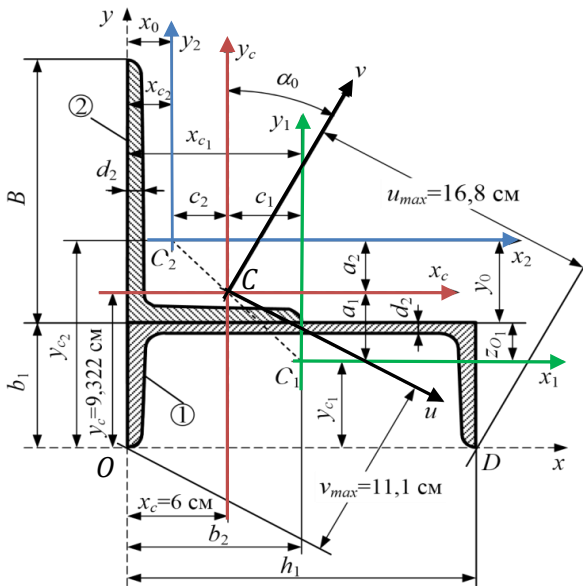


Рисунок 1.5 – Схема заданого складного перерізу

1.2 Визначення положення центру ваги складного перерізу

Для визначення положення центру ваги перерізу необхідно вибрати та провести на кресленні систему допоміжних осей і в цій системі визначити координати центрів ваги кожного профілю, тобто x_{c_1}, y_{c_1} та x_{c_2}, y_{c_2} .

Допоміжні осі обирають таким чином, щоб вони проходили по характерним точкам перерізу (весь переріз розташовується в першому квадранті). На рис.1.4 допоміжні осі позначені O_x, O_y (пунктир). Відповідно, координати центрів ваги швелера і кутника визначаємо так (Рис.1.4): $x_{c_1} = h_1/2 = 20/2 = 10$ см;

$$y_{c_1} = b_1 - z_{0_1} = 7,6 - 2,07 = 5,53 \text{ см};$$

$$x_{c_2} = x_0 = 2,28 \text{ см}; y_{c_2} = b_1 + y_0 = 7,6 + 5,23 = 12,83 \text{ см},$$

де $h_1, b_1, z_{0_1}, x_0, y_0$ – параметри швелера і кутника

Визначаємо координати центру ваги складного перерізу

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot x_{c_1} + F_2 \cdot x_{c_2}}{F_1 + F_2} = \\ &= \frac{23,4 \cdot 10 + 25,3 \cdot 2,28}{23,4 + 25,3} = 5,989 \text{ см}; \\ Y_c &= \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{c_1} + F_2 \cdot y_{c_2}}{F_1 + F_2} = \\ &= \frac{23,4 \cdot 5,53 + 25,3 \cdot 12,83}{23,4 + 25,3} = 9,322 \text{ см}, \end{aligned}$$

де F_1, F_2 – площі поперечних перерізів швелера і кутника.

Визначимо в системі осей x_c, y_c координати центрів ваги швелера та кутника

$$c_1 = x_{c_1} - x_c = 10 - 5,989 = 4,011 \text{ см};$$

$$a_1 = y_{C_1} - y_C = 5,53 - 9,322 = -3,792 \text{ см};$$

$$c_2 = x_{C_2} - x_C = 2,28 - 5,989 = -3,709 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{C_1} - y_C = 12,83 - 9,322 = 3,508 \text{ см}.$$

За результатами обчислення положення центру ваги перерізу проводимо на кресленні систему центральних осей x_C, y_C (пунктир). Точка перетину цих осей є центр ваги складного перерізу. З метою перевірки правильності розрахунку необхідно упевнитись в тому, що точка перетину центральних осей лежить на прямій, яка з'єднує центри ваги C_1 і C_2 .

Визначення моментів інерції відносно центральних осей

Момент інерції складного перерізу відносно центральних осей визначається як сума моментів інерції кожного профілю, з яких складається заданий переріз, тобто

$$J_{x_C} = J_{x_C}^I + J_{x_C}^{II};$$

$$J_{y_C} = J_{y_C}^I + J_{y_C}^{II};$$

$$J_{x_C y_C} = J_{x_C y_C}^I + J_{x_C y_C}^{II},$$

де J_{x_C}, J_{y_C} – осьові моменти інерції; $J_{x_C y_C}$ – відцентровий момент інерції.

В свою чергу, моменти інерції кожного профілю відносно центральних осей складеного перерізу визначаються за формулами паралельного переносу осей. Для першого профілю:

$$\begin{aligned} J_{x_C}^I &= J_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1; & J_{y_C}^I &= J_{y_1} + c_1^2 \cdot F_1; & J_{x_C y_C}^I \\ &= J_{x_1 y_1} + a_1 \cdot c_1 \cdot F_1; \end{aligned}$$

Для другого профілю:

$$\begin{aligned} J_{x_C}^{II} &= J_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2; & J_{y_C}^{II} &= J_{y_2} + c_2^2 \cdot F_2; & J_{x_C y_C}^{II} \\ &= J_{x_2 y_2} + a_2 \cdot c_2 \cdot F_2; \end{aligned}$$

Так як осі x_1, y_1 швелера є головними центральними осями (вісь x_1 є віссю симетрії), то $J_{x_2y_2} = 0$. Це стосується також і двотаврового профілю.

Також треба обов'язково враховувати положення профілів. **Оскільки швелер у складному перерізі має горизонтальне положення, а не стандартне, як на рис. 1.3а та в таблиці сортаменту¹, то значення J_{x_1} і J_{y_1} міняємо місцями.**

Якщо підставити відповідні числові значення у наведені залежності, будемо мати наступне:

Осьові моменти інерції:

$$J_{x_c}^I = J_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1 = 113 + (-3,792)^2 \cdot 23,4 = 449,475 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c}^{II} = J_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2 = 667 + 3,508^2 \cdot 25,3 = 978,343 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c} = J_{x_c}^I + J_{x_c}^{II} = 449,475 + 978,343 = 1427,82 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^I = J_{y_1} + c_1^2 \cdot F_1 = 1520 + 4,011^2 \cdot 23,4 = 1896,462 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^{II} = J_{y_2} + c_2^2 \cdot F_2 = 204 + (-3,709)^2 \cdot 25,3 = 552,044 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II} = 1896,462 + 552,044 = 2448,507 \text{ см}^4.$$

Відцентровий момент інерції:

$$J_{x_c y_c}^I = 0 + (-3,792) \cdot 4,011 \cdot 23,4 = -355,91 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c}^{II} = -212,9 + 3,508 \cdot (-3,709) \cdot 25,3 = -542,08 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= J_{x_c y_c}^I + J_{x_c y_c}^{II} = -355,91 + (-542,08) = \\ &= -897,99 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Знак відцентрового моменту визначається знаком відцентрових моментів окремих частин кутника, розташованих у

¹ Це застереження відноситься і до двотавра на схемах IX, X (Рис.1.3).

відповідних квадрантах центральної системи координат x, y (Рис.1.6а), тобто:

Порівнюючи зображення рівнобічного кутника і напрям центральних осей x_2, y_2 на рис. 1.5 та x, y на Рис. 1.6, а, можна дійти висновку, що $J_{x_2 y_2} < 0$. Для іншого напрямку центральних осей або іншого розташування кутника, наприклад, зображеного на рис. 1.6, б, можна визначити, що відцентровий момент кутника в цьому випадку є додатним ($J_{xy} > 0$).

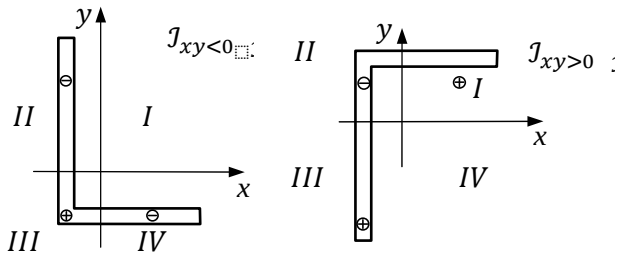
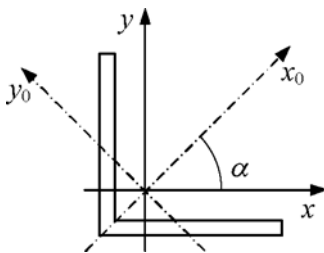


Рисунок 1.6 – До визначення відцентрового моменту рівнобічного кутника



Описані вище пояснення щодо знаку **відцентрового моменту** стосуються також і **рівнобічного кутника** (Рис.1.7), модуль якого визначається формулою:

$$J_{xy} = \frac{J_{x_0 \max} - J_{y_0 \min}}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

Рисунок 1.7 – До визначення відцентрового моменту рівнобічного кутника

де $J_{x_0 \max}$, $J_{y_0 \min}$ головні моменти інерції відносно головних осей x_0, y_0 . Головна вісь x_0 є віссю симетрії, тому кут $\alpha = 45^\circ$, а $\sin 2\alpha = 1$.

Визначення положення головних осей інерції складного перерізу

Положення головних осей інерції визначається формулою:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}.$$

Після підстановки значень J_{x_c} , J_{y_c} , $J_{x_c y_c}$ будемо мати:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2(-897,99)}{2448,507 - 1427,82} = -1,75959;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg(-1,75959) = -30,2^\circ.$$

Знак мінус вказує на те, що головні осі, відносно центральних, необхідно повернути за годинниковою стрілкою на визначений кут. На рис.1.3 головні осі позначені як ***Cu***, ***Cv*** (жирна чорна суцільна лінія).

Головні центральні осі мають найбільш практичне значення, так як розрахунок напружень і деформацій в системі цих осей набагато спрощується.

Визначення головних моментів інерції

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} =$$

=

$$1427,82 + 2448,5072 \pm 1427,82 - 2448,5072 + (-897,99)$$

$$= 1938,164 \pm 1032,878;$$

$$J_{\max} = 1938,164 + 1032,878 = 2971,042 \rightarrow J_v$$

$$J_{\min} = 1938,164 - 1032,878 = 905,286 \rightarrow J_u$$

Перевірка:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min};$$

$$1427,82 + 2448,507 = 2971,042 + 905,286$$

Так як $J_{y_c} > J_{x_c}$, то максимальний момент буде відносно головної осі v , яка відхиляється від центральної осі Cy на кут α_0 .

1.6 Визначення моментів опору

$$W_u = J_{uvmax} \text{ см}^3;$$

$$W_v = J_{vu} \text{ см}^3,$$

де v_{max} , u_{max} – відстані від головних осей до найбільш віддалених точок перерізу, які можна відшукувати за допомогою трикутника та лінійки безпосередньо на кресленні.

$$u_{max} \approx 16,8 \text{ см}; v_{max} \approx 11,0 \text{ см},$$

Тоді

$$W_u = \frac{905,286}{11} = 82,29 \text{ см}^3;$$

$$W_v = \frac{2971,042}{16,8} = 176,8 \text{ см}^3.$$

2. РГР 2. ПОБУДОВА ЕПЮР ПОЗДОВЖНІХ СИЛ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗТЯГАННІ СХІДЧАСТОГО СТРИЖНЯ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Теоретичні відомості та приклади

Припустімо, що прямий стрижень великої довжини ℓ із сталим поперечним перерізом закріплено верхнім кінцем і навантажено силою P (Рис. 2.1). Визначимо, як змінюються поздовжні сили та напруження в поперечних перерізах стрижня з урахуванням власної ваги.

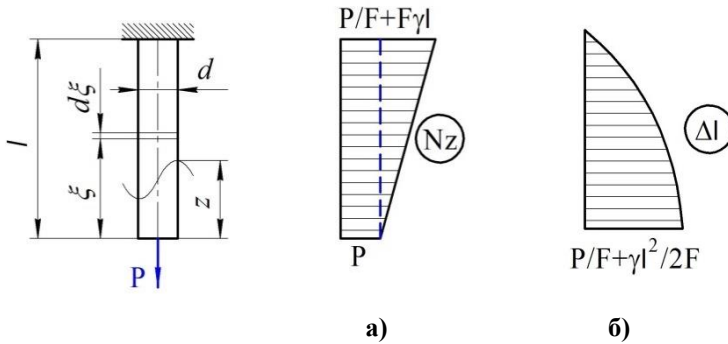


Рисунок 2.1 – Епюри поздовжніх сил і переміщень по довжині стрижня прямого стрижня з урахуванням власної ваги

Використовуючи метод перерізів, будуємо епюри N_z , $\Delta\ell$:

$$\sum P_{iz} = 0; \quad N_z - P - Fz\gamma = 0;$$

звідки

$$N_z = P + Fz\gamma,$$

де γ – питома вага матеріалу (для сталі $78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$); F – площа перерізу.

При $z = 0$ $N_z = P$; при $z = \ell$ $N_z = P + F\ell\gamma$.

Епюра поздовжніх зусиль зображена на рис. 2.1, а.

Мінімальне подовження стрижня буде у закріпленні $\Delta\ell = 0$.

У перерізі стрижня на найбільшій відстані ξ від вільного кінця

(Рис. 2.1, а) маємо $N_z = P + \gamma F \xi$. $\Delta \ell = \int_0^\ell \frac{N_z dz}{EF}$ при $F = \text{const}$, знаходимо:

$$\Delta \ell = \int_z^\ell \frac{N_z(\xi) d\xi}{EF} = \int_z^\ell \frac{(P + \gamma F \xi) d\xi}{EF}.$$

Подовження $\Delta \ell$ стрижня визначаємо, взявши $z = 0$:

$$\Delta \ell = \frac{P\ell}{EF} + \frac{\gamma \ell^2}{2EF}.$$

Перший додатак – це подовження стрижня від сили P , другий – від **власної ваги**. Епюру переміщень перерізів зображено на рис. 2.1, б).

РОЗРАХУНКОВА ЗАДАЧА

Умови задачі:

Сталевий стрижень знаходиться під дією поздовжньої сили P і власної ваги. Модуль пружності матеріалу стрижня $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, питома вага $\gamma = 78$ кН/м³. При виконанні задачі необхідно:

- використовуючи метод перерізів, побудувати епюру поздовжніх сил $N(z)$;
- побудувати епюру переміщень $\Delta \ell(z)$.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

№ рядка	Площа, $F \cdot 10^4 \text{ м}^2$	Довжина ділянок, м			Зосереджена сила P , кН
		a	b	c	
1	11	2,1	2,1	1,1	1,1
2	12	2,2	2,2	1,2	1,2
3	13	2,3	2,3	1,3	1,3
4	14	2,4	2,4	1,4	1,4
5	15	2,5	2,5	1,5	1,5
6	16	2,6	2,6	1,6	1,6
7	17	2,7	2,7	1,7	1,7
8	18	2,8	2,8	1,8	1,8

9	19	2,9	2,9	1,9	1,9
0	20	3,0	3,0	2,0	2,0

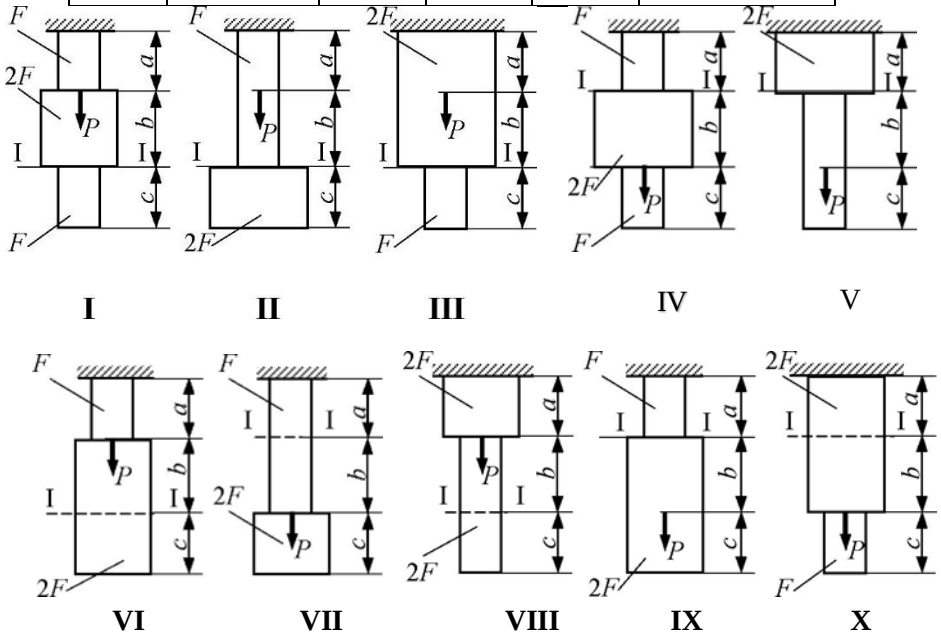


Рисунок 2.2 – Розрахункові схеми

Приклад розрахунку.

Вихідні данні:

$$P = 1,2 \text{ кН}; F = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; a = 2,2 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; c = 1,2 \text{ м};$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \gamma = 78 \text{ кН/м}^3.$$

Побудова епюри поздовжніх сил

За вихідними даними накреслимо розрахункову схему (Рис. 2.3, а), в певному масштабі, наприклад: довжина (a, b, c) – 1 м=10 мм; товщина (діаметр) стрижня, що відповідає площі, – $1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 1 \text{ мм}$.

Розпочинаючи будувати епюру, стрижень поділяють на силові ділянки. Границями ділянок навантаження є місця (точки) прикладення зовнішніх сил та зміна розмірів поперечного перерізу стрижня.

В нашому випадку маємо три ділянки: AB, BC та CD (Рис. 2.3, а). Поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтягання, та від'ємною, якщо вона спричинює стискання.

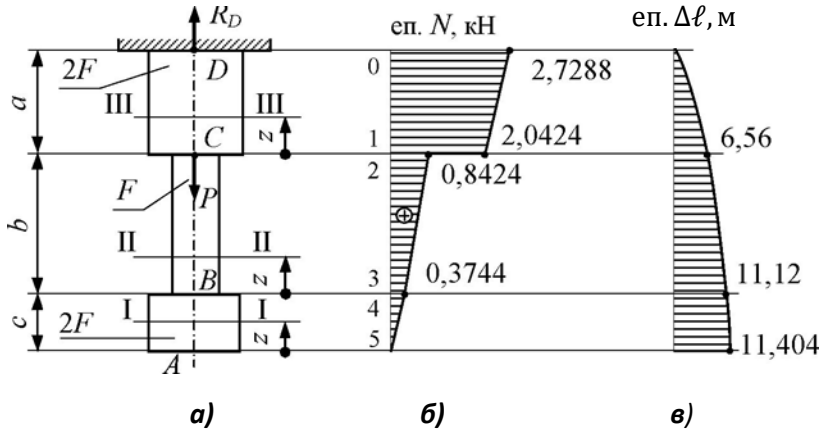


Рисунок 2.3 — Розрахункова схема і епюри поздовжніх сил та переміщень

Поздовжню силу в довільному перерізі стрижня знаходимо з рівняння рівноваги, яке записуємо для відсіченої частини у вигляді

$$N + \sum P_z = 0,$$

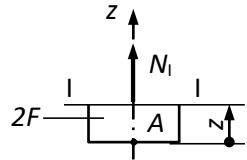
де $\sum P_z$ – алгебраїчна сума проекції на вісь стрижня всіх зовнішніх сил, які діють по одну сторону від перерізу.

Переріз I-I $0 \leq z \leq c$

$$N_I - \gamma \cdot 2F \cdot z = 0; \quad N_I = \gamma \cdot 2F \cdot z.$$

Це рівняння прямої лінії, нахиленої до осі стрижня. При $z = 0$, в точці А або 5 (Рис. 2.3б):

$$N_{(A)} = N_5 = 0; \quad \text{при } z = c, \text{ в точці В (4):}$$



$$N_{(B)} = N_4 = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c = 78 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 = 0,3744 \text{ кН}$$

$$= 78 \cdot 11 \cdot 10 - 4 \cdot 1,1 = 0,094 \text{ кН.}$$

Переріз II-II: $0 \leq z \leq c$

$$N_{(II)} - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c - \gamma \cdot F \cdot z = 0;$$

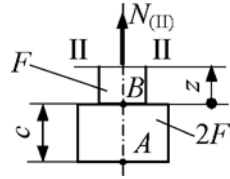
$$N_{(II)} = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c + \gamma \cdot F \cdot z.$$

При $z = 0$, в точці В або 3:

$$N_{(B)} = N_3 = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c = 0,3744 \text{ кН};$$

при $z = b$, в точці С або 2:

$$N_{(C)} = N_2 = 0,3744 + 78 \cdot 20 \cdot 10 - 4 \cdot 3 = 0,8424 \text{ кН}.$$

**Переріз III-III: $0 \leq z \leq a$**

$$N_{(III)} - P - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c - \gamma \cdot F \cdot b - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z = 0;$$

$$N_{(III)} = P + \gamma \cdot F(2 \cdot c + b) + \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z.$$

При $z = 0$, в точці С або 1:

$$N_{(C)} = N_1 = P + \gamma \cdot F(2 \cdot c + b) =$$

$$= 1,2 + 0,8424 = 2,0424 \text{ кН};$$

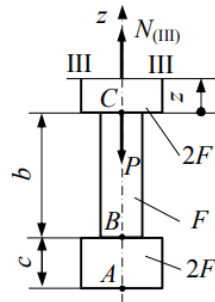
при $z = a$, в точці D або 0:

$$N_{(D)} = N_0 =$$

$$P + \gamma \cdot F(2 \cdot c + b) + \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot a =$$

$$= 2,0424 + 78 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10 - 4 \cdot 2,2 =$$

$$= 2,7288 \text{ кН}.$$

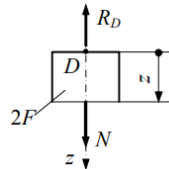


Застосовуючи метод перерізів, можна було б на ділянці CD залишити верхню частину стрижня, тобто довільну координату z відрахувати від точки D униз. В цьому випадку необхідно спочатку визначити реакцію R_D в закріпленні стрижня, так як ця реакція відноситься до числа зовнішніх сил, які діють на залишену (верхню) частину стрижня.

Поздовжнє зусилля $N_{(D)} = N_0$ є найбільше і дорівнює реакції RD в закріпленні стрижня. За результатами розрахунку будемо графік, що показує, як змінюється поздовжня сила по довжині стрижня.

Для цього проведемо вертикальну лінію паралельно осі стрижня і відкладемо в довільно вибраному масштабі (наприклад, $1 \text{ кН} = 10 \text{ мм}$) значення поздовжніх сил в точках 5, 4, 3, 2, 1, 0. Додатну силу N (розтягання) відкладаємо вправо від вертикальної лінії. Побудований графік називають **епюрою поздовжніх сил** (Рис. 2.3, б).

Епюру прийнято **штрихувати перпендикулярно** осі стрижня.



Кожна ордината епюри в даному масштабі виражає значення поздовжньої сили у відповідному (розташованому проти нього) поперечному перерізі стрижня.

На всіх ділянках маємо рівняння похилих до осі стрижня прямих. Проте, оскільки площі поперечних перерізів на ділянках різні, нахил епюри на ділянках AB та CD неоднаковий, а на ділянках AB і CD похилі прямі повинні бути паралельними (Рис. 2.3, б).

В точках дії зосереджених зовнішніх сил на епюрі мають бути “стрибки”, величина яких дорівнює величині діючої сили (точка C , Рис. 2.3, б).

Побудова епюри переміщень

В загальному вигляді переміщення при розтяганні (стисканні) визначаються за формулою:

$$\Delta \ell = \int_{\ell} \frac{N_{(z)} dz}{EF}.$$

Якщо стрижень має декілька силових ділянок, то ця формула набуває вигляду:

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i = \sum_{i=1}^n \ell_i \frac{N_{zi}}{EF_i}, \text{ де } EF_i - \text{жорсткість поперечного перерізу стрижня на } i\text{-й ділянці;}$$

ℓ_i – довжина i -ї ділянки; n – кількість ділянок.

Зважаючи на те, що в межах кожної ділянки жорсткість поперечного перерізу є постійною, а інтегрування функції $N_{(z)}$ зводиться до обчислення площі епюри поздовжніх сил на кожній

д

і

л

я

і

д

і

,

ж

ф

ф

ф

с

ф

Для побудови епюри переміщень на i -й ділянці необхідно використати граничними умовами, тобто визначити такий переріз, де переміщення відоме. У нашому прикладі це є жорстке закріплення, точка D (Рис.2.3а)

В

Далі визначимо переміщення в позначених точках C, B, A .

$$\begin{aligned}\Delta\ell_{(C)} &= \Delta\ell_{(D)} + \frac{\omega_{N(DC)}}{E \cdot 2F} = 0 + \frac{0,5(N_0 + N_1) \cdot a}{E \cdot 2F} \\ &= \frac{0,5(2,7288 + 2,0424) \cdot 10^3 \cdot 2,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 6,5604 \cdot 10^{-6} \text{ м.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\ell_{(B)} &= \Delta\ell_{(C)} + \frac{\omega_{N(CB)}}{E \cdot F} = 6,5604 \cdot 10^{-6} + \frac{0,5(N_2 + N_3) \cdot b}{E \cdot F} = \\ &= 6,5604 + \frac{0,5(0,8424 + 0,3744) \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = \\ &= (6,5604 + 4,563) \cdot 10^{-6} = 11,123 \cdot 10^{-6} \text{ м;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\ell_{(A)} &= \Delta\ell_{(C)} + \frac{\omega_{N(BA)}}{E \cdot 2F} = 11,123 \cdot 10^{-6} + \frac{0,5(N_4 + N_5) \cdot c}{E \cdot 2F} = \\ &= 11,123 \cdot 10^{-6} + \frac{0,5(0,3744 + 0) \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = \\ &= \end{aligned}$$

$$\cdot 10^{-6} = 11,404 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

За результатами розрахунку будемо епюру переміщень, яка змінюється по довжині стрижня за законом квадратичної параболи. Для зручності побудови епюри переміщень переведемо метри в мікрометри, тобто визначені переміщення помножимо на 10^6 . Тоді: $\Delta\ell_{(C)} = 6,5604$ мкм; $\Delta\ell_{(B)} = 11,123$ мкм; $\Delta\ell_{(A)} = 11,404$ мкм. За результатами розрахунку будемо епюру переміщень, які змінюються по довжині стрижня за законом **квадратичної параболи** (Рис.2.3в). Масштаб переміщень приймаємо, наприклад: $1 \text{ мкм} = 1 \text{ мм}$.

3. РГР 3. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Теоретичні відомості та приклади Правила для перевірки побудови епюр

1. На ділянці, де немає розподіленого навантаження, лінія епюри паралельна осі стержня.

2. На ділянці, де діє розподілене навантаження епюри крутних моментів представляє собою пряму, нахилену до осі стержня.

3. В перерізі, де діє зосереджений момент на епюрі крутних моментів буде розрив (скачок) рівний за величиною цьому моменту.

Приклад 3.1. Розглянемо вал, який скручується зосередженими моментами $M_1 = m\ell$ і $M_2 = 4m\ell$, та розподіленим моментом інтенсивністю $3m$ на довжині 2ℓ (Рис. 3.1, а). Побудувати епюри крутильних моментів та кутів закручування.

I ділянка $0 \leq z_1 \leq 2\ell$

$$\sum m_{kz} = 0;$$

$$-M_1 + 3mz_1 + M_{кр1} = 0.$$

$$M_{кр1} = M_1 - 3mz_1 = m\ell - 3mz_1$$

при $z_1 = 0$ $M_{кр1} = m\ell$; при $z_1 = 2\ell$ $M_{кр1} = -5m\ell$.

II ділянка $0 \leq z_2 \leq \ell$

$$\sum m_{kz} = 0; \quad -M_1 + 6m\ell - M_2 + M_{кр2} = 0.$$

$$M_{кр2} = M_1 + M_2 - 6m\ell = m\ell + 4m\ell - 6m\ell = -m\ell$$

(при будь-якому z_2).

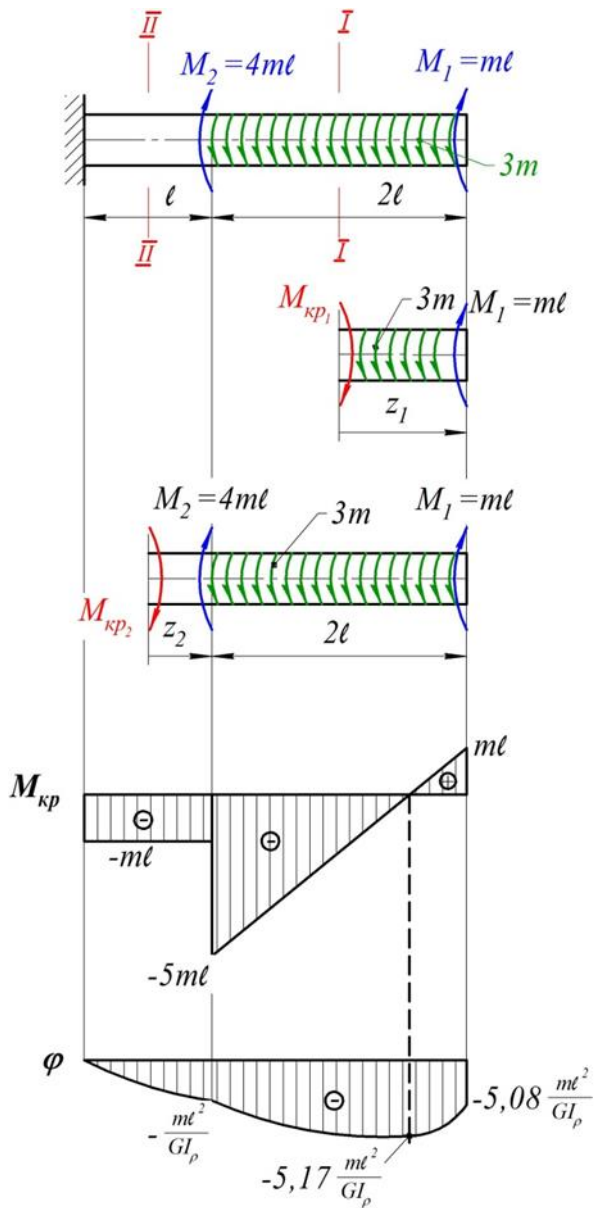


Рисунок 3.1 – Епюра крутильних моментів та кутів закручування

Приклад 3.2

В умовах прикладу 3.1 побудуємо епюру кутів закручування φ . Епюру φ починаємо будувати з закріплення, де $\varphi = 0$.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0. \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \int_0^{\ell} \frac{M_{1\text{кр}} dz}{GJ_\rho} = 0 - \frac{m\ell^2}{GJ_\rho} = -\frac{m\ell^2}{GJ_\rho}. \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + \int_0^{2\ell} \frac{M_{2\text{кр}} dz}{GJ_\rho}.\end{aligned}$$

Тут діє розподілене навантаження, тому епюра кутів закручування є **кривою другого порядку (парабола)**. Епюра крутильних моментів перетинає нульову лінію (червона лінія), тому парабола буде мати **екстремум**, який необхідно знайти. Для цього запишемо алгебраїчну суму кутів закручування з урахуванням їх напрямку:

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= -\frac{m\ell^2}{GJ_\rho} + \left(-\frac{1 \cdot 5m\ell \cdot \frac{5}{6}2\ell}{2GJ_\rho} + \frac{1 \cdot m\ell \cdot \frac{1}{6}2\ell}{2GJ_\rho} \right) = \\ &= -\frac{61m\ell^2}{12GJ_\rho} = -5,08 \frac{m\ell^2}{GJ_\rho}.\end{aligned}$$

Для **визначення положення екстремуму** можна скористатися двома методами.

За першим методом поділимо епюру крутильних моментів на два трикутника та розрахуємо кути повороту по стандартній методиці. Або рівняння крутильного моменту прирівнюємо до нуля (перетин нульової лінії). З отриманого рівняння знайдемо значення z та розрахуємо кут повороту для цього значення. Епюра φ показана на Рис.3.1.

Епюри кутів закручування будують для того, щоб визначити найбільший абсолютний кут закручування φ або **найбільший відносний кут закручування θ** . Тоді умова жорсткості при крученні має вигляд:

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta].$$

Якщо

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32},$$

то діаметр із умов жорсткості буде

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр\ max}}{\pi[\theta]\sigma}}.$$

Визначивши діаметр із умов міцності та із умов жорсткості призначають більший діаметр.

$[\theta]$ – **допустимий кут закручування**. Вибирається із умов навантаження:

- при статичному навантаженні $[\theta] = 0,3^\circ$ на кожний метр довжини вала;

- при змінних навантаженнях $[\theta] = 0,25^\circ/\text{м}$;

- при ударних навантаженнях $[\theta] = 0,15^\circ/\text{м}$.

В формулі :

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta] \frac{\pi}{180}$$

відносний кут закручування θ виражається в радіанах. Щоб визначити $[\theta]$, який заданий в градусній величині, в радіанній, потрібно домножити на $\pi/180^\circ$.

РОЗРАХУНКОВА ЗАДАЧА

Умови задачі:

Сталевий вал навантажений трьома крутильними моментами M_1, M_2, M_3 та попередньо невідомим моментом X .

Необхідно:

а) визначити значення моменту X при умові, що кут закручування правого кінця вала дорівнює нулю;

б) з урахуванням визначеного моменту X побудувати епюру крутильних моментів;

в) за умовою міцності визначити діаметр валу і округлити його до **найближчого більшого значення** стандартного ряду діаметрів

(ГОСТ 6636-69) в межах розбіжності по напруженням 5%, при округленні дотримуватись діаметрів, кратних числу 5;

г) побудувати епюру кутів закручування;

д) визначити найбільший відносний кут закручування.

Модуль пружності другого роду прийняти рівним $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 3.2 та в таблиці 3.1.

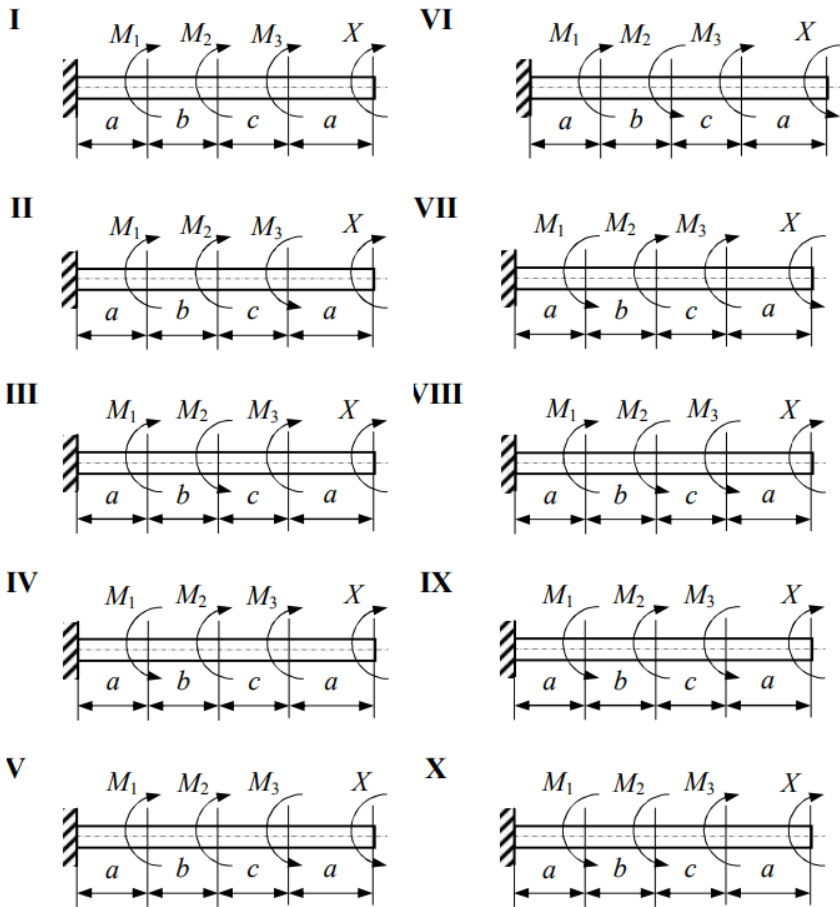


Рисунок 3.2 – Розрахункові схеми

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

№ рядка	Довжина, м			Моменти, кН·м			[τ], МПа
	a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	1,1	1,5	2,0	1,1	1,6	2,0	35
2	1,2	1,6	1,9	1,2	1,7	1,9	40
3	1,3	1,7	1,8	1,3	1,8	1,8	45
4	1,4	1,8	1,7	1,4	1,9	1,7	50
5	1,5	1,9	2,6	1,5	2,0	1,6	55
6	1,6	2,0	1,5	1,6	1,1	1,5	60
7	1,7	1,1	1,4	1,7	1,2	1,4	65
8	1,8	1,2	1,3	1,8	1,3	1,3	70
9	1,9	1,3	1,2	1,9	1,4	1,2	75
0	2,0	1,4	1,1	2,0	1,5	1,1	80

Приклад розрахунку.

Вихідні дані: $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 0,5$ м; $M_1 = 2,5$ кНм;

$M_2 = 2,0$ кНм; $M_3 = 3,0$ кНм; $[\tau] = 70$ МПа.

За відповідним варіантом накреслимо в певному масштабі розрахункову схему (Рис.3.3а).

1. Для **визначення невідомого моменту X** запишемо рівняння, яке задовільняє умові, що сума кутів закручування правого кінця вала (точка Е, Рис.3.3 а) від трьох моментів ($\varphi_{(E),\Sigma M}$) і моменту $X_{\varphi(E),X}$ () дорівнює нулю, тобто:

$$\varphi_{(E),\Sigma M} + \varphi_{(E),X} = 0.$$

За законом Р. Гука при крученні залежність між крутильним моментом на ділянці вала довжиною ℓ і кутом закручування одного кінцевого перерізу цієї ділянки відносно іншого має такий вид:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{GJ_p},$$

де ℓ - довжина вала (або його ділянки), що закручується;

GJ_p - жорсткість поперечного перерізу при крученні;

J_p – полярний момент інерції, для круглого перерізу $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Приймаємо заданий напрямок моменту X додатним. Тоді запишемо рівняння φ в розгорнутому вигляді:

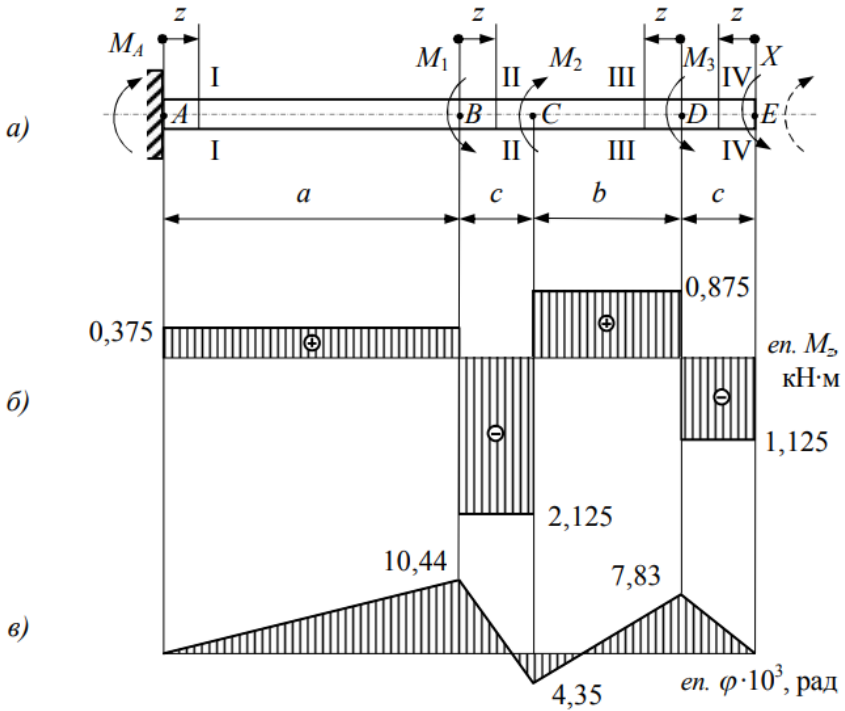


Рисунок 3.3 – Розрахункова схема і епюри крутильних моментів та кутів закручування

$$\frac{X \cdot (a + b + 2c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_3 \cdot (a + b + c)}{G \cdot J_p} - \frac{M_2 \cdot (a + c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot J_p} = 0.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} X &= \frac{M_2 \cdot (a + c) - M_3 \cdot (a + b + c) - M_1 \cdot a}{a + b + 2c} = \\ &= \frac{3 \cdot (2 + 0,5) - 2 \cdot (2 + 1 + 0,5) - 2,5 \cdot 2}{2 + 1 + 2 \cdot 0,5} = -1,125 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Значення X виявилося від'ємним, а це свідчить про те, що дійсний напрямок дії моменту X є протилежним тому, який було попередньо

зображено на рисунку суцільною дуговою стрілкою. Показуємо на рисунку **пунктирною дуговою стрілкою дійсний напрямок моменту X** та в подальших розрахунках символом X будемо позначати модуль цього моменту. Тепер визначимо реактивний момент в закріпленні (M_A), для чого записуємо рівняння рівноваги крутильних моментів для всього вала відносно його вісі:

$$\sum M_{кр} = 0; \quad M_A - M_1 + M_2 - M_3 + X = 0;$$

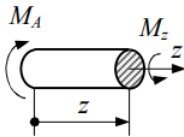
$$M_A = M_1 - M_2 + M_3 - X = 2,5 - 3 + 2 - 1,125 = 0,375 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знак плюс вказує на те, що попередній напрям M_A співпадає з дійсним.

2. Побудова епюри крутильних моментів M_z

Розрахункова схема має чотири ділянки: AB, BC, CD, ED . Крутильний момент в перерізі вала будемо вважати **додатним, якщо він діє проти годинникової стрілки**, якщо дивитись на переріз з боку уявно відкинутої частини вала.

Розрахунки рекомендовано вести з одного краю, наприклад, зліва направо. Але в прикладі покажемо як це робити з обох боків. Отже, якщо **починаємо з лівого краю**.

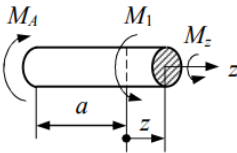


Ділянка AB (переріз I-I): $0 \leq z \leq a$

$$M_z - M_A = 0. \text{ Звідси } M_z = M_A = 0,375 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Крутильний момент додатний. Епюра M_z окреслена **прямою, паралельною вісі вала**.

Ділянка BC (переріз II-II): $0 < z < c$

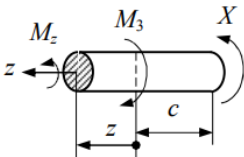


$$M_z - M_A + M_1 = 0;$$

$$M_z = M_A - M_1 = 0,375 - 2,5 = -2,125 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const}.$$

Крутильний момент на ділянці BC від'ємний.

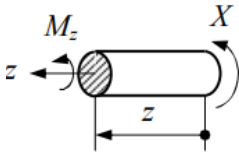
В такому порядку можна продовжувати рахувати моменти на ділянках, а можна решту моментів обраховувати з правого краю.



Ділянка CD (переріз III-III): $0 \leq z \leq b$

$$M_z - M_3 + X = 0;$$

$$M_z = M_3 - X = 2 - 1,125 = 0,875 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const} \quad - \text{ крутильний момент на ділянці CD додатний.}$$



Ділянка DE (переріз IV–IV): $0 < z < c$
 $M_z + X = 0$; $M_z = -X = -1,125 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const}$ –
 крутильний момент на ділянці DE від’ємний.

Остаточна епюра крутильних моментів показана на рис.3.36.
Обов’язково потрібно перевірити правильність побудованої епюри
 згідно правил (див. теоретичні відомості до РГР).

3. Визначення діаметру вала.

Аналіз епюри M_z дає можливість виявити **небезпечний переріз**, де крутильний момент за модулем є **найбільший**, тобто максимальний. Для нашого прикладу це є ділянка BC, де $M_{z\max} = |2,125| \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Умову міцності при крученні записуємо за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_\rho} \leq [\tau],$$

де W_ρ – полярний момент опору для круглого поперечного перерізу:

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Якщо підставимо всі значення до умови міцності, то можна вивести формулу діаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{z\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,125 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,05368 \text{ (м)}.$$

Приймаємо стандартний діаметр $d_{\text{ст}} = 55 \text{ мм}$.

4. Побудова епюри кутів закручування.

Кут φ закручування вала, який складається з n ділянок, визначаємо за відомою формулою:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_z dz}{G \cdot J_p},$$

де l_i – довжина i -ї ділянки.

Так як на кожній ділянці жорсткість поперечного перерізу вала є величина стала ($GJ_p = \text{const}$), то процедуру інтегрування можна замінити процедурою обчислення площі епюри M_z на кожній ділянці, тобто

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \sum_{i=1}^n \omega_{M_z(i)}$$

де ω_{M_z} - площа епюри крутного моменту M_z на i -й ділянці, яка у нашому прикладі має форму прямокутника.

Починати обчислення необхідно з тієї точки (перерізу), де кут закручування відомий із умови закріплення (граничні умови). В нашому прикладі це може бути точка А (жорстке закріплення, $\varphi_{(A)} = 0$) або точка Е (за умовою задачі $\varphi_{(E)} = 0$). Спочатку визначимо жорсткість поперечного перерізу вала:

$$G \cdot J_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,055^4}{32} = 0,07183 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Тепер визначимо послідовно кут закручування в точках B, C, D, E , починаючи від жорсткого закріплення.

$$\varphi_{(B)} = \varphi_{(A)} + \frac{\omega_{M_z(AB)}}{G \cdot J_p} = 0 + \frac{0,375 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,07183 \cdot 10^6} = 10,44 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(C)} &= \varphi_{(B)} + \frac{\omega_{M_z(BC)}}{G \cdot J_p} = 10,44 \cdot 10^{-3} + \frac{-2,125 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,07183 \cdot 10^6} = \\ &= -4,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(D)} &= \varphi_{(C)} + \frac{\omega_{M_z(CD)}}{G \cdot J_p} = -4,35 \cdot 10^{-3} + \frac{0,875 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,07183 \cdot 10^6} = \\ &= 7,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \end{aligned}$$

$$\varphi_{(E)} = \varphi_{(D)} + \frac{\omega_{M_z(DE)}}{G \cdot J_p} = 7,83 \cdot 10^{-3} + \frac{-1,125 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,07183 \cdot 10^6} \cong 0 \text{ рад},$$

За результатами обчислення будемо епюру кутів закручування (рис.3.3в), яка окреслена прямими, нахиленими до вісі вала.

5. Визначення максимального відносного кута закручування θ_{max} .

$$\theta_{max} = \frac{M_{zmax}}{GJ_p} = \left| \frac{2,125 \cdot 10^3}{0,07183 \cdot 10^6} \right| = 0,0296 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

4. РГР 4. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ ПРЯМИХ БАЛОК

Теоретичні відомості та приклади

Порядок побудови епюри внутрішніх зусиль розглянемо на прикладах.

Правило знаків для поперечної сили та згинального моменту.

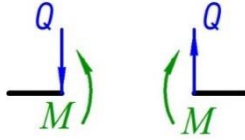


Рисунок 4.1 – Правило знаків при згинанні

Додатними вважаються напрямки коли:

- поперечна сила Q_y повертає відрізану частину балки за годинниковою стрілкою;
- згинальний момент M_z діє так, що верхні волокна балки укорочуються, а нижні подовжуються.

Приклад 4.1

Балка AB (Рис. 4.2) навантажена в точці C зосередженою силою P . Побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Побудову епюр починають з визначення реакцій опор.

Порядок визначення реакцій опор:

1. **Обираємо систему координат.** Віссю x призначаємо вісь яка збігається з віссю балки.

2. Вибирають напрямки невідомих реакцій і складають рівняння статки:

$$1) \sum M_{kA} = 0; \quad 2) \sum M_{kB} = 0;$$

Так як на балку діє тільки сила $\bar{P} \parallel y$, то $\sum P_{kx} = 0$.

$$1) \quad \sum M_{kA} = 0; \quad R_B 3\ell - P\ell = 0; \quad R_B = \frac{P\ell}{3\ell} = \frac{P}{3}.$$

$$2) \quad \sum M_{kB} = 0; \quad -R_A 3\ell + P2\ell = 0; \quad R_A = \frac{2P\ell}{3\ell} = \frac{2}{3}P.$$

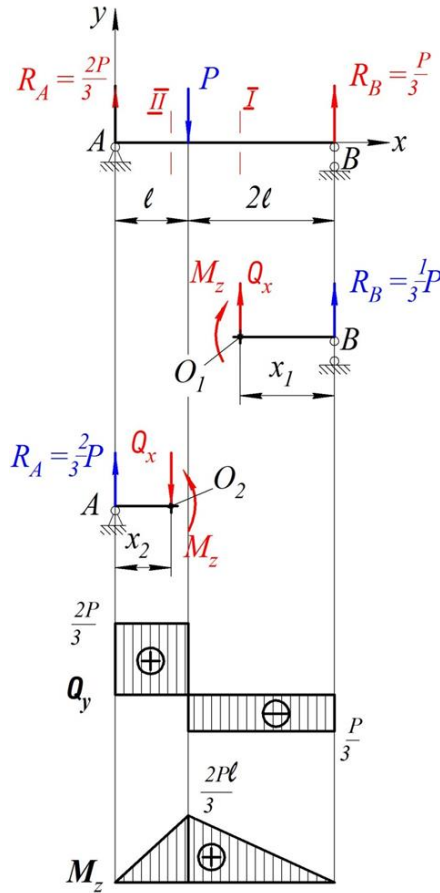


Рисунок 4.2 - Побудова епюр внутрішніх зусиль

Для **перевірки** вірності визначення реакцій запишемо рівняння:

$$\sum P_{ky} = 0; R_A - P + R_B = 0; \quad \frac{2}{3}P - P + \frac{1}{3}P = 0.$$

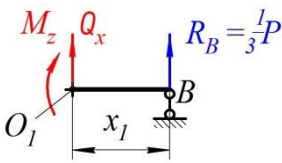
Реакції визначені вірно.

Поперечна сила Q_y в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх навантажень (крім зосереджених моментів), діючих по один бік від перерізу, що розглядається.

Згинальний момент M_z дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх навантажень відносно точки перерізу, що діють по один бік перерізу.

Після визначення і перевірки реакцій опор, використовуємо **метод перерізів**. Розділяють балку на ділянки визначають внутрішні зусилля Q_y і M_z по ділянках.

I ділянка $0 \leq x_1 \leq 2\ell$



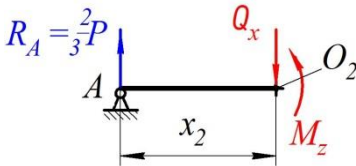
$$\sum P_{ky} = 0; Q_y + R_B = 0;$$

$$Q_y = -R_B = -\frac{2}{3}P.$$

$$\sum M_{kO_1} = 0; -M_z + R_B \cdot x_1 = 0; M_z = R_B \cdot x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_z = 0; \quad \text{при } x_1 = 2\ell \quad M_z = \frac{2}{3}P \cdot 2\ell = \frac{4}{3}P\ell.$$

II ділянка $0 \leq x_2 \leq \ell$



$$\sum P_{ky} = 0; Q_y - R_A = 0;$$

$$Q_y = R_A = \frac{2}{3}P.$$

$$\sum M_{kO_2} = 0; M_z - R_A \cdot x_2 = 0;$$

$$M_z = R_A \cdot x_2 = \frac{2}{3}P \cdot x_2.$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_z = 0; \quad \text{при } x_2 = \ell \quad M_z = \frac{2}{3}P \cdot \ell.$$

По отриманим значенням будемо епюри Q_y і M_z (в довільно вибраному масштабі) (див. рис. 4.2).

Приклад 4.2

Консольна балка AB (Рис. 4.3) на ділянці CB навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , а в точці C зосередженим моментом $M = 2q\ell^2$. Побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Оскільки балка консольна, то починаємо з вільного кінця, визначаємо кількість силових ділянок і складаємо рівняння рівноваги для кожної з них. **Обираємо систему координат.** Віссю x призначаємо вісь яка збігається з віссю балки.

І ділянка

$$0 \leq x_1 \leq \ell$$

Замінюємо розподілене навантаження на ділянці x_1 , на рівнодійну. Вона дорівнює qx_1 і прикладена на середині ділянки x_1 .

$$\text{Тоді: } \sum P_{ky} = 0; \quad Q_y - qx_1 = 0; \quad Q_y = qx_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad Q_y = 0; \quad \text{при } x_1 = \ell \quad Q_y = q\ell.$$

$$\sum M_{kO_1} = 0; \quad -M_z - q \frac{x_1^2}{2} = 0;$$

$$M_z = -q \frac{x_1^2}{2}. \quad \text{При } x_1 = 0 \quad M_z = 0; \quad \text{при } x_1 = \ell \quad M_z = -q \frac{\ell^2}{2}.$$

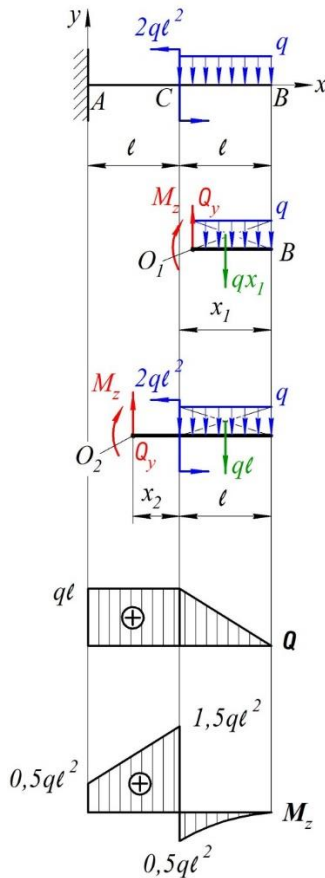
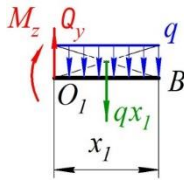


Рисунок 4.3 – Епюри внутрішніх зусиль в консольній балці

Треба зазначити, що оскільки x_1 в цьому рівнянні в квадраті, то епюра M_x буде мати вигляд квадратичної параболи. **Вигин параболи визначають за так званим «правилом парасольки»** (Рис. 4.4).

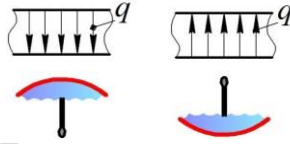
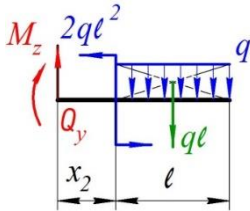


Рисунок 4.4 – Правило для визначення вигину параболи

II ділянка

$$0 \leq x_2 \leq \ell$$



На другій ділянці розподілене навантаження прикладене по довжині ℓ , рівнодійна цього навантаження дорівнює $q\ell$ і прикладена всередині I ділянки.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0;$$

$$Q_y - q\ell = 0; \quad Q_y = q\ell.$$

$$\sum M_{ko_2} = 0; \quad -M_z + 2q\ell^2 - q\ell\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) = 0;$$

$$M_z = 2q\ell^2 - q\ell\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right).$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_z = 2q\ell^2; \quad \text{при } x_2 = \ell \quad M_z = 0,5q\ell^2.$$

В цьому рівнянні x_2 входить в першому ступені, тому епюра буде лінійною.

По отриманим значенням Q_y і M_z будуємо епюри (див. рис. 4.3).

РОЗРАХУНКОВА ЗАДАЧА

Умови задачі:

Для заданих двох схем балок необхідно:

- написати вирази поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x для кожної ділянки в загальному вигляді;
- побудувати епюри Q_y та M_x ;
- знайти абсолютне значення максимального моменту $M_{x\max}$ і визначити:

– для схеми (а) – розміри дерев'яної балки прямокутного поперечного перерізу при співвідношеннях сторін прямокутника $h/b = 2$ і $[\sigma]=10$ МПа;

– для схеми (б) – розміри сталевий балки двотаврового перерізу і перевірити їх за максимальним дотичним напруженням при $[\sigma]=160$ МПа і $[\tau]=80$ МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на Рис.4.5 і в табл.4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані

№ рядка	ℓ_1	ℓ_2	Відстань в долях прогону			M , кН·м	P , кН	q , кН/м
	м		a_1/a	a_2/a	a_3/a			
1	1,1	6	1	9	1	20	10	10
2	1,2	7	2	8	2	10	9	20
3	1,3	3	3	7	3	3	8	9
4	1,4	4	4	6	4	4	7	8
5	1,5	5	5	5	5	5	6	7
6	1,6	6	6	6	1	6	5	6
7	1,7	7	7	7	2	7	4	5
8	1,8	8	8	8	3	8	3	4
9	1,9	9	9	9	4	9	10	3
0	2,0	10	2	10	5	10	20	10

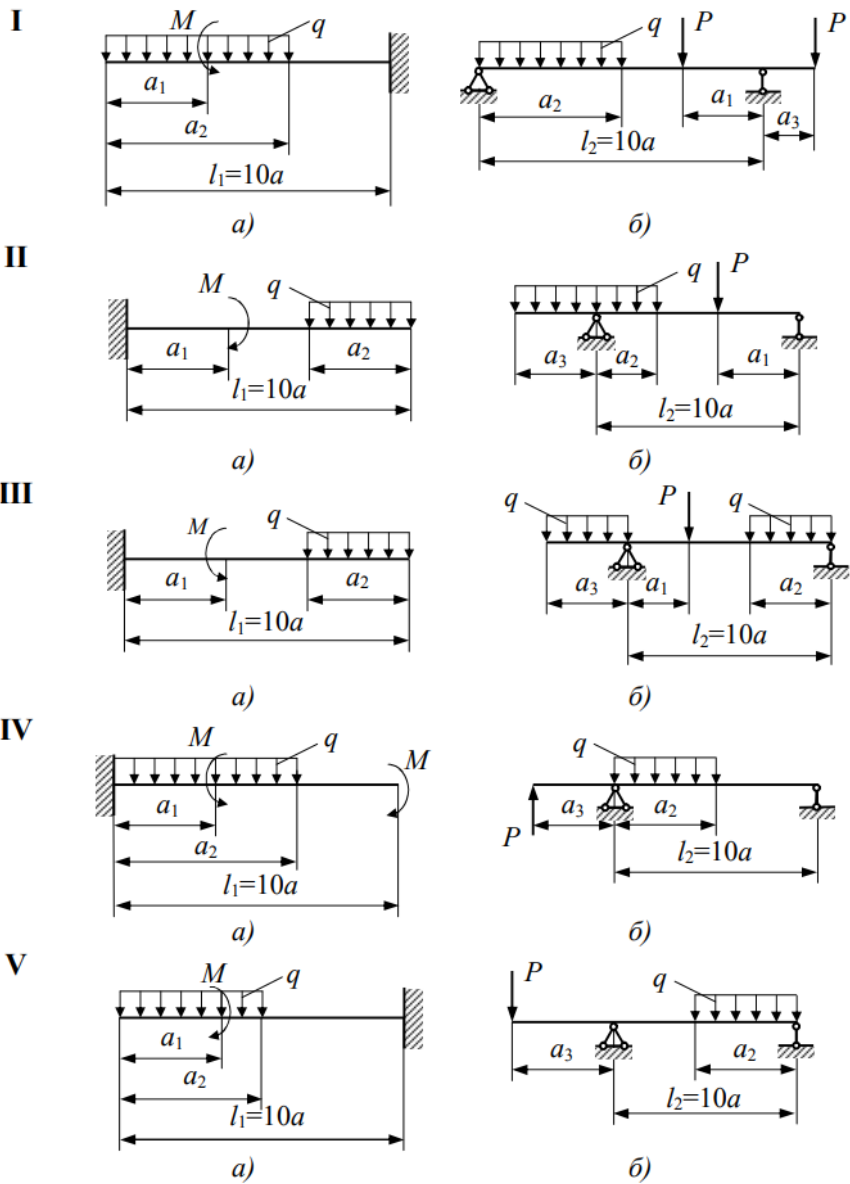
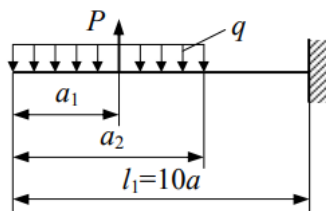
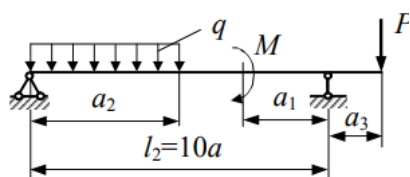


Рисунок 4.5 – Розрахункові схеми

VI

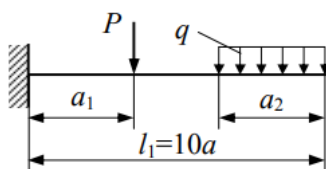


a)

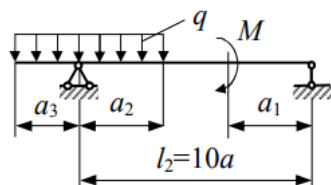


б)

VII

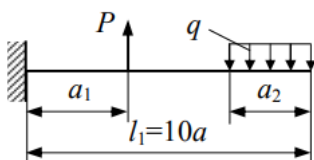


a)

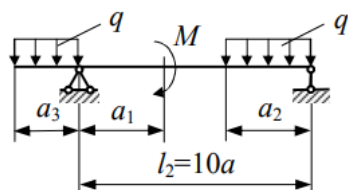


б)

VIII

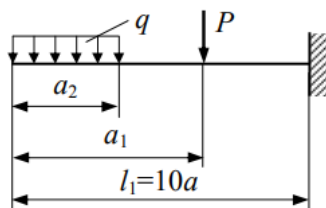


a)

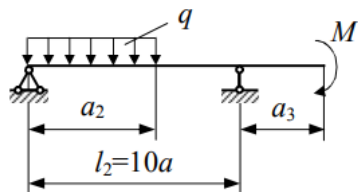


б)

IX

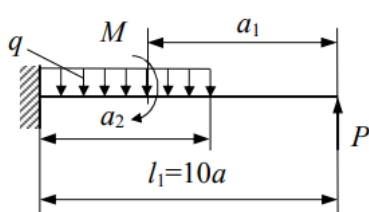


a)

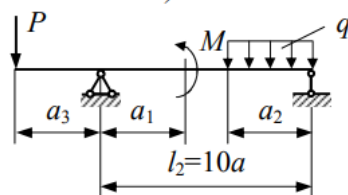


б)

X



a)



б)

Рисунок 4.6 – Розрахункові схеми

4.1. Приклад розрахунку консольної балки.

Дано:

$$\ell_1 = 1,2 \text{ м}; \frac{a_1}{a} = 2; \frac{a_2}{a} = 4;$$

$$M = 2,0 \text{ кН} \cdot \text{м}; P = 2,0 \text{ кН}; q = 6 \text{ кН/м}.$$

За відповідним варіантом накреслимо в масштабі розрахункову схему (Рис. 4.7 а), попередньо визначивши довжину a_2 , на якій діє розподілене навантаження, і відстань a_1 , яка визначає, де знаходиться точка прикладання зосередженого моменту.

Це обчислення виконуємо таким чином. За даними схеми відомо, що довжина консолі $\ell_1 = 10a = 1,2 \text{ м}$, звідки $a = 0,12 \text{ м}$. Тоді $a_1 = 2a = 0,24 \text{ м}$; $a_2 = 4a = 0,48 \text{ м}$.

Обираємо систему координат. Віссю z призначаємо вісь яка збігається з віссю балки.

Визначаємо реактивні силу R_A та момент M_A в жорсткому защемленні, для чого складаємо рівняння рівноваги всієї балки, прирівнявши до нуля суму проекцій усіх сил на вертикальний напрям і суму моментів всіх сил відносно точки A :

$$\sum P_{\text{верт}} = 0, R_A - q \cdot a_2 - P + 2P = 0,$$

звідки:

$$R_A = q \cdot a_2 - P = 6 \cdot 0,48 - 2 = 0,88 \text{ кН};$$

$$\sum M_{(A)} = 0, M_A + q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} + P \cdot a_2 + M - 2P \cdot \ell_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{звідки: } M_A &= -q \cdot \frac{a_2^2}{2} - P \cdot a_2 - M + 2P \cdot \ell_1 = \\ &= -6 \cdot 0,48^2 / 2 - 2 \cdot 0,48 - 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1,2 = 1,149 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Реакція R_A і момент M_A мають **додатний знак**, а це означає, що попередній їх **напрямок співпадає з дійсним**. **Горизонтальна складова сили реакції в жорсткому защемленні дорівнює нулю**, оскільки відсутні зовнішні сили, які проектувалися би на горизонтальний напрям.

Далі виділяємо на схемі три ділянки: AB, BC, CD (Рис. 4.7 а). Для побудови епюр поперечної сили та згинального моменту використовуємо **метод перерізів**. При цьому будемо дотримуватись наступних правил щодо визначення їх знаків:

– поперечна сила Q_y у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою;

– згинальний момент M_x у перерізі додатний, якщо він спричинює стискання у верхніх волокнах балки.

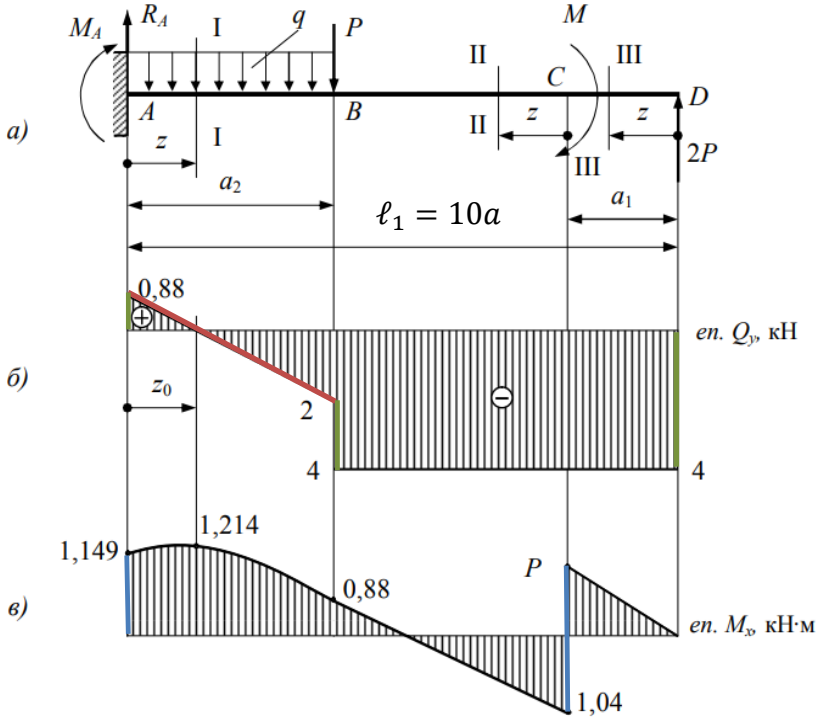
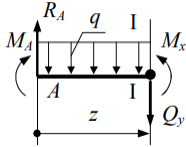


Рисунок 4.7 – Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

Ділянка AB (переріз I-I): $0 \leq z \leq a_2$.

Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої защемленим кінцем A і перерізом I-I. Запишемо рівняння рівноваги відсіченої частини в загальному вигляді:



$$Q_y + \sum P_y = 0; M_x + \sum M_{x_i} = 0,$$

де $\sum P_y$ – сума проекцій на вертикальний напрям усіх зовнішніх сил, які діють на відсічену частину;

$\sum M_{x_i}$ – сума моментів усіх зовнішніх сил відносно точки відрізу перерізу I-I.

$$R_A - q \cdot z - Q_y = 0, Q_y = R_A - q \cdot z,$$

це рівняння **прямої лінії, нахиленої** до вісі балки.

$$M_x - M_A - R_A \cdot z + \frac{qz^2}{2} = 0,$$

$$M_x = M_A + R_A \cdot z - \frac{qz^2}{2},$$

це рівняння **квадратичної параболи**.

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AB:

точка A ($z=0$): $Q_y = R_A = 0,88$ кН, $M_x = M_A = 1,149$ кНм;

точка B ($z=a_2 = 0,48$ м):

$$Q_y = R_A - q \cdot a_2 = 0,88 - 6 \cdot 0,48 = -2 \text{ кН},$$

$$M_x = M_A + R_A \cdot a_2 - \frac{qa_2^2}{2} =$$

$$= 1,149 + 0,88 \cdot 0,48 - 6 \cdot \frac{0,48^2}{2} = 0,88 \text{ кНм}.$$

Так як Q_y в межах ділянки AB змінює знак, то необхідно визначити координату z_0 точки перетину епюри Q_y з нейтральною (базовою) лінією, де згинальний момент має **екстремальне значення**. Для цього запишемо умову, що при $z = z_0$ $Q_y = 0$:

$$Q_y = R_A - q \cdot z_0 = 0,$$

звідси

$$z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{0,88}{6} = 0,147 \text{ м}.$$

точка екстремуму має момент:

$$M_x = M_A + R_A \cdot z_0 - \frac{qz_0^2}{2} =$$

$$= 1,149 + 0,88 \cdot 0,147 - \frac{6 \cdot 0,147^2}{2} = 1,214 \text{ кНм.}$$

Аналогічні обчислення виконуємо на інших ділянках.

Ділянка ВС (переріз II–II): $0 \leq z \leq \ell_1 - (a_1 + a_2) = 0,48 \text{ м.}$

$$\ell_1 - (a_1 + a_2) = 1,2 - (0,24 + 0,48) = 0,48 \text{ м.}$$

$$Q_y + 2P = 0, Q_y = -2P = -2 \cdot 2 = -4 \text{ кН.}$$

$$-M_x - M + 2P(z + a_1) = 0,$$

$$M_x = -M + 2P(z + a_1),$$

Точка С ($z=0$):

$$M_x = -M + 2P \cdot a_1 =$$

$$= -2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,24 = -1,04 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Точка В ($z = 0,48 \text{ м}$): $M_x = -2 + 2 \cdot 2 \cdot (0,48 + 0,24) = 0,88 \text{ кН} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}}$

Ділянка DC (переріз III–III): $0 \leq z \leq a_1$

$$Q_y + 2P = 0, Q_y = -2P = -2 \cdot 2 = -4 \text{ кН.}$$

$$-M_x + 2Pz = 0, M_x = 2Pz.$$

Точка D ($z=0$): $M_x = 0,$

Точка C ($z=a_1$):

$$M_x = 2P \cdot a_1 = 2 \cdot 2 \cdot 0,24 = 0,96 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

За результатами обчислення будуюмо в масштабі епюри

Q_y (Рис. 4.6,б) і M_x (Рис.4.6,в).

Обов'язково перевіряємо правильність побудови епюр:

– на ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q = 0$), епюра Q_y окреслена прямою, паралельною базі, а епюра M_x – нахиленою прямою;

– на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження ($q = \text{const}$), епюра Q_y обмежується нахиленою прямою, а епюра M_x – квадратичною параболою, при цьому, оскільки епюру M_x будуюмо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії навантаження q ;

– у перерізах, де Q_y змінює знак, на епюрі M_x екстремум;

– у перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили, на епюрі Q_y будуть стрибки на значення прикладених сил (точки А, В, D);

– у перерізах, де до балки прикладені **зосереджені моменти**, на епюрі M_x мають місце стрибки на значення цих моментів, а на епюрі Q_y ніяких змін не буде.

Після побудови епюр Q_y і M_x знаходимо небезпечний переріз там, де діє максимальний за абсолютною величиною згинальний момент. Для нашого прикладу: $M_{x,max} = 1,214 \text{ кН} \cdot \text{м}$, (точка екстремума). Тепер визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу балки із умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x,max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

де W_x – осьовий момент опору поперечного перерізу.

З умови міцності маємо:

$$W_x = \frac{M_{x,max}}{[\sigma]} = \frac{1,214 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 0,1214 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 121,4 \text{ см}^3.$$

Для прямокутного поперечного перерізу при $h/b=2$:

$$W_x = b \cdot h^2 / 6 = b \cdot (2b)^2 / 6 = 2b^3 / 3 = 121,4 \text{ см}^3,$$

звідки $b = \sqrt[3]{3W_x / 2} = \sqrt[3]{3 \cdot 121,4 / 2} = 5,668 \text{ см} \approx 6 \text{ см};$

$$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}.$$

4.2 Приклад розрахунку на міцність двохопорної балки

Дано:

$$\ell_2 = 10 \text{ м}; \frac{a_1}{a} = 4; \frac{a_2}{a} = 8; \frac{a_3}{a} = 2;$$

$$M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}; P = 15 \text{ кН}; q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Згідно з варіантом накреслимо в масштабі розрахункову схему (Рис. 4.8 а), визначивши при цьому довжини a_1, a_2, a_3 аналогічно прикладу 4.1.

$$\ell_2 = 10 \cdot a = 10 \text{ м}; a = 1 \text{ м}; a_1 = 4 \cdot a = 4 \text{ м};$$

$$a_2 = 8 \cdot a = 8 \text{ м}; a_3 = 2 \cdot a = 2 \text{ м}.$$

Перед побудовою епюр Q_y і M_x необхідно з рівнянь рівноваги всієї балки визначити сили реакції шарнірно-нерухомої R_A і шарнірно-рухомої R_B опор.

Прирівняємо до нуля суми моментів всіх сил, які діють на балку, відносно точок A та B :

$$\sum M_{(A)} = 0;$$

$$R_B \cdot \ell_2 - P \cdot a_2 - M - q \cdot a_2 \cdot a_2/2 + q \cdot a_3 \cdot a_3/2 = 0,$$

звідки:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{P \cdot a_2 + M + q \cdot \frac{a_2^2}{2} - q \cdot \frac{a_3^2}{2}}{\ell_2} = \\ &= \frac{15 \cdot 8 + 30 + 8 \cdot \frac{8^2}{2} - 8 \cdot \frac{2^2}{2}}{10} = 39 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum M_{(B)} = 0;$$

$$R_A \cdot \ell_2 - q(a_2 + a_3) \left[\frac{a_2 + a_3}{2} + \ell_2 - a_2 \right] + M - P(\ell_2 - a_2) = 0,$$

звідки:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{\left\{ q(a_2 + a_3) \left[\ell_2 - \frac{a_2 - a_3}{2} \right] + P(\ell_2 - a_2) - M \right\}}{\ell_2} = \\ &= \frac{\left\{ 8 \cdot (8 + 2) \left[10 - \frac{8 - 2}{2} \right] + 15 \cdot (10 - 8) - 30 \right\}}{10} = 56 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Правильність визначення реакцій перевіряємо, прирівнявши до нуля суму проекцій усіх сил, які діють на балку, на вертикальну вісь

$$y: \sum P_y = 0; R_A + R_B - q(a_2 + a_3) - P = 0;$$

$$56 + 39 - 8 \cdot (8 + 2) - 15 = 0.$$

Горизонтальна складова сили реакції шарнірно-нерухомої опори дорівнює нулю, оскільки відсутні зовнішні сили, які проектувалися би на горизонтальний напрям.

З розрахункової схеми видно, що балка **має чотири ділянки**: AK, AC, CD і BD . Для побудови епюр Q_y і M_x розглянемо по чергово ділянки і запишемо рівняння рівноваги для кожної відсіченої частини аналогічно попередньому прикладу.

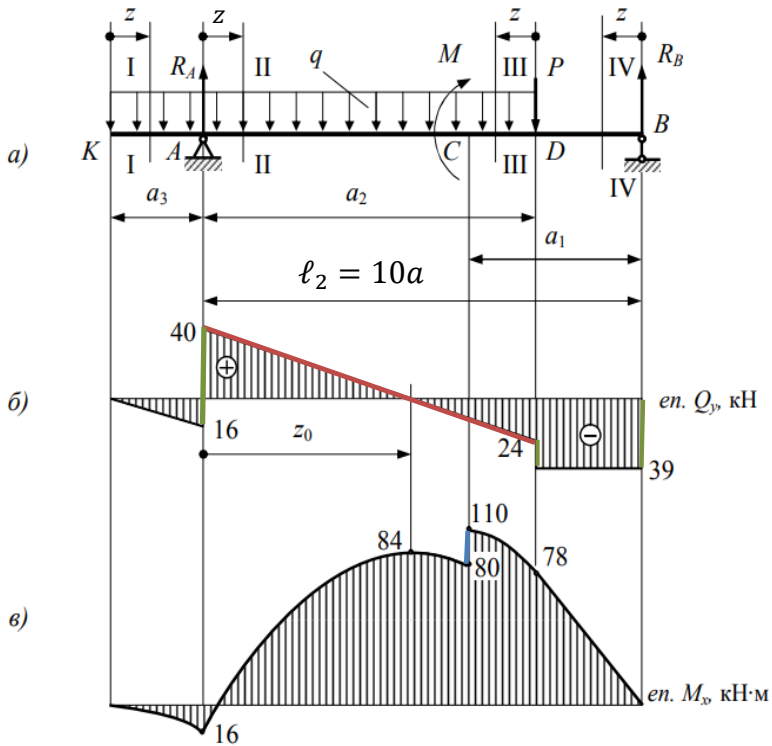
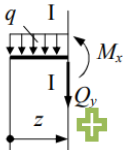


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

Ділянка АК (переріз I–I): $0 \leq z \leq a_3 = 2$ м

Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої вільним кінцем К і перерізом I–I.



$$Q_y + q \cdot z = 0; \quad Q_y = -q \cdot z; \quad M_x + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 0;$$

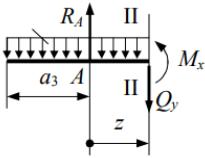
$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

При $z=0$ (точка К): $Q_y = 0$; $M_x = 0$.

При $z = a_3$ (точка А): $Q_y = -q \cdot a_3 = -8 \cdot 2 = -16$ кН;

$$M_x = -8 \cdot \frac{2^2}{2} = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка AC (переріз II–II): $0 \leq z \leq \ell_2 - a_1 = 6 \text{ м}$



Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої вільним кінцем K і перерізом II–II.

$$Q_y - R_A + q(a_3 + z) = 0;$$

$$M_x - R_A \cdot z + q(a_3 + z)^2 / 2 = 0,$$

звідки:

$$Q_y = R_A - q(a_3 + z);$$

$$M_x = R_A \cdot z - q(a_3 + z)^2 / 2.$$

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AC:

при $z = 0$ (точка A); $Q_y = R_A - q \cdot a_3 = 56 - 8 \cdot 2 = 40 \text{ кН}$;

$$M_x = -q \cdot \frac{a_3^2}{2} = -8 \cdot 2^2 / 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

при $z = \ell_2 - a_1 = 6 \text{ м}$ (точка C);

$$Q_y = R_A - q(a_3 + 6) = 56 - 8(2 + 6) = -8 \text{ кН};$$

$$M_x = R_A \cdot 6 - 8 \cdot (a_3 + 6)^2 / 2 = 56 \cdot 6 - 8 \cdot (2 + 6)^2 / 2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так як епюра Q_y перетинає базову лінію, на цій ділянці також буде екстремум.

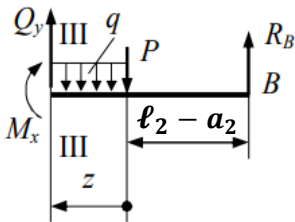
Визначимо координату z_0 точки перетину епюри Q_y з базовою лінією за умови: $z = z_0, Q_y = 0$, тобто:

$$Q_y = R_A - q(a_3 + z_0) = 0,$$

$$z_0 = \frac{R_A - qa_3}{q} = \frac{56 - 8 \cdot 2}{8} = 5 \text{ м}.$$

Тоді:

$$M_x = R_A \cdot z_0 - q(a_3 + z_0)^2 / 2 = 56 \cdot 5 - 8(2 + 5)^2 / 2 = 84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Ділянка DC (переріз III–III): $0 \leq z \leq$

$$a_1 + a_2 - \ell_2 = 2 \text{ м}$$

Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої опорою B і перерізом III–III.

$$Q_y + R_B - P - q \cdot z = 0;$$

$$Q_y = P - R_B + q \cdot z;$$

$$M_x - R_B(\ell_2 - a_2 + z) + P \cdot z + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 0;$$

$$M_x = R_B(\ell_2 - a_2 + z) - P \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

При $z = 0$ (точка D): $Q_y = P - R_B = 15 - 39 = -24$ кН,

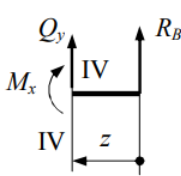
$$M_x = R_B(\ell_2 - a_2) = 39 \cdot (10 - 8) = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При $z = a_1 + a_2 - \ell_2 = 2$ м (точка C):

$$Q_y = -24 + 8 \cdot 2 = -8 \text{ кН},$$

$$M_x = R_B(\ell_2 - a_2 + 2) - P \cdot 2 - q \cdot \frac{2^2}{2} = 39 \cdot (10 - 8 + 2) - 15 \cdot 2 - 8 \cdot 4/2 = 110 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка BD (переріз IV–IV): $0 \leq z \leq \ell_2 - a_2 = 2$ м



Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої опорою B і перерізом IV–IV.

$Q_y + R_B = 0$; $Q_y = -R_B = -39 \text{ кН} = \text{const}$;

$M_x - R_B \cdot z = 0$; $M_x = R_B \cdot z$.

При $z = 0$ (точка B) $M_x = 0$.

При $z = \ell_2 - a_2 = 2$ м (точка D)

$M_x = R_B \cdot 2 = 39 \cdot 2 = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

За результатами обчислення будуємо епюри Q_y і M_x (Рис.4.7б, 4.7в).

Правила перевірки правильності побудови епюр наведені у попередньому прикладі.

Виберемо переріз двотаврової балки з умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{x,\max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Найбільший згинальний момент (небезпечний переріз) має місце в точці C з боку ділянки DC, тобто $M_{x,\max} = 110 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (Рис.4.7в).

З умови міцності:

$$W_x = \frac{M_{x,\max}}{[\sigma]} = \frac{110 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 688,5 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту вибираємо двотавр №36, для якого

$$W_{x,\text{таб}} = 743 \text{ см}^3, \text{ а } J_x = 13380 \text{ см}^4.$$

Тоді максимальні напруження в двотаврі будуть такими:

$$\sigma_{max} = \frac{110 \cdot 10^3}{0,743 \cdot 10^{-3}} = 148,05 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

що менше за допустиме напруження на 7,5%. Це відхилення відрізняється від норми, причому в сторону збільшення коефіцієнту запасу. Нормативна розбіжність між допустимими і максимальними напруженнями знаходиться в межах $\pm 5\%$.

Перевіримо міцність балки за дотичними напруженнями.

Умова міцності, згідно з формулою **Д.І. Журавського**, має вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{y_{max}} \cdot S_{x_{max}}}{J_x \cdot b_{(y)}} \leq [\tau].$$

Ширина перерізу по нейтральній лінії (товщина стінки двотавра) $b(y) = d = 0,75$ см, а статичний момент половини двотавра відносно вісі x $S_{x_{max}} = 423$ см³ (таблиця сортаменту, двотавр №36). Найбільша поперечна сила має місце в точці A з боку ділянки AC , тобто $Q_{y_{max}} = 40$ кН (Рис. 4.76). Підставивши числові значення в умову міцності, матимемо:

$$\tau_{max} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 16,86 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\tau_{max} = 16,86 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Отже, розміри перерізу балки задовольняють умови міцності як за нормальними, так і за дотичними напруженнями.

Список використаних джерел

1. Скребцов А.А., Штанько П.К., Омельченко О.С., Опір матеріалів. Навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 452 с. (<http://eir.zntu.edu.ua/handle/123456789/8969>).
2. Lecture notes on the discipline “Strength of materials” for students of engineering specialties of all forms of studying / Compiled by O. S. Omelchenko, A. A. Skrebtsov, P. K. Shtanko. — Zaporizhzhia : National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, 2024. — 308 p.
3. ДСТУ 3008:2015 — «Інформація та документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлювання»