

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ**

до контрольної роботи з дисципліни

“Вища математика”

(розділи: лінійна алгебра та аналітична геометрія,
диференційне числення функції однієї та багатьох змінних)

для студентів ФРЕТ та ФКНТ заочної форми навчання

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика” (розділи: лінійна алгебра та аналітична геометрія, диференційне числення функції однієї та багатьох змінних)” для студентів ФРЕТ та ФКНТ заочної форми навчання / Укл.: Нечипоренко Н.О., Щербина О.А., Коротунова О.В. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – 66с.

Укладачі:

Нечипоренко Н.О., доцент, к.ф.-м.н.
Щербина О.А., асистент
Коротунова О.В., доцент, к.т.н.

Рецензент:

Левада В.С., доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Нечипоренко Н.О.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 9 від 11.05.2016р.

Рекомендовано до видання
НМК факультету
радіоелектроніки та
телекомунікацій
Протокол №8 від 19.05.2016р.

ЗМІСТ

1. РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ.....	с. 4
2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	31
ЛІТЕРАТУРА.....	66

1. РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

ЗАВДАННЯ 1.1.

Задана система лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -10, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язати її: а) за формулами Крамера;
б) матричним методом;
в) методом Гауса.

Розв'язок

а) формули Крамера використовуються лише тоді, коли основна матриця системи квадратна й невинроджена. Формули мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Обчислимо основний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 52.$$

Оскільки цей визначник не дорівнює нулю, матриця системи невинроджена й тому система має єдиний розв'язок. Замінімо тепер перший стовпець визначника на стовпець вільних членів та обчислимо визначник

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -10 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -104.$$

Аналогічно обчислюють визначники:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & -10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 52; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 5 & -10 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 156.$$

За формулами Крамера дістанемо

$$x_1 = \frac{-104}{52} = -2; \quad x_2 = \frac{52}{52} = 1; \quad x_3 = \frac{156}{52} = 3.$$

б) для розв'язку системи матричним методом запишемо систему рівнянь у матричному вигляді $AX = B$, де A - основна матриця системи, B - матриця-стовпець вільних членів. Тоді розв'язком системи буде матриця-стовпець $X = A^{-1}B$.

Обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \{A_{ij}\}$, де A_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} матриці A та записані у транспонованому вигляді.

$\Delta = 52$ - основний визначник системи.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 19; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 15; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 14.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 17 & 19 & -11 \\ -9 & -7 & 15 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо розв'язок системи

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 17 & 19 & -11 \\ -9 & -7 & 15 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} -104 \\ 52 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Тобто $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

в) розв'яжемо систему методом Гауса. Для цього систему запишемо у вигляді розширеної матриці, де кожен рядок представляє собою задане рівняння:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & -3 & -10 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Виключимо x_1 з другого та третього рядків. Для цього помножимо на (-3) перше рівняння і додамо те, що отримали до другого рівняння. Потім знову перше рівняння помножимо на (-2) і додамо те, що отримали до третього рівняння. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 14 & -15 & -31 \\ 0 & 10 & -7 & -11 \end{array} \right).$$

Відніmemo третій рядок від другого та отриманий рядок поділимо на 4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 10 & -7 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 10 & -7 & -11 \end{array} \right).$$

Друге рівняння помножимо на (-10), та додамо до третього рівняння. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array} \right).$$

Цій розширеній матриці відповідає трикутна система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ x_2 - 2x_3 = -5; \\ 13x_3 = 39. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 3x_2 - 4x_3 = -2; \\ x_2 = -5 + 2x_3 = 1; \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow$$

Отже, початкова система рівнянь має розв'язок:

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3.$$

ЗАВДАННЯ 1.2.

Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

Розв'язок

Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

Застосуємо метод Гауса та здійснимо елементарні перетворення:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \text{II ряд} + \text{I ряд} \times (-3) \\ \text{III ряд} + \text{I ряд} \times (-5) \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Одержаній матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0, \\ 7y - 10z = 0. \end{cases}$$

Це система двох рівнянь з трьома невідомими, яка має нескінченну множину розв'язань. Переносимо невідому z у праву частину рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = -4z, \\ 7y = 10z. \end{cases}$$

Звідси дістанемо розв'язок системи:

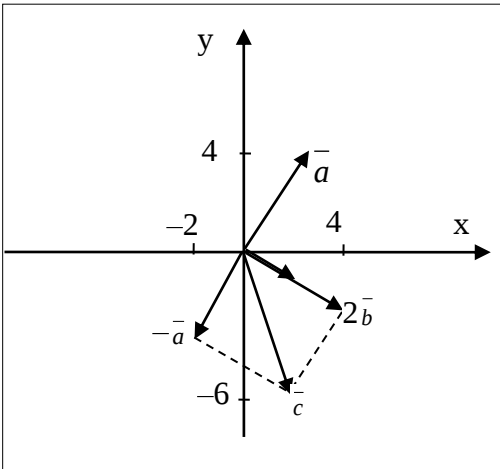
$$\begin{cases} y = \frac{10z}{7}, \\ x = -\frac{18z}{7}, \\ z - \text{будь яке число.} \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ 1.3.

По заданим векторам $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (2, -1)$ побудувати вектор $\vec{c} = -\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.

Розв'язок

Розглянемо прямокутну декартову систему координат на площині, побудуємо на ній вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Вектори $-\vec{a}$ та $2 \cdot \vec{b}$ мають координати $-\vec{a} = (-2, -4)$, $2 \cdot \vec{b} = (4, -2)$. Тоді сума $\vec{c}$ цих векторів зображується як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $-\vec{a}$ та $2 \cdot \vec{b}$, і має координати: $\vec{c} = (-2 + 4, -4 - 2) = (2, -6)$.

ЗАВДАННЯ 1.4.

Трикутник ABC задано координатами точок A(6,6,5), B(4,9,5), C(4,6,11). Знайти кут при вершині A.

Розв'язок

Кут між двома векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ знаходиться за формулою

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

де $(\vec{a}, \vec{b})$ – скалярний добуток векторів,

$|\vec{a}|, |\vec{b}|$ – довжина векторів $\vec{a}, \vec{b}$.

Вони обчислюються за формулами:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2};$$

В нашому прикладі:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (4 - 6, 9 - 6, 5 - 5) = (-2, 3, 0),$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (4 - 6, 6 - 6, 11 - 5) = (-2, 0, 6).$$

$$\cos \angle A = \frac{(-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 6}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{130}}.$$

ЗАВДАННЯ 1.5.

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2$.

Розв'язок

Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$. Знайдемо цей добуток, враховуючи властивості векторного добутку:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{p} - \vec{q}) \times (3\vec{p} + \vec{q}) = 3\vec{p} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{q} = \\ &= \vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{q} = 4\vec{p} \times \vec{q} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \end{aligned}$$

$$\text{де} \quad \vec{p} \times \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\vec{p} \wedge \vec{q}).$$

Отже, площа паралелограма дорівнює 24 (кв. од.)

ЗАВДАННЯ 1.6.

Задані координати вершин піраміди $A_1(1;0;2)$, $A_2(-1;3;1)$, $A_3(2;1;4)$, $A_4(1;2;0)$. Обчислити об'єм піраміди та її висоту, проведену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язок

Обчислимо координати векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, віднімаючи із координат кінця координати початку вектора.

$$\overline{A_1A_2} = (-2;3;-1), \quad \overline{A_1A_3} = (1;1;2), \quad \overline{A_1A_4} = (0;2;-2).$$

Об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ модуля мішаного добутку цих векторів. Знайдемо цей добуток:

$$(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}) \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 8 + 6 = 16.$$

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

З іншої сторони $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \times H$. З цієї формули отримаємо, що $H = \frac{3V}{S}$.

Знайдемо площу основи, тобто площу трикутника $A_1A_2A_3$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|.$$

Обчислюємо векторний добуток

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} - 3\vec{k} + \vec{i} + 4\vec{j} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

$$|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}| = \sqrt{7^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}.$$

$$\text{Таким чином, } S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\sqrt{83}}{2}; \quad H = \frac{3 \times 8}{3 \times \sqrt{83}} = \frac{8\sqrt{83}}{83}.$$

ЗАВДАННЯ 1.7.

Задані вершини трикутника ABC: A(3,6), B(2,3), C(-3,1). Знайти:

- а) рівняння сторони АВ;
- б) рівняння висоти СН;
- в) рівняння медіани АМ;
- г) точку N перетину медіани АМ та висоти СН;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку С паралельно АВ;
- е) відстань від точки С до прямої АВ.

Розв'язок

а) рівняння прямої, що проходить через дві задані точки має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тоді рівняння сторони АВ:

$$\frac{x - 3}{2 - 3} = \frac{y - 6}{3 - 6}; \Rightarrow \frac{x - 3}{-1} = \frac{y - 6}{-3}; \Rightarrow 3 \cdot (x - 3) = y - 6; \Rightarrow$$

$y = 3 \cdot x - 3$ - рівняння АВ, кутовий коефіцієнт $k=3$.

У загальному вигляді це рівняння можна записати так:

$$3x - y - 3 = 0.$$

б) висота СН перпендикулярна до сторони АВ. Тоді з умови перпендикулярності $k_{AB} \cdot k_{CH} = -1$ знаходимо $k_{CH} = -\frac{1}{3}$.

Застосовуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Таким чином, рівняння СН має вигляд:

$$y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot x.$$

в) координати середини сторони знаходяться за формулою:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тоді координати точки М, яка є серединою ВС, будуть такі:

$$x_M = \frac{2 - 3}{2} = -\frac{1}{2}; \quad y_M = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Рівняння медіани АМ знаходимо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (А і М):

$$\frac{x-3}{-\frac{1}{2}-3} = \frac{y-6}{2-6}; \Rightarrow -4 \cdot x + 12 = -\frac{7}{2} \cdot y + 21.$$

Отже, рівняння АМ: $-8 \cdot x + 7 \cdot y - 18 = 0$.

г) точку N перетину медіани АМ та висоти СН знайдемо з рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3} \cdot x, \\ -8 \cdot x + 7 \cdot y - 18 = 0. \end{cases}$$

$$-8 \cdot x - \frac{7}{3} \cdot x = 18; \Rightarrow x = -\frac{54}{31};$$

$$\text{Тобто } N\left(-\frac{54}{31}, \frac{18}{31}\right).$$

д) оскільки шукана пряма паралельна прямій АВ, то їхні кутові коефіцієнти рівні, тобто $k = k_{AB} = 3$. Шукана пряма проходить через точку $C(-3,1)$. Використовуючи формулу $y - y_0 = k(x - x_0)$, дістанемо :

$$y - 1 = 3(x + 3) \Rightarrow y = 3 \cdot x + 10,$$

що є рівнянням шуканої прямої.

е) відстань d від точки С до прямої АВ знайдемо за формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

Використовуючи рівняння прямої АВ у загальному вигляді , обчислимо

$$d = \frac{|3 \cdot x_C - y_C - 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 \cdot (-3) - 1 - 3|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}}.$$

ЗАВДАННЯ 1.8.

Задані точки А (2,0,-1), В (0,1, 2), С (2,1,0), D (1,-1,2). Знайти проєкцію точки D на площину, яка проходить через точки А, В, С.

Розв'язок

При розв'язанні використовуються наступні теоретичні дані.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Вектор $\vec{N}\{A, B, C\}$ перпендикулярний до цієї площини, він називається нормальним вектором площини.

Якщо площина проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}\{A, B, C\}$, то її рівняння має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Якщо площина проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, то рівняння площини має вигляд :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пряму L у просторі можна визначити точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить цій прямій і напрямним вектором $\vec{q}\{l, m, n\}$ цієї прямої. Канонічні рівняння прямої L :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Якщо в цьому рівнянні значення відношень позначити параметром t , а потім розв'язати одержані рівняння відносно x , y , z , то дістанемо:

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t. \end{cases}$$

Ці рівняння називаються параметричними рівняннями прямої L .

Напишемо рівняння площини ABC :

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 0 & z + 1 \\ 0 - 2 & 1 - 0 & 2 + 1 \\ 2 - 2 & 1 - 0 & 0 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot (-2) - y \cdot (-2) + (z+1) \cdot (-2) = 0,$$

$$x - y + z - 1 = 0.$$

Нормальний вектор площини $\overline{N}\{1, -1, 1\}$

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку D перпендикулярно площині ABC. Напрямним вектором прямої буде вектор $\overline{q} \parallel \overline{N}$. Звідси рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Проекцією точки D на площину ABC буде точка перетину прямої і площини. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{1} &= t; & \frac{y+1}{-1} &= t; & \frac{z-2}{1} &= t; \\ & \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -t - 1, \\ z = t + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Підставимо отримані рівності в рівняння площини:

$$t + 1 + t + 1 + t + 2 - 1 = 0,$$

$$3t = -3,$$

$$t = -1.$$

Тоді

$$\begin{cases} x_0 = -1 + 1 = 0, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 1. \end{cases}$$

Отже, $M_0(0, 0, 1)$ – проекція точки D на площину ABC.

ЗАВДАННЯ 1.9.

Привести задане рівняння до канонічного виду, визначити тип кривої та побудувати її:

а) $7x^2 + 16y^2 = 112$,

б) $x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$,

в) $5x^2 - 4y^2 = 20$,

г) $y^2 + 2x - 3 = 0$.

Розв'язок

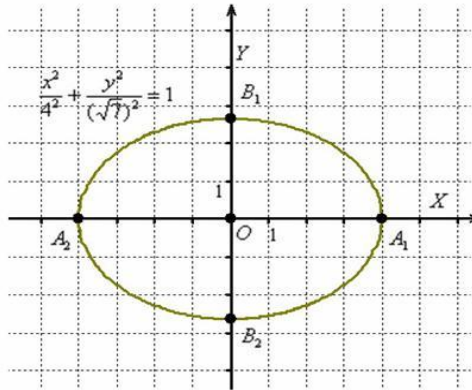
Наведемо канонічні рівняння кривих другого порядку.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліпс
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіпербола
$y^2 = 2px, p > 0$	Парабола
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимий еліпс
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара прямих, що перетинаються
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара мнимих прямих, що перетинаються
$y^2 - a^2 = 0$	Пара паралельних прямих
$y^2 + a^2 = 0$	Пара мнимих паралельних прямих

а) приведемо рівняння до канонічного виду. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 112. Отримаємо:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

Данна крива – еліпс з півосями $a=4, b=\sqrt{7}$ та центром у точці $O(0;0)$.



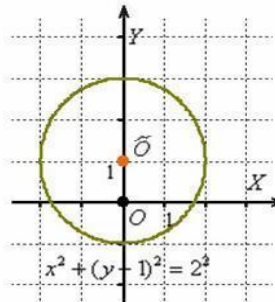
б) виділяємо повні квадрати при змінних, які входять в рівняння:

$$x^2 + (y^2 - 2y + 1 - 1) - 3 = 0,$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x$, $y' = y - 1$ початок координат нової системи опиниться у точці $O'(0;1)$, а рівняння кривої прийме канонічний вид

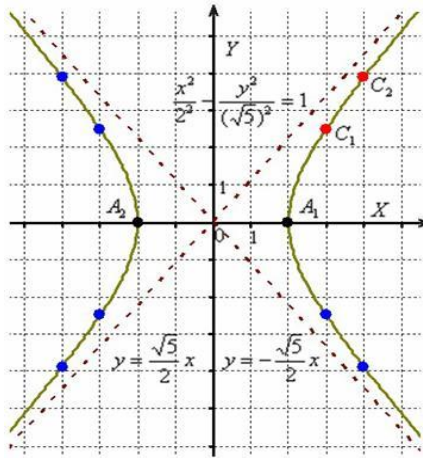
$$(x')^2 + (y')^2 = 2^2 - \text{коло з радіусом } r = 2.$$



в) приведемо рівняння до канонічного виду. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 20. Отримаємо:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

Данна крива – гіпербола з півосями $a = 2, b = \sqrt{5}$ та центром у точці $O(0;0)$.

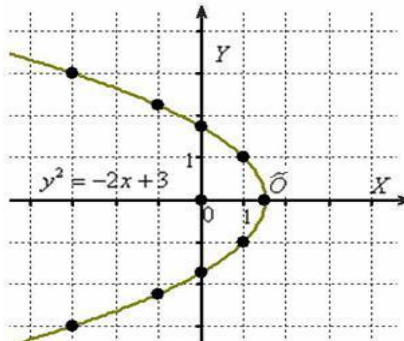


г) приведемо рівняння до канонічного виду:

$$y^2 = -2x + 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x - \frac{3}{2}$, $y' = y$ початок координат нової системи опиниться у точці $O'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, а рівняння кривої прийме канонічний вид

$$(y')^2 = -2(x')^2 \text{ – параболова.}$$



ЗАВДАННЯ 1.10.

Привести задане рівняння до канонічного виду та визначити тип поверхні.

а) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0$,

б) $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$.

Розв'язок

Наведемо рівняння деяких поверхонь:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Еліпсоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Однопорожнинний гіперболоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	Двопорожнинний гіперболоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус другого порядку
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	Еліптичний параболоїд
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	Гіперболічний параболоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліптичний циліндр
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіперболічний циліндр
$x^2 = 2py$	Параболічний циліндр

а) виділяємо повні квадрати при змінних, які входять в рівняння:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 4(z^2 - 2z + 1 - 1) - 3 = 0,$$

$$(x + 1)^2 - 2(y + 3)^2 + 4(z - 1)^2 = -10,$$

$$\frac{(x+1)^2}{10} - \frac{(y+3)^2}{5} + \frac{(z-1)^2}{5/2} = -1.$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x + 1$, $y' = y + 3$, $z' = z - 1$ - початок координат нової системи окажется в точці $O'(-1; -3; 1)$, а рівняння поверхні прийме канонічний вид

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{10})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{(z')^2}{(\sqrt{5/2})^2} = -1.$$

Данна поверхня – двопорожнинний гіперболоїд з півосями $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{\frac{5}{2}}$, розташований вздовж нової осі $O'Y'$.

б) виділяємо повні квадрати при змінних, які входять в рівняння:

$$(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 16) + (2y)^2 = 0,$$

$$(x - 4)^2 + 4y^2 = 16,$$

$$\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x - 4$, $y' = y$ - початок координат нової системи буде у точці $O'(4; 0; 0)$, а рівняння поверхні прийме канонічний вид

$$\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

Дана поверхня – еліптичний циліндр з півосями $a = 4, b = 2$, розташований вздовж осі $O'Z$.

ЗАВДАННЯ 1.11.

Знайти вказані границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4};$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}.$$

Розв'язок

а) оскільки чисельник та знаменник дробу перетворюються в нуль при $x=1$, то для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$ розкладемо чисельник та знаменник на множники та поділимо їх на $(x-1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1) \left(x - \frac{5}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2 \left(x - \frac{5}{2} \right)} = \frac{0}{-3} = 0.$$

б) щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, треба чисельник та знаменник дробу поділити почленно на найвищий степінь змінної.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{3}{2},$$

оскільки $\frac{\text{const}}{\infty} \rightarrow 0$.

в) якщо чисельник або знаменник є ірраціональні функції, то для розкриття невизначеності необхідно виконати перетворення з ірраціональністю (наприклад, помножити на спряжений вираз).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x^2-16)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-9)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

г) невизначеність виду 1^∞ розкривається за допомогою другої стандартної границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{x-3} - 1\right)^{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-x+3}{x-3}\right)^{x-5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{3}}\right]^{\frac{3(x-5)}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3(x-5)}{x-3}} = e^3. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ 1.12.

Знайти похідні функцій:

а) $y = \frac{e^{\cos 2x}}{(x+1)^3};$

б) $\cos y = 2xy^2 - 7x;$

в) $y = x^{\cos 3x};$

г) $\begin{cases} y = e^{2t} \cdot \sin 3t, \\ x = e^{2t} \cdot \cos 3t. \end{cases}$

Розв'язок

а) при диференціюванні функцій треба використовувати таблицю похідних та основні правила диференціювання.

Таблиця похідних:

$$1. \quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$$2. \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \quad (e^u)' = e^u u';$$

$$3. \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$4. \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
6. $(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
7. $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';$
8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$
9. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$
10. $(\operatorname{arctgu})' = \frac{1}{1+u^2} u';$
11. $(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$

Основні правила диференціювання:

1. $c' = 0$, де $c = \text{const}$;
2. $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x);$
3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)};$
5. Нехай функції $y=f(u)$ та $u=u(x)$ диференційовані у відповідних точках, тоді похідна складної функції $y=f(u(x))$ дорівнює:

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

Обчислимо тепер :

$$\text{а) } \left(\frac{e^{\cos 2x}}{(x+1)^3} \right)' = \frac{(e^{\cos 2x})' \cdot (x+1)^3 - e^{\cos 2x} \cdot ((x+1)^3)'}{(x+1)^6} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\cos 2x} \cdot (\cos 2x)' \cdot (x+1)^3 - e^{\cos 2x} \cdot 3(x+1)^2 \cdot (x+1)'}{(x+1)^6} = \\
&= \frac{e^{\cos 2x} (-\sin 2x \cdot 2)(x+1)^3 - e^{\cos 2x} \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6} = \\
&= \frac{-e^{\cos 2x} (2 \sin 2x (x+1) - 3)}{(x+1)^4}.
\end{aligned}$$

б) якщо функціональна залежність між y та x задана неявно, тобто рівністю $F(x, y)=0$, то для знаходження похідної по x функції y треба здиференціювати обидві частини рівняння $F(x, y(x)) \equiv 0$, враховуючи, що y залежить від x , а потім розв'язати добуте рівняння відносно y' .

У нашому прикладі y задано рівністю

$$\cos y - 2xy^2 + 7x = 0.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння по x , дістанемо

$$-\sin y \cdot y' - 2y^2 - 2x \cdot 2y \cdot y' + 7 = 0.$$

Виражаємо з даного рівняння y' :

$$-y'(\sin y + 4xy) = 2y^2 - 7.$$

$$y' = \frac{7 - 2y^2}{\sin y + 4xy}.$$

в) функція вигляду $y = (f(x))^{\varphi(x)}$, де й основа і показник змінюються одночасно з незалежною змінною, називається показниково-степенною. Щоб знайти похідну такої функції, необхідно її прологарифмувати:

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln(f(x)).$$

Диференціюючи цю функцію, дістаємо:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \varphi(x).$$

Тоді

$$y' = y \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \varphi(x) \right),$$

$$y' = f(x)^{\varphi(x)} \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \varphi(x) \right).$$

У нашому прикладі y задано рівністю $y = x^{\cos 3x}$. Тоді

$$\ln y = \ln x^{\cos 3x};$$

$$\ln y = \cos 3x \cdot \ln x;$$

$$\frac{1}{y} y' = -3 \sin 3x \cdot \ln x + \cos 3x \cdot \frac{1}{x}.$$

Підставляючи в цей вираз y , маємо

$$y' = x^{\cos 3x} \cdot \left(-3 \sin 3x \cdot \ln x + \cos 3x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

г) нехай функція $y = f(x)$ задана рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Завдання функціональної залежності між двома змінними, які, в свою чергу, є функціями однієї й тієї самої допоміжної змінної t , називається параметричним. Похідна параметрично заданої функції обчислюється за формулою:

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Знайдемо y'_x для нашого прикладу:

$$y'_x = \frac{(e^{2t} \cdot \sin 3t)_t'}{(e^{2t} \cdot \cos 3t)_t'} = \frac{2e^{2t} \cdot \sin 3t + e^{2t} \cdot 3 \cos 3t}{2e^{2t} \cdot \cos 3t - e^{2t} \cdot 3 \sin 3t} = \frac{2 \sin 3t + 3 \cos 3t}{2 \cos 3t - 3 \sin 3t}.$$

ЗАВДАННЯ 1.13.

Обчислити за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{\ln(x^2 - 3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Розв'язок

Правило Лопітала застосується для невизначеності виду $\frac{0}{0}$ та

$\frac{\infty}{\infty}$. Згідно цього правила границя відношення двох функцій дорівнює

границі відношення їх похідних, якщо вона існує.

Тому

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{\ln(x^2 - 3)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 7x + 10)'}{(\ln(x^2 - 3))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 7}{\frac{2x}{x^2 - 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 7)(x^2 - 3)}{2x} = \frac{-3 \cdot 1}{4} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}} \right)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{\left(-\frac{2}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

ЗАВДАННЯ 1.14.

Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язок

Для дослідження функції та побудови її графіка доцільно дотримуватися такої схеми:

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність.
3. Знаходимо асимптоти графіка функції.
4. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів.
5. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості, точки перегину функції.

Розв'язування проведемо згідно вказаної схеми:

- 1) задана функція має розрив в точці $x=1$, тому $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
- 2) задана функція не буде парною, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ и не буде непарною, оскільки $f(-x) \neq -f(x)$.
- 3) знайдемо асимптоти графіка функції.

Обчислимо:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty.$$

Отже, пряма $x=1$ є вертикальна асимптота.

Перевіримо, чи має функція похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Тому пряма $y = k \cdot x + b = 0 \cdot x + 0$, тобто $y = 0$ буде горизонтальною асимптотою.

4) похідна функції буде

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Похідна не існує у точці $x=1$ і дорівнює нулю при $x=0$.

Складаємо таблицю:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	—	0	+	не існує	—
$f(x)$		min		не існує	

$$y_{\min} = y(0) = -1.$$

5) друга похідна має вигляд:

$$y'' = -\frac{2(x-1)^3 - 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{2x-2-6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}.$$

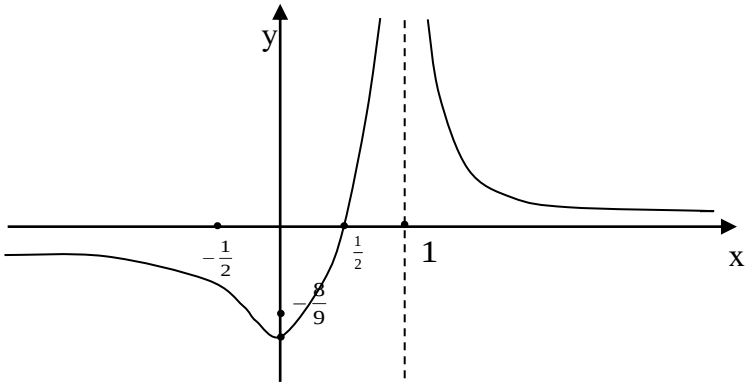
$$y'' = 0 \quad \text{при } x = -\frac{1}{2}, \quad y'' \text{ не існує при } x=1.$$

Складаємо таблицю:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	не існує	+
$f(x)$		точка перетину		не існує	

$$x = -\frac{1}{2} \text{ - точка перетину, } y_{\text{nep}} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}.$$

За одержаними результатами будуюмо графік заданої функції.

**ЗАВДАННЯ 1.15.**

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ у точці $M_0(-1;0;1)$.

Розв'язок

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0$, то рівняння дотичної площини має вид:

$$F_x'(M_0)(x-x_0) + F_y'(M_0)(y-y_0) + F_z'(M_0)(z-z_0) = 0,$$

рівняння нормалі:

$$\frac{(x-x_0)}{F_x'(M_0)} = \frac{(y-y_0)}{F_y'(M_0)} = \frac{(z-z_0)}{F_z'(M_0)}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x;y)$, то відповідні рівняння мають вид:

$f_x'(x_0;y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0;y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$ - рівняння дотичної площини,

$$\frac{(x-x_0)}{F_x'(M_0)} = \frac{(y-y_0)}{F_y'(M_0)} = \frac{(z-z_0)}{-1} \text{ - рівняння нормалі.}$$

Для нашого прикладу знаходимо частинні похідні

$$f_x'(x;y) = 2x + 3y - 4; \quad f_y'(x;y) = -2y + 3x + 2.$$

Підставляємо в ці вирази координати точки $M_0(-1;0;1)$:

$$f_x'(x_0;y_0) = -6; \quad f_y'(x_0;y_0) = -1.$$

Отже рівняння дотичної площини:

$$-6(x+1) - y - (z-1) = 0; \quad 6x + y + z + 5 = 0.$$

Рівняння нормалі:
$$\frac{(x+1)}{6} = \frac{y}{1} = \frac{(z-1)}{1}.$$

ЗАВДАННЯ 1.16.

Перевірити, чи задовольняє вказаному рівнянню функція $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$u = \ln(x^2 + y^2).$$

Розв'язок

Знаходимо частинні похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Підставляємо значення похідних в ліву частину заданого рівняння:

$$\frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

В правій частині рівняння маємо:

$$\frac{4y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{8xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Висновок: задана функція не задовольняє рівнянню.

ЗАВДАННЯ 1.17.

Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язок

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних мають вигляд:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні та отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему та знаходимо дві критичні точки

$$M_1 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ та } M_2 : \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

Перевіримо достатні умови екстремуму для добутих точок.

Знайдемо спочатку частинні похідні другого порядку:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Потім обчислимо $\Delta = A \cdot C - B^2$ у кожній критичній точці.

Для нашого прикладу $\Delta = 36xy - 9$.

Підставивши координати критичних точок, дістанемо:

для точки M_1 $\Delta = -9 < 0$, тобто в цій точці екстремуму не має;

для точки M_2 $\Delta = 27$, $A = 6$. Оскільки $\Delta > 0$ - у точці M_2 є екстремум, причому мінімум, тому що $A > 0$.

Таким чином, у точці $M_2(1,1)$ функція досягає локального мінімуму $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 2.1.

Розв'язати систему: а) за формулами Крамера;
 б) матричним методом;
 в) методом Гауса.

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_2 + 7x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 4, \\ -x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 4, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -6x - 14y + 12z = 2, \\ -4x + 2y + 9z = 28, \\ 9x + 7y - 9z = 5. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -14x - 6y + 12z = 2, \\ 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x - y + z = 9, \\ 2x + y + 6z = 6, \\ x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ 2.2.

Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$1. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ 2.3.

По даним векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ побудувати вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

№	α	β	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1.	1	-2	(1,3)	(-2,1)
2.	-1	0.5	(-2,2)	(4,6)
3.	2	-1	(4,0)	(-3,3)
4.	-3	1	(2,3)	(4,8)
5.	0.5	2	(6,2)	(0,5)
6.	-2	4	(1,-1)	(2,1)
7.	3	1	(2,3)	(1,2)
8.	4	-2	(2,0)	(1,4)
9.	-5	0.5	(2,-1)	(4,10)
10.	-4	2	(3,1)	(1,2)
11.	2	1.5	(0,3)	(3,6)

№	α	β	$\vec{a}$	$\vec{b}$
12.	-1.5	-2	(3,6)	(1,4)
13.	3	-2	(2,-5)	(4,1)
14.	-1	5	(1,6)	(3,2)
15.	4	3	(-1,4)	(2,0)
16.	-1	2	(-1,-3)	(2,-1)
17.	1	-0.5	(2,-2)	(-4,-6)
18.	-2	1	(-4,0)	(3,-3)
19.	3	-1	(-2,-3)	(-4,-8)
20.	-0.5	-2	(-6,-2)	(0,-5)
21.	2	-4	(-1,1)	(-2,-1)
22.	-3	-1	(-2,3)	(-1,-2)
23.	-4	2	(-2,0)	(-1,-4)
24.	5	-0.5	(-2,1)	(-4,-10)
25.	4	-2	(-3,-1)	(-1,-2)
26.	-2	-1.5	(0,-3)	(-3,-6)
27.	1.5	2	(-3,-6)	(-1,4)
28.	-3	2	(-2,5)	(-4,-1)
29.	1	-5	(-1,-6)	(-3,-2)
30.	-4	-3	(1,-4)	(-2,0)

ЗАВДАННЯ 2.4.

Трикутник ABC задано координатами своїх вершин. Знайти внутрішній кут при вершині А.

№	A	B	C
1.	(1,3,6)	(2,2,1)	(-1,0,1)
2.	(-4,2,6)	(2,-3,0)	(-10,5,8)
3.	(7,2,4)	(7,-1,-2)	(3,3,1)
4.	(2,1,4)	(-1,5,-2)	(-7,-3,2)
5.	(-1,-5,2)	(-6,0,-3)	(3,6,-3)
6.	(0,-1,-1)	(-2,3,5)	(1,-5,-9)
7.	(5,2,0)	(2,5,0)	(1,2,4)
8.	(2,-1,-2)	(1,2,1)	(5,0,-6)

№	A	B	C
9.	(-2,0,-4)	(-1,7,1)	(4,-8,-4)
10.	(14,4,5)	(-5,-3,2)	(-2,-6,-3)
11.	(1,2,0)	(3,0,-3)	(5,2,6)
12.	(2,-1,2)	(1,2,-1)	(3,2,1)
13.	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)
14.	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)
15.	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)
16.	(1,5,-7)	(-3,6,3)	(-2,7,3)
17.	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-5,-2,0)
18.	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)
19.	(4,-1,3)	(-1,2,0)	(0,-5,1)
20.	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)
21.	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)
22.	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)
23.	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)
24.	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)
25.	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)
26.	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)
27.	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)
28.	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(1,3,-4)
29.	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)
30.	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)

ЗАВДАННЯ 2.5.

Обчислити площу паралелограму, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

1. $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2$, $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/6$.
2. $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1$, $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4$.
3. $\bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1/5$, $|\bar{q}| = 1$, $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/2$.
4. $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1/2$, $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = 5\pi/6$.
5. $\bar{a} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = 3\pi/4$.

6. $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
7. $\bar{a} = 2\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/2.$
8. $\bar{a} = 4\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 7, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4.$
9. $\bar{a} = \bar{p} - 4\bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 1, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/6.$
10. $\bar{a} = \bar{p} + 4\bar{q}, \quad \bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 7, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
11. $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 10, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/2.$
12. $\bar{a} = 4\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 5, \quad |\bar{q}| = 4, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4.$
13. $\bar{a} = 2\bar{p} + 23\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 6, \quad |\bar{q}| = 7, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
14. $\bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 4, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
15. $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4.$
16. $\bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 4, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/6.$
17. $\bar{a} = 5\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 1, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
18. $\bar{a} = 7\bar{p} - 2\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 1/2, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/2.$
19. $\bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 4, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4.$
20. $\bar{a} = 10\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 4, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/6.$
21. $\bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 8, \quad |\bar{q}| = 1/2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
22. $\bar{a} = 3\bar{p} + 4\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{q} - \bar{p}, \quad |\bar{p}| = 2, 5, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/2.$
23. $\bar{a} = 7\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 3\pi/4.$
24. $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 5, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$
25. $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 7, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4.$
26. $\bar{a} = 5\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 5, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 5\pi/6.$
27. $\bar{a} = 3\bar{p} - 4\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/4.$
28. $\bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 1/2, \quad |\bar{q}| = 4, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 5\pi/6.$
29. $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/3.$

$$30. \quad \bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}, \quad \bar{b} = 5\bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \pi/2.$$

ЗАВДАННЯ 2.6.

Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 та її висоту, проведену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

- | | | | | |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. | $A_1(1, 3, 6),$ | $A_2(2, 2, 1),$ | $A_3(-1, 0, 1),$ | $A_4(-4, 6, -3).$ |
| 2. | $A_1(-4, 2, 6),$ | $A_2(2, -3, 0),$ | $A_3(-10, 5, 8),$ | $A_4(-5, 2, -4).$ |
| 3. | $A_1(7, 2, 4),$ | $A_2(7, -1, -2),$ | $A_3(3, 3, 1),$ | $A_4(-4, 2, 1).$ |
| 4. | $A_1(2, 1, 4),$ | $A_2(-1, 5, -2),$ | $A_3(-7, -3, 2),$ | $A_4(-6, -3, 6).$ |
| 5. | $A_1(-1, -5, 2),$ | $A_2(-6, 0, -3),$ | $A_3(3, 6, -3),$ | $A_4(-10, 6, 7).$ |
| 6. | $A_1(0, -1, -1),$ | $A_2(-2, 3, 5),$ | $A_3(1, -5, -9),$ | $A_4(-1, -6, 3).$ |
| 7. | $A_1(5, 2, 0),$ | $A_2(2, 5, 0),$ | $A_3(1, 2, 4),$ | $A_4(-1, 1, 1).$ |
| 8. | $A_1(2, -1, -2),$ | $A_2(1, 2, 1),$ | $A_3(5, 0, -6),$ | $A_4(-10, 9, -7).$ |
| 9. | $A_1(-2, 0, -4),$ | $A_2(-1, 7, 1),$ | $A_3(4, -8, -4),$ | $A_4(1, -4, 6).$ |
| 10. | $A_1(14, 4, 5),$ | $A_2(-5, -3, 2),$ | $A_3(-2, -6, -3),$ | $A_4(-2, 2, -1).$ |
| 11. | $A_1(1, 2, 0),$ | $A_2(3, 0, -3),$ | $A_3(5, 2, 6),$ | $A_4(8, 4, -9).$ |
| 12. | $A_1(2, -1, 2),$ | $A_2(1, 2, -1),$ | $A_3(3, 2, 1),$ | $A_4(-4, 2, 5).$ |
| 13. | $A_1(1, 1, 2),$ | $A_2(-1, 1, 3),$ | $A_3(2, -2, 4),$ | $A_4(-1, 0, -2).$ |
| 14. | $A_1(2, 3, 1),$ | $A_2(4, 1, -2),$ | $A_3(6, 3, 7),$ | $A_4(7, 5, -3).$ |
| 15. | $A_1(1, 1, -0),$ | $A_2(2, 3, 1),$ | $A_3(3, 2, 1),$ | $A_4(5, 9, -8).$ |
| 16. | $A_1(1, 5, -7),$ | $A_2(-3, 6, 3),$ | $A_3(-2, 7, 3),$ | $A_4(-4, 8, -12).$ |
| 17. | $A_1(-3, 4, -7),$ | $A_2(1, 5, -4),$ | $A_3(-5, -2, 0),$ | $A_4(2, 5, 4).$ |
| 18. | $A_1(-1, 2, -3),$ | $A_2(4, -1, 0),$ | $A_3(2, 1, -2),$ | $A_4(3, 4, 5).$ |
| 19. | $A_1(4, -1, 3),$ | $A_2(-1, 2, 0),$ | $A_3(0, -5, 1),$ | $A_4(3, 2, -6).$ |
| 20. | $A_1(1, -1, 1),$ | $A_2(-2, 0, 3),$ | $A_3(2, 1, -1),$ | $A_4(2, -2, -4).$ |
| 21. | $A_1(1, 2, 0),$ | $A_2(1, -1, 2),$ | $A_3(0, 1, -1),$ | $A_4(-3, 0, 1).$ |
| 22. | $A_1(1, 0, 2),$ | $A_2(1, 2, -1),$ | $A_3(2, -2, 1),$ | $A_4(2, 1, 0).$ |
| 23. | $A_1(1, 2, -3),$ | $A_2(1, 0, 1),$ | $A_3(-2, -1, 6),$ | $A_4(0, -5, -4).$ |
| 24. | $A_1(3, 10, -1),$ | $A_2(-2, 3, -5),$ | $A_3(-6, 0, -3),$ | $A_4(1, -1, 2).$ |
| 25. | $A_1(-1, 2, 4),$ | $A_2(-1, -2, -4),$ | $A_3(3, 0, -1),$ | $A_4(7, -3, 1).$ |
| 26. | $A_1(0, -3, 1),$ | $A_2(-4, 1, 2),$ | $A_3(2, -1, 5),$ | $A_4(3, 1, -4).$ |
| 27. | $A_1(1, 3, 0),$ | $A_2(4, -1, 2),$ | $A_3(3, 0, 1),$ | $A_4(-4, 3, 5).$ |
| 28. | $A_1(-2, -1, -1),$ | $A_2(0, 3, 2),$ | $A_3(3, 1, -4),$ | $A_4(-4, 7, 3).$ |
| 29. | $A_1(-3, -5, 6),$ | $A_2(2, 1, -4),$ | $A_3(0, -3, -1),$ | $A_4(-5, 2, -8).$ |
| 30. | $A_1(2, -4, -3),$ | $A_2(5, -6, 0),$ | $A_3(-1, 3, -3),$ | $A_4(-10, -8, 7).$ |

ЗАВДАННЯ 2.7.

Задані вершини трикутника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти:

- а) рівняння сторони АВ;
- б) рівняння висоти СН;
- в) рівняння медіани АМ;
- г) точку N перетин медіани АМ та висоти СН;
- д) рівняння прямої, що проходить через вершину С паралельно стороні АВ;
- е) відстань від точки С до прямої АВ.

№	А	В	С
1.	(-2, 4)	(3, 1)	(10, 7)
2.	(-3, -2)	(14, 4)	(6, 8)
3.	(1, 7)	(-3, -1)	(11, -3)
4.	(1, 0)	(-1, 4)	(9, 5)
5.	(1, -2)	(7, 1)	(3, 7)
6.	(-2, -3)	(1, 6)	(6, 1)
7.	(-4, 2)	(-6, 6)	(6, 2)
8.	(4, -3)	(7, 3)	(1, 10)
9.	(4, -4)	(8, 2)	(3, 8)
10.	(-3, -3)	(5, -7)	(7, 7)
11.	(1, -6)	(3, 4)	(-3, 3)
12.	(-4, 2)	(8, -6)	(2, 6)
13.	(-5, 2)	(0, -4)	(5, 7)
14.	(4, -4)	(6, 2)	(-1, 8)
15.	(-3, 8)	(-6, 2)	(0, -5)
16.	(6, -9)	(10, -1)	(-4, 1)
17.	(4, 1)	(-3, -1)	(7, -3)
18.	(-4, 2)	(6, -4)	(4, 10)
19.	(3, -1)	(11, 3)	(-6, 2)

№	A	B	C
20.	$(-7, -2)$	$(-7, 4)$	$(5, -5)$
21.	$(-1, -4)$	$(9, 6)$	$(-5, 4)$
22.	$(10, -2)$	$(4, -5)$	$(-3, 1)$
23.	$(-3, -1)$	$(-4, -5)$	$(8, 1)$
24.	$(-2, -6)$	$(-3, 5)$	$(4, 0)$
25.	$(-7, -2)$	$(3, -8)$	$(-4, 6)$
26.	$(0, 2)$	$(-7, -4)$	$(3, 2)$
27.	$(7, 0)$	$(1, 4)$	$(-8, -4)$
28.	$(1, -3)$	$(0, 7)$	$(-2, 4)$
29.	$(-5, 1)$	$(8, -2)$	$(1, 4)$
30.	$(2, 5)$	$(-3, 1)$	$(0, 4)$

ЗАВДАННЯ 2.8.

Задані точки A, B, C, D. Знайти проекцію точки D на площину, яка проходить через точки A, B, C.

1. $A(1, 3, 6)$, $B(2, 2, 1)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(-4, 6, -3)$.
2. $A(-4, 2, 6)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-10, 5, 8)$, $D(-5, 2, -4)$.
3. $A(7, 2, 4)$, $B(7, -1, -2)$, $C(3, 3, 1)$, $D(-4, 2, 1)$.
4. $A(2, 1, 4)$, $B(-1, 5, -2)$, $C(-7, -3, 2)$, $D(-6, -3, 6)$.
5. $A(-1, -5, 2)$, $B(-6, 0, -3)$, $C(3, 6, -3)$, $D(-10, 6, 7)$.
6. $A(0, -1, -1)$, $B(-2, 3, 5)$, $C(1, -5, -9)$, $D(-1, -6, 3)$.
7. $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$, $D(-1, 1, 1)$.
8. $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(5, 0, -6)$, $D(-10, 9, -7)$.
9. $A(-2, 0, -4)$, $B(-1, 7, 1)$, $C(4, -8, -4)$, $D(1, -4, 6)$.
10. $A(14, 4, 5)$, $B(-5, -3, 2)$, $C(-2, -6, -3)$, $D(-2, 2, -1)$.
11. $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$, $D(8, 4, -9)$.
12. $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$, $D(-4, 2, 5)$.
13. $A(1, 1, 2)$, $B(-1, 1, 3)$, $C(2, -2, 4)$, $D(-1, 0, 2)$.
14. $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(7, 5, -3)$.

15. $A(1, 1, -0), B(2, 3, 1), C(3, 2, 1), D(5, 9, -8).$
16. $A(1, 5, -7), B(-3, 6, 3), C(-2, 7, 3), D(-4, 8, -12).$
17. $A(-3, 4, -7), B(1, 5, -4), C(-5, -2, 0), D(2, 5, 4).$
18. $A(-1, 2, -3), B(4, -1, 0), C(2, 1, -2), D(3, 4, 5).$
19. $A(4, -1, 3), B(-1, 2, 0), C(0, -5, 1), D(3, 2, -6).$
20. $A(1, -1, 1), B(-2, 0, 3), C(2, 1, -1), D(2, -2, -4).$
21. $A(1, 2, 0), B(1, -1, 2), C(0, 1, -1), D(-3, 0, 1).$
22. $A(1, 0, 2), B(1, 2, -1), C(2, -2, 1), D(2, 1, 0).$
23. $A(1, 2, -3), B(1, 0, 1), C(-2, -1, 6), D(0, -5, -4).$
24. $A(3, 10, -1), B(-2, 3, -5), C(-6, 0, -3), D(1, -1, 2).$
25. $A(-1, 2, 4), B(-1, -2, -4), C(3, 0, -1), D(7, -3, 1).$
26. $A(0, -3, 1), B(-4, 1, 2), C(2, -1, 5), D(3, 1, -4).$
27. $A(1, 3, 0), B(4, -1, 2), C(3, 0, 1), D(-4, 3, 5).$
28. $A(-2, -1, -1), B(0, 3, 2), C(3, 1, -4), D(-4, 7, 3).$
29. $A(-3, -5, 6), B(2, 1, -4), C(0, -3, -1), D(-5, 2, -8).$
30. $A(2, -4, -3), B(5, -6, 0), C(-1, 3, -3), D(-10, -8, 7).$

ЗАВДАННЯ 2.9.

Привести рівняння лінії до канонічного виду та побудувати цю лінію.

1. $2x^2 - 4x + 2y - 6 = 0.$
2. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0.$
3. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0.$
4. $\frac{1}{6}x^2 + 2x - y - 7 = 0.$
5. $x^2 + 4y^2 + 8y = 0.$
6. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$
7. $-y^2 + 2y - x - 1 = 0.$
8. $6y^2 + 9z^2 - 12y + 18z - 39 = 0.$
9. $16x^2 - 9y^2 + 64x + 108y - 116 = 0.$
10. $-2x^2 - 4x + 2y - 6 = 0.$

11. $16z^2 + 25x^2 - 32z + 50x - 359 = 0.$

12. $-4y^2 + 9z^2 + 64y - 18z - 211 = 0.$

13. $-\frac{1}{6}x^2 + 2x - y - 7 = 0.$

14. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0.$

15. $16x^2 - 9z^2 + 64x - 18z + 199 = 0.$

16. $y^2 + 2y - x - 1 = 0$

17. $4y^2 + 9x^2 + 16y + 18x - 11 = 0.$

18. $y^2 - 2z^2 - 2y - 4z - 6 = 0.$

19. $\frac{1}{4}y^2 + y - x + 2 = 0.$

20. $4z^2 + 3y^2 - 8z - 12y - 32 = 0.$

21. $z^2 - 4x^2 + 2z + 8x - 19 = 0.$

22. $4y^2 - 8y - x + 7 = 0.$

23. $6z^2 + 9y^2 - 12z - 18y - 39 = 0.$

24. $-9z^2 + 8x^2 + 18z - 16x + 71 = 0.$

25. $3y^2 + 6y + 5z - 2 = 0.$

26. $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 12 = 0.$

27. $4x^2 - z^2 + 8x + 2z + 7 = 0.$

28. $-\frac{1}{4}y^2 + y - x + 2 = 0.$

29. $z^2 + 4x^2 - 8z - 8x + 4 = 0.$

30. $-4z^2 + 9y^2 + 64z - 36y - 184 = 0.$

ЗАВДАННЯ 2.10.

Привести рівняння до канонічного виду та визначити тип поверхні.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 11 = 0.$

2. $36z^2 + 36x^2 - 36z - 24x - 18y - 14 = 0.$
3. $-x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 8z + 19 = 0.$
4. $4z^2 + 9y^2 - 16z - 18y - 72x - 47 = 0$
5. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6x - 4y - 16z - 21 = 0.$
6. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6x - 4y - 16z - 5 = 0.$
7. $-16x^2 + 9y^2 + z^2 - 32x - 36y - 144z + 5204 = 0.$
8. $16z^2 - 9y^2 - 6x = 0.$
9. $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 16x + 2y - 8z + 19 = 0.$
10. $16z^2 + 25y^2 - 32z + 50y + 800x - 759 = 0.$
11. $16x^2 + 9y^2 + z^2 - 32x - 36y + 16z - 28 = 0.$
12. $4x^2 + 9y^2 - 25z^2 - 32x - 36y + 50z + 75 = 0.$
13. $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 32x - 36y + 50z - 775 = 0.$
14. $-4z^2 + y^2 - 2x = 0.$
15. $16z^2 + 9y^2 + 36x^2 - 64z - 18y + 72x - 35 = 0.$
16. $x^2 + y^2 + y + 4z + 4\frac{1}{4} = 0.$
17. $4z^2 + 3y^2 - 8z - 12y - 48x - 32 = 0.$
18. $-z^2 + y^2 + x^2 + 2z + 4y + 8x + 19 = 0.$
19. $z^2 + 2y^2 + 4x^2 - 6z - 4y - 16x - 21 = 0.$
20. $4x^2 - z^2 - 2y = 0.$
21. $16z^2 + 9x^2 + y^2 - 32z - 36x - 144y + 52 = 0.$
22. $4x^2 - z^2 + 4y^2 + 16x + 2z - 8y + 19 = 0.$
23. $4x^2 + z^2 + 4y^2 + 16x + 2z - 8y + 5 = 0.$
24. $16x^2 - 9z^2 + 36y^2 - 64x - 18z - 36y + 64 = 0.$
25. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 8z - 15 = 0.$
26. $4z^2 - 8x^2 - 4y = 0.$
27. $-2x^2 + 3z^2 + y^2 + 4x + 12z + 4y + 14 = 0.$

28. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 18z + 5 = 0.$
29. $16x^2 + 9y^2 + z^2 - 32x - 36y - 144z + 52 = 0.$
30. $-\frac{1}{25}z^2 + \frac{1}{4}y^2 + x^2 - 20z + 32y + 36x - 1152 = 0.$

ЗАВДАННЯ 2.11.

Обчислити границі:

1. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20};$
 c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x};$
 c) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8};$
3. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27};$
 c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$
4. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2};$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$
5. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6};$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{4+x}}{3x^2 - 4x + 1};$
6. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27};$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x}{x+8} \right)^{-3x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5};$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1};$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5};$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1};$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3};$

- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}};$
7. a) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1};$
- c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}};$
8. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$
9. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{6+x}}{2x^2 - 7x - 15};$
10. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3};$
- c) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{17+3x} - \sqrt{12+2x}}{x^2 + 8x + 15};$
11. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$
12. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}};$
13. a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{1+2x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x + 11};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{2+3x}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 3x + 4}{-2x^2 - 5x + 8};$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}};$$

$$14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{8-x} - 3};$$

$$16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$$

$$17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8};$$

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x}{x+8} \right)^{-3x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}.$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{4+x}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}.$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{6+x}}{2x^2 - 7x - 15};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{17+3x} - \sqrt{12+2x}}{x^2 + 8x + 15};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{1+2x}.$$

26. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$

27. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x};$

28. a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}};$

29. a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$

30. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{8-x} - 3};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x + 11};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{2+3x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 3x + 4}{-2x^2 - 5x + 8};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}.$

ЗАВДАННЯ 2.12.

Знайти похідні функцій:

1. а) $y = x + \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}};$

г) $y = (\arctg x)^{\sin 2x};$

$$\text{б)} y = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\text{в)} y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$2. \quad \text{а)} y = 5\sqrt[5]{x^3 + 3x^2 - \frac{1}{x}};$$

$$\text{б)} y = x(\sin \ln x + \cos \ln x);$$

$$\text{в)} y = \frac{1 + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$3. \quad \text{а)} y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2};$$

$$\text{б)} y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} - \ln(x^2 - 5x);$$

$$\text{в)} y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}};$$

$$4. \quad \text{а)} y = x + \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^3}};$$

$$\text{б)} y = 2^{\sin x} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2};$$

$$\text{в)} y = x \arcsin \sqrt{x} + \ln \sqrt{1 + x};$$

$$5. \quad \text{а)} y = \sqrt{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}};$$

$$\text{б)} y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}});$$

$$\text{в)} y = \operatorname{arctg} \sin x - 5^{\ln x};$$

$$\text{д)} x^3 + y^3 + 3xy = 0;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = (\cos 2x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{д)} xy = \operatorname{ctg} y;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = x^{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{д)} y = e^y + 4x;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = x^{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{д)} y = 7x - \operatorname{ctg} y;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = (\operatorname{tg} x)^{\cos 2x};$$

$$\text{д)} xy - 6 = \cos y;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$$

6. а) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}$; г) $y = (x - 2)^{\sin 2x}$;
 б) $y = 3 \operatorname{tg}^2 5x - \log_3 (x^2 - x)$; д) $\operatorname{ctg} (x + y) = 5x$;
 в) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$; е) $\begin{cases} x = (t - 1)^{\frac{2}{3}}, \\ y = \sqrt{t - 1}. \end{cases}$
7. а) $y = 3^3 \sqrt{x^5 - 2/x}$; г) $y = (x^2 - x)^{\sqrt{x}}$;
 б) $y = \sin^2 3x \cos^3 2x$; д) $3y = 7 + xy^3$;
 в) $y = 5^{\arcsin 2x} - \log_5 (x^2 + 1)$; е) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$
8. а) $y = \log_3 \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$; г) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin x}$;
 б) $y = 3^{\operatorname{ctg} x} - \arcsin \sqrt{x}$; д) $y^2 + x^2 = \sin y$;
 в) $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1 + \ln(x-1)}}$; е) $\begin{cases} x = (2t + 3) \operatorname{cost}, \\ y = 3t^3. \end{cases}$
9. а) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1 + x^2}{5x - 3}}$; г) $y = (1 + 3x)^{\operatorname{arctg} x}$;
 б) $y = e^{\sin x} \operatorname{tg}^3 2x$; д) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$;
 в) $y = \ln \arcsin \sqrt{x} + \cos^3 5x$; е) $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
10. а) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$; г) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{arccos} x}$;
 б) $y = 3^{\operatorname{ctg} x} \cos^3 \sqrt{x}$; д) $\ln y - \frac{y}{x} = 7$;

$$\text{в)} y = \ln \arccos 2x + \operatorname{tg} \sqrt[3]{1+x^2};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$11. \quad \text{а)} y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^3+x+1}};$$

$$\text{г)} y = x^{1/x};$$

$$\text{б)} y = (e^{\cos x} + x)^2;$$

$$\text{д)} y = x + \operatorname{arctg} y;$$

$$\text{в)} y = \ln \sin(x^2 + 3x);$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \ln^3 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$$

$$12. \quad \text{а)} y = \frac{\sin x}{\cos^2 x};$$

$$\text{г)} y = x^{\ln x};$$

$$\text{б)} y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\text{д)} xy^2 - y^3 = 4x - 5;$$

$$\text{в)} y = \arcsin(x^2 + 3);$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \frac{1}{t+2}, \\ y = \frac{t}{t+2}. \end{cases}$$

$$13. \quad \text{а)} y = x^2 \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{г)} y = (\operatorname{ctg} x)^{\ln x};$$

$$\text{б)} y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}};$$

$$\text{д)} y^2 = x + \ln \frac{y}{x};$$

$$\text{в)} y = 5^{\arccos 2x^2};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$$

$$14. \quad \text{а)} y = \frac{2x+3}{\sqrt{5x^2-4x+1}};$$

$$\text{г)} y = x^{-\operatorname{tg} x};$$

$$\text{б)} y = \sin x - x \cos x;$$

$$\text{д)} x^4 + x^2 y^2 + y = 4;$$

$$\text{в)} y = x^m \ln x;$$

$$15. \quad \text{а)} y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\text{б)} y = \frac{\sin^2 x}{3 + 2 \cos x};$$

$$\text{в)} y = \frac{x \ln x}{x - 1};$$

$$16. \quad \text{а)} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{x^3 + 1};$$

$$\text{б)} y = \sqrt[3]{81 + x^3};$$

$$\text{в)} y = 3^{\arctg x^2};$$

$$17. \quad \text{а)} y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}};$$

$$\text{б)} y = \ln \cos x + \operatorname{tg}^2 x;$$

$$\text{в)} y = \arctg(\sqrt{x} + x);$$

$$18. \quad \text{а)} y = 3\sqrt{x^5 + 5x^4 - 5/x};$$

$$\text{б)} y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}};$$

$$\text{в)} y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x);$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \frac{1 + t}{\sqrt{t^2 - 1}}. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = (\arctg x)^{\ln x};$$

$$\text{д)} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = (\arctg x)^x;$$

$$\text{д)} \sin^2(3x + y^2) = 5;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = (x + x^2)^x;$$

$$\text{д)} y^2 = \frac{x - y}{x + y};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$\text{г)} y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$\text{д)} x_3 + y^3 = 5x;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$$

19. а) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$;

б) $y = x - \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{tg}^3 x$;

в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x-2}}$;

г) $y = (\cos x)^x$;

д) $\sin y = xy^2 + 5$;

е) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

20. а) $y = 5\sqrt[5]{x^2 + 1} / x$;

б) $y = 2xe^{-x}$;

в) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $y = (\sin x)^x$;

д) $x^2 y^2 + x = 5y$;

е) $\begin{cases} x = \operatorname{arccost}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

21. а) $y = \ln^3 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$;

б) $y = 2 \operatorname{tg}^3(1+x^3)$;

в) $y = 3^{\operatorname{arctg} x^2}$;

г) $y = (x + \sqrt{x})^{\sin x}$;

д) $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$;

е) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

22. а) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x-1}}$;

б) $y = e^{\cos x} + \operatorname{ctg}^3 5x$;

в) $y = x \ln \operatorname{arccos} \left(\frac{1}{x} \right)$;

г) $y = (\operatorname{ctg} x)^x$;

д) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$;

е) $\begin{cases} x = \operatorname{arcsin} t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

23. а) $y = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

б) $y = \ln^2 x + \ln \cos x$;

г) $y = x^{\sin x}$;

д) $4 \sin^2(x+y) = x$;

$$\text{в)} \quad y = \frac{x \ln x}{1-x};$$

$$24. \quad \text{а)} \quad y = \frac{x}{\sqrt{4-x}};$$

$$\text{б)} \quad y = 2xe^{\sin x};$$

$$\text{в)} \quad y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$25. \quad \text{а)} \quad y = \ln^5 \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}};$$

$$\text{б)} \quad y = 3 \operatorname{ctg}^3 x^2 + 1;$$

$$\text{в)} \quad y = 2^{\arcsin x};$$

$$26. \quad \text{а)} \quad y = (x^2 - 4) \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{3x - 2}};$$

$$\text{б)} \quad y = \cos^3(x+2)^2 - 4;$$

$$\text{в)} \quad y = 5^{\arccos x^2};$$

$$27. \quad \text{а)} \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}};$$

$$\text{б)} \quad y = xe^{-x^2+4x};$$

$$\text{в)} \quad y = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{1-x^2};$$

$$\text{е)} \quad \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$$

$$\text{г)} \quad y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{д)} \quad \operatorname{arctg} y = 4x + 5y;$$

$$\text{е)} \quad \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$\text{г)} \quad y = x^{\arccos x};$$

$$\text{д)} \quad y^2 - x = \cos y;$$

$$\text{е)} \quad \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t \ln t. \end{cases}$$

$$\text{г)} \quad y = (\operatorname{tg} x)^{2x};$$

$$\text{д)} \quad \sin y = 7x + 3y;$$

$$\text{е)} \quad \begin{cases} x = t^5 - t, \\ y = t^3 - 2. \end{cases}$$

$$\text{г)} \quad y = (\sin x)^{\cos x};$$

$$\text{д)} \quad e^y = 4x - 7y;$$

$$\text{е)} \quad \begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$$

28. а) $y = x \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}};$

б) $y = \arctg^3(4x^2 + 3) - 2x^3;$

в) $y = \frac{\ln(x+1)}{\cos x^4};$

г) $y = (\arcsin 2x)^x;$

д) $\operatorname{tg} y = 4y - 5x;$

е) $\begin{cases} x = e^{5t}, \\ y = e^{-4t}. \end{cases}$

29. а) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{1 - x^2}};$

б) $y = 2x \ln^3(3x^2 - 4x);$

в) $y = 5^{\arctg \frac{1}{x}};$

г) $y = (x + 2)^{\ln x};$

д) $y^3 = 25x^2 - 4;$

е) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \frac{t}{t+1}. \end{cases}$

30. а) $y = \sqrt[5]{\frac{x^2}{\cos x - \sin x}};$

б) $y = 3 \sin^3(\cos x) + 1;$

в) $y = 3^{\arcsin x^2};$

г) $y = (x^2 - 1)^{\arccos x};$

д) $3x + \sin y = 5y;$

е) $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ 2.13.

Обчислити границі, використовуючи правило Лопітала.

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$

2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \sin\left(\frac{a}{x}\right).$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$.
4. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$.
5. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$.
6. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$.
7. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.
8. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x} + 1}{\sqrt{2 + x + x}}$.
9. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.
10. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.
11. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$.
12. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-3x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.
13. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}$.
14. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{b}{x}$.
15. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x - \frac{x^2}{2} - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x$.

16. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tgx} - 1}{tgx - x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{ctg(5x/2)}$.
17. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^{x^2} - 1)}{\cos x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{6x}$.
18. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg4x - 12tgx}{3\sin 4x - 12\sin x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos 6x)}$.
19. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$.
20. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-10x}$.
21. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^4 e^{-2x}$.
22. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{x}{3x - 1} - \frac{1}{\ln 3x} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$.
23. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{x^2} - 1)}{2 \cos x - 2}$.
24. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 7)}{\sqrt[7]{x - 3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tgx} - 1}{tgx - x}$.
25. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.
26. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{ctgx}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.
27. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$.
28. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{c^x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{2}{x^2 - x - 6} \right)$.

$$29. \quad a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x.$$

$$30. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x+x}}.$$

ЗАВДАННЯ 2.14.

Дослідити функцію та побудувати її графік.

$$1. \quad y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$2. \quad y = x \ln x$$

$$3. \quad y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$$

$$4. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$5. \quad y = \frac{2x+1}{x+3}$$

$$6. \quad y = \frac{e^x}{x}$$

$$7. \quad y = \frac{x}{(x+2)^2}$$

$$8. \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$9. \quad y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

$$10. \quad y = xe^x$$

$$11. \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 16}$$

$$12. \quad y = \frac{x^2}{x^2 + 9}$$

$$13. \quad y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$14. \quad y = \frac{\ln x}{x}$$

$$15. \quad y = \frac{5x}{4 - x^2}$$

$$16. \quad y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$$

$$17. \quad y = (x+2)e^{1-x}$$

$$18. \quad y = x + \frac{\ln x}{x}$$

$$19. \quad y = \frac{x}{9-x}$$

$$20. \quad y = e^{\frac{1}{5+x}}$$

21. $y = x^2 - 2 \ln x$

22. $y = \ln(x^2 + 1)$

23. $y = \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2$

24. $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$

25. $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$

26. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$

27. $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$

28. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

29. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

30. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

ЗАВДАННЯ 2.15.

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1. $S : x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, M_0(2, 1, -1).$

2. $S : x^2 + 4y^2 + z^2 = -2xy, M_0(-2, 1, 2).$

3. $S : x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, M_0(1, 2, 1).$

4. $S : x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8, M_0(-1, 1, 2).$

5. $S : 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13, M_0(2, 1, -1).$

6. $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, M_0(2, 1, -1).$

7. $S : x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, M_0(1, 2, -3).$

8. $S : x^2 + y^2 - xz - yz = 0, M_0(0, 2, 2).$

9. $S : x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2, M_0(1; 1; 1).$

10. $S : x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x = z, M_0(1, 1, 1).$

11. $S : z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y = 46, M_0(-1, -1, -1).$

12. $S : z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y, M_0(1, -1, 1).$

13. $S : z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y, M_0(-1,1,1).$
14. $S : x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, M_0(3,1,2).$
15. $S : 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9, M_0(1,-2,1).$
16. $S : z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2, M_0(2,1,0).$
17. $S : 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, M_0(1,2,1).$
18. $S : x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, M_0(3,1,4).$
19. $S : x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4, M_0(1,1,2).$
20. $S : x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5, M_0(-2,1,0).$
21. $S : x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11, M_0(1,4,-1).$
22. $S : x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8, M_0(0,2,0).$
23. $S : x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0, M_0(-1,-1,1).$
24. $S : x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, M_0(1,0,1).$
25. $S : 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0, M_0(1,-1,1).$
26. $S : x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = -8, M_0(1,1,0).$
27. $S : z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10, M_0(-1,1,3).$
28. $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15, M_0(-1,3,4).$
29. $S : z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, M_0(-7,1,8).$
30. $S : z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, M_0(1,-1,2).$

ЗАВДАННЯ 2.16.

Перевірити, чи задовольняє вказаному рівнянню функція $u(x, y)$:

$$1. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \frac{y}{x}.$$

$$2. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3), u = \ln \frac{y}{x} + x^3 - y^3.$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \ln(x^2 + (y+1)^2).$$

$$4. \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x}, u = x^y.$$

$$5. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$6. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = e^{xy}.$$

$$7. \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u = \sin^2(x - ay).$$

$$8. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = y \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$9. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$10. \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u = e^{-\cos(x+ay)}.$$

$$11. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = (x - y)(y - z)(z - x).$$

$$12. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u, u = x \ln \frac{y}{x}.$$

$$13. \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u = \ln(x^2 + y^2).$$

$$14. \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0, u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy).$$

15. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy = 0, u = e^{xy}.$
16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, u = \arctg \frac{x+y}{1-xy}.$
17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$
18. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$
19. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1, u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
20. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, u = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$
21. $9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = e^{-(x+3y)} \sin(x+3y).$
22. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = x e^{y/x}.$
23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \arctg \frac{y}{x}.$
24. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u = \arctg \frac{x}{y}.$
25. $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u = \ln(x + e^{-y}).$
26. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u = \arcsin \frac{x}{x+y}.$
27. $\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}, u = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}.$

$$28. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x-y}, u = \frac{x^2 + y^2}{x-y}.$$

$$29. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u}, u = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$30. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \ln(x^2 - y^2).$$

ЗАВДАННЯ 2.17

Дослідити на екстремум функцію:

$$1. \quad z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

$$2. \quad z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

$$3. \quad z = x^3 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$$

$$4. \quad z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$$

$$5. \quad z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$6. \quad z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

$$7. \quad z = x^3 y^2 (6 - x - y).$$

$$8. \quad z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (x > 0, y > 0)$$

$$9. \quad z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$10. \quad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

$$11. \quad z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$12. \quad z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$$

$$13. \quad z = x^2 y^3 (6 - x - y).$$

$$14. \quad z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$15. \quad z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0; y > 0)$$

16. $z = y\sqrt{x} - x^2 - y + 6x + 3.$
17. $z = x^3 + y^3 + 9xy.$
18. $z = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138y + 290.$
19. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
20. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$
21. $z = x^3 + y^3 - 6xy.$
22. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12.$
23. $z = xy^2(1 - x - y)$
24. $z = x^3 + y^3 - 15xy.$
25. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}.$
26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
27. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$
28. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$
29. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$
30. $z = x^3 + y^3 - 6xy.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. [Текст] : підручник у 3 кн. - Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
2. Пак В. В. Вища математика. [Текст] : підручник / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
3. Вища математика. [Текст] : підручник у 2 кн. - Кн.1. Основні розділи. / За ред. Г. Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. [Текст] : учеб. Пособие в 3 частях / Под общей реакцией А. П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1990-1991.
5. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. [Текст] : підручник у двох частинах. Ч. 1. / А. Я. Дороговцев. – К. Либідь, 1993. – 320 с.