УДК 621.01:531.3

Д-р техн. наук Т. М. Кадильникова, канд. техн. наук А. М. Криворучко,
Н. А. Силина, С. В. Кадильников

Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепропетровск

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ ОРГАНОВ КОЛОСНИКОВЫХ ГРОХОТОВ

В статье рассмотрена актуальная научная прикладная задача, суть которой состоит в разработке универсального численного метода определения собственных частот колебаний стержневых элементов рабочих органов колосниковых грохотов. Предложенный метод позволит в дальнейшем подбирать частоты вынужденных колебаний вибрирующих устройств в грохотах.

Ключевые слова: *собственные частоты; стержневой элемент; колосниковые грохоты.*

Введение

В настоящее время при проведении операций, связанных с дезинтеграцией насыпных материалов, находят широкое применение грохоты, у которых в качестве рабочего органа используются колосниковые решетки. Отличительной особенностью таких конструкций является их энергоэкономность при получении готовой продукции, а также высокая производительность. Все это достигается благодаря наличию гравитационных потоков насыпного материала в рабочих органах грохота и нелинейности колебаний непосредственно самих колосников, представляющих собой стержни постоянного сечения, подверженные изгибным деформациям. Поэтому при проектировании рабочих органов грохотов большое значение приобретают исследования изгибных колебаний стержней.

Аналитические методы расчета колебаний стержней, как правило, не отображают с необходимой точностью действительную картину их динамического состояния [1]. При этом их вибрационные нагрузки требует решения нелинейной задачи на собственные частоты и собственные формы колебаний. Существующие в настоящее время методы решения таких задач (метод конечных элементов, метод конечных разностей) имеют определенные недостатки, в частности, требуют использования специальных методов оптимизации матриц жесткости и инерции, что существенно усложняет алгоритм расчета, а также слабо адаптируются к решению задач с большим числом степеней свободы [2]. Вследствие этого необходимо использовать итерационные методы для определения собственных частот и собственных форм колебаний стержней, что, в конечном счете, определяет цель и задачи исследования.

Материалы и методика исследований

Построение геометрической и математической моделей нелинейной деформации гибкого стержня постоянного сечения, разработка и теоретическое обоснование применения универсальных итерационных методов получения собственных форм и частот колебаний определяют основы комплексной методики расчета и проектирования рабочих органов колосниковых грохотов.

Для определения собственных колебаний стержня по схеме эквивалентного бруса используем гипотезу плоского изгиба гибких стержней [3]. Первая форма и первая частота определяются минимизацией функционала Релея-Ритца [3]. Численное решение является устойчивым, так как минимизация осуществляется методом покоординатного спуска [4]. Для определения более высоких форм переход к численному решению осуществляется путем аппроксимации искомых собственных форм кубическим сплайном.

В данном случае для аппроксимации перемещений s используем полином 3-го порядка с четырьмя членами:

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

где $a_i, i = \overline{0,3}$ – неизвестные коэффициенты.

Тогда угол поворота θ рассматриваемого сечения имеет вид:

$$\theta(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2.$$

Граничные условия при этом будут следующими:

$$s(0) = a_0;\ \theta(0) = a_1;$$

$$s(l) = s_1 + \theta_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 = s_2;$$

$$\theta(l) = \theta_1 + 2a_2 l + 3a_3 l^3 = \theta_2, \qquad (1)$$

где l – длина стержня.

Из (1) определяются неизвестные коэффициенты a_2, a_3:

$$a_2 = \frac{s_2 - s_1}{l^2} - \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{l};$$

$$a_3 = \frac{\theta_2 + \theta_1}{l^2} - 2\cdot\frac{s_2 - s_1}{l^3}. \qquad (2)$$

Для определения собственных частот изгибных колебаний стержня используем энергетический метод [4].

Теория и анализ полученных результатов

Амплитудные потенциальная энергия P и кинетическая энергия T при этом определяются выражениями:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^l EI\cdot\left(\frac{d^2 s}{dx^2}\right)^2 dx;\ T = \frac{1}{2}\cdot\omega^2\int_0^l \rho F s^2 dx, \qquad (3)$$

где ρ, E плотность и модуль упругости материала стержня, соответственно; I, F – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня; ω – собственная частота колебаний стержня.

С учетом (2) функция s и ее вторая производная, входящие в выражение (3), будут иметь вид:

$$s = s_1 + \theta_1 x + \left(\frac{s_2 - s_1}{l^2} - \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{l}\right)x^2 + $$
$$+\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{l^2} - 2\cdot\frac{s_2 - s_1}{l^3}\right)x^3;$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = 2\left(\frac{s_2 - s_1}{l^2} - \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{l}\right) +$$
$$+ 6x\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{l^2} - 2\cdot\frac{s_2 - s_1}{l^3}\right). \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в (3) и интегрируя, получим выражения для потенциальной и кинетической энергий в виде:

$$P = \frac{12}{l^3}\left(\frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{6}\theta_1^2 l^2 + \frac{1}{6}\theta_2^2 l^2 - s_1 s_2 + \frac{1}{2}s_1\theta_1 l + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}s_1\theta_2 l - \frac{1}{2}s_2\theta_1 l - \frac{1}{2}s_2\theta_2 l + \frac{1}{6}\theta_1\theta_2 l^2\right);$$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2\rho F l\left(\frac{13}{35}s_1^2 + \frac{13}{35}s_2^2 + \frac{1}{105}\theta_1^2 l^2 + \frac{1}{105}\theta_2^2 l^2 - \right.$$
$$- \frac{9}{35}s_1 s_2 + \frac{11}{105}s_1\theta_1 l + \frac{13}{210}s_1\theta_2 l - \frac{13}{210}s_2\theta_1 l$$
$$\left. - \frac{11}{105}s_2\theta_2 l + \frac{1}{70}\theta_1\theta_2 l^2\right). \qquad (5)$$

Для нахождения собственной частоты колебаний стержня необходимо, согласно энергетического метода, найти максимальные потенциальную и кинетическую энергии. Для этого находим первые и вторые производные от выражения (5):

$$\frac{\partial P}{\partial s_1}=\frac{12EI}{l^3}\left(s_1-s_2+\frac{1}{2}\theta_1 l+\frac{1}{2}\theta_2 l\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial s_2}=\frac{12EI}{l^3}\left(-s_1+s_2-\frac{1}{2}\theta_1 l-\frac{1}{2}\theta_2 l\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1}=\frac{12EI}{l^3}\left(\frac{1}{2}s_1 l-\frac{1}{2}s_2 l+\frac{1}{3}\theta_1 l^2+\frac{1}{6}\theta_2 l^2\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_2}=\frac{12EI}{l^3}\left(\frac{1}{2}s_1 l-\frac{1}{2}s_2 l+\frac{1}{6}\theta_1 l^2+\frac{1}{3}\theta_2 l^2\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_1}=\frac{\rho Fl\omega^2}{2}\left(\frac{26}{35}s_1-\frac{9}{35}s_2+\frac{11}{105}\theta_1 l+\frac{13}{210}\theta_2 l\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_2}=\frac{\rho Fl\omega^2}{2}\left(-\frac{9}{35}s_1+\frac{26}{35}s_2-\frac{13}{210}\theta_1 l-\frac{11}{105}\theta_2 l\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1}=\frac{\rho Fl\omega^2}{2}\left(\frac{11}{105}s_1 l-\frac{13}{210}s_2 l+\frac{2}{105}\theta_1 l^2+\frac{1}{70}\theta_2 l^2\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2}=\frac{\rho Fl\omega^2}{2}\left(\frac{13}{210}s_1 l-\frac{11}{105}s_2 l+\frac{1}{70}\theta_1 l^2+\frac{2}{105}\theta_2 l^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s_1^2}=\frac{13\rho Fl\omega^2}{35};\quad \frac{\partial^2 T}{\partial s_2^2}=\frac{13\rho Fl\omega^2}{35};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_1^2}=\frac{\rho Fl^3\omega^2}{105};\quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2}=\frac{\rho Fl^3\omega^2}{105};$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s_1\partial s_2}=-\frac{12EI}{l^3};\quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_1\partial \theta_1}=\frac{6EI}{l^2};\quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_1\partial \theta_2}=\frac{6EI}{l^2};$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s_2\partial \theta_1}=-\frac{6EI}{l^2};\quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_2\partial \theta_2}=-\frac{6EI}{l^2};\quad \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_1\partial \theta_2}=\frac{2EI}{l};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s_1\partial s_2}=-\frac{9\rho Fl\omega^2}{70};\quad \frac{\partial^2 T}{\partial s_1\partial \theta_1}=\frac{11\rho Fl^2\omega^2}{210};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s_1\partial \theta_2}=\frac{13\rho Fl^2\omega^2}{420};\quad \frac{\partial^2 T}{\partial s_2\partial \theta_1}=-\frac{13\rho Fl^2\omega^2}{420};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s_2\partial \theta_2}=-\frac{11\rho Fl^2\omega^2}{210};\quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_1\partial \theta_2}=\frac{\rho Fl^3\omega^2}{140}.$$

После минимизации функционала энергии находятся собственные частоты колебаний стержня. Для реализации предложенного метода были созданы соответствующие программы, с помощью которых была решена задача нахождения собственных частот колебаний тонкой стержня из стали, закрепленного одним концом, на который действует центробежная сила от эксцентрика, вращающегося на валу электродвигателя. Расчетная схема стержня имеет следующий вид.

Все элементы стержня $N=21$ одинаковых размеров.

Размер стержня: $d=0{,}003\ м$; $L=0{,}3\ м$.

Момент инерции: $J_k=\dfrac{\pi\cdot d^4}{64}\ \ м^4$.

Длины элементов: $LL_k=\dfrac{L}{N}\ \ м$.

Площади сечений: $A_k=\dfrac{\pi\cdot d^2}{4}\ \ м^2$.

Свойства стали 65Г :

плотность : $\rho_k=7810\ кг/м^3$;

модуль упругости: $E_k=215\cdot 10^9\ МПа$;

модуль жесткости: $G=81\cdot 10^9\ МПа$.

Угол наклона оси элементов: $a_k=0$.

На свободном конце стержня предполагаем действие сосредоточенной силы от массы щупа измерительного приспособления:

$$F=9{,}81\cdot 0{,}005=0{,}04905\ \ Н\ .$$

Масса элементов: $m_k=\rho_k\cdot A_k\cdot LL_k\ кг$.

Представленный стандартный стержневой элемент имеет шесть степеней свободы.

Для стержневих элементов были построены стандартные расчетные матрицы:

а) матрица направляющих косинусов:

$$L_k=\begin{pmatrix}\cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

б) матрица жесткости элементов:

$$KE_k = \begin{bmatrix} \frac{E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 & \frac{-E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & 0 & \frac{-12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{4 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} & 0 & \frac{-6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{2 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} \\ \frac{-E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 & \frac{E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & \frac{-6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & 0 & \frac{12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & \frac{-6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{2 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} & 0 & \frac{-6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{4 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} \end{bmatrix};$$

в) матрица масс элементов:

$$M_k = m_k \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11 \cdot LL_k}{210} & 0 & \frac{9}{70} & \frac{-13 \cdot LL_k}{420} \\ 0 & \frac{11 \cdot LL_k}{210} & \frac{(LL_k)^2}{105} & 0 & \frac{13 \cdot LL_k}{420} & \frac{-(LL_k)^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13 \cdot LL_k}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \frac{-11 \cdot LL_k}{210} \\ 0 & \frac{-13 \cdot LL_k}{420} & -\frac{(LL_k)^2}{140} & 0 & \frac{-11 \cdot LL_k}{210} & \frac{(LL_k)^2}{105} \end{bmatrix}.$$

Результаты решения задачи показали, что для описания формы стержня достаточно четырех участков по его длине.

Выводы

1. Предложен и разработан численный алгоритм нахождения собственных частот колебаний стержня, являющегося важнейшим конструктивным элементов рабочих органов колосниковых грохотов.

2. На основании численного примера определены показательные зоны форм колебаний, исследование которых позволяет подбирать частоты вынужденных колебаний вибрирующих устройств.

Список литературы

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / Филиппов А. П. – М. : Машиностроение, 1970. – 736 с.
2. Халфман Р. Л. Динамика / Халфман Р. Л. – М. : Наука, 1972. – 568 с.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания : Справочник в 3-х томах. Том. 3 / Под ред. И. А.Б иргера и Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 568 с.
4. Бабенко А. Е. Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированнного состояния при статических и вибрационных нагружениях / Бабенко А. Е. – К. : 1996. – 95 с.

Одержано 12.12.20011

Кадильникова Т.М., Криворучко О.М., Силіна Н.О., Кадильников С.В. Визначення власних частот згинальних коливань робочих органів колосникових грохотів

У статті розглянуто актуальну наукову прикладну задачу, суть якої полягає у розробці універсального чисельного методу визначення власних частот коливань стрижневих елементів робочих органів колосникових грохотів. Запропонований метод дозволить у подальшому добирати частоти вимушених коливань вібруючого обладнання у грохотах.

Ключові слова: *власні частоти; стрижневий елемент; колосникові грохоти.*

Kadilnikova T., Krivoruchko A., Silina N., Kadilnikov S. Determining own frequency oscillations of working bodies pillars including bar screens

Current scientific applied task, the essence of which is to develop a universal numerical method for determining their own frequency oscillations of working bodies pillars including bar screens was described. The proposed method gives later possibilities to select the frequency of forced oscillation vibrating device screens.

Key words: *own frequency; pillars; bar screens.*