

УДК 621.313.33:629.423.24

Кулагін Дмитро Олександрович, канд. техн. наук, доцент

Андрієнко Петро Дмитрович, д-р техн. наук, професор

Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя, Україна,

e-mail: nemix123@rambler.ru

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ РАЦІОНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЯГОВИМ ПРОЦЕСОМ

### 1. Математичне формулювання задачі раціонального керування тяговим процесом.

Закон раціонального керування тягою при русі моторвагонного рухомого складу на похилих профілях залізничного шляху повинен в загальному випадку забезпечити:

1. Оптимальні показники руху поїзда при виконанні обмежень, що покладаються на дані величини з боку графіка руху. При цьому необхідно враховувати, що в процесі оперативного управління залізничною лінією визначені графіком руху часи руху перегоном можуть змінюватися в певних межах, а також можуть вводиться нові та відмінюватися старі обмеження за швидкостями.

2. Найкращі показники роботи елементів тягової електропередачі при виконанні обмежень, що залежать від параметрів елементів тягової електропередачі та відповідних виконавчих механізмів механічної частини поїзда.

В загальному випадку задачу знаходження закону раціонального керування можна сформулювати як задачу знаходження екстремуму (найбільшого або найменшого значення) функції  $f(x)$   $n$ -мірного векторного аргументу  $x$  при врахуванні певних обмежень [1]. Дану задачу можна описати наступною сукупністю виразів [1]:

$$\min f(x), \quad (1)$$

де має місце приналежність

$$x \in X. \quad (2)$$

В (2)  $X$  - деяка підмножина  $n$ -мірного евклідова простору  $E_n$ . Тобто  $X$  - допустима множина задачі (1), (2), а точки, що належать  $X$  - допустимі точки задачі (1), (2).

В якості керуючих змінних розглядаємо електромагнітні змінні  $x$ , якщо тривалістю електромагнітних перехідних процесів можна знехтувати в порівнянні з електромеханічними.

У випадку, коли тривалістю електромагнітних перехідних процесів або їх частини не можна нехтувати в порівнянні з електромеханічними процесами, необхідно врахувати відповідне диференціальне рівняння даних змінних:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x, \Omega, t, u), \quad (3)$$

де мають місце обмеження:

$$\begin{cases} i \in [1, l]; \\ l \leq n. \end{cases} \quad (4)$$

В (3) в якості вектора керувань  $u$  виступають відповідні електромагнітним перехідним процесам або їх частинам, якими не можна нехтувати в порівнянні з електромеханічними процесами, а також їхнім диференціальним рівнянням характеристичні коефіцієнти, в якості яких можна використовувати значення напруг.

До локальних обмежень, які виступають вихідними при постановці задачі (1), (2), що виникають з боку тягового асинхронного двигуна, можна віднести:

- обмеження за нагріванням, яке визначається граничною припустимою температурою кривою елементів тягової машини;
- обмеження за максимальним значенням модуля напруги живлення;
- обмеження потужності, що споживається, які пов'язані з граничною характеристикою дизель-генератора;
- обмеження за умовою механічної міцності ротора тягової асинхронної машини.

Відповідно до задачі (1), (2) будемо вважати  $x$  точкою безумовного локального екстремуму задачі, а в точці  $x^j$  буде досягнуто екстремум функції

$$f(x^1, x^2, \dots, x^{j-1}, x^j, x^{j+1}, \dots, x^n) \quad (5)$$

однієї змінної  $x^j$ , яку можна отримати з функції  $f(x)$ , якщо зафіксувати всі змінні, окрім змінної  $x^j$ , прийнявши умову

$$x^i = x^j, \quad (6)$$

причому  $i \neq j$ .

Відповідно до [1] можна зазначити, що для того, щоб в точці  $x$  функція  $f(x)$  мала безумовний локальний екстремум, необхідно, щоб всі її частинні похідні перетворювались в точці  $x$  в нуль:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{x=\hat{x}} = 0, \quad i \in [1, n]. \quad (7)$$

Умову (7) покажемо в наступній формі:

$$\text{grad} [f(x)] = 0. \quad (8)$$

Відповідно до [1] для того, щоб функція  $f(x)$ , яка двічі неперервно диференційована, містила в стаціонарній точці  $x$  безумовний локальний екстремум, необхідно щоб матриця її похідних другого порядку була невід'ємно (для мінімуму) або недодатньо (для максимуму) визначеною і достатньо, щоб вона була додатньо (від'ємно) визначеною.

Варіаційна задача на умовний екстремум для забезпечення коректності рішення потребує вирішення ізопериметричної задачі [2] з додатковими функціоналами [3]. Для спрощення рішення задачі пошуку закону раціонального керування величиною модуля вектора поточкозчеплення тягового асинхронного двигуна скористаємося алгоритмом [3], за яким поставлену задачу будемо вирішувати поетапно: спочатку знаходити рішення задачі на умовний екстремум у вигляді зв'язку з якимись параметрами роботи тягової електропередачі поїзда або параметрами її елементів, а потому, використовуючи отримане співвідношення і в залежності від обраного функціоналу  $\phi$ , визначати закон зміни одного з параметрів в умові оптимальності.

Визначимо вимоги до побудови певного обраного функціоналу  $\phi$ , яким будемо задавати умову зміни певного параметра тягової електропередачі або її елемента, відносно якої будемо вирішувати задачу мінімізації чи максимізації.

Обмежимо граничні значення параметра функціоналу  $\phi$  ділянкою  $[a; b]$ .

Множина всіх кусково-гладких вектор-функцій на вказаному інтервалі  $[a; b]$  є функціональним простором [2], причому кожна кусково-гладка вектор-функція є елементом або точкою цього простору.

Тоді відповідно до термінології функціонального аналізу [2] можна записати узагальнений вигляд функціоналу функції  $f(x)$  :

$$\phi = \int_a^b f(x)dx. \quad (9)$$

Можна зробити узагальнюючий висновок про мету побудови вказаного функціоналу (9) як математичного виразу ізопериметричної задачі, відповідно до якої знаходиться мінімально можлива або максимально можлива миттєва площа під графіком функції  $f(x)$  на вказаному інтервалі  $[a;b]$ , що можна проілюструвати рис. 1.

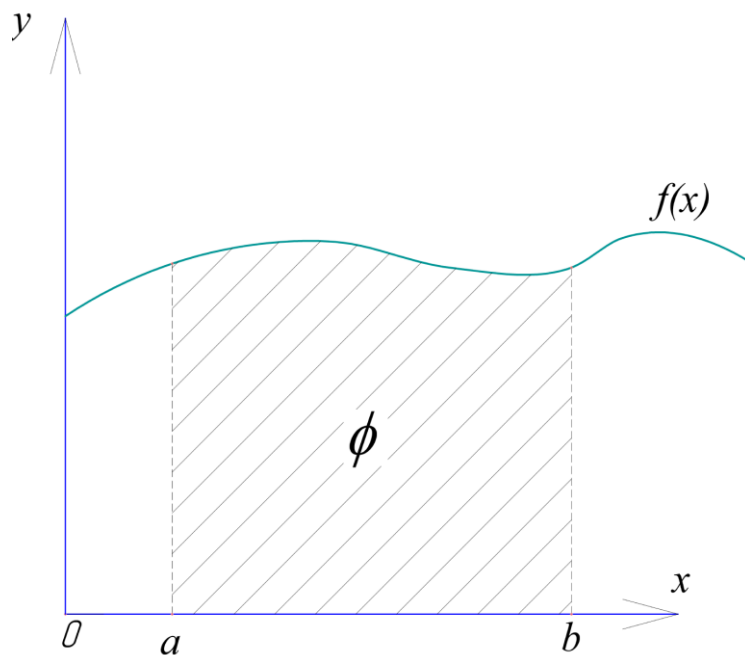


Рис. 1. Графічна інтерпретація фізичного змісту функціоналу виду (9)

Перевірку знаковизначеності матриць похідних другого порядку виконаємо на основі критерію Сильвестра [1, 2], відповідно до якого необхідною і достатньою умовою додатної визначеності квадратичної форми  $(x, Ax)$ , де  $A = [a_{ij}]$  - симетрична квадратна матриця розмірності  $n$ , є виконання системи  $n$  нерівностей (10).

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} > 0; \\ \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| > 0; \\ \dots; \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| > 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Необхідною і достатньою умовою від'ємної визначеності квадратичної форми  $(x, Ax)$ , є виконання системи  $n$  нерівностей (11).

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^n \cdot a_{11} > 0; \\ (-1)^n \cdot \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| > 0; \\ \dots; \\ (-1)^n \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| > 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

## 2. Вирішення задачі раціонального керування тяговою системою.

Задамося картою руху поїзда (рис. 2), відповідно до якої на основі тягових розрахунків та поїздок досвідчених машиністів та машиністів-інструкторів виділено ділянку відстанню від  $S_1$  до  $S_2$ , на якій машиніст або система автоведення повинні надати поїзду якомога більшу швидкість в часових межах від  $t_1$  до  $t_2$ , причому такого набору швидкості буде достатньо для подолання певної частини підйому або всього підйому в цілому і такий режим руху забезпечить при русі похилою ділянкою профілю залізничного шляху перед наближенням до підйому достатнє збільшення швидкості руху поїзда на величину, рівну половині значення зменшення швидкості при русі підйомом, відповідно до досліджень, проведених вище.

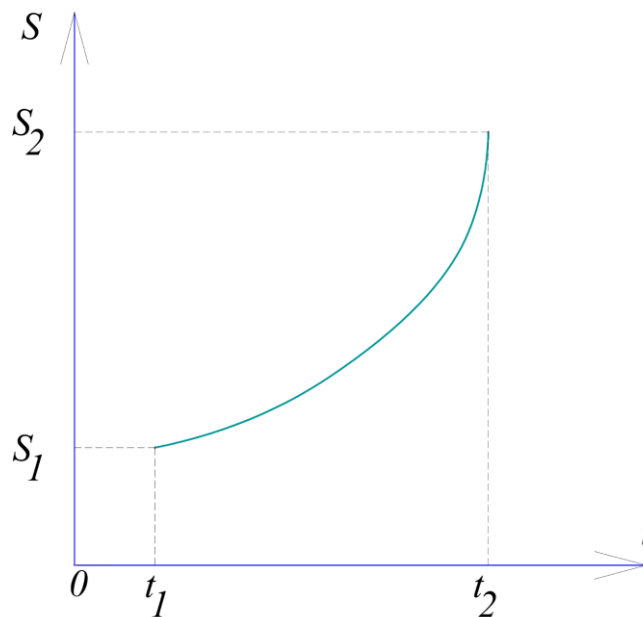


Рис. 2. Приблизна карта руху поїзда в координатній системі «відстань-час»

Відповідно до основних задач варіаційного числення [4] зведемо пошук оптимальної кривої виду

$$S = S(t). \quad (1)$$

до задачі пошуку такої гладкої лінії виду (12), що з'єднує точки маршрутної карти руху поїзда з координатами  $(t_1, S_1)$  та  $(t_2, S_2)$ , яка при обертанні її навколо осі часу утворює поверхню найменшої площі. Формулювання задач подібного класу з такими умовами є коректним з огляду на дослідження цього питання в роботі [5].

Варто зазначити, що задача пошуку раціональної кривої, яка з'єднує маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами  $(t_1, S_1)$  та  $(t_2, S_2)$  для досягнення оптимальності певного критерію може вирішуватись на сонові критеріїв максимуму провізної здатності, мінімуму часу ходу та витрат первинного енергоносія на тягу, мінімуму собівартості перевезень, максимуму роботи, що її виконує моторвагонний поїзд та багатьох інших критеріїв. Таким чином вказана задача є багатокритеріальною [6, 7].

В задачах багатокритеріальної оптимізації при числі показників два та більше суттєво ускладнюється процедура алгоритмізації рішення, аналізу та відповідна послідуоча інтерпретація отриманих результатів. Тому серед відомих показників ефективності перевізного процесу для моторвагонного електротранспорту обирають головний, всі послідуочі дії та параметри задачі підчиняючи відповідно його вимогам. Інші критерії відбору рішень, як правило, не співпадають з головним критерієм і мають назву локальних [6].

Виділимо на дузі рис. 2 елементарну ділянку  $dS$ , яку повинен пройти поїзд за елементарний час  $dt$ , що показано на рис. 3.

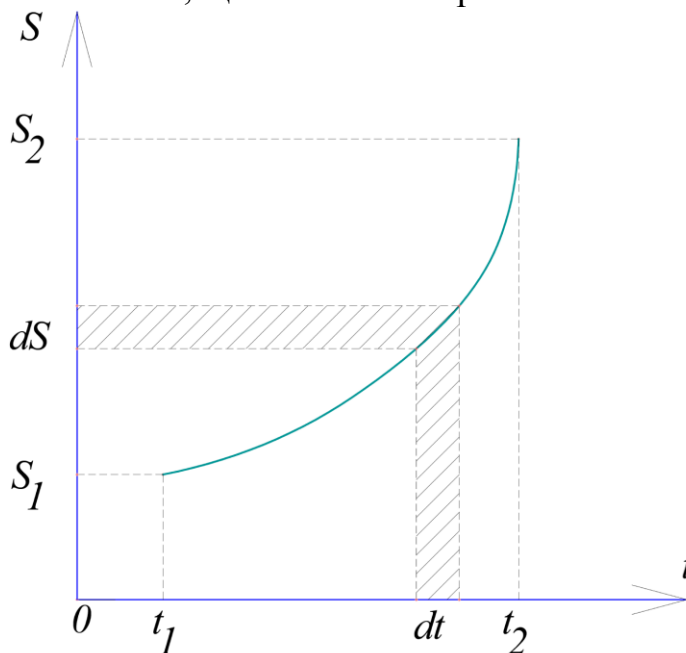


Рис. 3. Виділення елементарної ділянки на дузі руху в координатній системі «відстань-час»

При обертанні елемента  $dS$  (рис. 3) утворюється поверхня (рис. 4).

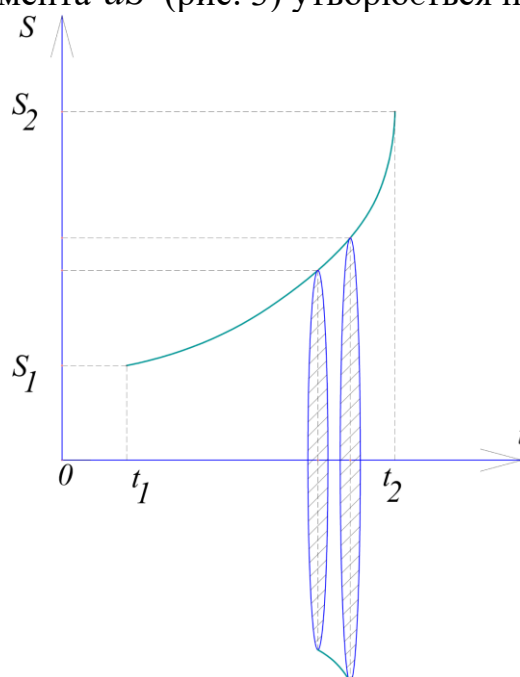


Рис. 4. Поверхня, розташована між двома заштрихованими еліпсами, що утворюється при обертанні елементарної дуги навколо осі часу

Дана поверхня має елементарну площу

$$d\Pi = 2 \cdot \pi \cdot S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2} dt. \quad (1)$$

3)

Тоді при обертанні всієї лінії виду (12) утворюється поверхня (рис. 5), що має площу

$$\Pi = 2 \cdot \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2} dt. \quad (14)$$

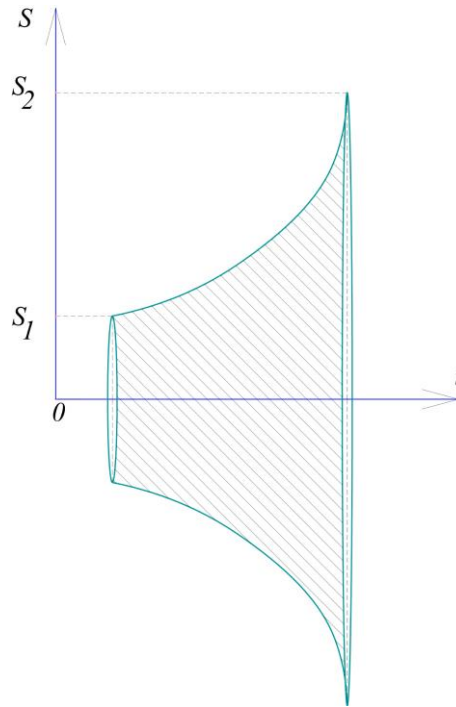


Рис. 5. Поверхня, що утворюється при обертанні повної дуги навколо осі часу

Таким чином зводимо задачу до пошуку мінімуму функціоналу (14), який описує фігуру, показану на рис. 5, за наявності системи межових умов

$$\begin{cases} S(t_1) = S_1; \\ S(t_2) = S_2. \end{cases} \quad (15)$$

За теоретичною методикою [4] проведемо дослідження функціоналу виду

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) dt \quad (16)$$

записаного в загальному вигляді на основі функціоналу (14).

Відносно функції  $\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right)$  встановимо, що вона має неперервні частинні похідні за всіма аргументами до другого порядку включно.

Знайдемо диференціал функціоналу (16). Надамо функції  $S(t)$  прирощення  $h(t)$  і запишемо вираз для прирощення всього функціоналу:

$$\Delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, [S+h], \left[\frac{dS}{dt} + \frac{dh}{dt}\right]\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) dt, \quad (17)$$

або з урахуванням неперервності похідних за всіма аргументами

$$\Delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[ F_S\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot h + F_{\frac{dS}{dt}}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{dh}{dt} \right] dt + \Delta\phi_m, \quad (18)$$

де  $\Delta\phi_m$  - члени розкладу функціоналу, що мають порядок вище першого відносно  $h$  та  $\frac{dh}{dt}$ .

На основі (15) з огляду на те, що функції  $S(t)$  та  $S(t) + h(t)$  повинні задовольняти умові (15) повинна виконуватись і умова

$$\begin{cases} S(t_1) + h(t_1) = S_1; \\ S(t_2) + h(t_2) = S_2, \end{cases} \quad (19)$$

що дає можливість записати

$$\begin{cases} h(t_1) = 0; \\ h(t_2) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Інтеграл, що знаходиться в правій частині виразу (18), є лінійним функціоналом відносно змінної  $h(t)$  і відрізняється від прирощення  $\Delta\phi$  лише на доданок, що має порядок малості вище першого відносно норми елементу  $\|h\|_1$ , тобто він є диференціалом функціоналу (16). Таким чином можна записати

$$\delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[ F_S\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot h + F_{\frac{dS}{dt}}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{dh}{dt} \right] dt. \quad (21)$$

Виконаємо інтегрування за частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( F_{\frac{dS}{dt}} \cdot \frac{dh}{dt} \right) dt = F_{\frac{dS}{dt}} \cdot h \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( h \cdot \frac{d}{dt} F_{\frac{dS}{dt}} \right) dt. \quad (2)$$

На основі (20) диференціал функціоналу (21) запишемо у вигляді:

$$\delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[ F_S \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) - \frac{d}{dt} F_{\frac{dS}{dt}} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) \right] \cdot h(t) dt. \quad (2)$$

Якщо функція  $S(t)$  надає мінімум функціоналу (16), то у відповідності до теореми [4], за якою якщо функціонал досягає в точці мінімуму або максимуму, тобто сама точка є екстремальною для функціоналу, то диференціал функціоналу, якщо він існує, в цій точці обертається в нуль, що в нашому випадку дає можливість записати:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ F_S - \frac{d}{dt} F_{\frac{dS}{dt}} \right] \cdot h(t) dt = 0. \quad (2)$$

Рівність (24) повинна мати місце для довільних функцій  $h(t)$ , що задовольняють межовим умовам (20). Це є можливим, якщо функція  $h(t)$  множить на нуль, тобто при виконанні рівності

$$F_S \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) - \frac{d}{dt} F_{\frac{dS}{dt}} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) = 0. \quad (2)$$

Для доведення правильності даного твердження скористаємося лемою Лагранжа.

Припустимо, що в деякій точці  $t_0$ , для якої виконується рівність  $t_1 < t_0 < t_2$  функція  $F(t) \neq 0$ .

Припустимо, що  $F(t_0) > 0$ . Оскільки функція  $F(t)$  неперервна, то існує такий інтервал  $(\xi_1, \xi_2) \subset [t_1, t_2]$ , що містить точку  $t_0$ , для якого  $F(t) > 0$ .

В якості  $F(t)$  оберемо наступну функцію:

$$h(t) = \begin{cases} (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2, & \text{якщо } t \in (\xi_1, \xi_2), \\ 0, & \text{якщо } t \notin (\xi_1, \xi_2). \end{cases}$$

Обрана таким чином функція  $F(t)$  є неперервно диференційованою і задовольняє умові (20). Проте на цій функції

$$\int_{t_1}^{t_2} [F(t) \cdot h(t)] dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(t) \cdot (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2 > 0,$$

через те, що під знаком інтегралу стоїть додатна функція. Отримано супереч, бо повинно виконуватись наступне:

$$\int_{t_1}^{t_2} [F(t) \cdot h(t)] dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(t) \cdot (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2 = 0,$$

що підтверджується лемою Лагранжа, отже можна зробити висновок, що вираз (25) та теоретичне припущення перед ним є вірним.

Розглянемо другий випадок і припустимо, що  $F(t_0) < 0$ . Оскільки функція  $F(t)$  неперервна, то існує такий інтервал  $(\xi_1, \xi_2) \subset [t_1, t_2]$ , що містить точку  $t_0$ , для якого  $F(t) < 0$ .

В якості  $F(t)$  оберемо наступну функцію такого ж виду як і при попередніх міркуваннях. Обрана таким чином функція  $F(t)$  є неперервно диференційованою і задовольняє умові (20). Проте на цій функції

$$\int_{t_1}^{t_2} [F(t) \cdot h(t)] dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(t) \cdot (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2 < 0,$$

через те, що під знаком інтегралу стоїть від'ємна функція. Отримано супереч, бо повинно виконуватись наступне:

$$\int_{t_1}^{t_2} [F(t) \cdot h(t)] dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(t) \cdot (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2 = 0,$$

що підтверджується лемою Лагранжа, отже можна зробити висновок, що вираз (25) та теоретичне припущення перед ним є вірним.

Рівняння, записані у формі (25) мають назву рівняння Ейлера.

Таким чином функція  $S(t)$ , що є рішенням поставленої задачі, повинна задовольняти рівнянню Ейлера, яке є необхідною умовою слабкого мінімуму функціоналу (3.257) при межових умовах (15) [4].

Запишемо рівняння Ейлера в розгорнутій формі [4]:

$$\begin{aligned}
& F_S \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) - F_{\frac{dS}{dt}, t} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) - F_{\frac{dS}{dt}, S} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{dS}{dt} - \\
& - F_{\frac{dS}{dt}, \frac{dS}{dt}} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Дане рівняння являє собою диференціальне рівняння другого порядку відносно невідомої функції  $S(t)$ . Загальне рішення цього рівняння містить дві довільні сталі, які можна визначити за допомогою двох межових умов (15).

За стандартною термінологією [2] така функція  $S(t)$  буде мати назву «екстремаль».

Оскільки функція, що знаходиться під знаком інтегралу у виразі (3.255) не залежить від  $t$ , то можна звести функціонал виду (16) до наступного вигляду:

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} F \left( S, \frac{dS}{dt} \right) dt. \tag{27}$$

Для функціоналу (27) запишемо рівняння виду (26):

$$F_S \left( S, \frac{dS}{dt} \right) - F_{\frac{dS}{dt}, S} \left( S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{dS}{dt} - F_{\frac{dS}{dt}, \frac{dS}{dt}} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = 0. \tag{28}$$

Помножимо дане рівняння на  $\frac{dS}{dt}$ :

$$\begin{aligned}
& F_S \left( S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{dS}{dt} - F_{\frac{dS}{dt}, S} \left( S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 - \\
& - F_{\frac{dS}{dt}, \frac{dS}{dt}} \left( t, S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Після аналітичних перетворень рівняння (29) зведемо до еквівалентного рівняння

$$\frac{d}{dt} \left[ F \left( S, \frac{dS}{dt} \right) - F_S \left( S, \frac{dS}{dt} \right) \cdot \frac{dS}{dt} \right] = 0, \tag{30}$$

з чого слідує

$$F\left(S, \frac{dS}{dt}\right) - F_S\left(S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{dS}{dt} = C, \quad (3)$$

1)

де  $C$  - константа, за якої виконуються межові умови (15).  
Запишемо підінтегральну частину виразу (15) у формі (31):

$$S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2} - S \cdot \frac{\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2}} = C, \quad (3)$$

2)

з чого можна записати, після аналітичних перетворень:

$$S = C \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2}, \quad (3)$$

3)

або в іншій формі:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{S^2 - C^2}{C^2}}. \quad (3)$$

4)

Виконавши інтегрування (34) отримаємо:

$$C \cdot \operatorname{arcch}\left(\frac{S}{C}\right) = t + C_1, \quad (3)$$

5)

де  $C_1$  - константа інтегрування.

Перепишемо (35) у вигляді:

$$S = C \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{t + C_1}{C}\right). \quad (3)$$

6)

Для визначення сталих коефіцієнтів  $C$  та  $C_1$  запишемо (36) з урахуванням (15):

$$\begin{cases} S_1 = C \cdot ch\left(\frac{t_1 + C_1}{C}\right); \\ S_2 = C \cdot ch\left(\frac{t_2 + C_1}{C}\right). \end{cases} \quad (37)$$

В залежності від умов (15) за дослідженнями [4] для подібних задач можливі наступні випадки:

1. Система рівнянь (37) має єдине рішення і відповідно існує єдина крива виду (12), яка задовольняє умові пошуку кривої, що з'єднує точки маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами  $(t_1, S_1)$  та  $(t_2, S_2)$ .

2. Система рівнянь (37) має два рішення. В цьому випадку дані функції записуються в загальному вигляді:

$$S = C^{(1)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(1)}}{C^{(1)}}\right), \quad (38)$$

де  $C^{(1)}$  та  $C_1^{(1)}$  - відповідна пара рішень для першої маршрутної кривої,

$$S = C^{(2)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(2)}}{C^{(2)}}\right), \quad (39)$$

де  $C^{(2)}$  та  $C_1^{(2)}$  - відповідна пара рішень для другої маршрутної кривої, після чого знаходимо відповідні значення функціоналів:

$$\Pi_1 = 2 \cdot \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left( C^{(1)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(1)}}{C^{(1)}}\right) \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{dt} \left[ C^{(1)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(1)}}{C^{(1)}}\right) \right] \right)^2} dt, \quad (40)$$

$$\Pi_2 = 2 \cdot \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left( C^{(2)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(2)}}{C^{(2)}}\right) \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{dt} \left[ C^{(2)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(2)}}{C^{(2)}}\right) \right] \right)^2} dt, \quad (41)$$

та за умовою найменшого значення даного функціоналу обирається відповідна крива, що з'єднує точки маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами  $(t_1, S_1)$  та  $(t_2, S_2)$ .

3. Система рівнянь (37) не має рішення. Це ставить питання про необхідність зміни відповідних координат точок маршрутної карти руху

моторвагонного поїзда з координатами  $(t_1, S_1)$  та  $(t_2, S_2)$  для досягнення одного з двох перших варіантів рішення даної задачі.

### **Висновки.**

Проведено математичну постановку задачі раціонального керування тягою, відповідно до якої визначено умови пов'язаної ізопериметричної задачі з додатковими функціоналами. Описані етапи вирішення поставленої задачі, згідно з якими спочатку необхідно знаходити рішення задачі на умовний екстремум у вигляді зв'язку з якимись параметрами роботи тягової електропередачі поїзда або параметрами її елементів, а потому, використовуючи отримане співвідношення і в залежності від обраного функціоналу, визначати закон зміни одного з параметрів в умові оптимальності. Вирішення вказаної задачі дозволяє отримати технологію раціонального керування тягою, яка дозволить збільшити коефіцієнт корисної дії тягової електропередачі поїзда.

### **Література**

1. Моисеев Н. Н. Методы оптимизации : учебное пособие для вузов по специальности «Прикл. математика» / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – 351 С.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению / Ахиезер Н. И. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 248 С.
3. Гаврилов П. Д. Выбор управления асинхронными электродвигателями. П. Д. Гаврилов, Е. К. Ещин // Изв. вузов. Электромеханика. – 1975. – № 1. – С. 50-55.
4. Методы классической и современной теории управления в 5 томах. Том 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / [Под ред. Егупова Н. Д., Пупкова К. А.]. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 744 С.
5. Чистов В. П. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока / Чистов В. П., Бондаренко В. И., Святославский В. А. – М. : Энергия, 1968. – 232 С.
6. Гетьман Г. К. Теория электрической тяги : монография : в 2 т. / Г. К. Гетьман – Д. : Изд-во Маковецкий, 2011. – Т. 2. – 363 С.
7. Гетьман Г. К. Анализ расхода электроэнергии на тягу карьерных поездов / Г. К. Гетьман, В. Е. Васильев // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2011. – Вип. 36. – С. 70-74.