МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв’язання основної задачі
динаміки точки аналітичними методами
для студентів спеціальності G9 (131)
«Прикладна механіка» всіх форм навчання

2026

Методичні вказівки до розв’язання основної задачі динаміки точки аналітичними методами для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» всіх форм навчання для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» всіх форм навчання/ Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко – Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2026. – 78 с.

Укладачі:
д-р ф-м. наук, професор В.І. Пожуєв,
к.т.н., доцент А.В. Пожуєв,
к.т.н., доцент В.Г. Шевченко,
ст. викладач О.С Омельченко

Рецензент,
к.т.н., доцент А.А. Скребцов

Відповідальний
за випуск:
ст. викладач О.С. Омельченко

Затверджено
на засіданні кафедри
«Теоретична та прикладна механіка»
Протокол № 4 від 25.12.2025 р.

Рекомендовано до видання
НМК ТФ
Протокол № 2 від 28.01.2026 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Вивчення розділу «Динаміка» в курсі теоретичної механіки розпочинається зі знайомства з основними законами і основними задачами динаміки однієї матеріальної точки. При цьому, якщо перша з двох задач динаміки точки, яка полягає у визначенні за відомим законом руху точки, сил, які цей рух викликали, і з математичної точки зору зводиться до обчислення других похідних від заданих функцій, не викликає у студентів принципових складнощів, то друга або основна задача динаміки уже тут в динаміці точки виглядає значно складнішою. Справа в тому, що для визначення закону руху точки за заданими силами і при заданих початкових умовах необхідно скласти і проінтегрувати в загальному випадку просторового руху систему із трьох звичайних диференціальних рівнянь в правих частинах яких стоять проекції прикладених до точки сил. З математики відомо, що в загальному випадку це можна зробити лише тоді, коли усі сили є сталими за величиною і напрямком. Але, як відомо, в динаміці, на відміну від статики, доволі часто зустрічаються змінні сили, і для такого випадку відсутні аналітичні методи інтегрування систем диференціальних рівнянь і доводиться використовувати наближені чисельні методи, орієнтовані на використання ЕОМ, зокрема, найбільш поширений метод Рунге-Кутта, про що детально сказано зокрема в навчальному посібнику авторів даних методичних вказівок [4].

Дані вказівки присвячені повному аналізу можливостей отримання аналітичних розв’язків, зокрема, у випадку прямолінійного руху точки. Наведені необхідні теоретичні відомості як з курсу теоретичної механіки, так і з теорії звичайних диференціальних рівнянь. Викладено порядок розв’язання основної задачі динаміки точки і приведені приклади розв’язання задач міні контрольних з даної тематики і виконання домашніх розрахунково-графічних робіт (РГР).

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. ОСНОВНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ ТОЧКИ І ПОРЯДОК ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ

Як відомо [1], диференціальні рівняння руху матеріальної точки виводяться із основного закону динаміки:

$$m\bar{W} = \bar{F}, \tag{1}$$

з врахуванням відомої з кінематики точки формули для знаходження прискорення:

$$\bar{W} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \tag{2}$$

і того факту, що в динаміці, на відміну від статики, сили в загальному випадку можуть бути змінними і загальні міркування треба вести, поклавши, що справедливе таке подання:

$$\bar{F} = \bar{F}\left(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right). \tag{3}$$

Якщо підставити (2) і (3) в рівняння (1), то прийдемо до наступної залежності:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}\left(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right). \tag{4}$$

Це і є диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі, яке є основою для розв’язання усіх задач динаміки точки. Зазначимо, що з математичної точки зору- це звичайне диференціальне рівняння другого порядку, в загальному випадку – нелінійне, причому незалежною змінною або аргументом тут виступає час t, а шуканою функцією є радіус-вектор точки відносно деякого нерухомого центру (в подальшому – початку інерціальної системи координат). Кінцевим підсумком розв’язання рівняння (4) з врахуванням початкових умов, про необхідність яких буде сказано нижче, є знаходження залежності:

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \tag{5}$$

яка з точки зору математики є частинним розв'язком рівняння (4), а з механічної точки зору дає закон руху точки, заданий у векторній формі.

Зауважимо, що, як правило, розв'язувати векторні диференціальні рівняння доволі складно і тому на практиці значно частіше використовуються диференціальні рівняння руху в скалярній формі, які можна отримати якщо спроектувати векторне співвідношення (4) на осі конкретної системи координат. При цьому найчастіше використовується прямокутна декартова система $Oxyz$ і тоді в проекціях на осі такої системи із (4) будемо мати:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z. \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z. \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z. \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases} \tag{6}$$

З математичної точки зору (6) – це зв'язана (через праві частини рівнянь) система трьох диференціальних рівнянь другого порядку, в загальному випадку нелінійних, відносно трьох шуканих функцій і частинний розв'язок системи з врахуванням початкових умов має такий вигляд:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \tag{7}$$

З кінематики точки відомо, що формули (7) дають закон руху точки в координатній формі.

Значно рідше в задачах використовується натуральна система координат $M_{\tau n b}$, в проекціях на осі якої з (4) приходимо до таких рівнянь:

$$\begin{gathered} m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = F_\tau\left(t, \sigma, \frac{d\sigma}{dt}\right), \\ m\frac{1}{\rho}(\frac{d\sigma}{dt})^2 = F_n\left(t, \sigma, \frac{d\sigma}{dt}\right), \\ O = F_b\left(t, \sigma, \frac{d\sigma}{dt}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Зазначимо, що на відміну від (6) рівняння в (8) не утворюють зв'язаної системи, причому третє співвідношення взагалі не являється диференціальним рівнянням. Найчастіше рівняння руху в такій формі застосовуються при дослідженні так званого невільного руху і тоді, як правило, перше з них є основним для знаходження закону руху вздовж траєкторії у вигляді:

$$\sigma = \sigma(t), \tag{9}$$

а за допомогою двох інших знаходяться динамічні реакції накладених на точку в'язей .

Нагадаємо, що точка називається вільною, якщо її рух залежить від прикладених до неї активних сил і початкових умов і невільною, якщо згідно з накладеними на неї обмеженнями вона змушена рухатися деякою поверхнею або лінією.

Тут ми будемо розглядати другу або основну задачу динаміки, яка для вільної точки полягає в знаходженні за заданими активними силами і початковими умовами закону руху точки. Зауважимо, що для невільної точки додатково до закону руху треба буде знаходити ще і реакції накладених на точку в'язей.

Усі задачі на визначення закону руху вільної точки необхідно розв'язувати в такому порядку.

1. Показати точку в довільний момент її руху і зобразити всі сили, які діють на неї.

Увага! На цьому етапі розв'язання задачі важливо не зробити такі помилки: 1) забути про якусь реально існуючу силу; 2) показати силу, якої насправді в даній задачі немає (для такої сили не можна записати ні значення, ні виразу), і ми не зможемо ввести таку силу або її проекції в праву частину диференціальних рівнянь руху. Щоб запобігти помилок такого типу слід пам'ятати, що сила є мірою взаємодії саме двох тіл, і тому для нашої точки для кожної сили треба вміти вказати джерело її виникнення.

2. Записати диференціальне рівняння руху точку у векторній формі у вигляді рівняння (4). При цьому в правій частині рівняння повинна стояти геометрична сума усіх показаних у пункті 1 сил.

3. Обрати конкретну систему координат і, спроектувавши рівняння виду (4) на осі цієї системи, записати диференціальні рівняння руху точки в скалярній формі. Зазначимо, що якщо користуватися прямокутною декартовою системою координат, то ми прийдемо до рівнянь виду (6).

4. Використовуючи відомі з курсу звичайних диференціальних рівнянь [5] аналітичні методи інтегрування таких рівнянь записати

загальний розв’язок системи виду (6). В загальному випадку він буде мати такий вигляд:

$$x = x(t, C_1, \dots, C_6);$$
$$y = y(t, C_1, \dots, C_6); \qquad (10)$$
$$z = z(t, C_1, \dots, C_6).$$

Тут $C1, \dots, C6$ – довільні сталі інтегрування, наявність і кількість яких з математичної точки зору викликана тим, що для розв’язання системи виду (6), де ми маємо три диференціальні рівняння, кожне з яких має другий порядок, доводиться шість разів брати невизначені інтеграли, кожен з яких дає одну довільну сталу. Формули виду (10) з наявністю в них довільних сталих дають так званий загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь виду (6).

З механічної точки зору наявність у формулах (10) довільних сталих означає, що під дією однієї і тієї ж системи сил точка може виконувати різні рухи. В якості прикладу такої задачі розглянемо задачу про стрибок у воду (рис. 1.1). Тут показані можливі траєкторії руху, які принципово відрізняються одна від одної, не зважаючи на те, що, якщо не враховується опір повітря, на точку діє лише одна і та ж сила – вага стрибуна.

Таким чином, якщо ми хочемо отримати єдиний (з математичної точки зору – частинний)розв’язок задачі нам мало знати лише прикладені до точки сили, а необхідно доповнити постановку задачі початковими умовами руху.

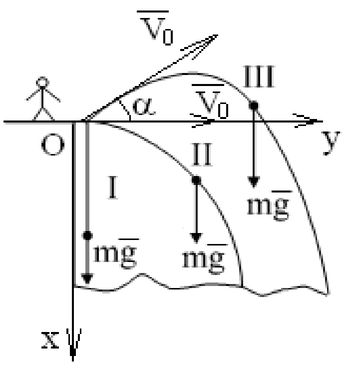

Рисунок 1.1 – Схема до задачі про стрибок у воду

5. Записати початкові умови руху точки у вигляді

при $t = t_0$, $\quad \bar{r} = \bar{r}_0$, $\quad \bar{v} = \bar{v}_0$, $\qquad$ (11)

тобто задати початкове положення точки і її початкову швидкість.

У випадку інтегрування системи виду (6) початкових умов повинно бути шість і вони записуються так:

при $t = t_0$, $\quad x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \dot{x} = \dot{x}_0,\ \ \dot{y} = \dot{y}_0,\ \ \dot{z} = \dot{z}_0,$ (12)

де $x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 -$ відомі числа (початкові параметри задачі).

В розглянутому на рис. 1.1 плоскому випадку руху чотири початкові умови для кожного з трьох рухів запишуться так:

випадок 1: при $t = 0 \quad x = 0, \quad y = 0, \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0,$

випадок 2: при $t = 0 \quad x = 0, \ \ y = 0, \dot{x} = 0 \quad \dot{y} = v_0,$

випадок 3: при $t = 0 \quad x = 0, \ \ y = 0,$

$$\dot{x} = -v_0 \, cos\, \alpha, \quad \dot{y} = v_0 \, cos\, \alpha.$$

6. За допомогою записаних у пункті 5 початкових умов визначити $C_1, \dots, C_6$. Для цього треба продиференціювати формули (10) і знайти проекції швидкості точки у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \qquad (13)$$

Увага! Якщо при розв’язанні рівнянь (6) використовується двохкроковий метод, який зводить інтегрування рівнянь другого порядку до послідовного розв’язання рівнянь першого порядку то після першого кроку такого алгоритму ми відразу будемо мати проекції швидкості у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3), \end{aligned} \qquad (14)$$

а формули виду (10) ми отримаємо в кінці другого кроку.

Увага! Якщо ж ми будемо мати справу з лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, то в цьому випадку більш доцільним є використання методу характеристичного рівняння до кожного окремого рівняння другого порядку. В цьому випадку ми відразу прийдемо до формул (10) і тоді необхідно їх продиференціювати, щоб мати вирази (13).

Увага! Обидва підходи до інтегрування рівнянь (6) ми детально із прикладами розглянемо нижче, а тут викладені міркування потрібні для того, щоб описати процес визначення сталих інтегрування $C_1, .., C_6$.

Підставляючи вирази (10) і (13) або (14) у початкові умови, одержуємо систему із шести рівнянь для визначення шести сталих інтегрування:

$$\begin{cases} x(0, C_1, \dots C_6) = x_0; \\ y(0, C_1, \dots C_6) = y_0; \\ z(0, C_1, \dots C_6) = z_0\ ; \\ \dot{x}(0, C_1, \dots C_6) = \dot{x}_0; \\ \dot{y}(0, C_1, \dots C_6) = \dot{y}_0; \\ \dot{z}(0, C_1, \dots C_6) = \dot{z}_0. \end{cases} \tag{15}$$

Як правило, розв'язання такої системи не викликає принципових труднощів і в результаті усі сталі інтегрування виражаються через початкові параметри руху таким чином:

$$C_{\dot{\tau}} = f_{\dot{\tau}}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)(\dot{\tau} = \overline{1{,}6}). \tag{16}$$

Зазначимо, що коли початкові умови руху задаються у вигляді числових значень координат і проекцій швидкостей, то із (16) усі шість сталих інтегрування отримаємо як числа, а коли ті ж параметри подаються в загальному вигляді, то запис (16) означає формули, що дають вирази для $C_1, \dots, C_6$ через $x_0, \dots, \dot{z}_0$. В обох випадках це дозволяє виділяти із загального розв'язку (10) його єдине частинне значення.

7. Підставляючи знайдені у пункті 6 значення сталих інтегрування в загальний розв'язок (10) записуємо розв'язок задачі в такому вигляді:

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \tag{17}$$

З математичної точки зору формули (17) дають частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (16) при конкретних початкових умовах. З точки зору механіки формули (17) дають закон руху матеріальної точки під дією конкретної системи сил і при конкретних початкових умовах.

Повернемося до прикладу, наведеного на рис. 1.1. Якщо не враховується опір повітря, то у всіх трьох випадках на точку діє лише сила її ваги і рівняння (6) у всіх випадках мають вид:

$$\ddot{x} = \mathrm{g}; \;\; \ddot{y} = 0.$$

Подвійним інтегруванням цих рівнянь приходимо до таких формул:

$$\dot{x} = \mathrm{g}t + C_1; \, x = \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 + C_1 t + C_2;$$

$$\dot{y} = C_3; \;\; y = C_3 t + C_4.$$

У першому випадку будемо мати $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 0$ і закон руху записується так:

$$x = \frac{\mathrm{g}t^2}{2}, \qquad y = 0.$$

Це прямолінійний рух вертикально вниз за законом вільного падіння.

У другому випадку знаходимо $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = v_0, C_4 = 0$ і закон руху запишеться так:

$$x = \frac{\mathrm{g}t^2}{2}\,, \;\; y = v_0 t.$$

Якщо звідси виключити t,то будемо мати:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{g}}{v_0^2} \cdot y^2.$$

Тобто траєкторією точки є парабола, віссю симетрії якої є вісь *Ox*.

В третьому випадку сталі інтегрування приймають такі значення $C_1 = -v_0 \sin\alpha, \;\; C_2 = 0, \;\; C_3 = v_0 \cos\alpha, \;\; C_4 = 0$ і закон руху запишеться так:

$$x = \frac{gt^2}{2} - v_0 \sin\alpha\, t; \quad y = v_0 \cos\alpha\, t.$$

Виключаючи з цих рівнянь t, будемо мати:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot y^2 - \tan\alpha \cdot y.$$

Це знову парабола, вісь симетрії якої паралельна осі Ox і зсунута вправо на величину:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

Увага! З точки зору математики записом формул виду (17) процес інтегрування системи диференціальних рівнянь закінчується, але в механиці, як правило, знаходження закону руху точки є початковим етапом для кінематичного аналізу її руху. Тому найчастіше алгоритм розв'язання основної задачі динаміки точки доповнюється ще одним пунктом.

8. Провести механічний аналіз руху, зокрема записати рівняння траєкторії в координатній формі, визначити такі параметри як швидкість в заданий момент часу або в заданому положенні, знайти пройдений точкою шлях або час руху і таке інше.

Увага! Найбільш складним у цій схемі є четвертий пункт, оскільки в математиці відсутні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь зі складними правими частинами і тому на практиці часто в реальних задачах доводиться застосовувати наближенні чисельні методи, орієнтовані на використання сучасних ЕОМ, наприклад найчастіше це відбувається за допомогою методу Рунге-Кутта. Цьому питанню присвячений окремий розділ книги [4]. В даній розробці ми розглянемо ті задачі, які вдається розв'язувати точно аналітичними методами. Зрозуміло, що це можливо лише у тих випадках, коли на сили прикладені до точки накладені певні умови, про що ми детально поговоримо в наступному розділі.

2 МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

Найбільш наглядно метод, який полягає в складанні і наступному інтегруванні диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, і який ми в подальшому будемо умовно називати методом інтегрування, можна викласти, розпочинаючи з найбільш простого випадку, а саме – прямолінійного руху матеріальної точки.

Нагадаємо [1], що необхідною і достатньою умовою такого руху є паралельність рівнодійної усіх прикладених до точки сил вектору початкової швидкості точки, тобто умова $\bar{F} \parallel \bar{v}_0$.

Якщо ця умова виконується тоді рух точки описується одним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}), \tag{18}$$

при цьому початкові умови для рівняння (18) записуються так:
при $t = t_0$,

$$x = x_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \tag{19}$$

Запишемо спочатку загальну схему так званого двохкрокового методу інтегрування рівняння (16), коли на кожному кроці інтегрується рівняння першого порядку, а потім перейдемо до частинних прийомів для конкретного вигляду правої частини рівняння (18).

Перший крок. Враховуючи, що $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, перепишемо рівняння (18) у вигляді рівняння першого порядку відносно $\dot{x}$:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(t, x, \dot{x}). \tag{20}$$

Якщо рівняння (20) вдається проінтегрувати (найчастіше за допомогою основного методу інтегрування рівнянь першого порядку – методу відокремлення змінних), то необхідно прийти до такого запису загального розв'язку рівняння (20):

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1). \tag{21}$$

Цей вираз також називається першим інтегралом рівняння (18).

Зауважимо, що отримання такого результату не завжди можливе, зокрема, якщо права частина в (18) залежить від x або $\dot{X}$. Нижче будуть дані рекомендації, що робити на першому кроці в таких випадках.

Другий крок. Використовуючи отриману в кінці першого кроку залежить (21), можемо записати рівняння першого порядку відносно x в такому вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t, C_1). \tag{22}$$

Зазначимо, що якщо нам вдалося в явному вигляді отримати залежність (21), то інтегрування рівняння (22) методом відокремлення змінних не викликає складнощів і тоді ми зможемо отримати загальний розв'язок рівняння (18) у такому вигляді:

$$x = x(t, C_1, C_2). \tag{23}$$

Детально зупинимося на можливостях реалізації двохкрокового методу для конкретних видів правої частини рівняння (18).

2.1 Стала за модулем сила $\boldsymbol{F_x = const}$

В цьому випадку рівняння (18) приймає такий вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x\,. \tag{24}$$

У відповідності з записаним вище алгоритмом виконуємо такі два пункти.

1. На першому кроці маємо таке рівняння:

$$m = \frac{d\dot{x}}{dt} = F_x. \tag{25}$$

Тут змінні відокремлюються очевидним способом, для цього необхідно до множити обидві частини рівняння на dt і для зручності розділити обидві частини на масу точки m. Тоді у відокремлених змінних це рівняння приймає такий вигляд:

$$d\dot{x} = \frac{F_x}{m} = dt. \tag{26}$$

Таке рівняння вже можна проінтегрувати кожну з частин за своєю змінною і врахувати відому властивість інтеграла, згідно з якою інтеграл від повного диференціала дорівнює функції, що диференціюється, або, що теж саме, знаки інтеграла і диференціала взаємно знищуються, коли інтеграл стоїть перед диференціалом, тобто треба використовувати таку формулу:

$$\int df(x) = f(x) + C. \tag{27}$$

Використовуючи (27) із (26) будемо мати:

$$\int d\dot{x} = \frac{F_x}{m}\int dt.$$

Об’єднуючи в одну сталі інтегрування в обох частинах, завершуємо перший крок інтегрування рівняння (24), знаходимо його перший інтеграл і одночасно з механічної точки зору знаходимо загальний вираз для швидкості прямолінійного руху точки під дією сталої сили:

$$\dot{x} = \frac{F_x}{m}t + C_1. \tag{28}$$

2. На початку другого кроку згадуємо, що у випадку прямолінійного руху швидкість є першою похідною за часом від координати точки і замінюючи ліву частину формули (28) на $\frac{dx}{dt}$ приходимо до такого диференціального рівняння знову таки першого порядку відносно x:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_x}{m}t + C_1. \tag{29}$$

Для відокремлення тут змінних помножуємо обидві частини на dt і приходимо до такого рівняння у відокремлених змінних:

$$dx = \frac{F_x}{m}tdt + C_1dt. \tag{30}$$

Беремо в лівій частині невизначений інтеграл по x, а в правій – по t, і використовуючи формулу (27), а також табличний інтеграл:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

записуємо загальний розв'язок рівняння (29), він же загальний розв'язок початкового рівняння (24) у такому вигляді:

$$x = \frac{F_x}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (31)$$

Увага! Цією формулою можна відразу користуватися, отримавши рівняння виду (24) і підставляючи замість F_x і m конкретні параметри задачі, але з методичної точки зору для закріплення методики двохкрокового алгоритму і методу відокремлення змінних, які будуть використовуватися і для інших видів правої частини диференціального рівняння руху матеріальної точки, доцільно у кожній задачі самостійно зробити усі описані тут кроки руху від запису (24) до формули (31).

Щоб виділити із усіх можливих рухів точки під дією конкретної сили один єдиний, треба в отриманих формулах для $\dot{x}$ і x визначити сталі інтегрування, використовуючи для цього початкові умови (19).

Оскільки найчастіше в якості початкового часу приймається початок руху, то, як правило, покладають $t_0 = 0$ і тоді умови (19) записуються так:

при $t = 0$,

$$x = x_0\,; \qquad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (32)$$

Із першої умови, поклавши в (31) $t = 0$ приходимо до такої залежності:

$$x_0 = C_2.$$

Аналогічно, поклавши $t = 0$ в (28) і задовольняючи другу умову, будемо мати:

$$\dot{x}_0 = C_1.$$

Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (24) з початковими умовами (32), він же закон прямолінійного руху матеріальної точки з масою m під дією сталої сили F_x при початкових умовах (32) записується так:

$$x = \frac{F_x}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + \dot{x}_0 t + x_0. \qquad (33)$$

Як ми вже відзначали вище у порядку розв'язання основної задачі динаміки з точки зору математики отриманням формули (33) завершується процес інтегрування конкретного диференціального рівняння з конкретними початковими умовами (така комбінація рівняння і початкових умов називається в математиці задачею Коші). Але в механиці після отримання формул виду (33), як правило проводиться аналіз руху точки і знаходження різних характеристик (пройденого шляху, часу до зупинки і таке інше), що ми покажемо на конкретних прикладах.

Приклад 2.1. Прямолінійний рух точки під дією сталих сил. Вантаж вагою $P = 10\,H$ рухається прямолінійно горизонтальною площиною. На вантаж діє сила $\bar{F}$, яка утворює заданий кут $\alpha = 30°$ з горизонталлю $(F = 6\,H)$. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу з площиною $f = 0{,}2$. В початковий момент часу вантаж знаходився на відстані $a = 3$ м від початку координат і мав швидкість $v_0 = 5\,\text{м/с}$. Визначити рівняння руху вантажу на першому етапі, коли рух відбувається у напрямку початкової швидкості, а також час до зупинки.

Розв'язання.

1. Покажемо усі сили, які діють на вантаж у довільний момент його руху (рис. 2.1). Крім названих в умові задачі заданих або активних сил, оскільки рух вантажу є невільним, виникають дві реакції в'язей: нормальна $\bar{N}$ і сила тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$, яка направлена завжди у бік, протилежний напрямку руху, а за модулем визначається згідно з законом Амонтона-Кулона:

$$NF_{тр} = fN. \qquad (34)$$

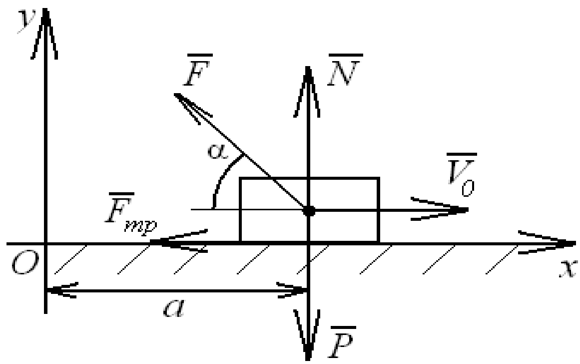

Рисунок 2.1 – Схема до прикладу 2.1

2. Диференціальне рівняння руху у векторній формі в даній задачі запишеться так:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}. \tag{35}$$

3. В проекціях на показані на рис. 2.1 осі координат це рівняння приводить до двох скалярних:

$$m\ddot{x} = -F\,cos\,\alpha - F_{\text{тр}}, \tag{36}$$

$$0 = -P + N + F\,sin\,\alpha. \tag{37}$$

Звернемо тут увагу на те, що в лівій частині рівняння (37) стоїть нуль, оскільки рух у вертикальному напрямку тут відсутній і це по суті умова рівноваги сил у цьому напрямку, яка потрібна для визначення нормальної реакції площини і наступного знаходження модуля сили тертя за формулою (34).

Із (37) визначаємо:

$$N = P - Fin\,a,$$

тоді

$$F_{\text{тр}} = f(P - F\,sin\,\alpha),$$

і тепер рівняння (36) з врахуванням залежності $m = \frac{P}{g}$ записуємо так:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -F\cos\alpha - f(P - F\sin\alpha).$$

Помножимо обидві частини на $\frac{g}{P}$:

$$\ddot{x} = -\left[f + \frac{F}{P}(\cos\alpha - f\sin\alpha)\right]g.$$

Введемо позначення:

$$A = f + \frac{F}{P}(\cos\alpha - f\sin\alpha),$$

тоді остаточно диференціальне рівняння горизонтального руху вантажу в нашій задачі запишеться так:

$$\ddot{x} = -A \cdot g\,. \tag{38}$$

Ще раз підкреслимо, що це рівняння руху на так званій першій ділянці (етапі), коли згідно з рис. 2.1 ми рухаємося вправо, причому знак мінус у правій частині (38) говорить про те, що рух відбувається уповільнено і через проміжок часу, який ми визначимо нижче, вантаж зупиниться і з початковою нульовою швидкістю під дією сили F вантаж почне рухатися вліво. При цьому треба буде змінити на рисунку напрямок сили тертя на протилежний і змінити напрямок осі тоді в правій частині рівняння (36) перший доданок змінить мінус на плюс. Оскільки в умові задачі нас цікавить лише перший етап руху, то друге дослідження ми проводити не будемо, хоча схема роботи на цьому етапі тільки що описана.

4. Інтегрування рівняння (38) виконуємо за описаним вище двохкроковим алгоритмом і використовуючи метод відокремлення змінних.

Перший крок.

$$\begin{gathered}\frac{d\dot{x}}{dt} = -Ag,\\ d\dot{x} = -Ag\,dt,\\ \dot{x} = -Agt + C_1.\end{gathered} \tag{39}$$

Другий крок.

$$\frac{dx}{dt} = -Agt + C_1,$$
$$dx = -Agdt + C_1 dt, \quad (40)$$
$$x = -Ag\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

5. Початкові умови в даній задачі записуються так:
при $t = 0$

$$x = 0 \qquad \dot{x} = v_0. \quad (41)$$

6. Задовольняємо ці початкові умови, шляхом підстановки спочатку в (39) і (40) замість t нульове значення, а потім отримані таким чином вирази в ліві частини умов (41), будемо мати:

$$C_2 = a \qquad C_1 = v_0. \quad (42)$$

Після підстановки знайдених в (42) значень сталих інтегрування в (39) і (40), будемо мати закон зміни у часі швидкості точки:

$$\dot{x} = -Agt + v_0, \quad (43)$$

і шуканий закон руху точки при заданих силах і конкретних початкових умовах:

$$x = -Ag\frac{t^2}{2} + v_0 t + a. \quad (44)$$

Якщо обчислити значення A за записаною вище формулою, то для приведених в умові задачі значеннях f, F, P і a, будемо мати таку безрозмірну величину: А=0,67, і тоді остаточно формули (43) і (44) запишуться так:

$$\dot{x} = 5 - 6{,}7t. \quad (45)$$

$$x = 3 - 3{,}8t^2 + 5t. \quad (46)$$

8. Закон руху на першому етапі, коли вантаж рухається вправо, а потім зупиняється, як видно із формули (46), є рівносповільненим рухом, зі сповільненням $W = -6{,}7\ \text{м}/\text{с}^2$. Час до зупинки знаходимо із умови рівності нулю швидкості в момент зупинки:

$$\dot{x} = 0\,, \quad 5 - 6{,}7t = 0\,, \;\; \tau = \frac{5}{6{,}7} = 0{,}74\; c.$$

Тепер також можемо знайти пройдений до зупинки шлях за формулою:

$$S = x|_{t=\tau} - a = 3 - 3{,}8\tau^2 + 5\tau - 3 = 3{,}2\text{м}.$$

Приклад 2.2 (прямолінійний рух точки похилою площиною). Вантаж рухається вгору негладкою похилою площиною. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу площиною, яка утворює кут $\alpha = 30°$ з горизонталлю, дорівнює $f = 0{,}2$. В початковий момент вантаж знаходиться на відстані $a = 3$ м від початку координат і має початкову швидкість $v_0 = 5$ м/с. Визначити закон руху вантажу на першому етапі, коли рух відбудеться у напрямку початкової швидкості , а також час до зупинки.

Розв'язання.

1. Покажемо усі сили, які діють на вантаж у довільний момент його руху (рис. 2.2). Це – сила ваги $\bar{P}$, нормальна реакція площини $\bar{N}$, перпендикулярна до площини і направлена вгору, сила тертя $\bar{F}_{тр}$, направлена вздовж площини у бік, протилежний руху, причому її модуль знаходиться за формулою (34).

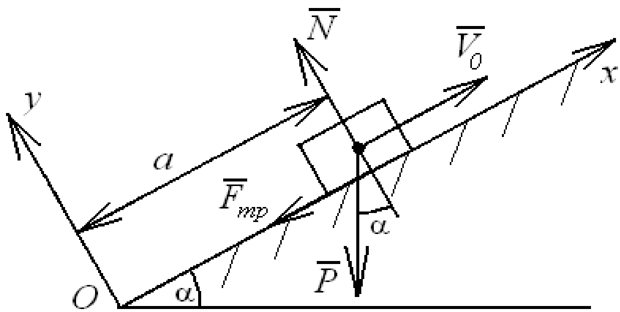

Рисунок 2.2 – Схема до прикладу 2.2

Увага! На відміну від попереднього прикладу тут не задана активна сила $\bar{F}$ і більше ніякі сили показувати не треба. Рух на першому етапі є можливим виключно за рахунок заданої початкової швидкості.

2. У векторній формі рух описується рівнянням:

$$m\frac{d^2\bar{\tau}}{dt^2} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}. \tag{47}$$

При проектуванні (47) на осі координат треба звернути увагу на те, що сила $\bar{P}$ утворює з віссю Ox кут $90° + \alpha$ (рис. 2.2). Тоді приходимо до таких двох скалярних рівнянь:

$$m\ddot{x} = -P\, sin\, \alpha - F_{тр}\, , \tag{48}$$

$$0 = N - P\, cos\, \alpha. \tag{49}$$

Із (49) знаходимо:

$$N = P\, cos\, \alpha,$$

і враховуючи, що $m = \frac{P}{g}$ і формулу (34), приводимо рівняння (48) до такого вигляду:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -P\, sin\, \alpha - fP\, cos\, \alpha.$$

Після скорочення обох частин на P остаточно будемо мати:

$$\ddot{x} = -g(sin\, \alpha + f\, cos\, \alpha),$$

$$A = sin\, \alpha + f\, cos\, \alpha\, , \tag{50}$$

$$\ddot{x} = -Ag. \tag{51}$$

Це рівняння точно співпадає з рівнянням (38) з тією різницею, що тут при заданих значеннях f і α приходимо до такого числа A=0,67.

4. Інтегрування рівняння (51)проводиться абсолютно аналогічне до розв'язання (38) і дає формули (39) і (40).

5. Початкові умови записуються у вигляді (41).

6. Задовольняючи умови (41) приходимо до формул (42).

7. Закон руху вантажу на першому етапі описується формулою (44), а швидкість дається формулою (43). В числовому вигляді маємо формули (45) і (46).

8. Час до зупинки знаходимо із умови:

$$\dot{x} = 0 \ldots 5 - 6{,}7, \quad t = 0, \quad \tau = 0{,}74\ c.$$

Шлях, пройдений вантажем на гору, знаходимо так:

$$S = x|_{t=\tau} - a = 3{,}2 \text{ м}.$$

Приклад 2.3. (Криволінійний рух точки під дією сталих сил). Важка матеріальна точка M кинута під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 10$ м/с. В початковий момент точка знаходилася в положенні M_0 (рис. 2.3). Не враховуючи опір повітря, визначити рівняння руху точки, а також горизонтальну дальність польоту ℓ, якщо $a = 10$ м, $b = 6$ м. Осі x і y показані на рис. 2.3.

1. В даній задачі на вільну матеріальну точку під час польоту діє лише одна активна сила - її вага (рис. 2.3). Рух точки вгору і вправо відбувається за рахунок початкової швидкості $\bar{v}_0$.

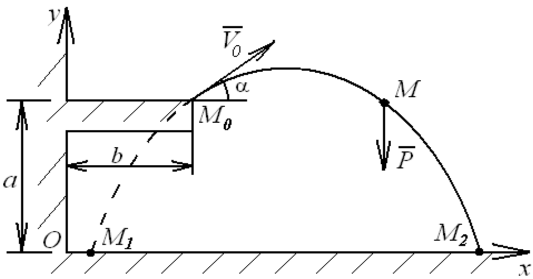

Рисунок 2.3 – Схема до прикладу 2.3

Розв'язання.

2. У векторній формі диференціальне рівняння задачі записується так:

$$m = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = P. \tag{52}$$

3. В проекціях на осі координат з врахуванням залежності $m = \frac{P}{g}$ приходимо до таких двох рівнянь:

$$\ddot{x} = 0, \tag{53}$$

$$\ddot{y} = -\text{g}. \tag{54}$$

4. Кожне з рівнянь, які в даній задачі не пов'язані між собою, інтегруємо як і у двох попередніх задачах за двохкроковим алгоритмом. В результаті будемо мати:

$$\dot{x} = C_1, \tag{55}$$

$$x = C_1 t + C_2, \tag{56}$$

$$\dot{y} = -\mathrm{g}t + C_3, \tag{57}$$

$$y = -\mathrm{g}\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4. \tag{58}$$

5. Початкові умови задачі записуються так при:

$$t = 0 \;\; x = b \;\;\; \mathrm{g} = a \;\; \dot{x} = v_0 \, cos\, \alpha \quad \dot{y} = v_0 \, sin\, \alpha. \tag{59}$$

6. Послідовно задовольняючи ці умови, будемо мати:

$$C_1 = v_0 \, cos\, \alpha, \quad C_2 = b, \quad C_3 = v_0 \, sin\, \alpha, \quad C_4 = a. \tag{60}$$

7. Тоді формули (55) – (58) приймають такий вид:

$$\dot{x} = v_0 \, cos\, \alpha, \tag{61}$$

$$x = v_0 \, cos\, \alpha \cdot t + b, \tag{62}$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \, sin\, \alpha, \tag{63}$$

$$y = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \, sin\, \alpha \cdot t + a. \tag{64}$$

Підставляючи сюди замість v_0, a, α, b їх числові значення, закон криволінійного руху точки запишемо так:

$$x = 5t + 6, \tag{65}$$

$$y = -5t^2 + 8{,}6t + 10. \tag{66}$$

Увага! Якщо виключити з цих рівнянь t, виразивши його через x з рівняння (65) і підставити отриманий вираз в друге рівняння, то легко побачити, що рівнянням траєкторії в даному випадку буде парабола вісь симетрії якої паралельна осі Oy.

8. Щоб визначити горизонтальну дальність польоту треба спочатку знайти час до падіння. Він знаходиться із умови:

$$y(\tau) = 0.$$

Із формули (66) приходимо до такого квадратного рівняння:

$$-5t^2 + 8{,}6t + 10 = 0. \qquad (67)$$

Нагадаємо, що корені квадратного рівняння:

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\; a > 0\,, \qquad (68)$$

знаходяться за формулою:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (69)$$

Зазначимо, що коли *a*=1 рівняння (68) приймає такий вид:

$$x^2 + bx + c = 0, \qquad (70)$$

що називається приведеним і його корені замість формули (69) можна знайти так:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}. \qquad (71)$$

Перепишемо рівняння (67) в такому виді:

$$5t^2 - 8{,}6t - 10 = 0,$$

і тоді згідно з формулою (69) знаходимо два значення часу падіння:

$$\tau_{1,2} = \frac{8{,}6 \pm \sqrt{74 + 200}}{10} = 0{,}86 \pm 1{,}65.$$

Звідси знаходимо:

$$\tau_1 = -0{,}79c \qquad \tau_2 = 2{,}51\ c.$$

Від'ємне значення часу нам не підходить, оскільки $t > 0$ і з математичної точки зору воно з'явилося тому, що парабола, яка в параметричній формі описується рівняннями (65), (66) і частина якої від т. M_0 до т. M_2 є траєкторією польоту матеріальної точки (рис. 2.3), як легко бачити із рис. 2.3, своєю лівою гілкою перетинає вісь *Ox* в точці M_1, якій математично в рівняннях (65) і (66) відповідає значення τ_1.

Тому реальним часом падіння в нашій задачі буде значення $\tau_2 = 2{,}51\ c$. Тоді горизонтальна дальність польоту, яка показана на рис. 4 як відстань вздовж осі Ox від точки O до точки M_2 знаходиться за формулою:

$$\ell = x(\tau_2) = 5 \cdot 2{,}51 + 6 = 18{,}55 \text{ м}.$$

Зазначимо, що якщо врахувати, що точка вилетіла з положення M_0, а не з точки O, то вона прилетіла в горизонтальному напрямку за 2,51 с на величину 6 м менше, тобто $\ell = 12{,}55$ м.

Приклад 2.4. Тіло M вагою $\mathrm{P} = 10$ Н кинули вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 12$ м/с (рис. 2.4). Під час руху на тіло діє горизонтальна сила вітру $F = 6\,H$. В початковий момент часу тіло знаходилося в положенні M_0 при цьому $a = 8$ м. Визначити рівняння (закон) руху тіла, а також дальність його польоту по горизонталі ℓ. Осі x і y показані на рис. 2.4.

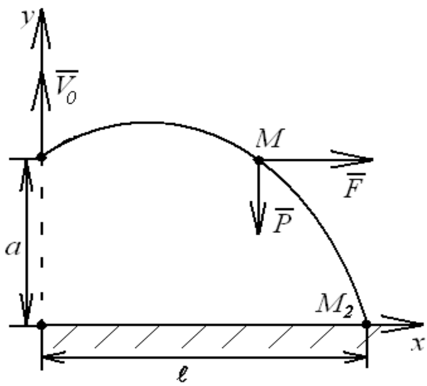

Рисунок 2.4 – Схема до прикладу 2.4

Розв'язання.

1. Згідно з умовою задачі в довільний момент руху на точку (вільне тіло) діють дві сталі сили $\bar{P}$ і $\bar{F}$ (рис. 2.4). При цьому частковий рух тіла вгору відбувається за рахунок початкової швидкості $\bar{v}_0$.

2.У векторній формі рух тіла описується таким рівнянням:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{P} + \bar{F}. \tag{72}$$

3. Проектуючи (72) на вказані на рис. 2.4 осі координат приходимо до двох скалярних рівнянь:

$$m\ddot{x} = F\ ; \tag{73}$$

$$m\ddot{y} = -P. \tag{74}$$

Оскільки $m = \frac{P}{g}$, то будемо мати такі рівняння:

$$\ddot{x} = \frac{F}{P}g; \tag{75}$$

$$\ddot{y} = -g. \tag{76}$$

4. Рівняння (76) проінтегровано в попередньому прикладу і загальні вирази для $\dot{y}$ і y даються формулами (57) і (58). Рівняння (75) інтегрується подібно до інтегрування (76) і якщо замінити в отриманих формулах – g на $\frac{F}{P}g$, то аналогічно (57) і (58) приходимо до таких виразів:

$$\dot{x} = \frac{F}{P}gt + C_1, \tag{77}$$

$$x = \frac{F}{P}g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{78}$$

5. Початкові умови в даній задачі записуються так:
при $t = 0$:

$$x = 0,\ \ y = a,\ \ \dot{x} = 0,\quad \dot{y} = v_0. \tag{79}$$

6. Задовольняючи ці умови шляхом підстановки в (79) формули (77), (78), (57), і (58), знаходимо:

$$C_2 = 0,\ \ C_1 = 0,\ \ C_4 = a,\quad C_3 = v_0. \tag{80}$$

7. Після підстановки так отриманих виразів формули (57), (58), (77), і (78) приймають такий вигляд:

$$\dot{x} = \frac{F}{P}gt, \tag{81}$$

$$x = \frac{F}{P}g\frac{t^2}{2}, \tag{82}$$

$$\dot{y} = -\mathrm{g}t + v_0, \tag{83}$$

$$y = -\mathrm{g}\frac{t^2}{2} + v_0 t + a. \tag{84}$$

Якщо підставити замість F, P і v_0 їх задані значення і для спрощення прийняти $\mathrm{g} = 10\ \text{м/с}^2$, будемо мати такий закон криволінійного руху точки при заданих початкових умовах і під дією сили ваги і горизонтальної сили вітру:

$$x = 3t^2, \tag{85}$$

$$y = -5t^2 + 12t + 8. \tag{86}$$

8. Щоб знайти горизонтальну дальність польоту за формулою:

$$\ell = x(\tau_1), \tag{87}$$

необхідно спочатку знайти час до падіння τ_1 із умови $y\,(\tau_1) = 0$, це приводить, як видно із (86), до такого квадратного рівняння:

$$5t^2 - 12t - 8 = 0. \tag{88}$$

Корені цього рівняння знаходяться за формулою (69), яка в нашому випадку дає наступне:

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 160}}{10} = 1{,}2 \pm 1{,}7.$$

Зрозуміло, що нам підходить лише додатній корінь, тому будемо мати $\tau_1 = 2{,}9\ c$.

Підставляючи так знайдене значення у формулу (87) з використанням (85), знаходимо горизонтальну дальність польоту:

$$\ell = 3 \cdot \tau_1^2 = 25{,}2\ \text{м}.$$

2.2 Сила, яка за модулем залежить лише від часу $\boldsymbol{F_x = F_x(t)}$

Диференціальне рівняння прямолінійного руху такої точки записується так:

$$m\ddot{x} = F_x(t). \tag{89}$$

1. На першому кроці приходимо до такого рівняння:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(t). \tag{90}$$

Відокремлення змінних тут не викликає труднощів і ми приходимо до наступного рівняння:

$$d\dot{x} = \frac{1}{m}F_x(t)dt. \tag{91}$$

Інтеграл від лівої частини є очевидним, а що стосується інтеграла в правій частині, то його конкретний вид залежить від заданої функції $F_x(t)$ і може трапитися, що навіть на першому кроці нашого алгоритму права частина не приведе до елементарної функції, а залишиться у вигляді інтеграла, про який в математиці говорять, що він не береться, або кажуть, що відповідь отримана в квадратурах. Але в теорії диференціальних рівнянь вважається, що рівняння розв'язане, якщо шукана функція записана хоча б у квадратах. Тому формальне завершення першого кроку в загальному випадку виглядає так:

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x\,(t)dt + C_1. \tag{92}$$

2. Якщо позначити для скорочення праву частину формули (92) як відому функцію від t і C_1:

$$\varphi(t, C_1) = \tfrac{1}{m}\int F_x\,(t)dt + C_1, \tag{93}$$

то тоді другий крок інтегрування рівняння (89) схематично описується так:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, C_1), \tag{94}$$

$$\int dx = \int \varphi\,(t, C_1)dt,$$

$$x = \int \varphi\,(t, C_1)dt + C_2, \tag{95}$$

і підставляючи сюди вираз для $\varphi(t, C_1)$ із (93) , загальний розв'язок рівняння (89) записуємо так:

$$x = \frac{1}{m}\int dt \int F_x(t)dt + C_1 t + C_2\,. \qquad (96)$$

Звідси бачимо, що загальний розв’язок рівняння (89) завжди можна подати, хоча б у вигляді повторного інтеграла від заданої функції $F_x(t)$. Зазначимо, що такі інтеграли, у випадку коли вони не беруться в елементарних функціях можна з як завгодно високою точністю обчислити за однією з наближених формул і побудувати графік залежності $x = x(t)$ закон прямолінійного руху вздовж осі Ox). Але в навчальному процесі, як правило, ми будемо розглядати такі випадки завдання функції $F_x = F_x(t)$ коли повторний інтеграл в (96) знаходиться в елементарних функціях.

Приклад 2.5. Матеріальна точка масою $m = 5$кг рухається у вертикальній площині під дією сили тяжіння $\bar{P}$ і змінної у часі горизонтальної сили вітру, яка описується формулою $F(t) = \sqrt{t^2 + 10}$ У початковий момент часу точка знаходилася в положенні M_o (5,10) і мала початкову швидкість $v_0 = 10$м/с, направлену під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту (рис. 2.5). Записати рівняння руху точки, а також швидкість точки в моменти часу $t_1 = 2c$ і $t_2 = \sqrt{15}c$.

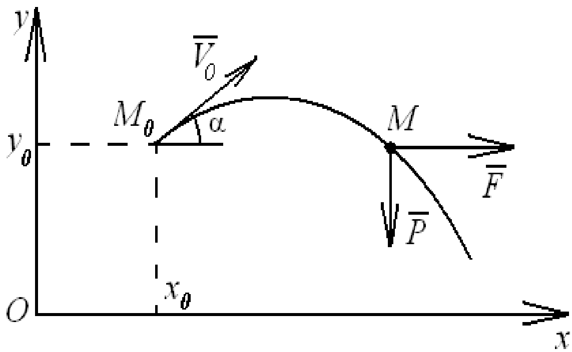

Рисунок 2.5 – Схема до прикладу 2.5

Розв’язання.

1. На точку діють дві сили (рис. 2.5) $\bar{P}$ і $\bar{F}$.

2. У векторній формі диференціальне рівняння руху запишеться так:

$$m\frac{d^{2\bar{\tau}}}{dt^2} = \bar{P} + \bar{F}. \tag{97}$$

3. В проекціях на показані осі приходимо до таких рівнянь:

$$m\ddot{x} = \sqrt{t^2 + 10}, \tag{98}$$

$$\ddot{y} = -g\,. \tag{99}$$

4. Рівняння (99) ми вже інтегрували кілька разів вище і його інтеграли (загальні розв'язку) даються формулами (57) і (58). Перше рівняння (98) інтегрується за схемою (91) - (96)

$$\ddot{x} = \frac{1}{5}\sqrt{t^2 + 1},$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{5}\sqrt{t^2 + 1}\,, \qquad dx = \frac{1}{5}\sqrt{t^2 + 1}\cdot dt,$$

$$\dot{x} = \frac{1}{5}\int \sqrt{t^2 + 10}dt + C_1.$$

Використовуємо табличний інтеграл:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}ln\left| x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C_1.$$

У нас $a^2 = 10$ і ми будемо мати такий загальний вираз для швидкості:

$$\dot{x} = \frac{t}{10}\sqrt{t^2 + 10} + 5\,ln\left| t + \sqrt{t^2 + 10}\right| + C_1. \tag{100}$$

Другий крок приводить до такого диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10}t\sqrt{t^2 + 10} + 5\,ln\left| t + \sqrt{t^2 + 10}\right| + C_1.$$

Після відокремлення змінних і наступного інтегрування обох частин загальний розв’язок рівняння (100) для заданого закону зміни сили у часі записується так:

$$x = \frac{1}{10}\int t\sqrt{t^2+10}\,dt + 5\int ln\left|t+\sqrt{t^2+10}\right|dt + C_1 t + C_2. \quad (101)$$

Перший інтеграл в правій частині легко знаходиться за правилом заміни змінної, якщо покласти $z = t^2 + 10 \quad dz = 2tdt$, будемо мати:

$$\int t\sqrt{t^2+10}dt = \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2} + C = \frac{1}{3}(t^2+10)^{3/2} + C.$$

При цьому невизначена стала інтегрування включається в сталу C_2. Що стосується другого інтеграла в правій частині, то він не є табличним і не обчислюється в елементарних функціях. Тому в даній задачі ми навели приклад ситуації коли одна із формул в законі руху точки отримана в квадратурах і остаточно для закону зміни у часі для координати x в загальному вигляді будемо мати:

$$x = \frac{1}{30}(t^2+10)^{3/2} + 5\int ln\left|t+\sqrt{t^2+10}\right|dt + C_1 t + C_2. \quad (102)$$

5. В нашій задачі початкові умови руху точки записуються так: при $t = 0$:

$$x = x_0 = 5, y = y_0 = 10,$$

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha = 5, \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha = 8{,}6\,. \quad (103)$$

6. Якщо позначити інтеграл у формулі (102):

$$\varphi(t) = \int ln\left|t+\sqrt{t^2+10}\right|dt,$$

і обчислювати його наближено, як інтеграл зі зміною верхньою границею на ЕОМ чисельними методами для різних значень верхньої границі:

$$\varphi(t) = \int_0^t ln\left|\tau+\sqrt{\tau^2+10}\right|dt,$$

то тоді із першої умови в (103) C_2 знаходимо за формулою.

З третьої умови (103) будемо мати:

$$5 = 5\,ln\sqrt{10} + C_1,$$

$$C_1 = 5(1 - \frac{1}{2}ln\,10).$$

Із (57) і (58) та другої і четвертої умови (103) знаходимо:

$$C_4 = y_0 =; \qquad C_3 = 8{,}6.$$

7. Остаточно закон руху точки записується так:

$$x = \frac{1}{30}(t^2 + 10)^{3/2} + 5\int ln\left|t + \sqrt{t^2 + 10}\right| dt + 5(1 - 0{,}5\,ln\,10)t +$$

$$+5\big(1 - \varphi(0)\big) - \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

$$y = -5t^2 + 8{,}6t + 10.$$

8. Щоб визначити швидкість точки в задані моменти часу треба за формулами:

$$\dot{x} = \frac{t}{10}\sqrt{t^2 + 10} + 5\,ln\left|t + \sqrt{t^2 + 10}\right| + 5(1 - \frac{1}{2}ln\,10),$$

$$y = -5\dot{t} + 8{,}6,$$

обчислити проекції швидкості для даних значень t, а потім знайти модуль швидкості за формулою:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

В нашій задачі будемо мати при $t_1 = 2c$:

$$\dot{x} = \frac{1}{5}\sqrt{14} + 5\,ln\big(2 + 5\sqrt{14}\big) + 5(1 + \frac{1}{2}ln\,10) = 15{,}2,$$

$$\dot{y} = -10 + 8{,}6 = -1{,}4,$$

$$v = \sqrt{15,2^2 + 1,4^2} = 15{,}3 \text{ м/с},$$

$$t_1 = \sqrt{15}\,c,$$

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{15}}{10}5 + 5\,ln(\sqrt{15} + 5) + 5(1 - \frac{1}{2}ln\,10) = 12{,}2,$$

$$\dot{y} = -5\sqrt{15} + 8{,}6 = -10{,}75,$$

$$v = \sqrt{12,2^2 + 10{,}75^2} = 13{,}8 \text{ м/с}.$$

Увага! В контрольних і в РГЗ, в яких сили залежать від часу, закони зміну в часі, як правило, будуть задаватися такими, щоб і перше, і друге інтегрування було б можливим в елементарних функціях і для цих задач буде достатньою наступна таблиця інтегралів:

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

$$2. \int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,na} + C.$$

$$3. \int sin\,xdx = -\,cos\,x + C.$$

$$4. \int cos\,x\,dx = sin\,x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin x} = -ct\mathrm{g}x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos x} = t\mathrm{g}x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arct\mathrm{g}\frac{x}{a} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

$$10 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = arc\,sin\frac{x}{|a|} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C, \qquad |x| > |a|.$$

$$12. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arc\,sin\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

$$13. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2} + C\right|.$$

Приклад 2.6. Залишивши незмінними усі умови прикладу 2.5 і вважаючи, що закон зміни у часі горизонтальної сили має наступний вигляд:

$$F(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}}.$$

Записати закон руху точки та визначити її швидкість для моментів часу $t_1 = 2$ с, $t_2 = 4\ c$.

Розв'язання.

3. Замість рівнянь (98) і (99) будемо мати такі:

$$\ddot{x} = \frac{t}{5\sqrt{t^2 + 9}}; \tag{104}$$

$$\ddot{y} = -g. \tag{105}$$

4. Розв'язок рівняння (105) дається формулами (57) і (58), а покрокове інтегрування рівняння (104) проводимо так.

Перший крок:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{5\sqrt{t^2 + 9}},$$

$$\int d\dot{x} = \frac{1}{5}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + 9}}.$$

Заміна $z^2 = t^2 + 9$ і формула 1 в таблиці інтегралів:

$$\dot{x} = \frac{1}{5}\sqrt{t^2 + 9} + C. \tag{106}$$

Другий крок:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{5}\sqrt{t^2+9} + C_1,$$

$$dx = \frac{1}{5}\int\sqrt{t^2+9}dt + C_1\int dt.$$

Згідно з формулою 13 із таблиці інтегралів будемо мати:

$$x = \frac{1}{10}\sqrt{t^2+9} + \frac{9}{10}ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + C_1t + C_2.$$

6. Використовуючи початкові умови (103) знаходимо C_1, C_2, C_3, C_4.

$$5 = \frac{9}{10}ln\,3 + C_2\,; \qquad C_2 = 5 - \frac{9}{10}ln\,3 = 4;$$

$$5 = \frac{3}{5} + C_1; \qquad\qquad C_1 = 4{,}4.$$

7. Як і раніше $C_4 = 10$, $C_3 = 8{,}6$ і остаточно закон руху точки записуємо так:

$$x = \frac{t}{10}\sqrt{t^2+9} + \frac{9}{10}ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + 4{,}4t + 4;$$

$$y = -5t^2 + 8{,}6t + 10.$$

8. Швидкість для вказаних моментів часу обчислюємо так:

$$\dot{x}|_{t_1=2} = \frac{1}{5}\sqrt{13} + 4{,}4 = 5{,}1,$$

$$\dot{y}|_{t_1=2} = -20 + 17{,}7 = -2{,}8,$$

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{5{,}12 + 2,8^2} = 5{,}8,$$

$$\dot{x}|_{t_2=4} = \frac{1}{5}\cdot 5 + 4{,}4 = 5{,}4,$$

$$\dot{x}|_{t_1=2} = \frac{1}{5}\sqrt{13} + 4{,}4 = 5{,}1,$$

$$\dot{y}|_{t_1=2} = -20 + 17{,}2 = -2{,}8,$$

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{5{,}12 + 2{,}8^2} = 5{,}8,$$

$$\dot{x}|_{t_2=4} = \frac{1}{5} \cdot 5 + 4{,}4 = 5{,}4,$$

$$\dot{y}|_{t_2=4} = -40 + 34{,}4 = -5{,}6,$$

$$v_2 = \sqrt{5{,}4^2 + 5{,}6^2} = 7{,}8 \text{ м/с}$$

2.3 Сила залежить лише від положення точки на прямій

$$F_x = F_x(x)$$

Для цього випадку диференціальне рівняння прямолінійного руху точки приймає такий вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x(x). \tag{107}$$

Якщо розв’язувати це рівняння за описаною вище двохкроковою схемою, то вже **на першому кроці** приходимо до такого рівняння:

$$m\frac{d\ddot{x}}{dt} = F_x(x). \tag{108}$$

Тут вперше ми зустрічаємося з ситуацією, коли не можна застосувати метод відокремлення змінних, оскільки в даному рівнянні таких змінних три t, x і $\dot{x}$. Тому необхідно попередньо зробити заміну змінної диференціювання за відомою формулою математичного аналізу:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}. \tag{109}$$

Підставляючи залежність (109) в рівняння (108), одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = F_x(x). \tag{110}$$

Тут змінних дві x і $\dot{x}$ і вони легко відокремлюються. В результаті приходимо до рівняння:

$$\dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{m}F_x(x)dx. \tag{111}$$

Інтегруючи ліву частину по $\dot{x}$, а праву по x, бачимо, що інтеграл в лівій частині знаходиться очевидним способом за формулою 1 із наведеної вище таблиці інтегралів, а обчислення інтеграла в правій частині залежить від виду заданої функції $F_x(x)$. В результаті будемо мати:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{m}\int F_x(x)dx + C_1. \tag{112}$$

Якщо ввести позначення:

$$\varphi(x, C_1) = \frac{1}{m}\int F_x(x)dx + C_1, \tag{113}$$

то в результаті виконання першого кроку інтегрування в загальному випадку для таких сил ми будемо мати залежність швидкості точки від її положення на прямій в такому вигляді:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2\varphi(x, C_1)}\,. \tag{114}$$

Увага! Отримана залежність (114) дозволяє побудувати так звану фазову траєкторію, яка у випадку відсутності сил опору (найчастіше такими являються сили тертя) має вигляд замкнутої кривої (рис. 2.6),яку точка під час коливального руху може проходити кілька разів. Якщо до точки крім того прикладені сили тертя, то фазовою траєкторією є крива, що стискується, наближаючись до нуля. Зазначимо, що фазові траєкторії широко використовуються при аналізі коливальних рухів точки і механічної системи (детальніше про це викладено в книзі [4].

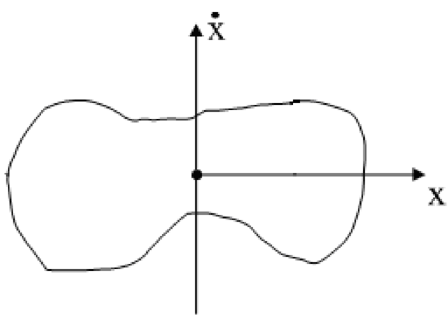

Рисунок 2.6 – Фазова траєкторія

Другий крок. Інтегрування рівняння (107) для сили $F_x(x)$ виконується у такий спосіб. Переписуємо залежність (114) в такому вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\varphi(x, C_1)}\,. \tag{115}$$

Тут змінні x і t відокремлюються очевидним способом:

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{2\varphi(x, C_1)}} = dt, \tag{116}$$

і після інтегрування лівої частини по x, а правої по t, приходимо до такої залежності:

$$t = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{2\varphi(x, C_1)}} + C_2. \tag{117}$$

З математичної точки зору співвідношення (117) – це **загальний інтеграл** рівняння (107) оскільки воно встановлює залежність x від t в неявному вигляді. Якщо інтеграл в правій частині (117) можна обчислити в елементарних функціях, а потім отриману залежність вдається розв'язати відносно x, то ми зможемо записати так зведений **загальний розв'язок** рівняння (107) у звичному вигляді так:

$$x = x(t, C_1, C_2). \tag{118}$$

Це і буде закон прямолінійного руху точки під дією сили, що залежить лише від положення точки на прямій. Зазначимо, що доведення задачі до такої відповіді можливе лише для обмеженого класу відносно простих залежностей $F_x = F_x(x)$, оскільки згідно з тільки що описаною детальною схемою для цього потрібно, щоб простим був інтеграл в (113), тобто функція $\varphi(x, C_1)$, від якої згідно з (117) треба ще добути квадратний корінь, підставити результат в знаменних і взяти в елементарних функціях інтеграл. Навіть, якщо усі ці перепони ми зможемо здолати, то для запису результату у вигляді формули виду (118) ще залишається розв'язати отриману залежність із (117) відносно x.

Зауваження. На практиці досить часто (як правило в теорії лінійних коливань) зустрічається ситуація, коли права частина рівняння (107) залежить від x лінійно, тобто має вигляд:

$$F_x(x) = -cx, \tag{119}$$

де c – коефіцієнт пружності, або жорсткість пружини.

Для цього випадку рівняння (107) приймає такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx. \tag{120}$$

Введемо позначення $k^2 = \frac{c}{m}$, тоді замість (120) будемо мати таке рівняння:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{121}$$

Згідно з методом характеристичного рівняння розв'язки (частинні) рівняння (121) шукаємо в такому вигляді:

$$x = e^{\lambda t}, \tag{122}$$

де значення величин λ знаходяться як корені такого характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \tag{123}$$

Рівняння (123) має два чисто уявні корені:

$$\lambda_{1,2} = \pm \dot{\imath} k, \text{ де } \dot{\imath} = \sqrt{-1}. \tag{124}$$

Підставляючи почергово значення λ_1 і λ_2 у формулу (122), знаходимо два лінійно незалежних частинних розв'язки рівняння (121) і тоді загальний розв'язок диференціального рівняння можна записати як їх лінійну комбінацію в такому вигляді:

$$x = C_1^* e^{ikt} + C_2^* e^{-ikt}. \tag{125}$$

Щоб не мати справу з комплексно значними функціями від дійсного аргументу t, скористаємося відомою з математики формулою Ейлера:

$$e^{iy} = cos\, y + sin\, y, \tag{126}$$

і тоді у більш зручній для використання так званій тригонометричній формі загальний розв'язок рівняння (120) записується так:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{127}$$

Зазначимо, що при використанні методу характеристичного рівняння, ми отримали вираз для x, не маючи виразу для cc, як це було раніше у двохкроковій схемі. І, оскільки для визначення сталих інтегрування із початкових умов нам необхідно мати формулу для $\dot{x}$, то для її отримання треба про диференціювати залежність (127) по t.

Приклад 2.7. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, яка залежить від положення точки згідно до закону:

$$F_x = -\mu x^{-2},$$

де $\mu = cos\, t$ – заданий числовий параметр. Знайти закон руху точки при таких початкових умовах:
при $t = 0$,

$$x = a, \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{2\mu}{ma}}\,. \tag{128}$$

Розв'язання.

Диференціальне рівняння руху точки має наступний вигляд:

$$m\ddot{x} = -\mu x^{-2}\,. \tag{129}$$

З математичної точки зору, ми маємо тут нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, яке не можна розв'язати за методом характеристичного рівняння, що застосовується лише для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, тому застосовуємо детально описану вище двох крокову схему згідно з формулами (108) – (118).

Перший крок.

Замість (129) з використанням заміни змінної диференціювання згідно з (109) приходимо до такого рівняння першого порядку:

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\mu\frac{1}{x^2}\,. \tag{130}$$

Після відокремлення змінних будемо мати:

$$\dot{x}d\dot{x} = -\frac{\mu}{m}\frac{dx}{x^2}. \tag{131}$$

Інтеграли в обох частинах знаходяться за першою формулою з наведеної вище таблиці інтегралів і отримуємо таку залежність:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{\mu}{m}\frac{1}{x} + C_1. \qquad (132)$$

Увага! Досить часто, і в даній задачі зокрема, вже на першому кроці доцільно, а іноді і просто необхідно, використовувати граничні умови для визначення сталої інтегрування. Зазначимо, що спеціальним підбором початкових умов можна добитися, щоб C_1 приймала таке значення, яке суттєво полегшує подальше інтегрування, тобто виконання другого кроку нашої схеми розв'язання рівняння (129). Враховуючи значення, які приймають x і $\dot{x},$ при $t = 0$ і одночасно підставляючи в обидві частини залежності (132) замість x і $\dot{x}$ їх початкові величини, будемо мати таке:

$$\frac{2\mu}{2ma} = \frac{\mu}{ma} + C_1.$$

Звідси знаходимо, що $C_1 = 0$ і тоді для таких початкових умов із (132) перший інтеграл рівняння (129) записується так:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{m}x^{-\frac{1}{2}}}. \qquad (133)$$

На цьому закінчується перший крок і за допомогою формули (133) при конкретних значеннях параметрів μ і m можна побудувати фазовий портрет або фазову траєкторію руху точки – тобто показати значення швидкості в різних положеннях точки.

Другий крок.

Записуючи через x швидкість у лівій частині формули (133), приходимо до такого нелінійного диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{m}\frac{1}{\sqrt{x}}}. \qquad (134)$$

Відокремлюючи зміни і інтегруючи ліву частину по x, а праву по t, будемо мати:

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{m}}t + C_2. \tag{135}$$

Оскільки при $t = 0, \quad x = a$, звідси знаходимо, що:

$$C_2 = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}},$$

і остаточно залежність $x = x(t)$ (закон прямолінійного руху точки) при заданих початкових умовах і заданому виді сили записується так:

$$x = \sqrt[3]{\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\mu}{m}}\cdot t + \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\right)^2}. \tag{136}$$

Приклад 2.8. На матеріальну точку, яка може рухатися лише прямою, діє лінійна сила пружності, згідно з законом $F_x = -cx$ (рис. 2.7). Знайти закон руху точки при таких початкових умовах: при $t = 0$:

$$, \qquad x = x_0, \quad v = v_0. \tag{137}$$

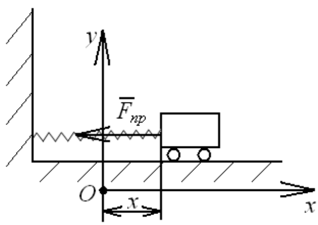

Рисунок 2.7 – Схема до прикладу 2.8

Розв’язання.

Диференціальне рівняння руху точки (107) для цього випадку записується так:

$$m\ddot{x} = -cx. \tag{138}$$

Якщо ввести позначення: $k^2 = \frac{c}{m}$, то остаточно приходимо до такого диференціального рівняння власних лінійних коливань матеріальної точки:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{139}$$

З математичної точки зору – це лінійне однорідне (оскільки в правій частині стоїть нуль) диференціальне рівняння другого порядку, яке найбільш ефективно розв'язується методом характеристичного рівняння, який ми виклали вище (дивись формули (121)–(127)). Тобто загальний розв'язок рівняння (138) дається формулою (127). При цьому сталі інтегрування знаходяться з початкової умови (137).

Для задоволення другій умові із (137) продиференцюємо по t обидві частини в (127). Будемо мати:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{140}$$

Підставляючи (127) і (140) в (137) приходимо до таких співвідношень:

$$x_0 = C_1, \quad v_0 = kC_2, \tag{141}$$

і тепер закон руху (закон вільних коливань, які виникають виключно за рахунок початкових умов при ненульових значеннях хоча б одного з параметрів (x_0 або v_0) записуємо так:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \tag{142}$$

Приклад 9. Матеріальна точка масою $m = 2$кг рухається під дією сили $F_x = 8x + 5$ Знайти закон руху точки, якщо $x_0 = 3$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Розв'язання.

Диференціальне рівняння руху точки має такий вигляд:

$$2\ddot{x} = 8x + 5. \tag{143}$$

Якщо ввести позначення $k^2 = \frac{8}{2} = 4, \quad A = \frac{5}{2}$, то замість (143) прийдемо до наступного рівняння:

$$\ddot{x} - k^2 x = A. \tag{144}$$

Відмінність рівняння (144) від рівняння (139) полягає в тому, що, по-перше в ліву частину (144) x входить зі знаком мінус, і по-друге, в правій частині стоїть відоме число A, а не нуль, як в (137). З математичної точки зору рівняння (144) – це лінійне **неоднорідне** диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Згідно з загальною теорією таких рівнянь його загальний розв'язок будемо шукати в такому вигляді:

$$x = x_1 + x_2, \tag{145}$$

де x_1 – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (144), тобто для запису цього рівняння треба в (144) відкинути праву частину. І тоді прийдемо до такого рівняння:

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \tag{146}$$

x_2 – будь який частинний розв'язок рівняння (144), який найчастіше треба шукати у вигляді правої частини. В нашому випадку, оскільки $A = const$ x_2 треба шукати у вигляді :

$$x_2 = B, \text{ тоді } \ddot{x}_2 = 0, \tag{147}$$

і B визначається з такого рівняння:

$$-k^2 B = A \to B = -\frac{A}{k^2}. \tag{148}$$

Запишемо для диференціального рівняння (146) його характеристики рівняння:

$$\lambda^2 - k^2 = 0. \tag{149}$$

Підставляючи отримані вирази для x_1 і x_2 в формулу (145) і враховуючи, що $k = 2,\ A = 2{,}5$ загальний розв'язок рівняння (143) має такий вигляд:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 0{,}625. \tag{152}$$

Згідно з умовою задачі C_1 і C_2 знаходимо з таких початкових умов:

при $t = 0,$ $$x = 3,\ \dot{x} = 5\ . \tag{153}$$

Продиференціюємо формулу (152) за часом:

$$\dot{x} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \tag{154}$$

Підставляючи (152) і (154) в (153), будемо мати таку систему рівнянь відносно C_1і C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 - 0{,}625; \\ 5 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases} \tag{155}$$

Помножимо перше рівняння на два і додамо обидва рівняння:

$$11 = 4C_1 - 1{,}25 \to C_1 = \frac{1}{4} \cdot 12{,}25 = 3{,}06.$$

Після цього з другого рівняння (155) знаходимо C_2

$$C_2 = C_1 - 2{,}5 = 0{,}56.$$

Остаточно із (152) записуємо закон руху точки під дією заданої сили і при конкретних початкових умовах:

$$x = 3{,}06e^{2t} + 0{,}56e^{-2t} - 0{,}625. \tag{156}$$

2.4 Сила залежить лише від швидкості точки $\boldsymbol{F_x = F_x(\dot{x})}$

Диференціальне рівняння руху точки вздовж осі *Ox* записується в такому вигляді:

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}). \tag{157}$$

Якщо права частина в (157) не являється лінійною функцією від $\dot{x}$, тоді необхідно застосовувати двохкрокову схему.

Перший крок. Якщо записати замість (157) диференціальне рівняння першого порядку відносно $\dot{x}$, то бачимо, що на відміну від випадку коли $F_x = F_x(x)$ тут не потрібно робити попередню заміну змінної диференціювання за формулою (109), оскільки тут змінних лише дві:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x}). \tag{158}$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, будемо мати:

$$t = m\int \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C_1. \tag{159}$$

Це перший інтеграл рівняння (157), який в неявному вигляді (у вигляді квадратури) дає залежність між часом руху і швидкістю точки.

Як правило, нас навпаки цікавить залежність швидкості від часу, але для цього, а також для того, щоб була можливість виконати другий крок інтегрування повинні виконуватися дві умови. По-перше, інтеграл в правій частині (159), який ми позначимо, як:

$$\Phi(\dot{x}, C_1) = m \int \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C_1, \tag{160}$$

обов’язково береться в елементарних функціях від $\dot{x}$. По-друге, після цього співвідношення:

$$t = \Phi(\dot{x}, C_1) \tag{161}$$

можна розв’язати відносно $\dot{x}$, тобто записати залежність:

$$\dot{x} = \varphi(t, C_1). \tag{162}$$

Якщо усе це вдалося зробити, то **другий крок** інтегрування рівняння (157) не викликає принципових складнощів і проводиться за наступною схемою:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, C_1), \tag{163}$$

$$dx = \varphi(t, C_1)dt, \tag{164}$$

$$x = \int \varphi(t, C_1)dt + C_2. \tag{165}$$

Звідси бачимо, що якщо зазначені вище дві умови виконані, то для випадку $F_x = F_x(\dot{x})$ загальний розв’язок диференціального рівняння прямолінійного руху можна буде записати, хоча б у квадратурах.

Якщо ж в кінці першого кроку не вдається з якоїсь із двох причин записати залежність (162), то можна спробувати повернутися до рівняння (158) і зробити в ньому заміну змінної диференціювання за формулою (109), тобто переписати (158) в такому вигляді:

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = F_x(\dot{x}). \tag{166}$$

Тут відокремлення змінних приводить до такого співвідношення:

$$m \cdot \frac{\dot{x}d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dx. \tag{167}$$

Інтегруючи ліву частину по $\dot{x}$, а праву по x, будемо мати наступну залежність:

$$x = m\int \frac{\dot{x}d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C_1. \tag{168}$$

Це залежність між положенням точки на прямій і її швидкістю у цій точці . За допомогою формул виду (168) при конкретному значені C_1 яке треба визначити з початкових умов, можна побудувати фазовий портрет або фазову траєкторію, про яку вже сказано вище (дивись рис. 2.6). Якщо ввести позначення:

$$\Psi(\dot{x}, C_1) = m\int \frac{\dot{x}d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C_1. \tag{169}$$

і записати залежність (168) в такому вигляді:

$$x = \Psi(\dot{x}, C_1), \tag{170}$$

то для можливості виконати другий крок знову повинні виконуватися умови. По-перше, інтеграл в правій частині формули (169) береться в елементарних функціях, і по-друге, співвідношення (170) розв’язується відносно $\dot{x}$, тобто вдається записати таку залежність:

$$\dot{x} = \Psi(x, C_1). \tag{171}$$

При виконанні обох цих умов другий крок нашої формули виконується в такому порядку:

$$\frac{dx}{dt} = \Psi(x, C_1), \tag{172}$$

$$\frac{dx}{\Psi(x, C_1)} = dt,$$

$$t = \int \frac{dx}{\Psi(x, C_1)} + C_2. \tag{173}$$

Формула (173) дає загальний інтеграл рівняння (157). Зрозуміло, що якщо інтеграл в правій частині (173) можна виразити в елементарних функціях, а потім отримане співвідношення розв'язується відносно x, то бажано записати замість загального інтегралу загальний розв'язок рівняння (157) у звичній формі так:

$$x = x\left(t, C_{1,} C_2\right). \tag{174}$$

Увага! Досить часто в практичних задачах опір середовища, який найчастіше і є силою, що залежить від швидкості тіла або точки, у першому наближенні описують за допомогою лінійної функції виду:

$$F_x(\dot{x}) = a\dot{x} + \beta \quad \text{або} \quad F_x(\dot{x}) = a\dot{x},$$

і тоді, як і для лінійної залежності $F_x(x)$ у попередньому параграфі більш ефективно застосовувати для інтегрування рівняння (157) метод характеристичного рівняння, який ми детально описали вище.

Приклад 10. Отримавши в положенні $x = x_0 = 2$м початкову швидкість $v = v_0 = 10$ м/с матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухається вздовж осі x і на неї діє сила опору, яка залежить від швидкості згідно з формулою $F_x = F_x(\dot{x}) = -a\dot{x}^2$ де $a = 0{,}2$. Записати закон руху точки.

Розв'язання.

Рівняння руху точки записується так:

$$m\ddot{x} = -a\dot{x}^2. \tag{175}$$

Це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, для якого не можна застосовувати метод характеристичного рівняння, тому використаємо описану вище двохкрокову схему.

На першому кроці будемо мати таке диференціальне рівняння першого порядку:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -a\dot{x}^2.$$

Змінні легко розділяються і будемо мати:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{a}{m}dt.$$

Інтегруючи обидві частини за формулою 1 із таблиці інтегралів, знаходимо:

$$-\frac{1}{\dot{x}} = -\frac{a}{m}t + C_1. \qquad (176)$$

Розв'язуючи це співвідношення відносно $\dot{x}$, отримуємо залежність швидкості від часу:

$$\dot{x} = \frac{1}{\frac{a}{m}t - C_1}. \qquad (177)$$

Задовольняючи початкову умову при $t = 0 \quad \dot{x} = v_0$, знаходимо $C_1 = -\frac{1}{v_0}$, і тоді замість (177) закон зміни швидкості у часі записується так:

$$\dot{x} = \frac{1}{\frac{a}{m}t + \frac{1}{v_0}}. \qquad (178)$$

Другий крок інтегрування рівняння (175) тепер проводиться так:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{a}{m}t + \frac{1}{v_0}},$$

$$x = \int \frac{dt}{\frac{a}{m}t + \frac{1}{v_0}} + C_2 = \frac{m}{a} ln \left|\frac{a}{m}t + \frac{1}{v_0}\right| + C_2;$$

при $t = 0 \quad x = x_0$, тоді:

$$C_2 = x_0 - \frac{m}{a} ln \frac{1}{v_0} = x_0 + \frac{m}{a} ln v_0$$

і остаточно закон руху точки записується так:

$$x = x_0 + \frac{m}{a} ln v_0 + \frac{m}{a} ln \left|\frac{a}{m}t + \frac{1}{v_0}\right|. \qquad (179)$$

Підставляючи сюди задані значення параметрів прийдемо до такої залежності:

$$x = 2 + 10 ln 10 + 10\, ln(0{,}1t + 0{,}1) \qquad (180)$$

Приклад 11. Матеріальна точка масою $m = 1{,}5$ кг рухається прямолінійно під дією сили, яка змінюється за таким законом $F_x = 6 - 1{,}5x + 3\dot{x}$. Записати закон руху точки, якщо початкові умови приймають такі значення $x_0 = 0{,}5$ м $\dot{x}_0 = 1$ м/с.

Розв'язання.

Звернемо увагу на те, що в даному випадку сила одночасно залежить і від швидкості точки і від її положення на прямій, але оскільки від обох факторів залежність є лінійною, то такі задачі порівняно просто можна розв'язувати методом характеристичного рівняння.

Увага! В посібниках [1,3,5] детально і з загальних позицій проаналізованою ситуацією, коли на точку, що може рухатися прямолінійно діє сила, яка спеціальним способом залежить одночасно від швидкості, положення точки і від часу і має такий вигляд:

$$F_x = -cx - a\dot{x} + A\,sin\,\omega t. \tag{181}$$

Це так званий випадок вимушених коливань точки з врахуванням опору.

Тут ми проведемо розв'язання для дещо іншого випадку, коли коливання не виникають але використовується той же математичний апарат, що і для сили (181). В нашій задачі диференціальне рівняння руху точки запишеться так:

$$1{,}5\ddot{x} = 6 - 1{,}5x + 3\dot{x}. \tag{182}$$

Перепишемо рівняння (182) в такому вигляді

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4. \tag{183}$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Як і в попередньому параграфі шукаємо його загальний розв'язок в такій формі:

$$x = x_1 + x_2 \tag{184}$$

Тут x_1 загальний розв'язок відповідного (183) однорідного рівняння:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0, \tag{185}$$

а x_2 – будь який частинний розв'язок рівняння (183). Очевидно, що в нашому випадку найпростішим частинним розв'язком рівняння (183) буде:

$$x_2 = 4, \qquad (186)$$

а для знаходження загального розв'язку рівняння (185) складемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \ \text{ або } (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Звідси знаходимо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тобто маємо випадок кратних коренів, тоді згідно з теорією таких рівнянь [2] загальний розв'язок однорідного рівняння (185) записується так:

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 t e^t. \qquad (187)$$

Підставляючи (187) і (186) у формулу (184), записуємо загальний розв'язок рівняння (183) таким чином;

$$x = C_1 e^t + C_2 t e^t + 4. \qquad (188)$$

Швидкість точки знаходимо із (188) шляхом диференціювання:

$$\dot{x} = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_2 t e^t. \qquad (189)$$

Згідно з умовою задачі початкові умови записуються так

при $t = 0,\quad x = 0{,}5;\quad \dot{x} = 1.$ (190)

Підставляючи (188) і (189) в (190) приходимо для визначення C_1 і C_2 до такої системи рівнянь:

$$0{,}5 = C_1 + 4 \to C_1 = -3{,}5,$$

$$1 = C_1 + C_2 \to C_2 = 4{,}5.$$

Остаточно, закон руху точки запишеться так:

$$x = 4 - 3{,}5e^t + 4{,}5te^t. \qquad (191)$$

Увага! На майбутнє слід зробити наступне зауваження. Як відомо, на матеріальну точку можуть одночасно діяти сили різних видів, або ж деякі сили (або одна прикладена до точки сила) можуть одночасно залежати від кількох факторів (кількох змінних). Тут треба розрізняти дві принципово різні ситуації. Якщо рівняння руху точки вдається записати у вигляді:

$$m\ddot{x} = F_1(t) + F_2(x) + F_3(x)\,, \tag{192}$$

то можна спробувати застосувати принцип незалежності дії сил і шукати загальний розв'язок рівнянь такого виду у вигляді:

$$x = x_1 + x_2 + x_3; \tag{193}$$

в сподіванні, що x_1, x_2 і x_3 можна для кожної з трьох сил в правій частині знайти описаними тут методами.

Інша ситуація буде, коли рівняння:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}) \tag{194}$$

не дозволяє провести в правій частині подібне розділення прикладеної до точки складної сили. Як правило, в цьому випадку аналітичний розв'язок рівняння (194) не існує навіть у квадратурах і в таких випадках треба застосовувати чисельні методи, зокрема метод Рунге-Кутта, попередньо привівши рівняння (194) до системи двох рівнянь першого порядку і склавши нескладну програму для ЕОМ. Детально такий підхід викладено і проілюстровано конкретними прикладами в навчальному посібнику [4]. В даних методичних вказівках ми розглянули лише точні аналітичні прийоми так званого „методу інтегрування” для розв'язання основної задачі динаміки точки.

3 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ Д-2 «ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПІД ДІЄЮ ЗМІННИХ СИЛ»

Приклад 3.1. Матеріальна точка М масою $m = 0{,}5$ кг, отримавши в точці А початкову швидкість $v_A = 5$ м/с, рухається у зігнутій трубі ABC, що розташована у вертикальній площині (рис. 3.1). На ділянці AB на точку окрім сили ваги і тертя (коефіцієнт тертя задано як $f = 0{,}1$), діє у напрямі руху сила $\bar{F}$, яка змінюється згідно з законом $F = 5 + 2SH$, де S – переміщення точки вздовж ділянки AB. У положенні B точка, не змінюючи значення своєї швидкості, переходить на ділянку BC труби, де на неї окрім сил ваги і тертя діє вздовж даної ділянки змінна сила $\overline{\mathrm{Q}}$, яка направлена до точки C і модуль якої змінюється за таким законом $\mathrm{Q} = 3e^{2t}(H)$. Знаючи час руху $t_1 = 2\,c$ на ділянці AB знайти шлях, пройдений точкою на ділянці AB, а також закон руху на ділянці BC, якщо $a = 30°$, $\beta = 120°$, $\varphi = 45°$.

Розв'язання.

1. Окремо розглянемо кожну з двох ділянок руху і покажемо на кожній ділянці, сили прикладені до точки.

2. На першій ділянці з врахуванням заданих значень кутів будемо мати таку схему (рис. 3.2).

Диференціальне рівняння руху у векторній формі тут запишеться так:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{тр} + \bar{F}. \qquad (195)$$

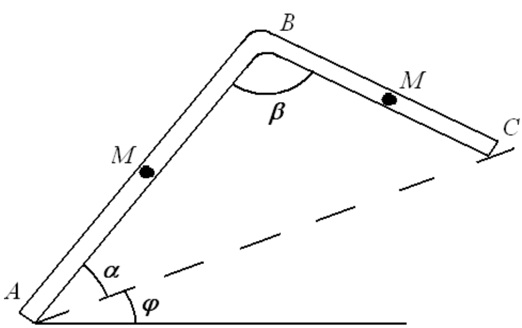

Рисунок 3.1 – Схема до прикладу 3.1

Якщо спроектувати це рівняння на показані на рис. 3.2 осі координат, будемо мати два скалярних рівняння:

$$\text{на } Ax\text{: } m\ddot{x} = -P\sin 75° - F_{\text{тр}} + 5 + 2x, \tag{196}$$

$$\text{на } Ay\text{: } \qquad 0 = N - P\cos 75°. \tag{197}$$

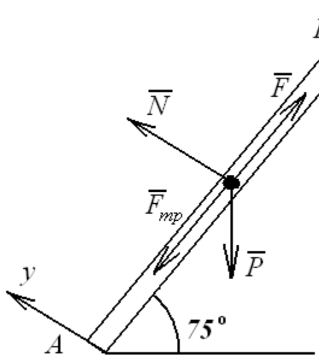

Рисунок 3.2 – Схема першої ділянки

Із (197) знаходимо:

$$N = P\,cos\,75 = mg\,cos\,75.$$

і тоді згідно з законом Кулона:

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 75. \tag{198}$$

Підставляючи (198) в (196) після ділення обох частин на $m = 0{,}5$ будемо мати таке рівняння:

$$\ddot{x} = -9{,}81\,sin\,75 - 0{,}1\cdot 9{,}81\,cos\,75 + 4x + 10 = x - 4x = A; \tag{199}$$

$$\ddot{x} - 4\ddot{x} = A,$$

де $A = 10 - 9{,}81(sin\,75° + 0{,}1\,cos\,75) = 0{,}2.$

Рівняння (199) – це лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Вище ми уже зустрічалися з такими рівняннями і наводили приклади їх розв’язування. Тому, шукаючи загальний розв’язок рівняння (199) у формі:

$$x = x_1 + x_2, \tag{200}$$

для знаходження x_1 розглянемо таке лінійне однорідне рівняння:

$$\ddot{x} - x = 0 \qquad (201)$$

Характеристичне рівняння для рівняння (201) записується так:

$$\ddot{x} - 4 = 0 \quad \lambda^2 - 4 = 0,$$

звідси $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ і загальний розв'язок рівняння (201) має такий вигляд:

$$x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}\,. \qquad (202)$$

Звідси диференціюванням знаходимо:

$$\dot{x} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \qquad (203)$$

Частинний розв'язок рівняння (199) шукаємо у вигляді правої частини і в нашому випадку будемо мати:

$$x_2 = B,$$

де $B = -A = -0{,}2$.

Остаточно з врахуванням (200) загальний розв'язок рівняння (199) записується так:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + B, \qquad (204)$$

а необхідна нам швидкість на ділянці *AB* змінюється згідно до закону:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = 2C_1 e^{t} - 2C_2 e^{-t}. \qquad (205)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов, які в нашому випадку записується так:

при $t = 0$ $$x = 0 \quad \dot{x} = v_A = 5. \qquad (206)$$

Підставляючи сюди для x і $\dot{x}$ їх вирази із (204) і (205) приходимо до такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} O = C_1 + C_2 + B; \\ 5 = C_1 - C_2. \end{cases}.$$

Звідси знаходимо, що:

$$C_1 = 0{,}5(5 - B) = 2{,}6; \quad C_2 = C_1 - 5 = -2{,}4,$$

і остаточно формули (204) і (205) записуються так:

$$x = 2{,}6e^{2t} - 2{,}4e^{-2t} - 0{,}2; \tag{207}$$

$$\dot{x} = 5{,}2e^{2t} + 4{,}8e^{-2t}. \tag{208}$$

Підставляючи в (207) замість t значення $t_1 = 2c$, знаходимо шлях, який точка пройшла на ділянці AB:

$$S = x|_{t=t_1} = 2{,}6e^{4} - 2{,}4e^{-4} - 0{,}2 = 141{,}7 \text{ м},$$

а підставляючи це ж значення t в формулу (208) будемо мати швидкість в кінці першої ділянки, тобто в точці B і ця швидкість буде початковою для руху на ділянці BC:

$$v_B = \dot{x}|_{t=t_1} = 5{,}2e^{4} + 4{,}8e^{-4} = 283{,}9 \text{ м/с}.$$

3. На другій ділянці треба спочатку визначитися з кутом її нахилу до горизонту, враховуючи задані значення усіх кутів. Неважко бачити, що оскільки $\alpha + \varphi + \beta = 195°$, то ділянка BC утворює кут $\gamma = 15°$ з горизонтом (рис. 3.3). Показуємо на рисунку усі прикладені до точки сили з врахуванням заданого для сили Q напрямку(рис. 3.3) і записуємо диференціальне рівняння руху у векторній формі:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{тр} + \bar{Q}\,. \tag{209}$$

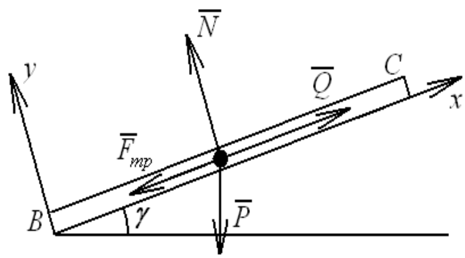

Рисунок 3.3 – Схема другої ділянки

В проекціях на показані на рис. 3.3 осі координат приходимо до таких скалярних рівнянь:

$$m\ddot{x} = -P\sin\gamma - F_{тр} + Q; \tag{210}$$

$$0 = -P\cos\gamma + N. \tag{211}$$

Із (211) знаходимо N, а потім за формулою Кулона визначаємо модуль сили тертя:

$$N = P\cos\gamma \qquad\qquad F_{тр} = fN = fP\cos\gamma.$$

Тепер рівняння (210) приймає такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -m\sin\gamma - fm\text{g}\cos\gamma + 3e^{2t}.$$

Розділимо обидві частини на $m = 0{,}5$кг, прийдемо остаточно до такого неоднорідного рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} = -\text{g}(\sin\gamma + f\cos\gamma) + 6e^{2t}. \tag{212}$$

Перший крок двохкрокової схеми приводить до такого рівняння першого порядку:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = A + 6e^{2t}. \tag{213}$$

Це рівняння легко інтегрується за методом відокремлення змінних і ми будемо мати:

$$d\dot{x} = Adt + 6e^{2t};$$

$$\dot{x} = At + 3e^{2t} + C_1. \tag{214}$$

На **другому кроці** приходимо до такого рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = At + 3e^{2t} + C_1. \tag{215}$$

З якого знаходимо тим же методом, відокремлення змінних загальний розв'язок рівняння (212) в такому вигляді:

$$dx = Atdt + 3e^{2t}dt + C_1dt;$$

$$x = \frac{1}{2}At^2 + \frac{3}{2}e^{2t} + C_1t + C_2. \tag{216}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 знаходимо з таких початкових умов при

$$t = 0 \quad x = 0 \quad \dot{x} = v_B = 283{,}9. \tag{217}$$

Підставляючи сюди вирази (214) і (216) при $t = 0$, приходимо до таких алгебраїчних рівнянь:

$$O = \frac{3}{2} + C_2 \rightarrow C_2 = -\frac{3}{2},$$

$$v_B = 3 + C_1 \rightarrow C_1 = v_B - 3.$$

Тоді остаточно закон руху точки на ділянці *BC* записуємо так:

$$x = -1{,}77t^2 + 1{,}5e^{2t} + 281t - 1{,}5. \qquad (218)$$

Увага! Інші варіанти розрахунково-графічної роботи відрізняються від розглянутого тут прикладу лише іншими видами заданих залежностей для сил $\bar{F}$ на ділянці AB і $\bar{Q}$ на ділянці BC, зокрема в деяких варіантах на ділянці AB сила $\bar{F}$ може залежати не від положення точки, а від швидкості. Вище ми детально і з прикладами описали алгоритм інтегрування диференціального рівняння прямолінійного руху точки для такого випадку. При виконанні РГЗ треба поступати так, як ми покажемо на конкретному прикладі.

Приклад 3.2 Залишаючи усі параметри задачі такими, якими вони були у прикладі 1, але на ділянці *AB* на точку діє у напрямку руху сила $\bar{F}$, яка змінюється згідно з законом $F = 2{,}5 + 0{,}5\dot{S}$, де $\dot{S}$ – перша похідна від переміщення точки вздовж ділянки *AB*, тобто швидкість на цій ділянці. Знаючи час руху $t_1 = 2\ c$ на ділянці *AB* знайти шлях, пройдений точкою на ділянці *AB*, а також закон руху на ділянці *BC*.

Розв'язання.

Тими ж міркуваннями, що були на початку розв'язання прикладу 3.1 приходимо замість (199) до такого рівняння руху точки на ділянці *AB:*

$$\ddot{x} - \dot{x} = A, \qquad (219)$$

де тепер $A = 5 - 9{,}81(sin\,75° + 0{,}1\,cos\,75°) = -4{,}8.$

Рівняння (219) – це лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого шукаємо у формі (200). Для знаходження x_1 записуємо однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню (219):

$$\ddot{x} - \dot{x} = 0. \qquad (220)$$

Для рівняння (220) характеристичне рівняння записується так:

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Звідси знаходимо $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$ і тоді x_1 має такий вид:

$$x_1 = C_1 + C_2 e^t. \tag{221}$$

Оскільки в рівнянні (219) відсутня шукана функція x, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати в такому вигляді

$$x_2 = Bt. \tag{222}$$

Підставляючи (222) в (219), знаходимо B так:

$$-B = AB = -A = 4{,}8.$$

Згідно з (200) загальний розв'язок рівняння (219) записується так:

$$x = C_1 + C_2 e^t + 4{,}8t. \tag{223}$$

Звідси знаходимо шляхом диференціювання:

$$\dot{x} = C_2 e^t + 4{,}8. \tag{224}$$

Підставляючи ці вирази в умови (206), знаходимо C_1 і C_2 так:

$$0 = C_1 + C_2 \to C_1 = -0{,}2,$$

$$5 = C_2 + 4{,}8 \to C_2 = 0{,}2.$$

Остаточно замість (223) і (224) тепер маємо:

$$x = -0{,}2 + 0{,}2e^t + 4{,}8t, \tag{225}$$

$$\dot{x} \ = 0{,}2e^t + 4{,}8. \tag{226}$$

Підставляючи сюди замість t значення $t_1 = 2$ c, знаходимо шлях пройдений точкою на ділянці AB, а також швидкість у точці B, яка буде початковою для руху на ділянці BC:

$$S = x|_{t=t_1} = -0{,}2 + 0{,}2e^2 + 4{,}8 \cdot 2 = 10{,}88 \text{ м};$$

$$v_B = \dot{x}|_{t=t_1} = 0{,}2 + 4{,}8 = 6{,}28 \text{ м/с}.$$

Що стосується дослідження руху точки на ділянці BC, то всі міркування залишаються такими, якими вони були у попередньому прикладі з єдиною заміною в початкових умовах (217) замість $v_B = 283{,}9$ треба зробити заміну на $v_B = 6{,}28$. Тоді:

$$C_1 = v_B - 3 + 3{,}28 \qquad C_2 = -1{,}5;$$

і закон руху на ділянці BC запишеться так:

$$x = -1{,}77t^2 + 1{,}5e^{2t} + 3{,}28t - 1{,}5. \tag{227}$$

4 ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ЗАГАЛЬНИХ ТЕОРЕМ ДИНАМІКИ

Зазначимо, що описаний вище аналітичний метод розв'язання основної задачі динаміки точки, що полягає в складанні і наступному інтегруванні диференціальних рівнянь її руху, і який ми умовно назвали методом інтегрування - це не єдино можливий шлях в динамічному аналізі руху матеріальної точки. Ряд важливих характеристик руху можна отримати за допомогою так званих загальних теорем, які виводяться шляхом математичних перетворень основного закону динаміки точки і пов'язують між собою міри руху (кількість руху і кінетичну енергію) з характеристиками прикладених до точки сил (імпульсом сили і роботою сили).

Відразу зробимо наголос на тому, що ці теореми не відкривають принципово нових можливостей для аналізу руху, більш того, на виході кожна з теорем дає менше інформації про рух точки (найчастіше – це швидкість точки в заданий момент часу або в заданому положенні), але часто цей **другий метод** розв'язання основної задачі динаміки точки буває простішим за метод інтегрування. Проаналізуємо границі застосування двох загальних теорем динаміки точки.

Теорема про зміну кількості руху точки у векторній формі записується так:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt. \qquad (228)$$

Як правило, при розв'язанні задач це рівняння проектується на обрані осі координат, зокрема, у випадку прямолінійного руху в проекції на вісь руху із (228) приходимо до такого скалярного рівняння:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt. \qquad (229)$$

Ці формули можна застосовувати в задачах, де виконуються наступні дві умови:

1. В число заданих і шуканих входить така четвірка величин $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{F}, t$, причому три з них відомі, а четверту треба визначити.

2. Під час руху на точку діють сили, кожна з яких належить до одного із двох класів $\bar{F} = const$ або $\bar{F} = \bar{F}(t)$.

Увага! Визначальним для застосування даної теореми є те, що в число заданих або невідомих (шуканих) величин входить саме **час руху** на даній ділянці.

Увага! Навіть у випадку, коли на даній ділянці мова йде про час руху, теорему **не можна** застосовувати, якщо хоча б одна сила залежить від швидкості або положення точки.

Теорема про зміну кінетичної енергії точки має скалярну форму запису:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}. \qquad (230)$$

Як правило, при розв'язанні задач ця теорема використовується на тих ділянках руху, де є відомим переміщення точки, через яке можна обчислити роботи усіх сил за відомими формулами.

Зокрема найчастіше в задачах зустрічаються такі формули для знаходження роботи:

1. **Робота сили ваги**:

$$A_{1,2} = Ph, \qquad (231)$$

де λ – вертикальне переміщення точки.

2. **Робота сили пружності**:

$$A_{1,2} = \frac{c}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \qquad (232)$$

де λ_1, λ_2 – відповідно початкова і кінцева деформації пружини.

3. **Робота сили тертя**:

$$A_{1,2} = -F_{\text{тр}} \cdot S, \qquad (233)$$

де S – шлях, який точка проходить вздовж своєї траєкторії.

4. Якщо точка рухається прямолінійно під дією сили, яка залежить **лише від положення** точки згідно з законом $F_x = F_x(x)$, то робота обчислюється за формулою:

$$A_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)dx. \qquad (234)$$

Формулу (230) можна використовувати в тих задачах, де виконуються такі дві умови:

1. В число заданих і шуканих величин входить така четвірка $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{F}, S,$ причому тут під S розуміють або пройдений точкою шлях, або переміщення точки з одного рівня на інший.

2. Під час руху на точку діють сили, кожна з яких належить до одного із двох класів $\bar{F} = const,$ або $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}(x, y, z).$

Увага! Визначальною зовнішньою ознакою для застосування даної теореми є те, що в число заданих або шуканих величин обов'язково входить переміщення точки (або шлях , або висота) на даній ділянці руху точки

Увага! Ще раз підкреслюємо, що теорема не працює, якщо хоча б одна із прикладених до точки сил залежить від часу, або від швидкості.

Увага! Найчастіше вказані дві теореми застосовуються в задачах, де є кілька різних ділянок руху, причому за вказаними тут ознаками на частині ділянок працює одна з теорем, а на інших – друга.

5 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ Д-6 «ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНИХ ТЕОРЕМ ДИНАМІКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ»

Приклад 5.1 Кулька, яка вважається матеріальною точкою, починає рухатися з положення A в середині трубки, вісь якої розміщена у вертикальній площині (рис. 5.1). Початкова деформація пружини $\ell_0 = 20$см, маса точки $m = 0{,}5$кг , $AB = 50$ см , $v_A = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$,
$t = 1{,}4\ c, R_1 = 1$м , $R_2 = 1{,}2$м , $f = 0{,}7,\ \ \alpha = 60°, \beta = 60°, \gamma = 45°$,
$c = 20\ H/$см.

Знайти швидкості точки в положеннях B, C, E і D, а також тиск кульки на стінки каналу в положенні C. Тертям на криволінійних ділянках траєкторії руху кульки знехтувати.

Розв'язання.

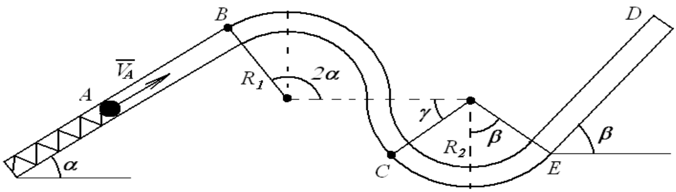

Рисунок 5.1 – Схема до прикладу 5.1

В даній задачі увесь рух кульки всередині трубки треба розбити на кілька ділянок за двома ознаками. По-перше, окремо розглядати прямолінійні та криволінійні ділянки і, по-друге, виділяти окремо ділянки, на яких на кульку діють різні системи сил. Зокрема, за цією другою ознакою ділянку AB треба розбити на дві частини за допомогою проміжної точки, тому що сила пружності буде діяти на кульку тільки на довжині $\ell_0 = 20$ см (доки пружина розправиться), а увесь шлях від A до B складає 50 см. Слід також звернути увагу на те, що розпочинати аналіз руху треба з тієї точки, в якій задані положення і початкова швидкість точки. В нашій задачі такою є точка A. Виконуючі вказані рекомендації задачу розв'язуємо в такому порядку.

1. **Ділянка *AK*** (рис. 5.2). На цій ділянці на точку діють чотири сили: вага $\overline{P}$ сила пружності $\overline{F}_{\text{пр}}$, нормальна реакція стінок трубки та

сила тертя $\overline{F}_{\text{тр}}$. Усі ці сили не змінюються на даній ділянці за напрямком і усі, крім сили пружності, є сталими за модулем. Що стосується сили пружності, то за модулем вона залежить лише від положення кульки.

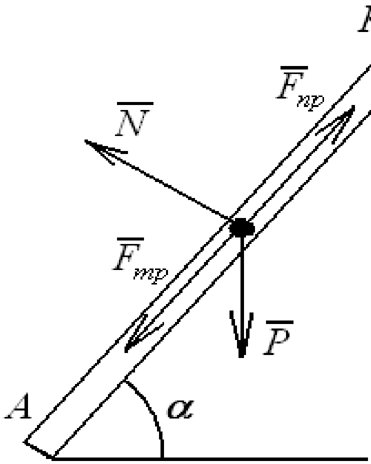

Рисунок 5.2 – Схема ділянки *АК*

Якщо крім того враховувати, що нам відома довжина ділянки *АК* (вона дорівнює ℓ_0), то бачимо, що тут виконуються обидві умови для застосування теореми про зміну кінетичної енергії точки, яка для даної ділянки запишеться так:

$$\frac{mv_K^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_P + A_{F_{\text{пр}}} + A_{F_{\text{тр}}} + A_N. \qquad (235)$$

Врахуємо, що у всіх без винятку задачах нормальна до переміщення сила не виконує роботу, тобто $A_N = 0$ роботу трьох інших сил знаходимо за наведеними вище формулами (231) – (233). Оскільки при переході від *А* до *К* ми піднімаємося вгору, а із відповідного прямокутного трикутника $h = \ell_0 \sin\alpha$, будемо мати:

$$A_P = -mg\ell_0 \sin\alpha. \qquad (236)$$

За формулою (232) оскільки $\lambda_1 = \ell_0,\ \lambda_2 = 0$ знаходимо:

$$A_{F_{\text{пр}}} = \frac{1}{2}c\ell_0^2. \qquad (237)$$

За формулою (233), враховуючи, що $F_{\text{тр}} = fN$, $N = mg\cos\alpha$, будемо мати:

$$A_{F_{\text{тр}}} = -fmg\cos\alpha \cdot \ell_0. \qquad (238)$$

Підставляючи (236), (237), (238) в праву частину формули (235) і розв'язуючи отриману залежність відносно v_K^2, знаходимо:

$$v_K^2 = v_A^2 - 2g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \cdot \ell_0 + \frac{c}{m}\ell_0^2. \qquad (239)$$

Підставляючи сюди значення заданих параметрів і уважно слідкуючи, щоб усі параметри були виміряні в одній системі (тобто, переводячи метри в сантиметри або навпаки), будемо мати:

$$v_K^2 = 16 - 20 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 2000 \cdot 0{,}04 = 176{,}4\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Увага! Оскільки у нас не запитується швидкість в точці *K*, а на наступній ділянці нам буде знову потрібен квадрат цієї швидкості, то із отриманого значення можна не добувати корінь.

2. **Ділянка *KB*** (рис. 5.3). Ця ділянка відрізняється від попередньої лише тим, що на кульку перестала діяти сила пружності і залишилося три сили $\overline{P}, \overline{N}, \overline{F}_{\text{тр}}$. Оскільки відома довжина цієї ділянки $KB = AB - \ell_0 = 50 - 20 = 30$ см, то знову можна застосовувати теорему про зміну кінетичної енергії точки, яка на даній ділянці записується так:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_K^2}{2} = A_P + A_{F_{\text{тр}}}. \qquad (240)$$

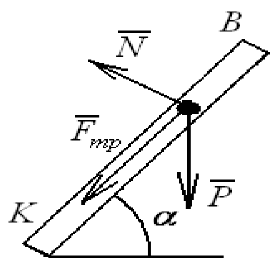

Рисунок 5.3 – Схема ділянки *KB*

При цьому у формулах (236), (238) треба замінити ℓ_0 на KB і будемо мати:

$$A_P = -mg \cdot KB \cdot \sin\alpha; \tag{241}$$

$$A_{F_{\text{тр}}} = -fmg\cos\alpha \cdot KB. \tag{242}$$

Підставляючи (241), (242) в (240), знаходимо:

$$v_B^2 = v_K^2 - 2mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) \cdot KB = 176{,}6 - 5{,}4 = 171\ \text{м}^2/\text{с}^2;$$

$$v_B = \sqrt{171} = 13{,}1\ \text{м/с}.$$

3. **Ділянка *BC*** (рис. 5.4). Згідно з умовою задачі на криволінійних ділянках ми не враховуємо силу тертя, тому на кульку на даній ділянці діють лише сила ваги $\overline{P}$ і нормальна реакція стінок трубки $\overline{N}$.

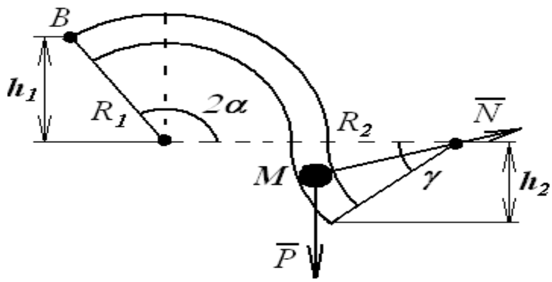

Рисунок 5.4 – Схема ділянки *BC*

Оскільки на даній ділянці легко визначити вертикальне переміщення кульки із положення *B* в положення *C*:

$$h = h_1 + h_2, \qquad \text{де } h_1 = R_1 \sin(180 - 2a) = R_1 \cdot \sin 60°$$

$$h_2 = R_2 \sin\gamma = R_2 \cdot \sin 45°,$$

то на даній ділянці знову використовуємо теорему про зміну кінетичної енергії в такому вигляді:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = A_p; \tag{243}$$

$$A_p = Ph = mg(R_1 \sin 60° + R_2 \sin 45°). \tag{244}$$

Тоді із (243) будемо мати:

$$v_C^2 = v_B^2 + 2g(R_1 \sin 60° + \ R_2 \sin 45°) = 171 + 20 \cdot 1{,}7 = 205 \text{ м}^2/\text{с}^2$$

$$v_c = 14{,}4 \text{ м/с}.$$

Ділянка *CE* (рис. 5.5). З точки зору математики ця ділянка абсолютно аналогічна попередній з єдиною відмінністю, яка полягає в тому, що тут кулька піднімається із положення C в положення E, оскільки:

$$h_3 = R_2 \sin 45° > h_4 = R_2 \cos 60° = R_2 \sin 30°.$$

Тоді на даній ділянці:

$$A_P = -mg(h_3 - h_4) = -mgR_2(\sin 45° - \sin 30°),$$

і теорема про зміну кінетичної енергії приводить до такого результату:

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_C^2}{2} = -mg(\sin 45° - \sin 30°); \tag{245}$$

$$v_E^2 = v_C^2 - gR_2(\sin 45° - \sin 30°) = 205 - 12 \cdot 0{,}2 = 202{,}6 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$v_E = 14{,}3 \text{ м/с}.$$

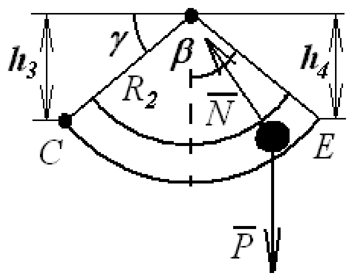

Рисунок 5.5 – Схема ділянки *CE*

5. **Ділянка *ED*** (рис. 5.6). На цій прямолінійній ділянці треба враховувати тертя, тобто тут до кульки прикладені три сили: вага $\bar{P}$ нормальна реакція $\bar{N}$ і сила тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$. Оскільки відомий час руху кульки на даній ділянці, то запишемо теорему про зміну кількості руху точки у векторній формі так:

$$m\bar{v}_D - m\bar{v}_E = \int_0^t \left(\bar{P} + \bar{N} + F_{\text{тр}}\right) d\tau \tag{246}$$

Проектуючи це векторне рівняння на вісь *Ex* будемо мати:

$$mv_D - mv_E = \int_0^t (-mg\sin\beta - F_{\text{тр}})d\tau. \qquad (247)$$

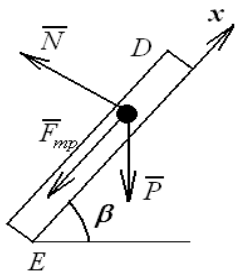

Рисунок 5.6 – Схема ділянки *ED*

Оскільки $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos\beta$, то після скорочення обох частин на масу кульки m і винесення виразу в дужках, як константи, за знак інтеграла, знаходимо швидкість у положенні *D:*

$$v_D = v_E - \text{g}(\sin\beta + f\cos\beta) \cdot t_{ED};$$

$$v_D = 14{,}3 - 10 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}4 = 1{,}7 \text{ м/с}.$$

6. Щоб знайти тиск кульки на стінки каналу в положенні *C*, тобто N_c, ми покажемо сили, які діють на кульку в цьому положенні (рис. 5.7) і запишемо в даному положенні основний закон динаміки точки.

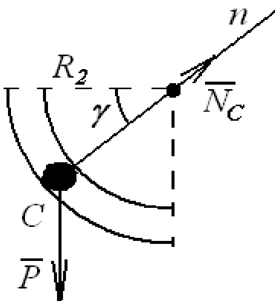

Рисунок 5.7 – Схема знаходження тиску кульки на стінки каналу в положенні *C*

Увага! При цьому основним елементом дослідження у нас є точка, тому на рис.18 ми показали не тиск кульки на стінки трубки, а, навпаки, реакцію з боку каналу на рух кульки. Згідно з третім законом динаміки ці сили однакові за величиною, але протилежні за напрямком.

Основний закон динаміки для кульки в положенні *C* має такий вигляд:

$$m\overline{W} = \bar{P} + \overline{N}_C. \tag{248}$$

Спроектуємо векторну формулу (248) на головну нормаль до траєкторії кульки в положенні *C*. Тоді будемо мати:

$$18mW_n = -m\mathrm{g}\,sin\,\gamma + N_C\,. \tag{249}$$

Звідси знаходимо N_C:

$$N_C = m(\mathrm{g}\,sin\,\gamma + W_n)$$

Якщо врахувати відому з кінематики точки формулу для нормального прискорення, то в точці *C* будемо мати таке значення:

$$W_n = \frac{v_C^2}{R_2}.$$

Тоді нормальний тиск знаходиться так:

$$N_C = m\left(\mathrm{g}\,sin\,\gamma + \frac{v_C^2}{R_2}\right);$$

$$N_c = 0{,}5 \cdot \left(10 \cdot 0{,}7 + \frac{205}{1{,}2}\right) = 89\ H.$$

Приклад 5.2 Тіло, яке розглядається як матеріальна точка, отримавши в положенні *O* швидкість $\bar{v}_0$, рухається всередині трубки, розташованої у вертикальній площині (рис. 5.8). Досягнувши положення 2, воно б'ється(удар абсолютно не пружний, тобто після нього тіло не відривається) в невагому пластину, закріплену на пружині. Знайти швидкість тіла в положенні 1, тиск тіла на стінку трубки в положенні *A*, а також величину найбільшого стиску пружини, якщо задані наступні значення параметрів: маса тіла $m = 0{,}2$кг початкова швидкість у точці *O* $v_0 = 20$м/с, час руху точки на ділянці 0 – 1 $\tau = 0{,}5c$ коефіцієнт тертя кульки від стінки трубки на прямолінійних ділянках $f = 0{,}1$ (на криволінійних ділянках тертя не враховується), жорсткість (коефіцієнт пружності) пружини *с = 2 Н/см*, задані кути $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, радіус напівкола $R = 1$ м.

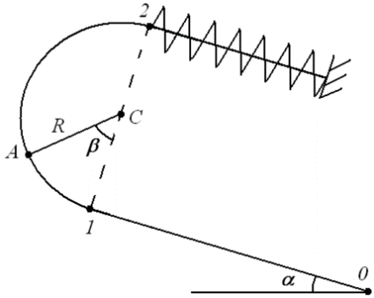

Рисунок 5.8 – Схема до прикладу 5.2

Розв’язання.

Як і у прикладі 5.1, тут необхідно розбити увесь шлях кульки від початку руху з точки *О* до повної зупинки за рахунок стиску пружини на кілька ділянок за тими двома ознаками, які ми вже вказали у попередньому прикладі, а потім на кожній ділянці, в залежності від заданих умов, застосувати одну з двох теорем.

1. Ділянка 0-1. Оскільки на цій ділянці нам відомий час руху, то показавши на рис. 5.9 усі прикладені до точки сили, записуємо теорему про зміну кількості руху у векторній формі:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \int_0^\tau \left(\bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}\right) dt. \qquad (250)$$

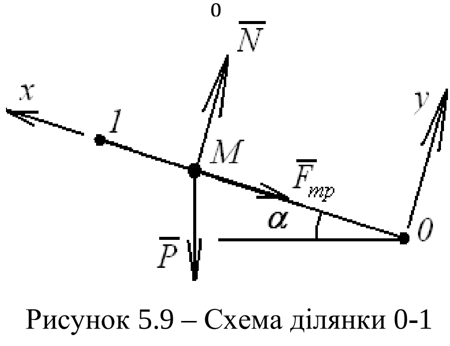

Рисунок 5.9 – Схема ділянки 0-1

Оскільки точка тут рухається прямолінійно, обидві швидкості проектуються на вісь Ox в натуральну величину і, проектуючи формулу (250) на цю вісь, приходимо до такого скалярного рівняння:

$$mv_1 - mv_0 = \int_0^{\tau} (-P\sin\alpha - F_{\text{тр}})dt. \quad (251)$$

Оскільки $F_{\text{тр}} = fN$, а із проектування (250) на вісь Oy знаходимо $N = P\cos\alpha$, бачимо, що під знаком інтеграла в дужках стоїть відома стала величина, яку можна винести за знак інтеграла і, враховуючи, що $P = m\text{g}$ а інтеграл, що залишився, дорівнює τ, приходимо до такої рівності для визначення v_1:

$$mv_1 - mv_0 = -m\text{g}(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot \tau.$$

Звідси знаходимо:

$$v_1 = v_0 - m\text{g}(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot \tau = 20 - 10 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}5 = 16{,}2 \text{ м/с}.$$

2. **Ділянка 1-2**. На цій ділянці на кульку діють лише дві сили $\bar{P}$ і $\bar{N}$ (рис. 5.10).

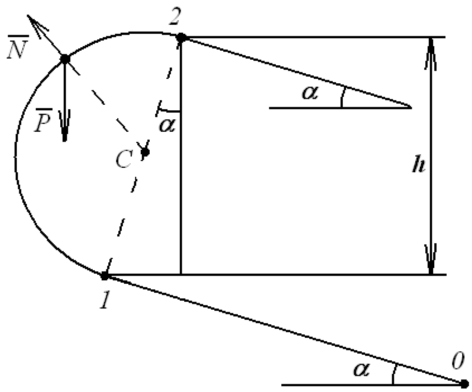

Рисунок 5.10 – Схема ділянки *1-2*

І оскільки із рис. 5.10 легко визначити вертикальне переміщення кульки вгору на висоту $h = 2R\cos\alpha$, а нормальна реакція ніколи роботи не виконує (вона у всіх точках траєкторії перпендикулярна до переміщення), то на даній ділянці записуємо теорему про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_p. \qquad (252)$$

Оскільки згідно з формулою:

$$A_p = -mgh = -2mg\mathrm{R}\cos\alpha, \qquad (253)$$

то підставляючи (253) в (252), знаходимо:

$$v_2^2 = v_1^2 - 4gR\cos\alpha = (16{,}2)^2 - 40 \cdot 1 \cdot 0{,}7 = 234{,}4 \text{ м}^2/\text{с}^2$$

$$v_2 = 15{,}3 \text{ м/с}.$$

3. **Ділянка *2-B***. Через *B* ми позначили точку повної зупинки кульки в момент максимального стиску пружини. На даній ділянці на кульку діють чотири сили (рис. 5.11) і, оскільки нам треба знайти шлях, який пройшла точка до повної зупинки, а три із чотирьох сил не змінюються за модулем, а сила пружності залежить лише від положення кульки, то тут можна застосувати теорему про зміну кінетичної енергії, яка запишеться так:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = A_p + A_N + A_{F_{\text{тр}}} + A_{F_{\text{пр}}}. \qquad (254)$$

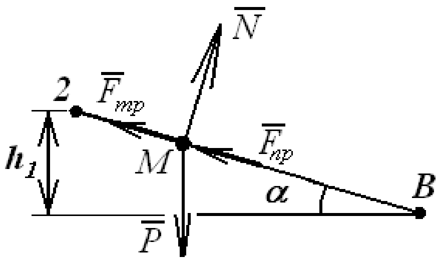

Рисунок 5.11 – Схема ділянки *2-B*

При цьому треба врахувати наступне: $v_B = 0$ (кулька зупиниться в точці *B*), *x* – довжина ділянки *2-B*, яку треба визначити із умови, що при цьому v_B стане нулем, $A_N = 0$ (нормальна реакція не виконує роботи):

$$A_p = +mgh_1 = mg_{\text{x}}\sin\alpha. \qquad (255)$$

Із рис. 5.11 бачимо, що $h_1 = x\,sin\,\alpha$:

$$A_{F_{\text{пр}}} = -\frac{c}{2}x^2\,. \tag{256}$$

Тому, що в формулі (232) для нашого випадку $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = x$.

$$A_{F_{\text{тр}}} = -fNx = -fmg\,cos\,\alpha \cdot x. \tag{257}$$

З врахуванням усіх цих факторів формула (254) приймає такий вигляд:

$$-\frac{mv_2^2}{2} = mg\,x\,sin\,\alpha - \frac{c}{2}x^2 - fmgx\,cos\,\alpha. \tag{258}$$

Ми прийшли до такого квадратного рівняння відносно *x*:

$$\frac{c}{m}x^2 - 2g\,(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha)x - v_2^2 = 0. \tag{259}$$

Згідно з формулою (69) корені квадратного рівняння визначаються так. Враховуючи, що:

$$\frac{c}{m} = \frac{200H/\text{м}}{0{,}2\text{кг}} = 10^3 \cdot C^{-2},$$

$$2g\,(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha) = 12\ \text{м/с}^2,$$

$$v_2^2 = 234\ \text{м}^2/\text{с}^2,$$

рівняння (259) переписується так:

$$10^3x^2 - 12x - 234 = 0.$$

Звідси

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 936 \cdot 10^3}}{10^3} = \frac{12 \pm 968}{1000}.$$

Тоді

$$x_{max} = \frac{980}{1000} = 0{,}98\ \text{м}.$$

4. Щоб знайти **тиск тіла на стінку трубки** в положенні *A* треба спочатку знайти швидкість кульки у цій точці, а потім записати

основний закон динаміки точки і спроектувати його на головну нормаль до траєкторії в даній точці.

Запишемо на ділянці 1-*A* теорему про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_p + A_N. \qquad (260)$$

На цій ділянці роботу виконує лише сила ваги кульки і ця робота знаходиться за формулою (231). В нашому випадку висота підйому кульки згідно з рис. 5.12 знаходиться за формулою:

$$h = h_1 - h_2,$$

де $h_1 = R\cos\alpha, \quad h_2 = R\sin\gamma.$

Із рис. 5.12 видно, що $\gamma = 90° - \alpha - \beta$.

Тоді: $\sin\gamma = \cos(\alpha+\beta)$ і $h = R[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)]$,

$$A_p = -mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)]. \qquad (261)$$

Із формули (260) тепер знаходимо:

$$v_A^2 = v_1^2 - 2gR[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)] =$$

$$16,2^2 - 20\cdot 1\cdot(0{,}71 - 0{,}23) = 253\ \text{м}^2/\text{с}^2. \qquad (262).$$

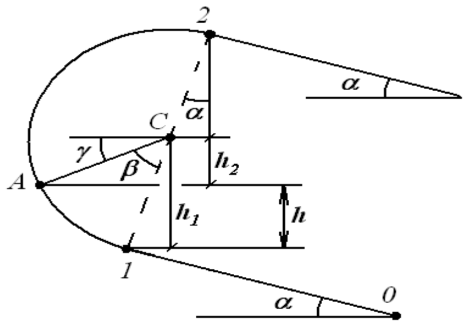

Рисунок 5.12 – Схема ділянки *1-2*

Запишемо в точці *A* основний закон динаміки точки:

$$m\overline{W} = \overline{P} + \overline{N}.$$

Спроектуємо формулу (262) на головку нормаль до траєкторії точки в положенні *A*, будемо мати:

$$mW_n = -m\text{g}\,cos(\alpha + \beta) + N.$$

Звідси знаходимо:

$$N = m[\text{g}\,cos(\alpha + \beta) + W_n]. \quad (263)$$

Оскільки $W_n = \frac{v_A^2}{R}$ то із (263) остаточно приходимо до такого значення тиску кульки на трубку в положенні *A:*

$$N = m\left[\text{g}\,cos(\alpha + \beta) + \frac{v_A^2}{R}\right] = 0{,}2 \cdot [10 \cdot 0{,}23 + 253] = 51\ H.$$

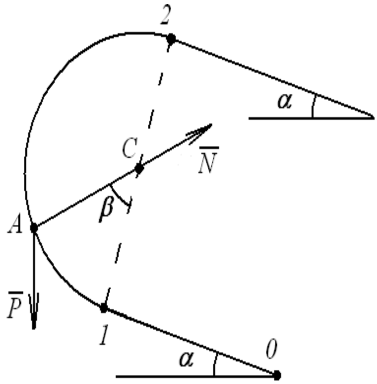

Рисунок 5.13 – Схема знаходження тиску кульки на стінки каналу в положенні A

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Частина 1. – Запоріжжя, 2007. – 140 с.

2. Пожуєв В.І. Звичайні диференціальні рівняння. – Запоріжжя, 2007.– 139с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией Яблонского А.А. – М.: Высшая школа, 1978. – 388 с.

4. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І. Теоретична механіка. Ч. ІІІ. Додаткові матеріали до конспекту лекцій. – Запоріжжя, 2020. – 235 с.

5. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Частина ІІ. – Запоріжжя, 2007. – 162 с.