МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
ректор ЗНТУ
проф. _______ С. Б. Бєліков
“___” _____________ 2018 р.

КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

“Дослідження операцій в транспортних системах”

для студентів денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

Частина IV. Методичні вказівки до виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання

Факультет: Транспортний
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни “Дослідження операцій в транспортних системах” для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина IV) / Склали: доц. Кузькін О.Ф., доц. Лащених О.А. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018.– 59 с.

Укладачі: доц., к.т.н. Кузькін О.Ф.
доц., к.т.н Лащених О.А.

Рецензент: проф., д.т.н. Турпак С.М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні
Вченої ради Транспортного
факультету ЗНТУ

Протокол № __ від “___” ______ 2018 р.

ВСТУП

Навчальними планами спеціальностей зі спеціальності 275 «Транспортні технології», затвердженими для заочної форми навчання, передбачено виконання двох контрольних робіт з дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах».

Мета контрольних робіт – більш глибоке засвоєння студентами заочної форми навчання навчального матеріалу з дисципліни. Кожна контрольна робота містить п’ять задач з розділів навчальної дисципліни.

Контрольна робота оформлюється у зошиті (12 сторінок) чи на одному боці аркушів білого паперу формату А4. Контрольну роботу слід підписати на титульному аркуші, вказавши назву дисципліни, прізвище, ім’я та по-батькові студента, групу, прізвище та ініціали викладача та номер залікової книжки. При написані роботи слід залишити поля для зауважень викладача.

Варіант до виконання контрольної роботи задається викладачем.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1

ЗАДАЧА 1

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Оптовий склад загальною площею $S = 1000$ м^2 надає послуги зі зберігання вантажів двох типів А і Б. Для забезпечення належного зберігання склад має в наявності $N = 500$ одиниць складської тари. Зберігання тонни вантажу А потребує a_1 м^2 складських площ та b_1 одиниць тари, зберігання тонни вантажу Б потребує a_2 м^2 складських площ та b_2 одиниць тари. Прибуток складу на місяць від зберігання тонни вантажу А складає α грн., вантажу Б – β грн. ***Визначити***, яку кількість вантажів А і Б необхідно зберігати на складі, щоб отримати найбільший прибуток при виконанні додаткових умов:

1) ***варіанти* 1–8**: кількість вантажу А на складі повинна перевищувати кількість вантажу Б щонайменше на c тонн;

2) ***варіанти* 9–16**: кількість вантажу Б на складі повинна перевищувати кількість вантажу А щонайменше на c тонн;

3) ***варіанти* 17–23**: кількість вантажу А на складі повинна перевищувати кількість вантажу Б щонайменше у c разів;

4) ***варіанти* 24–30**: кількість вантажу Б на складі повинна перевищувати кількість вантажу А щонайменше у c разів.

Вихідні дані до виконання задачі по варіантах наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.

Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c	Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c
1	3	7	4	2	25	40	50	9	7	5	4	9	12	21	15
2	5	6	3	7	10	25	30	10	6	5	8	3	16	11	35
3	4	7	3	4	15	25	40	11	9	5	3	5	15	19	40
4	2	5	3	2	25	18	45	12	6	4	5	9	15	23	30
5	4	3	8	5	15	10	30	13	4	7	5	6	10	12	30
6	8	7	6	11	15	12	45	14	10	4	5	9	10	25	15
7	7	4	4	9	10	25	15	15	8	3	6	11	20	10	12
8	10	5	6	7	21	16	30	16	12	17	3	5	14	24	18

Продовження таблиці 1.1.

Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c	Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c
17	5	8	7	6	21	32	3	24	10	11	5	4	25	20	2
18	4	11	3	1	20	10	1,4	25	9	5	6	7	20	30	3
19	6	4	9	5	30	15	2	26	4	7	9	3	10	16	3
20	6	5	1	3	15	20	1,5	27	8	3	7	8	14	15	2,5
21	4	7	6	5	30	25	2	28	9	12	4	5	21	9	1,5
22	18	14	6	7	15	20	1,2	29	8	5	4	9	16	15	2
23	7	5	5	11	17	40	2,5	30	3	7	10	8	20	15	2

Приклад розв’язання задачі

Оптовий склад загальною площею S = 300 м^2 надає послуги зі зберігання вантажів двох типів А і Б. Для забезпечення належного зберігання склад має в наявності N = 180 одиниць складської тари. Зберігання тонни вантажу А потребує 3,0 м^2 складських площ та 3 одиниці тари, зберігання тонни вантажу Б потребує 5,0 м^2 складських площ та 2 одиниці тари. Прибуток складу на місяць від зберігання тонни вантажу А складає 10,0 грн., вантажу Б – 30,0 грн. Визначити, яку кількість вантажів А і Б необхідно зберігати на складі, щоб отримати найбільший прибуток, якщо кількість вантажу Б на складі не повинна бути більшою ніж кількість вантажу А на 30 тонн.

Розв’язок.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1 та x_2 – відповідно кількість вантажів А і Б, що необхідно зберігати на складі. Тоді, за умовою задачі, необхідно максимізувати місячний прибуток складу

$$Z = 10x_1 + 30x_2 \Rightarrow \max$$

при обмеженнях:

– на складські площі

$$3x_1 + 5x_2 \le 300;$$

– на наявну кількість складської тари

$$3x_1 + 2x_2 \le 180\,;$$

– на відношення між кількістю вантажів різних видів

$$-x_1 + x_2 \le 30\,;$$

– на невід’ємність змінних задачі

$$x_1 \ge 0\,;\; x_2 \ge 0\,.$$

Задача має дві незалежні змінні, тому її можна вирішити графічним методом. Побудуємо в системі координат x_1 , x_2 прямі, що відповідають обмеженням задачі, обернувши нерівності на рівності. Багатокутник 0ABC визначає область допустимих рішень задачі (заштрихована на рис. 1.2). Координати всіх її точок задовольняють систему обмежень задачі.

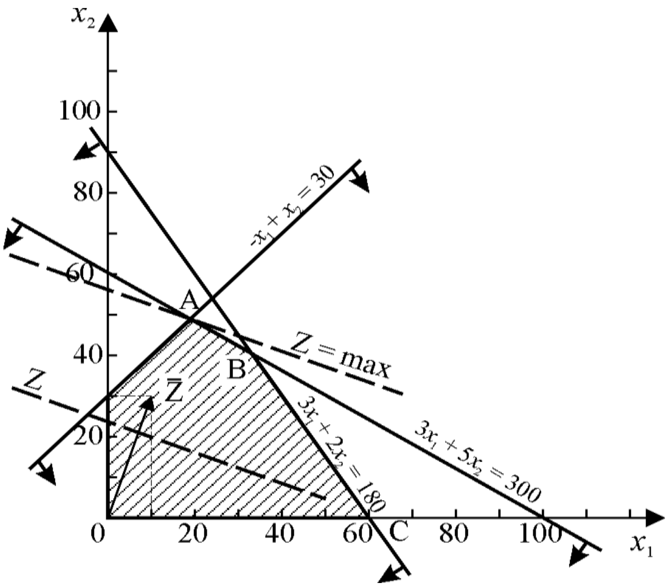


Рисунок 1.2 – Рішення задачі графічним методом

Для знаходження точки, у якій цільова функція задачі досягає найбільшого значення побудуємо з початку координат вектор $\bar{Z} = grad\ \mathrm{Z} = \{10; 30\}$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\bar{Z}$ задає напрямок збільшення значень цільової функції. Проведемо перпендикулярно йому будь-яку пряму, а потім пересуватимемо її паралельно самій собі у напрямі вектора $\bar{Z}$ доти, доки він не торкнеться крайньої точки на області допустимих рішень (відповідні прямі показані на рис. 1.2 пунктирною лінією). Такою точкою буде точка А, координати якої визначають оптимальне рішення задачі.

Для точного знаходження координат точки А необхідно вирішити систему двох лінійних рівнянь, що відповідають двом прямим, які перетинаються у цій точці:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 300; \\ -x_1 + x_2 = 30. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь отримаємо x_1 = 18,75; x_2 =48,75, тобто на складі необхідно зберігати 18,75 тонн вантажу А та 48,75 тонн вантажу Б. При цьому досягається максимальний місячний прибуток складу $Z_{\max} = 10 \cdot 18,75 + 30 \cdot 48,75 = 1650$ грн.

Проаналізуємо використання складських площ та тари. Складські площі, очевидно, будуть використані повністю. Це витікає з того, що пряма $3x_1 + 5x_2 = 300$ (вона виражає обмеження на складські площі) проходить через екстремальну точку А. Підставляючи оптимальні значення змінних задачі у нерівність, що відповідає обмеженню на складську тару, отримаємо

$$3 \cdot 18,75 + 2 \cdot 48,75 = 153,75 < 180.$$

Таким чином, 180 – 153,75 = 26,75 ≈ 27 одиниць складської тари не будуть використані для зберігання вантажів.

ЗАДАЧА 2

СИМПЛЕКС-МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Автотранспортне підприємство здійснює доставку клієнтам трьох видів вантажів (I, II, III). Для виконання перевезень вантажів підприємство має ресурси у кількості: транспортні засоби – 200 автомобіле-годин, вантажники – 400 людино-годин, навантажувальні механізми – 90 машино-годин. Витрати кожного виду ресурсів на доставку 1 тонни вантажу різних видів неоднакові та подані у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Витрати ресурсів на доставку 1 тонни вантажів

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на доставку 1 тонни вантажів		
	I	II	III
Транспортні засоби, автомобіле-годин/т	a_1	b_1	c_1
Вантажники, людино-годин/т	a_2	b_2	c_2
Навантажувальні механізми, машино-годин/т	a_3	b_3	c_3

Прибуток підприємства від доставки 1 тонни вантажу I складають α грн., вантажу II – β грн., вантажу III – γ грн.

Визначити, яку кількість вантажу кожного виду необхідно доставляти клієнтам, щоб прибуток підприємства був максимальним.

Вихідні дані задачі по варіантах наведені у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі 2

Вар.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
1	3	5	2	6	5	1	2	8	3	4	5	10
2	7	3	1	3	2	2	4	4	3	6	7	10
3	4	5	1	6	5	3	2	6	1	7	9	6
4	9	5	0	5	3	2	4	6	3	15	8	9
5	5	6	3	2	5	2	5	6	1	11	6	5
6	8	3	2	6	5	1	4	7	2	7	4	4
7	3	8	1	2	7	2	4	4	1	3	5	3
8	5	10	1	3	9	1	4	7	3	9	7	8
9	3	5	2	6	5	2	2	8	3	7	9	10

Продовження таблиці 2.2

Вар.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
10	9	3	1	3	2	1	4	4	3	8	3	6
11	4	5	1	6	5	3	2	4	1	8	5	7
12	6	7	1	5	4	3	5	2	1	7	10	4
13	4	7	2	3	5	1	5	5	3	8	5	10
14	4	9	2	6	7	0	5	8	3	9	10	10
15	5	6	2	4	10	3	2	9	1	7	8	4
16	4	5	2	6	4	2	2	8	1	9	5	8
17	7	3	2	3	5	1	4	2	2	8	5	7
18	6	4	4	4	3	2	6	5	3	8	4	6
19	5	4	1	5	5	2	1	2	2	12	14	9
20	7	5	2	6	4	3	2	4	1	15	8	5
21	3	4	3	6	3	1	5	2	2	8	15	12
22	6	4	1	4	7	2	6	5	1	8	9	6
23	3	6	1	2	5	2	5	8	1	5	6	5
24	3	5	2	5	5	1	2	4	4	15	14	9
25	4	5	1	6	3	2	1	6	2	15	10	12
26	3	5	1	7	5	0	2	6	1	10	5	9
27	3	9	1	2	7	2	8	8	1	7	9	10
28	8	3	1	3	6	2	4	4	1	10	5	5
29	8	5	1	6	9	1	6	5	1	5	8	7
30	5	4	2	5	7	1	1	3	0	8	15	5

Приклад розв’язання задачі

Розглянемо приклад розв’язання задачі за таких вихідних даних:

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
2	4	1	4	5	1	5	2	2	5	6	10

Розв’язок.

Позначимо як x_1, x_2, x_3 – відповідно кількість вантажу I, II та III виду, яку доставляє підприємство клієнтам. Тоді математичну модель задачі можна подати у наступному вигляді.

Максимізувати прибуток підприємства від перевезень

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \Rightarrow \max$$

при обмеженнях:

– на транспортні ресурси

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 200;$$

– на трудові ресурси

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 400;$$

– на ресурси навантажувальних механізмів

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 90;$$

– на невід'ємність змінних задачі

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$$

Для рішення задачі симплекс-методом зведемо її до канонічного виду. Помножимо праву частину виразу для цільової функції на -1 (для отримання задачі мінімізації) та перетворимо нерівності виду "$\le$" на рівності шляхом введення до них додаткових невід'ємних змінних x_4, x_5 та x_6. Отримаємо задачу:

мінімізувати

$$Z' = -5x_1 - 6x_2 - 10x_3 \Rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 200$$
$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 400;$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 90;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0.$$

Початкове допустиме базисне рішення очевидне:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 200;\ x_5 = 400;\ x_6 = 90;\ Z' = 0.$$

Складемо початкову симплекс-таблицю задачі (таблиця 2.3).

Таблиця 2.3 – Початковий опорний план задачі

Базис	С	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\boldsymbol{x_4}$	200	2	***4***	***5***	1	0	0
x_5	400	4	5	2	0	1	0
x_6	90	1	***1***	***2***	0	0	1
$-Z'$	0	–5	–6	–10	0	0	0

У стовпчик *Базис* записуємо базисні змінні x_4, x_5 та x_6. У стовпчик вільних членів C записуємо їх значення у початковому базисному рішенні, що відповідають правим частинам системи обмежень задачі. У стовпчики x_1 – x_8 записуємо коефіцієнти при відповідних змінних у системі обмежень задачі. У індексному рядку стовпчика C записуємо поточне значення цільової функції $Z' = 0$, а у стовпчики x_1 – x_8 – коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції задачі.

Початковий опорний план задачі ***не є оптимальним***, оскільки у індексному рядку наявні елементи з від'ємними значеннями.

Відшукуємо у індексному рядку ***мінімальне від'ємне значення***. Воно знаходиться у стовпчику x_3 та дорівнює –10. Стовпчик x_3 є ***провідним стовпчиком***, а вільна змінна x_3 у наступному опорному плані задачі включимо до базису.

Для визначення змінної, яку слід виключити з базису, розділимо значення у стовпчику C на відповідні значення провідного стовпчика:

рядок x_4 : 200 / 5 = 40;   рядок x_5 : 400 / 2 = 200; рядок x_6 : 90 / 2 = 45.

Таким чином, змінну x_4, якій відповідає ***найменше додатне*** з найдених значень у наступному опорному плані слід виключити з базису, а рядок x_4 є ***провідним рядком***. На перетині провідного рядка та провідного стовпчика стоїть ***провідний елемент***, що дорівнює 5.

Побудуємо покращений опорний план у новій симплекс-таблиці (таблиця 2.4) за наступними правилами:

1) замість змінної x_4 у стовпчик *Базис* записуємо змінну x_3 ;

2) всі елементи провідного рядка ділимо на 5;

3) у провідному стовпчику у всіх рядках, окрім провідного записуємо нулі;

4) інші елементи нової симплекс-таблиці розраховуємо за формулою перетворення симплекс-таблиць. Наприклад, елемент, що знаходився у рядку x_6 і стовпчику x_2 та дорівнював 1, розраховується наступним чином. Навпроти цього елемента у провідному рядку стоїть значення 4, а навпроти цього елемента у провідному стовпчику стоїть значення 2. Так як провідний елемент дорівнює п'яти, то маємо:

$$\text{Нове значення} = 1 - \frac{4 \times 2}{5} = 1 - 1{,}6 = -0{,}6 \ .$$

Використані для розрахунку значення показані у таблиці 2.3 напівжирним курсивом та стрілками.

Таблиця 2.4 – Покращений опорний план задачі (2 ітерація).

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	40	0,4	0,8	1	0,2	0	0
x_5	320	3,2	3,4	0	– 0,4	1	0
x_6	10	0,2	– 0,6	0	– 0,4	0	1
$-Z'$	400	– 1	2	0	2	0	0

Переглянувши індексний рядок бачимо, що отриманий новий опорний план задачі не є оптимальним, оскільки містить від'ємне значення (–1) у стовпчику x_1 . Діючи аналогічно описаному вище, вводимо до базису змінну x_1 , виключаємо з базису змінну x_6 , та переходимо до нового опорного плану (таблиця 2.5).

Таблиця 2.5 – Покращений опорний план задачі (3 ітерація).

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	20	0	2	1	1	0	–2
x_5	160	0	13	0	6	1	–16
x_1	50	1	–3	0	–2	0	5
$-Z'$	450	0	–1	0	0	0	5

Цей опорний план також не є оптимальним, оскільки у індексному рядку міститься від'ємне значення (–1) у стовпчику x_2 . Вводячи до базису змінну x_2 та виключаючи з базису змінну x_3 переходимо до нового опорного плану задачі (таблиця 2.6).

Таблиця 2.6 – Оптимальний план задачі

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	0	1	0,5	0,5	0	–1
x_5	30	0	0	– 6,5	– 0,5	1	–3
x_1	80	1	0	1,5	– 0,5	0	2
$-Z^{/}$	460	0	0	0,5	0,5	0	4

Цей опорний план ***є оптимальним*** (у індексному рядку ***немає від'ємних значень***). Таким чином, оптимальний розв'язок задачі знайдено (змінні беремо зі стовпчика *Базис*, а їх значення зі стовпчика *C*):

$$x_1 = 80;\ x_2 = 10;\ Z_{\max} = 460.$$

Для досягнення максимального прибутку у 460 грн., підприємству необхідно доставити 80 тонн вантажу I та 10 тонн вантажу II.

До процедури рішення та оптимального розв'язку задачі слід зробити деякі зауваження:

– при розрахунках у стовпчику *C* у рядках змінних задачі ***ніколи не може з'явитися від'ємне значення***. Така ситуація може свідчити про невірні обчислення чи неправильний вибір провідного стовпчика;

– обсяги доставки вантажу III виду дорівнюють нулю, оскільки змінна x_3 не є базисною. Знаходження у базисі змінної x_5, яка входить в обмеження за трудовими ресурсами, показує, що $x_5 = 30$ людино-годин будуть недовикористані. Ресурси ж транспорту та навантажувальних механізмів будуть використані повністю.

ЗАДАЧА 3

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Скласти оптимальний план перевезень піску з кар'єрів (**A**$_1$–**A**$_5$) до промислових підприємств (**B**$_1$–**B**$_5$), що забезпечує мінімальну транспортну роботу. Наявні запаси піску у кар'єрах та потреба у піску підприємств по варіантах задані в таблицях 3.1–3.2. Варіанти матриці відстаней між кар'єрами та підприємствами наведені у таблицях 3.3–3.6.

Таблиця 3.1 – Запаси піску на складах кар'єрів

Вар.	Варіант матриці відстаней	Запаси піску на складах, т				
		A$_1$	A$_2$	A$_3$	A$_4$	A$_5$
1	1	200	150	150	-	-
2	2	120	95	180	150	100
3	3	300	280	220	-	-
4	4	180	250	105	150	95
5	1	250	200	150	-	-
6	2	140	185	125	130	20
7	3	185	125	130	135	135
8	4	400	250	350	-	-
9	1	45	135	285	35	-
10	2	145	165	135	200	175
11	3	150	200	150	-	-
12	4	60	125	185	275	-
13	1	140	115	60	125	185
14	2	280	300	220	-	-
15	3	195	240	175	150	-
16	4	85	75	125	65	170
17	1	150	250	200	-	-
18	2	120	185	175	115	-
19	3	180	75	290	140	125
20	4	250	400	350	-	-
21	1	90	140	125	220	-
22	2	55	170	145	150	125
23	3	280	220	300	-	-
24	4	100	280	185	125	-
25	1	120	110	135	165	290

Продовження таблиці 3.1.

Вар.	Варіант матриці відстаней	Запаси піску на складах, т				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
26	2	145	305	450	-	-
27	3	360	25	230	335	-
28	4	95	135	140	145	190
29	1	420	800	605	-	-
30	2	65	105	330	350	-

Таблиця 3.2 – Потреба у піску промислових підприємств

Варіант	Потреба у піску підприємств, т				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	90	100	70	130	110
2	160	200	100	185	-
3	180	140	190	120	170
4	200	100	145	185	150
5	180	120	90	105	105
6	120	180	135	165	-
7	110	135	165	190	110
8	200	170	230	225	175
9	60	170	135	135	-
10	130	85	185	160	260
11	160	70	90	80	100
12	180	95	250	65	55
13	150	105	180	95	95
14	170	120	190	140	180
15	105	135	250	270	-
16	105	105	95	130	85
17	180	120	90	105	105
18	150	105	80	260	-
19	130	150	110	90	330
20	300	160	200	180	160
21	110	90	165	210	-
22	85	130	155	160	115
23	190	140	180	120	170
24	105	95	155	335	-
25	145	130	175	90	280
26	200	200	200	200	100
27	150	225	190	385	-
28	125	105	75	300	100
29	205	600	540	80	400
30	315	135	75	105	220

Таблиця 3.3 – Матриця відстаней, км (варіант 1)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	15	21	14	17
A_2	14	8	15	11	21
A_3	19	16	26	12	20
A_4	15	11	16	19	18
A_5	13	10	12	20	16

Таблиця 3.4 – Матриця відстаней, км (варіант 2)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	13	9	5	11	17
A_2	14	5	12	14	22
A_3	20	17	13	18	21
A_4	13	15	11	13	21
A_5	12	21	9	10	16

Таблиця 3.5 – Матриця відстаней, км (варіант 3)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	18	12	7	18	7
A_2	35	14	12	15	13
A_3	30	16	11	25	15
A_4	19	15	35	20	7
A_5	15	35	12	11	6

Таблиця 3.6 – Матриця відстаней, км (варіант 4)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	16	21	19	32
A_2	4	4	9	5	24
A_3	3	8	14	10	26
A_4	24	33	36	34	49
A_5	9	25	30	20	31

Приклад розв'язання задачі

Розглянемо приклад розв'язання задачі за вихідних даних, заданих у таблиці

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запас
A_1	4	3	3	1	8
A_2	3	2	4	8	11
A_3	6	4	6	3	6
A_4	3	5	2	4	10
Потреба	4	9	9	13	

Розв'язок.

Побудуємо початковий опорний план перевезень ***методом мінімального елементу*** матриці. Згідно з ним, відшукуємо у матриці клітинку з мінімальним значенням транспортних витрат (таблиця 3.7). Це клітинка A_1B_4. Призначаємо у ній поставку $x_{14} = \min\{8;13\} = 8$ т. Зменшуємо запас постачальника A_1 та потребу споживача B_4 на 8 т.

Наступні клітинки з мінімальним значенням транспортних витрат A_2B_2 та A_4B_3. Призначаємо у клітинці A_2B_2 поставку $x_{22} = \min\{11;9\} = 9$ т, зменшуємо запас постачальника A_2 та потребу споживача B_2 на 9 т; призначаємо у клітинці A_4B_3 поставку $x_{43} = \min\{10;9\} = 9$ т, зменшуємо запас постачальника A_4 та потребу споживача B_3 на 9 т.

Тепер мінімальні значення транспортних витрат мають клітинки A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_3B_4, A_4B_1. У перші дві не можуть бути призначені поставки, оскільки запас постачальника A_1 споживачів B_2 та B_3 вже вичерпано. Призначаємо у клітинку A_2B_1 поставку $x_{21} = \min\{2;4\} = 2$ т та зменшуємо запас постачальника A_2 та потребу споживача B_1 на 2 т. Призначаємо у клітинку A_3B_4 поставку $x_{34} = \min\{6;5\} = 5$ т та зменшуємо запас постачальника A_3 та потребу споживача B_4 на 5 т. Призначаємо у клітинку A_4B_1 поставку $x_{41} = \min\{2;1\} = 1$ т та зменшуємо запас постачальника A_4 та потребу споживача B_1 на 1 т.

Останньою призначаємо поставку у клітинку A_3B_1.

Таблиця 3.7 – Початковий опорний план перевезень

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запас
A_1	4	3	3	**8** 1	8; 0
A_2	+ **2** 3	– **9** 2	4	8	11; 2; 0
A_3	– **1** 6	+ 4	6	**5** 3	6; 1; 0
A_4	**1** 3	5	**9** 2	4	10; 1; 0
Потреба	4; 2; 1; 0	9; 0	9; 0	13; 5; 0	

Кількість заповнених клітинок таблиці дорівнює 7 = 4+4–1, отже план є не виродженим. Транспортні витрати за цим планом перевезень складають $Z = 8\cdot 1 + 2\cdot 3 + 9\cdot 2 + 1\cdot 6 + 5\cdot 3 + 1\cdot 3 + 9\cdot 2 = 74$ ткм.

Для перевірки початкового опорного плану перевезень складемо рівняння для ***заповнених*** клітинок:

$$U_1 + V_4 = 1;\ \ U_2 + V_1 = 3;\ \ U_2 + V_2 = 2;\ \ U_3 + V_1 = 6;$$
$$U_3 + V_4 = 3;\ \ U_4 + V_1 = 3;\ \ U_4 + V_3 = 2.$$

Покладемо, наприклад, $U_1 = 0$, тоді з системи рівнянь однозначно можна знайти значення всіх потенціалів:

$$U_2 = -1;\ U_3 = 2;\ U_4 = -1;\ V_1 = 4;\ V_2 = 3;\ V_3 = 3;\ V_4 = 1.$$

Для кожної вільної клітинки розраховуємо оцінки Δ_{ij}

$$\Delta_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 4 - (0 + 4) = 0;$$
$$\Delta_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + 3) = 0;$$
$$\Delta_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 3 - (0 + 3) = 0;$$
$$\Delta_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 4 - (-1 + 3) = 2;$$
$$\Delta_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 8 - (-1 + 1) = 8;$$
$$\Delta_{32} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 4 - (2 + 3) = -1 < \mathbf{0};$$
$$\Delta_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 6 - (2 + 3) = 1;$$
$$\Delta_{42} = C_{42} - (U_4 + V_2) = 5 - (-1 + 3) = 3;$$
$$\Delta_{44} = C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (-1 + 1) = 4.$$

Таким чином, план не є оптимальним, оскільки є клітинка A_3B_2 з від'ємним значенням $\Delta_{32} = -1$. Для перспективної клітинки A_3B_2 будуємо цикл перерахунку A_3B_2 – A_3B_1 – A_2B_1 – A_2B_2 (показаний пунктиром у табл. 3.7). Починаючи з клітинки A_3B_2 у вершинах контуру проставляємо по черзі знаки "+" та "–". Переглядаємо клітинки, позначені знаком "–". Найменша поставка записана у клітинку A_3B_1. Додаємо x_{31} = 1 до поставок у клітинках, позначених знаком "+" та віднімаємо 1 від поставок у клітинках, позначених знаком "–". В результаті отримаємо новий опорний план (таблиця 3.8).

Таблиця 3.8 – Оптимальний план перевезень

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запас
A_1	4	3	3	**8** 1	8
A_2	**3** 3	**8** 2	4	8	11
A_3	6	**1** 4	6	**5** 3	6
A_4	**1** 3	5	**9** 2	4	10
Потреба	4	9	9	13	

Перевіряємо цей план на оптимальність, для чого розраховуємо потенціали U_i, V_j та оцінки Δ_{ij}.

$$\begin{aligned} &U_1 + V_4 = 1; \\ &U_2 + V_1 = 3; \\ &U_2 + V_2 = 2; \\ &U_3 + V_2 = 4; \\ &U_3 + V_4 = 3; \\ &U_4 + V_1 = 3; \\ &U_4 + V_3 = 2. \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &U_1 = 0; \quad V_1 = 3; \\ &U_2 = 0; \quad V_2 = 2; \\ &U_3 = 2; \quad V_3 = 2; \\ &U_4 = 0; \quad V_4 = 1. \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\Delta_{11} = 4 - (0 + 3) = 1; \\ &\Delta_{12} = 3 - (0 + 2) = 1; \\ &\Delta_{13} = 3 - (0 + 2) = 1; \\ &\Delta_{23} = 4 - (0 + 2) = 2; \\ &\Delta_{24} = 8 - (0 + 1) = 7; \\ &\Delta_{31} = 6 - (2 + 3) = 1; \\ &\Delta_{33} = 6 - (2 + 2) = 2; \\ &\Delta_{42} = 5 - (0 + 2) = 3; \\ &\Delta_{44} = 4 - (0 + 1) = 3. \end{aligned}$$

Таким чином, план є оптимальним. Транспортні витрати за цим планом складають $Z_{\min} = 8 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 73$ ткм.

ЗАДАЧА 4

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА НА МЕРЕЖІ

Найти оптимальний план перевезень однорідного вантажу за критерієм мінімуму загального обсягу транспортної роботи (у тонно-кілометрах). Варіанти схем транспортної мережі (довжина ланок мережі вказана у кілометрах) наведені на рисунках 4.1–4.4. Дані про наявність вантажу у постачальників та варіант схеми транспортної мережі наведені у таблиці 4.1, дані про потреби у вантажі споживачів наведені у таблиці 4.2.

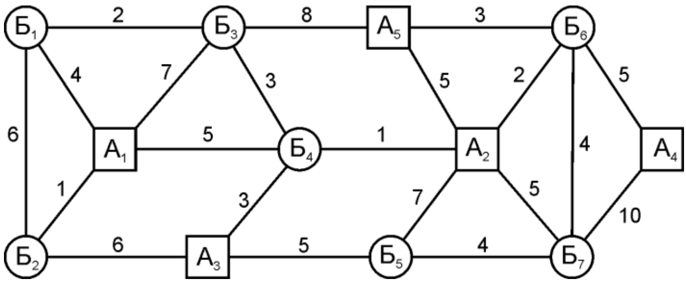


Рисунок 4.1 – Схема транспортної мережі (варіант 1)

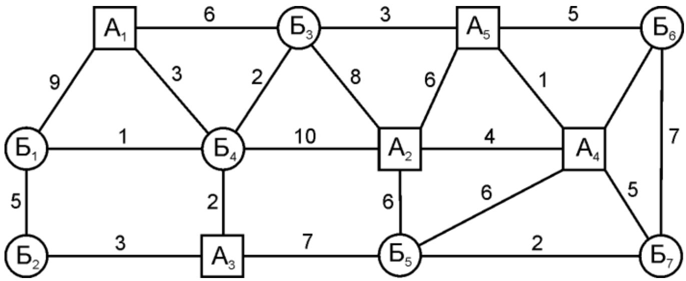


Рисунок 4.2 – Схема транспортної мережі (варіант 2)

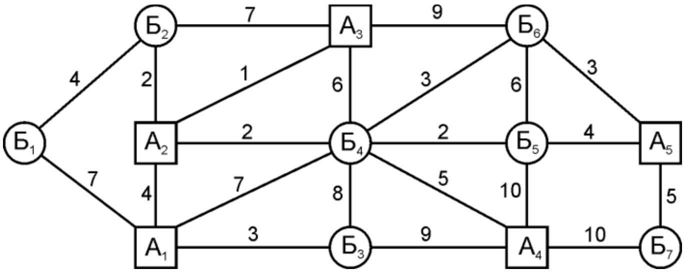


Рисунок 4.3 – Схема транспортної мережі (варіант 3)

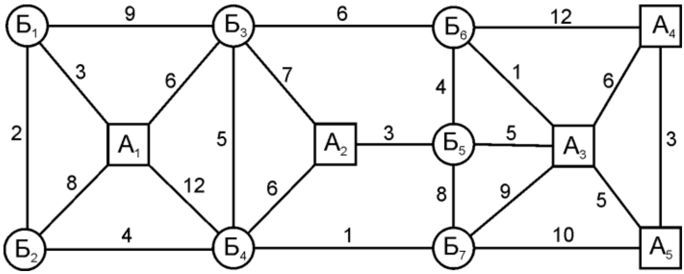


Рисунок 4.4 – Схема транспортної мережі (варіант 4)

Таблиця 4.1 – Варіант схеми транспортної мережі та наявність вантажу у постачальників

Варіанти		Наявність вантажу у постачальників, т				
завдання	схеми	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1	100	70	100	50	65
2	2	190	200	160	260	40
3	3	130	150	100	80	90
4	4	50	300	200	150	100
5	1	120	100	400	200	100
6	2	100	200	150	100	200
7	3	250	110	90	300	200
8	4	180	120	150	150	150

Продовження таблиці 4.1.

Варіанти		Наявність вантажу у постачальників, т				
завдання	схеми	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
9	1	160	130	150	110	90
10	2	90	90	80	70	60
11	3	120	95	180	250	105
12	4	135	135	125	185	140
13	1	65	35	85	65	155
14	2	165	195	240	175	150
15	3	125	60	115	185	140
16	4	75	115	85	120	70
17	1	75	90	140	125	90
18	2	55	90	145	155	45
19	3	85	95	125	115	80
20	4	45	165	120	110	110
21	1	120	80	140	75	90
22	2	115	275	140	60	140
23	3	130	135	185	140	135
24	4	95	105	120	150	180
25	1	110	120	90	35	80

Таблиця 4.2 – Потреби у вантажі споживачів

Варіант	Потреба у вантажі одержувачів						
	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	$Б_5$	$Б_6$	$Б_7$
1	55	40	35	95	65	40	55
2	185	95	95	125	125	115	110
3	85	95	135	65	45	65	60
4	140	135	125	130	90	105	75
5	120	95	180	150	105	150	120
6	130	150	110	90	55	95	120
7	120	110	135	165	190	130	100
8	120	110	35	165	90	80	150
9	80	75	90	70	125	120	80
10	65	50	40	75	45	55	60
11	100	110	90	150	120	95	85
12	95	110	140	110	150	80	35
13	75	40	85	35	65	65	40
14	180	120	95	150	105	155	120
15	90	65	80	50	125	115	100

Продовження таблиці 4.2.

Варіант	Потреба у вантажі споживачів, т						
	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	$Б_5$	$Б_6$	$Б_7$
16	95	80	120	55	35	50	30
17	35	50	55	110	95	85	90
18	80	55	75	40	75	80	85
19	95	65	40	120	95	70	15
20	75	85	50	45	125	90	80
21	85	125	40	40	60	75	80
22	115	90	160	105	145	95	20
23	100	110	90	115	150	100	60
24	115	110	135	85	40	85	80
25	70	80	40	65	55	80	45

Приклад розв’язання задачі

Розглянемо приклад виконання роботи за вихідних даних, заданих схемою, наведеною на рисунку 4.5.

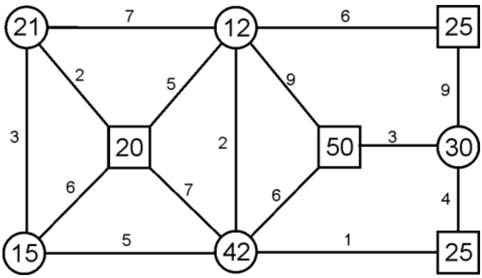


Рисунок 4.5 – Вихідні дані до рішення задачі (приклад)

Розв’язок.

Складаємо довільно початковий план розподілу вантажопотоків (рисунок 4.6). Послідовно призначаємо наступні вантажопотоки:

ланкою (9,8) направляємо вантажопотік x_{98} = 25 т;

ланкою (5,6) направляємо вантажопотік x_{56} = 30 т;

ланкою (5,8) направляємо вантажопотік x_{58} = 17 т;

ланкою (5,2) направляємо вантажопотік x_{52} = 3 т;

ланкою (3,2) направляємо вантажопотік x_{32} = 25 т;

ланкою (2,1) направляємо вантажопотік x_{21} = 16 т;

ланкою (4,7) направляємо вантажопотік x_{47} = 15 т;

ланкою (4,1) направляємо вантажопотік x_{48} = 5 т.

У складеному початковому плані всі запаси постачальників вивезені та попит одержувачів задовільнено. Кількість ланок з вантажопотоком дорівнює 8, що на одиницю менше загальної кількості постачальників та одержувачів. Ланки з вантажопотоком не утворюють замкнений контур. Таким чином, побудований початковий план є допустимим і базисним.

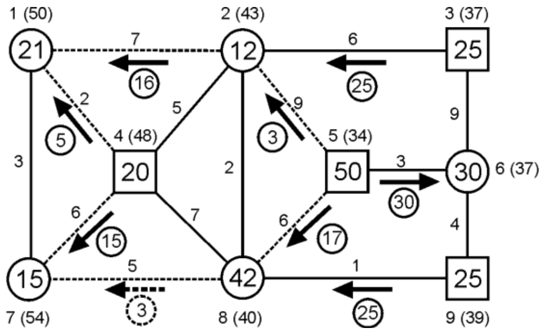


Рисунок 4.6 – Початковий допустимий план перевезень

Розрахуємо транспортну роботу по цьому плану перевезень, склавши добутки вантажопотоків завантажених ланок на їх довжину:

$$W = 16\cdot 7 + 5\cdot 2 + 15\cdot 6 + 3\cdot 9 + 17\cdot 6 + 25\cdot 6 + 30\cdot 3 + 25\cdot 1 = 606 \text{ ткм.}$$

Для перевірки цього плану на оптимальність розрахуємо потенціали вершин транспортної мережі (вони записуються біля вершин у дужках поряд з номером вершини). Припишемо вершині 1 початковий потенціал v_1 = 50 (можна взяти будь-яке значення, але рекомендується брати початковий потенціал досить великим, щоб надалі не мати справу з від’ємними значеннями потенціалів інших вершин). Послідовно знаходимо потенціали всіх інших вершин:

$v_2 = v_1 - c_{12} = 50 - 7 = 43$;
$v_3 = v_2 - c_{23} = 43 - 6 = 37$;
$v_5 = v_2 - c_{25} = 43 - 9 = 34$;
$v_6 = v_5 + c_{56} = 34 + 3 = 37$;
$v_4 = v_1 - c_{14} = 50 - 2 = 48$;
$v_8 = v_5 + c_{58} = 34 + 6 = 40$;
$v_9 = v_8 - c_{89} = 40 - 1 = 39$;
$v_7 = v_4 + c_{47} = 48 + 6 = 54$.

Для всіх вільних ланок знаходимо значення оцінок Δ_{ij}:

ланка (1,7): $\Delta_{17} = c_{17} - |v_1 - v_7| = 3 - |50 - 54| = -1$;
ланка (2,4): $\Delta_{24} = c_{24} - |v_2 - v_4| = 5 - |43 - 48| = 0$;
ланка (4,8): $\Delta_{48} = c_{48} - |v_4 - v_8| = 7 - |48 - 40| = -1$;
ланка (2,8): $\Delta_{28} = c_{28} - |v_2 - v_8| = 2 - |43 - 40| = -1$;
ланка (7,8): $\Delta_{78} = c_{78} - |v_7 - v_8| = 5 - |54 - 40| = -9$;
ланка (3,6): $\Delta_{36} = c_{36} - |v_3 - v_6| = 9 - |37 - 37| = 9$;
ланка (6,9): $\Delta_{69} = c_{69} - |v_6 - v_9| = 4 - |39 - 37| = 2$.

Наявність від'ємних значень оцінок свідчать про те, що складений початковий план не є оптимальним і його можна покращити. Для покращення плану обираємо перспективною ланку (7,8) з найбільшим за абсолютною величиною від'ємним значенням $\Delta_{78} = -9$. Побудуємо замкнений контур, що утворюють завантажені ланки та перспективна ланка. Контур утворюють ланки 8–7–4–1–2–5–8 (на рисунку 4.6 позначений пунктирними лініями).

Направляємо перспективний вантажопотік від вершини 8 до вершини 7 (оскільки $v_7 > v_8$), позначаючи його пунктирною стрілкою. Після цього у замкненому контурі переглядаємо завантажені ланки, напрямок вантажопотоку на яких протилежний перспективному. Це ланки: (7,4) з вантажопотоком $x_{47} = 15$; (1,2) з вантажопотоком $x_{21} = 16$; (2,5) з вантажопотоком $x_{52} = 3$. Серед цих значень найменшим є вантажопотік $x_{52} = 3$, значення якого і приймаємо в якості перспективного (в поліпшеному плані x_{87} = 3). У розглядуваному замкненому контурі вантажопотоки x_{41} та x_{58} збільшуємо на 3, оскільки вони направлені так же як і перспективний. Вантажопотоки x_{47}, x_{21} x_{52} зменшуємо на 3, оскільки вони направлені протилежно перспективному. Після виконаного перерозподілу вантажопотоків ланка (7,8) стає завантаженою, а ланка (5,2) стає вільною (рисунок 4.7).

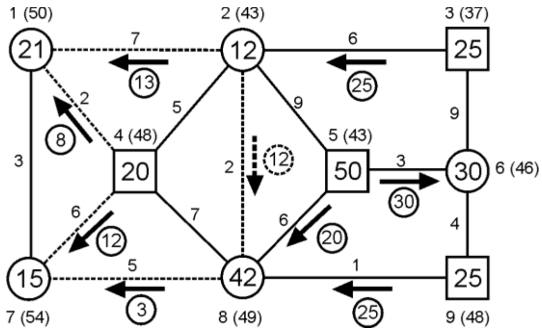


Рисунок 4.7 – План перевезень після першої ітерації

Транспортна робота за цим планом перевезень дорівнює W = 579 ткм, що на Δ = 27 ткм менше ніж у попереднього плану. Це зменшення можна розрахувати, помноживши оцінку перспективної ланки на перспективний вантажопотік, тобто

$$\Delta = \Delta_{78} \cdot x_{78} = (-9) \cdot 3 = -27.$$

Для отриманого плану знов розраховуємо потенціали вершин та оцінки вільних ланок мережі (рисунок 8.7). План не є оптимальним, оскільки від'ємні значення оцінок мають ланки (1,7) $\Delta_{17} = -1$ та (2,8) $\Delta_{28} = -4$. Обираємо перспективною ланку (2,8). Перспективний вантажопотік направляємо від вершини 2 до вершини 8. Замкнений контур утворюють ланки 2–8–7–4–1–2. Найменше значення з вантажопотоків, спрямованих протилежно перспективному, має ланка

(4,7) з x_{47} = 12. Призначаємо перспективний вантажопотік x_{28} = 12, вантажопотоки x_{87} та x_{41} збільшуємо на 12, а вантажопотоки x_{47} та x_{21} зменшуємо на 12. Переходимо до поліпшеного плану перевезень (рисунок 4.8).

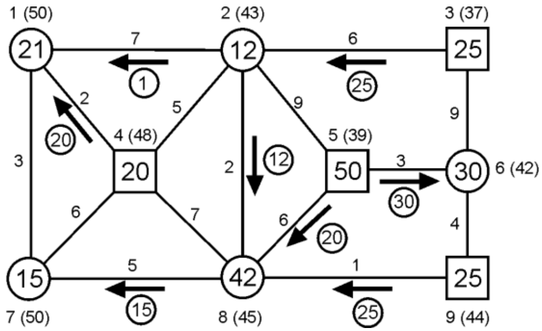


Рисунок 4.8 – Оптимальний план перевезень

Перевірка отриманого плану перевезень показує, що він є оптимальним, оскільки всі оцінки вільних ланок мережі невід'ємні. Транспортна робота оптимального плану W = 531 ткм. Зазначимо, що нульове значення оцінки вільної ланки Δ_{24} = 0 вказує на те, що задача має, крім знайденого, ще безліч оптимальних планів, які можна знайти, направивши ланкою (2,4) вантажопотік (не обов'язково цілочисловий), та перерозподіливши вантажопотоки по замкненому контуру з ланок 2–4–1–2.

ЗАДАЧА 5

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методом динамічного програмування знайти оптимальний варіант завантаження автомобіля номінальної вантажопідйомності W = 9 тонн трьома видами вантажів, який забезпечує максимальний прибуток від їх перевезення. Маса вантажів, відповідно, складає q_1= 1 т., q_2 = 2 т., q_3 = 3 т. Прибуток від перевезення x_k одиниць k-го вантажу задається функцією $f_k(x_k)$ грн., яка представлена у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Прибуток від перевезення вантажів

Кількість завантажених одиниць x_k	Прибуток від перевезення вантажів за видами в залежності від кількості, грн.		
	q_1= 1 т.	q_2 = 2 т	q_3 = 3 т
1	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$
2	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$
3	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$
4	$f_1(4)$	$f_2(4)$	–
5	$f_1(5)$	–	–
6	$f_1(6)$	–	–
7	$f_1(7)$	–	–
8	$f_1(8)$	–	–
9	$f_1(9)$		

Вихідні дані для рішення задачі по варіантах у вигляді матриці, що представляє функцію прибутку, наведені на рисунку 5.1. Рядки відповідають кількості завантажених до автомобіля одиниць вантажу, стовпчики відповідають видам вантажів.

$$1.\ \begin{bmatrix} 50 & 180 & 220 \\ 90 & 250 & 350 \\ 120 & 300 & 450 \\ 160 & 400 & \\ 200 & & \\ 220 & & \\ 250 & & \\ 350 & & \\ 400 & & \end{bmatrix};\ 2.\ \begin{bmatrix} 40 & 250 & 280 \\ 110 & 350 & 400 \\ 130 & 400 & 440 \\ 180 & 450 & \\ 210 & & \\ 240 & & \\ 320 & & \\ 360 & & \\ 410 & & \end{bmatrix};\ 3.\ \begin{bmatrix} 70 & 300 & 350 \\ 110 & 400 & 420 \\ 150 & 500 & 550 \\ 220 & 600 & \\ 280 & & \\ 350 & & \\ 410 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 4.\ \begin{bmatrix} 60 & 170 & 220 \\ 120 & 250 & 350 \\ 160 & 300 & 420 \\ 210 & 450 & \\ 230 & & \\ 290 & & \\ 330 & & \\ 420 & & \\ 500 & & \end{bmatrix};$$

$$5.\ \begin{bmatrix} 90 & 200 & 310 \\ 140 & 230 & 480 \\ 200 & 280 & 600 \\ 230 & 350 & \\ 280 & & \\ 340 & & \\ 410 & & \\ 430 & & \\ 480 & & \end{bmatrix};\ 6.\ \begin{bmatrix} 65 & 210 & 300 \\ 125 & 300 & 400 \\ 190 & 420 & 600 \\ 220 & 530 & \\ 260 & & \\ 310 & & \\ 380 & & \\ 410 & & \\ 440 & & \end{bmatrix};\ 7.\ \begin{bmatrix} 80 & 230 & 440 \\ 150 & 370 & 520 \\ 180 & 490 & 610 \\ 240 & 550 & \\ 300 & & \\ 400 & & \\ 510 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 8.\ \begin{bmatrix} 40 & 220 & 350 \\ 90 & 320 & 480 \\ 140 & 400 & 550 \\ 190 & 515 & \\ 210 & & \\ 280 & & \\ 320 & & \\ 440 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};$$

$$9.\ \begin{bmatrix} 70 & 180 & 350 \\ 100 & 350 & 600 \\ 180 & 430 & 700 \\ 250 & 600 & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 510 & & \\ 590 & & \\ 620 & & \end{bmatrix};\ 10.\ \begin{bmatrix} 85 & 250 & 315 \\ 115 & 410 & 490 \\ 195 & 530 & 670 \\ 280 & 580 & \\ 340 & & \\ 400 & & \\ 430 & & \\ 510 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};\ 11.\ \begin{bmatrix} 75 & 230 & 500 \\ 105 & 310 & 570 \\ 170 & 420 & 650 \\ 230 & 580 & \\ 340 & & \\ 350 & & \\ 390 & & \\ 440 & & \\ 560 & & \end{bmatrix};\ 12.\ \begin{bmatrix} 35 & 140 & 315 \\ 90 & 220 & 440 \\ 100 & 350 & 580 \\ 160 & 430 & \\ 230 & & \\ 320 & & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 490 & & \end{bmatrix};$$

$$13.\ \begin{bmatrix} 30 & 210 & 300 \\ 70 & 335 & 400 \\ 90 & 440 & 600 \\ 140 & 500 & \\ 180 & & \\ 260 & & \\ 370 & & \\ 400 & & \\ 450 & & \end{bmatrix};\ 14.\ \begin{bmatrix} 75 & 190 & 280 \\ 115 & 250 & 410 \\ 160 & 330 & 590 \\ 250 & 500 & \\ 350 & & \\ 380 & & \\ 410 & & \\ 440 & & \\ 490 & & \end{bmatrix};\ 15.\ \begin{bmatrix} 45 & 150 & 350 \\ 75 & 310 & 415 \\ 125 & 480 & 570 \\ 200 & 550 & \\ 230 & & \\ 280 & & \\ 350 & & \\ 415 & & \\ 470 & & \end{bmatrix};\ 16.\ \begin{bmatrix} 50 & 215 & 360 \\ 100 & 360 & 470 \\ 160 & 410 & 600 \\ 210 & 530 & \\ 250 & & \\ 280 & & \\ 350 & & \\ 420 & & \\ 500 & & \end{bmatrix}$$

$$17.\ \begin{bmatrix} 65 & 200 & 305 \\ 135 & 315 & 480 \\ 160 & 420 & 610 \\ 220 & 560 & \\ 280 & & \\ 330 & & \\ 400 & & \\ 490 & & \\ 530 & & \end{bmatrix};\ 18.\ \begin{bmatrix} 80 & 240 & 340 \\ 150 & 310 & 480 \\ 190 & 430 & 620 \\ 230 & 550 & \\ 250 & & \\ 350 & & \\ 370 & & \\ 420 & & \\ 480 & & \end{bmatrix};\ 19.\ \begin{bmatrix} 70 & 190 & 340 \\ 130 & 260 & 450 \\ 160 & 380 & 550 \\ 220 & 500 & \\ 250 & & \\ 310 & & \\ 340 & & \\ 430 & & \\ 480 & & \end{bmatrix};\ 20.\ \begin{bmatrix} 100 & 280 & 400 \\ 130 & 400 & 650 \\ 200 & 600 & 850 \\ 350 & 800 & \\ 440 & & \\ 490 & & \\ 530 & & \\ 615 & & \\ 700 & & \end{bmatrix}$$

$$21.\begin{bmatrix} 40 & 205 & 300 \\ 100 & 335 & 470 \\ 180 & 420 & 610 \\ 230 & 550 & \\ 280 & & \\ 310 & & \\ 375 & & \\ 440 & & \\ 470 & & \end{bmatrix};\ 22.\begin{bmatrix} 55 & 275 & 330 \\ 105 & 390 & 515 \\ 160 & 515 & 700 \\ 260 & 680 & \\ 315 & & \\ 380 & & \\ 440 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 23.\begin{bmatrix} 65 & 200 & 350 \\ 150 & 400 & 500 \\ 200 & 600 & 850 \\ 240 & 800 & \\ 310 & & \\ 480 & & \\ 515 & & \\ 590 & & \\ 630 & & \end{bmatrix};\ 24.\begin{bmatrix} 90 & 205 & 330 \\ 160 & 275 & 500 \\ 210 & 380 & 670 \\ 240 & 500 & \\ 270 & & \\ 305 & & \\ 330 & & \\ 380 & & \\ 400 & & \end{bmatrix}$$

$$25.\begin{bmatrix} 45 & 200 & 350 \\ 120 & 315 & 520 \\ 200 & 480 & 715 \\ 250 & 600 & \\ 315 & & \\ 380 & & \\ 440 & & \\ 500 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};\ 26.\begin{bmatrix} 50 & 275 & 335 \\ 105 & 390 & 525 \\ 180 & 515 & 710 \\ 230 & 670 & \\ 290 & & \\ 390 & & \\ 410 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 27.\begin{bmatrix} 85 & 225 & 305 \\ 140 & 360 & 520 \\ 200 & 480 & 700 \\ 250 & 650 & \\ 295 & & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 480 & & \\ 570 & & \end{bmatrix};\ 28.\begin{bmatrix} 55 & 250 & 300 \\ 110 & 375 & 550 \\ 160 & 490 & 700 \\ 230 & 610 & \\ 300 & & \\ 340 & & \\ 400 & & \\ 450 & & \\ 500 & & \end{bmatrix}$$

$$29.\begin{bmatrix} 75 & 225 & 345 \\ 150 & 360 & 515 \\ 200 & 475 & 625 \\ 280 & 575 & \\ 340 & & \\ 375 & & \\ 405 & & \\ 470 & & \\ 520 & & \end{bmatrix};\qquad 30.\begin{bmatrix} 50 & 220 & 300 \\ 120 & 330 & 450 \\ 170 & 440 & 630 \\ 230 & 550 & \\ 300 & & \\ 340 & & \\ 390 & & \\ 420 & & \\ 495 & & \end{bmatrix}.$$

Рисунок 5.1 – Вихідні дані до задачі 5

Приклад розв'язання задачі

Розглянемо приклад виконання завдання за заданої функції прибутку від перевезення вантажів:

Кількість завантажених одиниць x_k	Прибуток від перевезення вантажів за видами в залежності від кількості, грн.		
	q_1= 1 т.	q_2 = 2 т	q_3 = 3 т
1	60	220	350
2	110	230	500
3	140	400	700
4	170	540	–
5	210	–	–
6	250	–	–
7	300	–	–
8	400	–	–
9	500	–	–

Розв'язок.

Математична модель задачі виглядає наступним чином:

максимізувати $Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \Rightarrow \max$,

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9;\quad 0 \le x_1 \le 9;\quad 0 \le x_2 \le 4;\quad 0 \le x_3 \le 3.$$

Процес завантаження автомобіля містить три кроки (за кількістю видів вантажів). Стан S_{k-1} на початку k-го кроку визначає недовантаження автомобіля. Управління U_k – кількість завантажених одиниць вантажу x_k k-го виду.

Основні функціональні рівняння матимуть вигляд:

крок 3: $Z_3^*(S_2) = \max\limits_{0 \le x_3 \le [S_2/3]} f_3(x_3)$;

крок 2: $Z_2^*(S_1) = \max\limits_{0 \le x_2 \le [S_1/2]} \left\{ f_2(x_2) + Z_3^*(S_1 - 2x_2) \right\}$;

крок 1: $Z_1^*(S_0) = \max\limits_{0 \le x_1 \le S_0} \left\{ f_1(x_1) + Z_2^*(S_0 - x_1) \right\}.$

Через $\left[S_i / q_i \right]$ зазначена ціла частина відношення S_i / q_i ..

Умовна оптимізація процесу наведена у таблиці 5.2., а її підсумки наведені у таблиці 5.3.

Таблиця 5.3 – Підсумки умовної оптимізації

S_{k-1}	$k = 3$		$k = 2$		$k = 1$	
	$x^*_3(S_2)$	$Z^*_3(S_2)$	$x^*_2(S_1)$	$Z^*_2(S_1)$	$x^*_1(S_0)$	$Z^*_1(S_0)$
1	0	0	0	0		
2	0	0	1	220		
3	1	350	0	350		
4	1	350	0	350		
5	1	350	1	570		
6	**2**	**500**	1	570		
7	2	500	2	580		
8	2	500	**1**	**720**		
9	3	700	3	750	**1**	**780**

Отже маємо оптимальний варіант завантаження має вигляд: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Тобто необхідно завантажити один вантаж масою 1 т., один вантаж масою 2 т. та два вантажі масою 3 т. При цьому досягається максимальний прибуток від перевезення $Z_{\max} = 780$ грн.

Таблиця 5.2 – Умовна оптимізація процесу

S_{k-1}	$k = 3$, $Z^*_3(S_2)$		$k = 2$; $Z^*_2(S_1)$			$k = 1$; $Z^*_1(S_0)$		
	x_3	$f_3(x_3)$	x_2	$S_2=S_1-2x_2$	$f_2(x_2)+Z^*_3(S_2)$	x_1	$S_2=S_0-2x_1$	$f_1(x_1)+Z^*_2(S_1)$
9	0	0	0	9	0 + 700 = 700	0	9	0 + 750 = 750
	1	350	1	7	220 + 500 = 720	1	8	60 + 720 = **780***
	2	500	2	5	230 + 350 = 580	2	7	110 + 580 = 690
	3	**700***	3	3	400 + 350 = **750***	3	6	140 + 570 = 710
			4	1	540 + 0 = 540	4	5	170 + 570 = 740
						5	4	210 + 350 = 560
						6	3	250 + 350 = 600
						7	2	300 + 220 = 520
						8	1	400 + 0 = 400
						9	0	500 + 0 = 500
8	0	0	0	8	0 + 500 = 500			
	1	350	1	6	220 + 500 = **720***			
	2	**500***	2	4	230 + 350 = 580			
			3	2	400 + 0 = 400			
			4	0	540 + 0 = 540			
7	0	0	0	7	0 + 500 = 500			
	1	350	1	5	220 + 350 = 570			
	2	**500***	2	3	230 + 350 = **580***			
			3	1	400 + 0 = 400			
6	0	0	0	6	0 + 500 = 500			
	1	350	1	4	220 + 350 = **570***			
	2	**500***	2	2	230 + 0 = 230			
			3	0	400 + 0 = 400			
5	0	0	0	5	0 + 350 = 350			
	1	**350***	1	3	220 + 350 = **570***			
			2	1	230 + 0 = 230			
4	0	0	0	4	0 + 350 = **350***			
	1	**350***	1	2	220 + 0 = 220			
			2	0	230 + 0 = 230			
3	0	0	0	3	0 + 350 = **350***			
	1	**350***	1	1	220 + 0 = 220			
2	0	**0***	0	2	0 + 0 = 0			
			1	0	220 + 0 = **220***			
1	0	**0***	0	0	0 + 0 = **0***			

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

ЗАДАЧА 6

РОЗІМКНЕНІ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

На контейнерний пункт, обладнаний n вантажними кранами, під навантаження надходить простіший потік автомобілів з інтенсивністю λ автомобілів на годину. Середня тривалість навантаження одного автомобіля становить $\bar{t}_{\text{î áñ}}$ годин. Використовуючи методи теорії масового обслуговування порівняти показники роботи контейнерного пункту при організації роботи за двома варіантами:

1) з рівномірним закріпленням автомобілів за кранами;

2) без закріплення автомобілів за кранами.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблиці 6.1.

Вказівка: у варіанті (1) розглядаються n одноканальних СМО, у варіанті (2) розглядається одна n-канальна СМО.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані до задачі 6

Вар.	λ	$\bar{t}_{\text{î áñ}}$	n	Вар.	λ	$\bar{t}_{\text{î áñ}}$	n
1	21,1	0,13	4	16	10,7	0,10	7
2	5,4	0,50	6	17	13,2	0,28	7
3	17,3	0,12	4	18	7,2	0,23	6
4	22,2	0,12	7	19	13,6	0,22	5
5	5,7	0,17	6	20	2,8	0,24	4
6	20,0	0,15	7	21	14,2	0,30	7
7	21,7	0,15	5	22	23,0	0,15	4
8	3,3	0,30	5	23	9,4	0,30	7
9	7,8	0,39	4	24	19,7	0,04	5
10	6,8	0,42	6	25	24,5	0,05	6
11	18,0	0,26	6	26	11,1	0,33	6
12	9,6	0,26	6	27	20,2	0,22	6
13	19,6	0,23	7	28	11,4	0,50	6
14	11,4	0,36	5	29	21,0	0,24	6
15	24,2	0,13	5	30	3,3	0,31	5

Приклад розв'язання задачі

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: λ = 12,5 авт./год; $\bar{t}_{\hat{\imath}\acute{a}\tilde{n}}$ = 0,25 год; n = 5.

Розв'язок.

Нижче наведені розрахункові формули для розімкненої системи масового обслуговування.

Показник	Значення показника при кількості каналів обслуговування	
	$n = 1$	$n > 1$
1. Параметр завантаження системи	$\alpha = \lambda / \mu = \lambda \cdot \bar{t}_{\hat{\imath}\acute{a}\tilde{n}}$	
2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні	$P_0 = 1 - \alpha$	$P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}}$
3. Імовірність того, що k каналів зайняті	–	$P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$ ïðè $1 \le k < n$
4. Імовірність того, що всі канали обслуговування зайняті	$\pi = \alpha$	$\pi = \dfrac{\alpha^n P_0}{(n-1)!(n-\alpha)}$
5. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування	$\bar{t}_{\hat{\imath}\div} = \dfrac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)}$	$\bar{t}_{\hat{\imath}\div} = \dfrac{\pi}{\mu(n-\alpha)}$
6. Середня довжина черги	$M_{\hat{\imath}\div} = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$	$M_{\hat{\imath}\div} = \dfrac{\alpha^{n+1} P_0}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^2}$
7. Середня кількість вимог у системі	$M_{\text{с}} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$	$M_{\text{с}} = M_{\hat{\imath}\div} + \alpha$
8. Середня кількість вільних каналів обслуговування	–	$N_0 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k$

Наведені формули справедливі при виконанні умови $\alpha/n<1$, інакше у системі обслуговування виникає черга безкінечної довжини.

У випадку *рівномірного закріплення автомобілів за кранами* маємо n = 5 одноканальних розімкнених СМО, до кожної з яких надходить потік вимог з інтенсивністю

$$\lambda' = \lambda/n = 12,5/5 = 2,5 \text{ авт./год.}$$

Використовуючи розрахункові формули для одноканальної СМО отримаємо:

1) інтенсивність обслуговування

$$\mu = 1/\overline{t}_{\text{îáñ}} = 1/0,25 = 4 \text{ авт./год;}$$

2) параметр завантаження системи (імовірність того, що кран зайнятий навантаженням)

$$\alpha = \pi = 2,5/4 = 0,625;$$

3) імовірність того, що кран вільний від навантаження

$$P_0 = 1 - 0,625 = 0,375;$$

4) середня тривалість очікування автомобілем початку навантаження

$$\overline{t}_{\text{î÷}} = \frac{0,625^2}{2,5(1-0,625)} = 0,417 \text{ год.;}$$

5) середня довжина черги автомобілів

$$M_{\text{î÷}} = \frac{0,625^2}{1-0,625} = 1,042 \text{ автомобіля;}$$

6) середня кількість автомобілів на контейнерному пункті

$$M_{\text{c}} = \frac{0,625}{1-0,625} = 1,67 \text{ автомобілів.}$$

У випадку організації роботи пункту *без закріплення автомобілів за кранами* маємо одну п'ятиканальну СМО.

Використовуючи розрахункові формули для багатоканальної СМО отримаємо:

1) параметр завантаження системи

$$\alpha = 12,5 \cdot 0,25 = 3,125\,;$$

2) для виконання подальших розрахунків заповнимо розрахункову таблицю 6.2.

Таблиця 6.2 – Розрахунок багатоканальної розімкненої СМО

k	$k!$	α^k	$\alpha^k / k!$	$P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$	$(n-k)P_k$
0	1	1	1	0,0405	0,2025
1	1	3,125	3,125	0,1266	0,5063
2	2	9,766	4,883	0,1978	0,5933
3	6	30,52	5,087	0,2060	0,4120
4	24	95,37	3,974	0,1609	0,1609
Σ			**18,07**		**1,875**

3) імовірність того, що всі крани вільні від навантаження

$$P_0 = \frac{1}{18,07 + \dfrac{3,125^5}{(5-1)!(5-3,125)}} = 0,0405\,;$$

4) імовірність того, що всі крани зайняті навантаженням

$$\pi = \frac{3,125^5 \cdot 0,0405}{(5-1)!(5-3,125)} = 0,268\,;$$

5) середня тривалість очікування автомобілем початку навантаження

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,268}{4(5-3,125)} = 0,036 \text{ год.;}$$

6) середня довжина черги автомобілів

$$M_{\text{оч}} = \frac{3,125^{6} \cdot 0,0405}{5 \cdot 5! \cdot \left(1 - \dfrac{3,125}{5}\right)^{2}} = 0,447 \text{ автомобілів;}$$

7) середня кількість автомобілів на контейнерному пункті

$$M_{\text{c}} = 0,447 + 3,125 = 3,572\ ;$$

8) середня кількість вільних від навантаження кранів (сума значень останнього стовпчика табл. 6.2)

$$N_{0} = 1,875\,.$$

Аналізуючи результати розрахунків бачимо, що у випадку організації роботи контейнерного пункту без закріплення автомобілів за кранами у порівнянні з варіантом закріплення автомобілів за кранами середня довжина черги зменшується з 1,042 до 0,447 автомобілів, а тривалість очікування зменшується з 0,417 год. до 0,036 год.

ЗАДАЧА 7

ЗАМКНЕНІ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Транспортний цех підприємства здійснює транспортне обслуговування m виробничих цехів. Для перевезень вантажів наявні n автомобілів. Щогодини до транспортного цеху від виробничих цехів надходить в середньому λ вимог на перевезення вантажів. Середня тривалість обслуговування одного виробничого цеху складає $t_{обс}$ годин. Внаслідок несвоєчасного подавання автомобілів під навантаження кожен з виробничих цехів несе збитки в розмірі $c_{оч}$=250 грн/год. Витрати транспортного цеху від непродуктивного простою одного автомобіля складають $c_{пк}$ = 50 грн/год.

Провести аналіз роботи транспортної системи методами теорії масового обслуговування та визначити оптимальну кількість автомобілів для виконання перевезень.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані до задачі 7

Вар.	λ	$\bar{t}_{обс}$	n	m	Вар.	λ	$\bar{t}_{обс}$	n	m
1	0,7	1,2	4	7	16	2,6	0,85	4	6
2	1,2	0,8	3	6	17	1,6	0,44	6	9
3	0,5	0,8	5	8	18	3,2	0,53	6	8
4	1,5	0,6	4	6	19	2,8	1,1	4	7
5	2,5	0,45	5	8	20	1,6	1,3	3	8
6	3,4	0,55	6	8	21	2,4	1,8	5	9
7	2,8	0,5	4	7	22	3,2	1,1	5	6
8	0,8	0,7	3	6	23	2,7	0,75	6	8
9	0,75	0,9	3	5	24	1,9	0,4	4	8
10	0,58	0,34	3	6	25	2,6	0,45	3	6
11	1,85	0,8	4	6	26	2,7	0,85	6	9
12	2,35	1,1	3	7	27	4,2	0,11	5	7
13	1,7	0,95	4	8	28	4,9	0,67	4	6
14	3,4	0,76	5	8	29	2,6	1,03	4	7
15	2,8	0,6	5	7	30	2,2	0,53	4	8

Приклад розв’язання задачі

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: λ = 3 вимог/год; $\overline{t}_{\text{î áñ}}$ = 0,5 год; n = 3; m = 6.

Розв’язок.

Нижче наведені розрахункові формули для замкненої системи масового обслуговування.

Показник	Значення показника
1. Параметр завантаження системи	$\alpha = \lambda / \mu = \lambda \cdot \overline{t}_{\text{îáñ}}$
2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні	$P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{m!\alpha^k}{k!(m-k)!} + \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{m!\alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!}}$
3. Імовірність того, що k каналів зайняті	$P_k = \begin{cases} \dfrac{m!\alpha^k}{k!\left(m-k\right)!} \cdot P_0 & \text{äëÿ} \quad 1 \le k < n; \\ \dfrac{m!\alpha^k}{n^{k-n} n!\left(m-k\right)!} \cdot P_0 & \text{äëÿ} \quad n \le k \le m. \end{cases}$
4. Середня довжина черги	$M_{\text{î÷}} = \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{(k-n)m!\alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} P_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{m} (k-n) P_k$
5. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування	$\overline{t}_{\text{î÷}} = \dfrac{M_{\text{î÷}}}{\lambda}$
6. Середня кількість вимог у системі	$M_{\text{c}} = \sum\limits_{k=1}^{m} k \cdot P_k = M_{\text{î÷}} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k m!}{k!\left(m-k\right)!} \text{Ð}_0$
7. Середня кількість вільних каналів обслуговування	$N_0 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(n-k\right) P_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\left(n-k\right) m!\alpha^k}{k!\left(m-k\right)!} P_0$

1) розраховуємо параметр завантаження системи

$$\alpha = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\ .$$

Подальші розрахунки зводимо до таблиці 7.2. Значення другого стовпчика розраховуємо за формулами що витікають з формули (3).

$$\frac{P_k}{P_0}=\begin{cases}\dfrac{m!\alpha^k}{k!(m-k)!} & \text{äëÿ} \quad 1 \le k<n;\\[2ex] \dfrac{m!\alpha^k}{n^{k-n}n!(m-k)!} & \text{äëÿ} \quad n\le k\le m.\end{cases}$$

2) імовірність того, що всі автомобілі вільні від обслуговування виробничих цехів

$$P_0=\frac{1}{364,38}=0,0027\,.$$

Значення у знаменнику дорівнює сумі значень другого стовпчика таблиці 7.2.

Таблиця 7.2 – Розрахунок багатоканальної замкненої СМО

k	P_k/P_0	P_k	$k\cdot P_k$	$(k-n)P_k$	$(n-k)P_k$
0	1	0,0027	0,000	–	0,008
1	9	0,025	0,025	–	0,049
2	33,75	0,093	0,185	–	0,093
3	67,50	0,185	0,556	0	–
4	101,25	0,278	1,111	0,278	–
5	101,25	0,278	1,389	0,556	–
6	50,625	0,139	0,834	0,417	–
Σ	**364,38**	**1,00**	4,10	1,25	0,15

3) імовірності станів системи P_k отримаємо помноживши значення з другого стовпчика таблиці 10.3 на знайдене значення P_0.

4) середня кількість виробничих цехів, що очікують на обслуговування (середня довжина черги) дорівнює сумі значень п’ятого стовпчика таблиці 7.2

$$M_{\hat{\imath}\div}=1,25 \text{ цехів.}$$

5) середня тривалість очікування цехом початку обслуговування

$$\overline{t}_{\text{î÷}} = 1,25/3 = 0,417 \text{ год.};$$

6) середня кількість виробничих цехів, що обслуговуються чи очікують на обслуговування (середня кількість вимог у системі) дорівнює сумі значень четвертого стовпчика таблиці 7.2

$$M_{\text{с}} = 4,1 \text{ цеха.}$$

7) середня кількість автомобілів, що очікують вимоги на обслуговування (кількість вільних каналів обслуговування) дорівнює сумі значень останнього стовпчика таблиці 7.2

$$N_0 = 0,15 \text{ автомобілів.}$$

Для визначення оптимальної кількості автомобілів розрахуємо середню довжину черги та середню кількість вільних каналів обслуговування системи за кількості каналів обслуговування від $n = 1$ до $n = 6$. Для кожного варіанту розрахуємо витрати від очікування цехами автомобілів, витрати від простою автомобілів та сумарні витрати. Результати зводимо до таблиці 7.3.

Таблиця 7.3 – Показники та витрати в системі обслуговування за різної кількості каналів обслуговування

n	$M_{\text{î÷}}$	N_0	Витрати в системі		
			від простою цехів $M_{\text{î÷}} \cdot \tilde{n}_{\text{î÷}}$	від простою автомобілів $N_0 \cdot \tilde{n}_{\text{îê}}$	загальні $\tilde{N}$
1	4,33	0,001	1082,5	0,05	1082,55
2	2,69	0,01	672,5	0,5	673
3	1,25	0,15	312,5	7,5	320
4	0,38	0,63	95	31,5	126,5
5	**0,06**	**1,43**	**15**	**71,5**	**86,5**
6	0,00	2,40	0	120	120

Таким чином бачимо, що для досягнення мінімальних витрат у системі обслуговування кількість автомобілів у транспортному цеху підприємства доцільно збільшити до 5 одиниць.

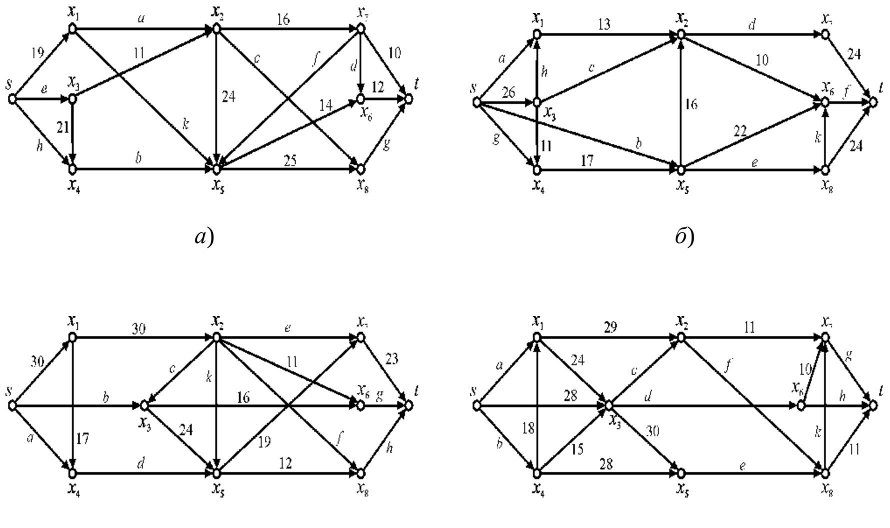
ЗАДАЧА 8

ПОШУК МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ У ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

Використовуючи теорему Форда-Фалкерсона, знайти максимальний потік у заданій транспортній мережі. Вихідні дані до виконання заняття наведені у таблиці 8.1 та на рисунку 8.1.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані до задачі 8

Варі-ант	Схема	Пропускна спроможність дуг мережі								
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*
1	*а*	12	18	19	17	18	12	10	20	20
2	*б*	15	14	18	17	19	16	16	20	20
3	*в*	19	16	20	15	10	11	18	15	12
4	*г*	17	15	16	17	14	13	16	18	15
5	*а*	17	17	14	17	12	12	11	17	10
6	*б*	15	13	15	10	13	17	18	11	15
7	*в*	14	16	10	17	20	14	10	20	18
8	*г*	14	18	17	11	18	10	14	15	20
9	*а*	13	20	15	13	20	17	10	15	10
10	*б*	19	17	13	12	15	13	16	12	10
11	*в*	10	17	17	19	20	11	13	17	18
12	*г*	13	20	18	10	15	11	14	19	17
13	*а*	16	16	16	19	10	13	13	19	11
14	*б*	15	18	16	15	14	17	13	15	19
15	*в*	12	15	20	13	10	20	14	19	10
16	*г*	14	12	20	19	18	12	17	13	15
17	*а*	18	19	15	15	10	19	19	19	14
18	*б*	19	18	14	12	19	11	12	15	10
19	*в*	15	19	16	20	13	17	16	17	12
20	*г*	18	12	19	13	12	13	14	14	19
21	*а*	15	19	18	16	19	12	19	16	17
22	*б*	14	15	18	18	10	13	16	20	14
23	*в*	20	16	11	11	13	13	10	10	19
24	*г*	12	15	19	20	18	15	13	14	13
25	*а*	12	19	19	10	14	12	14	19	18



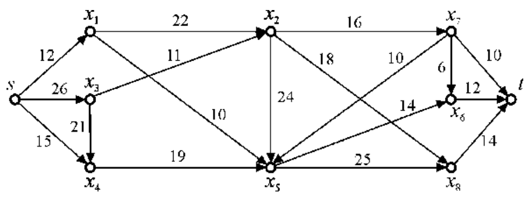
а) *б*)

в) *г*)

Рисунок 8.1 – Варіанти схем транспортної мережі

Приклад розв’язання задачі

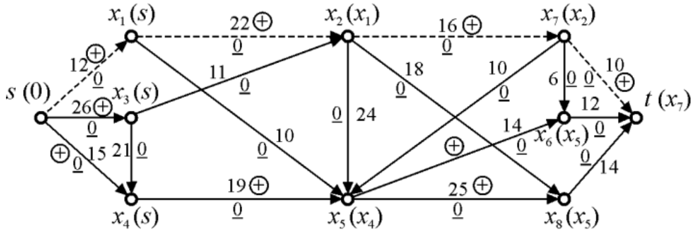
Розглянемо приклад виконання завдання для графа транспортної мережі, наведеного на рисунку нижче.



Розв’язок.

Потік у дузі будемо показувати підкресленим числом поряд з нею. Помітки вершин будемо записувати у дужках поряд з номером вершини. Помітки дуг “+” та “–“ будемо записувати у кружечках поряд з відповідною дугою. Насичені дуги будемо позначати жирною лінією.

Крок 2. Задаємо у мережі нульовий потік (рисунок 8.2).



$L=(t,\ x_7,\ x_2,\ x_1,\ s)$; $k_1=10$; $k_2=+\infty$; $k=10$.

Рисунок 8.2 – Початкові потоки і помітки на першій ітерації

Крок 3. Приписуємо витоку s позначку 0. Розглядаємо вершини, суміжні з витоком. Вершина x_1 отримує помітку s, оскільки потік по дузі (s,x_1) менше ніж її пропускна спроможність. Дуга (s,x_1) отримує помітку “+”. Аналогічним чином помітку s отримують вершини x_3 та x_4. Надалі, розглядаємо непомічені вершини, що суміжні вже поміченим вершинам x_1, x_3 та x_4. Наприклад, вершину x_2 помічаємо, розглядаючи дугу (x_1, x_2). Оскільки потік у цій дузі (він зараз дорівнює нулю) не перевищує її пропускної спроможності (22), вершина x_2 отримує помітку x_1, а дуга (x_1, x_2) – помітку “+”. Приписування поміток продовжуємо, поки це можливо (рисунок 8.2).

Крок 4. В результаті приписування поміток вершина-стік отримала помітку x_7. Це означає, що потік не є максимальним і рішення слід продовжити. Переходимо до кроку 5.

Крок 5. Рухаючись в зворотному порядку від вершини-стоку до вершини-витоку згідно з помітками отримуємо послідовність вершин для збільшення потоку $L=(t,\ x_7,\ x_2,\ x_1,\ s)$ (показаний пунктирними лініями на рисунку 8.2). Для знаходження k – величини, на яку можна збільшити потік у мережі, знаходимо k_1 та k_2. Оскільки у послідовності L відсутні дуги з помітками “–“, то покладаємо $k_2 = +\infty$. Для знаходження k_1 розраховуємо для всіх дуг послідовності L різницю між пропускною спроможністю дуги та потоком у ній. В результаті отримаємо:

дуга (x_7, t): 10 – 0 = 10;

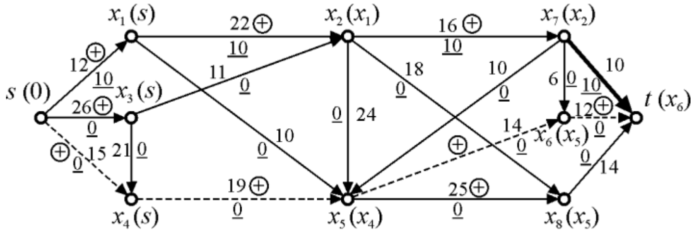
дуга (x_2, x_7): 16 – 0 = 16;

дуга (x_1, x_2): 22 – 0 = 22;

дуга (s, x_1): 12 – 0 = 12.

Найменше з цих значень 10, тому k_1 =10, а $k = \min\{10;+\infty\}$ = 10.

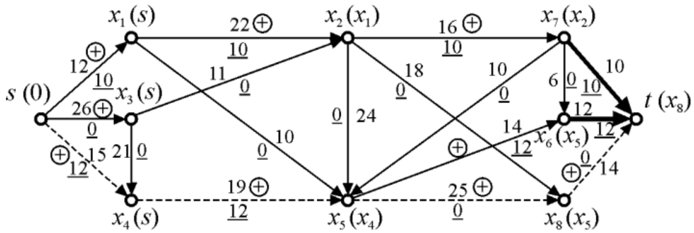
Збільшуємо потік у всіх дугах послідовності L на 10, оскільки всі вони мають позначку "+". В результаті дуга (x_7, t) становиться насиченою (рисунок8.3).



$L = (t,\ x_6,\ x_5,\ x_4,\ s)$; $k_1 = 12$; $k_2 = +\infty$; $k = 12$.

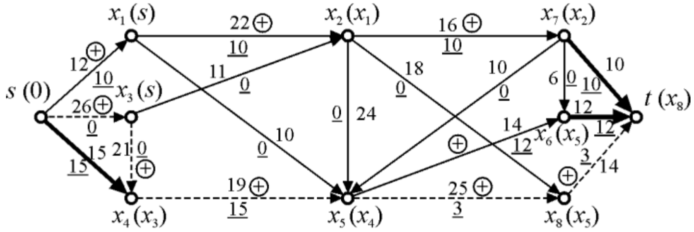
Рисунок 8.3 – Потоки після першої ітерації і помітки на другій ітерації

Подальший розрахунок показаний на рисунках 8.4 – 8.8.



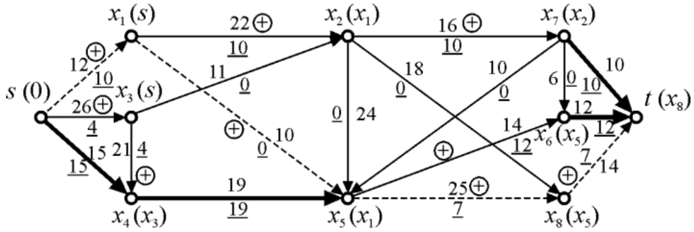
$L = (t,\ x_8,\ x_5,\ x_4,\ s)$; $k_1 = 3$; $k_2 = +\infty$; $k = 3$.

Рисунок 8.4 – Потоки після другої ітерації і помітки на третій ітерації



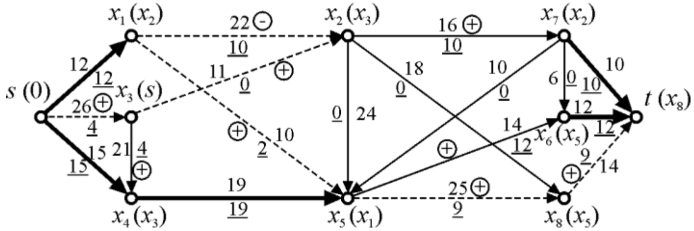
$$L = (t,\ x_8,\ x_5,\ x_4,\ x_3,\ s)\ ;\ k_1 = 4\ ;\ k_2 = +\infty\ ;\ k = 4\ .$$

Рисунок 8.5 – Потоки після третьої ітерації і помітки на четвертій ітерації



$$L = (t,\ x_8,\ x_5,\ x_1,\ s)\ ;\ k_1 = 2\ ;\ k_2 = +\infty\ ;\ k = 2\ .$$

Рисунок 8.6 – Потоки після четвертої ітерації і помітки на п’ятій ітерації



$$L = (t,\ x_8,\ x_5,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ s)\ ;\ k_1 = 5\ ;\ k_2 = 12\ ;\ k = 5\ .$$

Рисунок 8.7 – Потоки після п’ятої ітерації і помітки на шостій ітерації

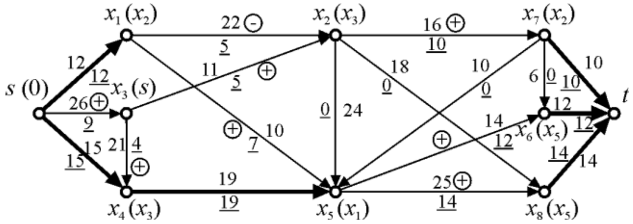


Рисунок 8.8 – Максимальний потік і помітки на сьомій ітерації

Виконуючи приписування поміток на сьомій ітерації бачимо, що вершина-виток t не отримала помітки. Це означає, що максимальний потік у мережі знайдено. Він дорівнює 36. Мінімальний розріз складають насичені дуги (x_7, t), (x_6, t) та (x_5, t), сума пропускних спроможностей яких дорівнює максимальному потоку.

ЗАДАЧА 9

ОСНОВИ СІТЬОВОГО ПЛАНУВАННЯ І УПРАВЛІННЯ

Для заданого сітьового графіка знайти критичний шлях, розрахувати ранні і пізні терміни відбування подій, резерви часу подій і робіт, терміни раннього та пізнього початку і закінчення робіт. Для розрахованого сітьового графіка побудувати також лінійний графік виконання робіт. Вихідні дані до задачі 9 наведені у таблиці 9.1 та на рисунку 9.1.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані до задачі 9

Вар.	Схема	Тривалість виконання робіт, год.										
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*l*	*m*
1	*а*	8	10	8	4	15	15	14	12	10	7	13
2	*б*	3	9	15	5	10	11	3	10	4	15	11
3	*в*	11	15	7	4	3	12	3	14	14	9	3
4	*г*	9	12	14	6	5	8	9	14	15	9	15
5	*а*	10	8	13	5	4	12	11	10	3	12	13
6	*б*	13	5	8	15	7	14	11	8	4	9	5
7	*в*	14	14	12	8	14	13	3	11	6	13	10
8	*г*	4	15	12	6	9	4	7	4	13	13	7
9	*а*	8	9	9	12	12	14	7	9	10	10	6
10	*б*	15	12	13	8	3	7	11	11	8	4	4
11	*в*	8	6	6	10	4	13	7	8	12	7	11
12	*г*	7	9	9	7	4	9	15	5	3	13	6
13	*а*	14	5	10	7	4	6	5	8	15	7	15
14	*б*	12	9	4	7	4	14	14	8	13	3	11
15	*в*	9	5	11	5	14	14	12	3	6	4	13
16	*г*	15	9	4	14	4	10	14	5	12	5	10
17	*а*	11	10	3	10	10	5	5	5	7	5	14
18	*б*	9	13	11	14	9	8	9	13	6	15	15
19	*в*	9	6	3	14	14	4	5	11	10	6	15
20	*г*	13	6	6	5	5	11	9	11	3	13	14
21	*а*	14	14	6	10	3	10	4	3	3	14	12
22	*б*	3	5	6	9	7	14	3	15	12	4	8
23	*в*	7	12	9	5	6	12	9	13	13	12	11
24	*г*	6	13	15	8	3	8	12	7	10	4	5
25	*а*	4	10	13	6	15	7	4	8	6	8	7

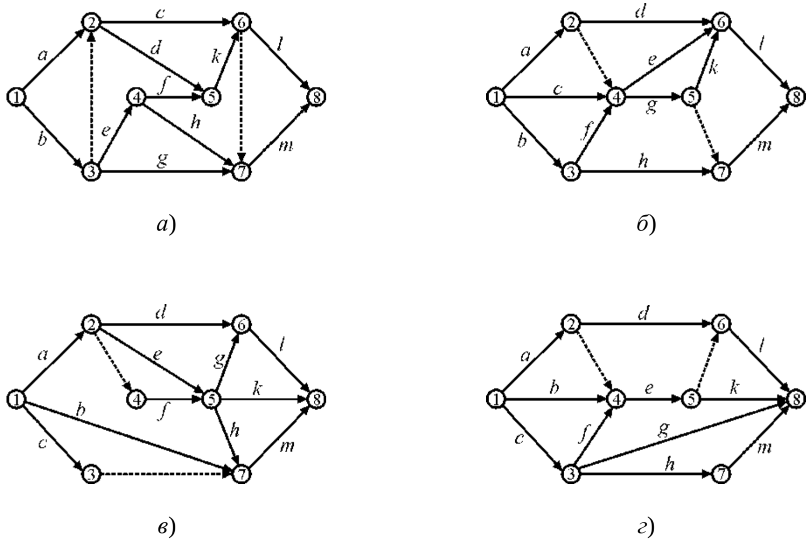
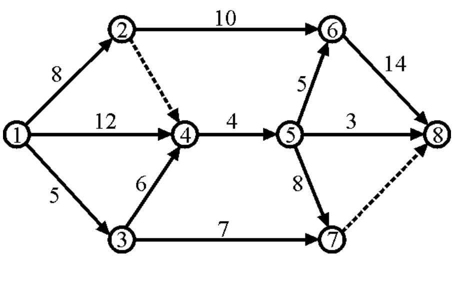


Рисунок 9.1 – Варіанти схем сітьового графіка

Приклад розв’язання задачі

Розглянемо приклад виконання завдання для сітьового графіка, наведеного на рисунку нижче



Розв’язок.

Для зручності розрахунків кожний кружечок, що позначає подію на сітьовому графіку, розділимо на чотири сектори.

У верхньому секторі будемо записувати номер події. У правому секторі – термін пізнього відбування події. У лівому секторі – термін раннього відбування події. У нижньому секторі – резерв часу події.

Тривалість фіктивних робіт 2–4 та 7–8 покладаємо рівними нулю.

Розрахунок сітьового графіка починаємо з ***визначення термінів раннього відбування подій*** (ліві сектори кружків). Термін раннього відбування вихідної події *1* приймаємо рівним нулю (рисунок 9.2).

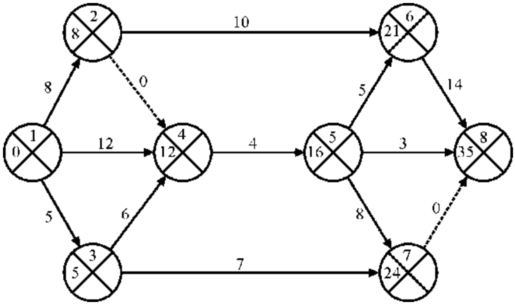


Рисунок 9.2 – Розрахунок ранніх термінів відбування подій

Термін раннього відбування подій *2* та *3* (до них входить тільки по одній роботі) розраховується як

$$T_{\text{р}}(2) = T_{\text{р}}(1) + t_{1-2} = 0 + 8 = 8\,;$$
$$T_{\text{р}}(3) = T_{\text{р}}(1) + t_{1-3} = 0 + 5 = 5\,.$$

Термін раннього відбування події *4* (до неї входять три роботи 2–4, 1–4 та 3–4) розраховуємо наступним чином:

$$T_{\text{р}}(4) = \max\left\{\begin{array}{l} T_{\text{р}}(1) + t_{1-4} = 0 + 12 = 12 \\ T_{\text{р}}(2) + t_{2-4} = 8 + 0 = 8 \\ T_{\text{р}}(3) + t_{3-4} = 5 + 6 = 11 \end{array}\right| = 12\,.$$

Аналогічним чином розраховуємо терміни раннього відбування всіх подій сітьового графіка, рухаючись у напрямку від вихідної події до завершальної (*прямий хід*). Завершальна подія графіка *8* має термін раннього відбування $T_{\text{р}}(8) = 35$. Це значення є терміном виконання всього комплексу робіт сітьового графіка.

Для ***визначення пізнього терміну відбування подій*** сітьового графіка (праві сектори кружків) покладаємо термін пізнього відбування кінцевої події *8* рівним терміну її раннього відбування, тобто $T_{\text{п}}(8) = T_{\text{р}}(8) = 35$ (рисунок 9.3).

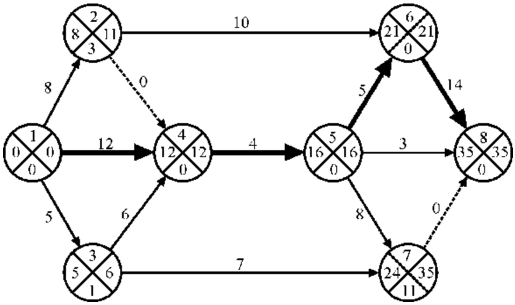


Рисунок 9.3 – Розрахунок пізніх термінів відбування подій, резервів часу подій та визначення критичного шляху графіку

Термін раннього відбування подій *6* та *7* (з них виходить тільки по одній роботі) розраховується як

$$T_{\text{п}}(6) = T_{\text{п}}(8) - t_{6-8} = 35 - 14 = 21;$$
$$T_{\text{п}}(7) = T_{\text{п}}(8) - t_{7-8} = 35 - 0 = 35.$$

Термін пізнього відбування події *5* (з неї виходять три роботи 5–6, 5–8 та 5–7) розраховуємо наступним чином:

$$T_{\text{п}}(5) = \min\left\{\begin{array}{l} T_{\text{п}}(6) - t_{5-6} = 21 - 5 = 16 \\ T_{\text{п}}(8) - t_{5-8} = 35 - 3 = 32 \\ T_{\text{п}}(7) + t_{5-7} = 35 - 8 = 27 \end{array}\right| = 16.$$

Аналогічним чином розраховуємо терміни пізнього відбування всіх подій сітьового графіка (рисунок 9.3), рухаючись у напрямку від завершальної події до вихідної (*зворотний хід*). Якщо розрахунки виконані правильно, термін пізнього відбування події повинен дорівнювати нулю.

Резерви часу подій (нижні сектори кружків) знаходимо як різницю між пізнім та раннім терміном їх відбування. Наприклад, для події *2* резерв часу

$$R(2) = T_{\text{п}}(2) - T_{\text{р}}(2) = 11 - 8 = 3\,.$$

Для ***пошуку критичного шляху*** проходимо по роботах сітьового графіка від вихідної події до завершальної через події, що мають нульовий резерв часу. У нашому випадку критичний шлях проходить через події 1 – 4 – 5 – 6 – 8 (на рисунку 9.3 показаний жирними стрілками). Роботи 1–4, 4–5, 5–6, 6–8 називаються ***критичними***, їх сумарна тривалість дорівнює терміну виконання комплексу робіт (35). Важливість критичних робіт полягає в тому, що *вони не мають резервів часу* і будь-яка затримка у виконанні цих робіт неминуче *призведе до збільшення терміну виконання всього комплексу робіт*.

Розрахунок термінів раннього та пізнього початку та закінчення робіт зручно виконувати у табличній формі (таблиця 9.2). Покажемо приклад розрахунку для роботи 3 – 7:

$$t_{3-7}^{\text{рп}} = T_{\text{р}}(3) = 5\,; \quad t_{3-7}^{\text{пп}} = T_{\text{п}}(7) - t_{3-7} = 35 - 7 = 28\,;$$

$$t_{3-7}^{\text{рз}} = T_{\text{р}}(3) + t_{3-7} = 5 + 7 = 12\,; \quad t_{3-7}^{\text{пз}} = T_{\text{п}}(7) = 35\,;$$

$$R_{3-7} = T_{\text{п}}(7) - T_{\text{р}}(3) - t_{3-7} = 35 - 5 - 7 = 23\,;$$

$$\bar{R}_{3-7} = T_{\text{р}}(7) - T_{\text{р}}(3) - t_{3-7} = 24 - 5 - 7 = 12\,;$$

$$r_{3-7} = T_{\text{п}}(7) - T_{\text{п}}(3) - t_{3-7} = 35 - 6 - 7 = 22\,;$$

$$R_{3-7}^{\text{н}} = T_{\text{р}}(7) - T_{\text{п}}(3) - t_{3-7} = 24 - 6 - 7\,.$$

Таблиця 9.2 – Розрахунок ранніх та пізніх термінів початку та закінчення робіт та резервів часу робіт

Робота *i–j*	t_{i-j}	Терміни початку робіт		Терміни закінчення робіт		Резерви часу робіт			
		ранні $t_{i-j}^{рп}$	пізні $t_{i-j}^{пп}$	ранні $t_{i-j}^{рз}$	пізні $t_{i-j}^{пз}$	R_{i-j}	$\bar{R}_{i-j}$	r_{i-j}	$R_{i-j}^{н}$
1 – 2	8	0	3	8	11	3	0	3	0
1 – 3	5	0	1	5	6	1	0	1	0
1 – 4	12	0	0	12	12	0	0	0	0
2 – 6	10	8	11	18	21	3	3	0	0
3 – 4	6	5	6	11	12	1	1	0	0
3 – 7	7	5	28	12	35	23	12	22	11
4 – 5	4	12	12	16	16	0	0	0	0
5 – 6	5	16	16	21	21	0	0	0	0
5 – 7	8	16	27	24	35	11	0	11	0
5 – 8	3	16	32	19	35	16	16	16	16
6 – 8	14	21	21	35	35	0	0	0	0

Для розрахованого графіка будуємо лінійний графік робіт (рисунок 9.4). По вісі абсцис відкладаємо час, по вісі ординат – роботи (відстань між роботами по вертикалі довільна).

Номери початкової та кінцевої події проставляємо відповідно на початку та кінці роботи. Фіктивні роботи зображуємо точками та пунктиром між номерами їх початкових та кінцевих подій.

Роботи розташовуються горизонтально знизу догори, починаючи з роботи, що має менший номер її кінцевої події. Далі роботи розташовують у порядку збільшення номерів їх кінцевих подій, а роботи, що входять до однієї події – у порядку збільшення номерів їх початкових подій.

Номери подій показуємо у кружечках. Над кожною з робіт проставляємо її тривалість. Залитим прямокутником позначаємо виконання роботи, починаючи з раннього терміну її початку.

Прямокутником на продовженні виконання роботи показуємо повний резерв часу роботи. Пунктирною лінією всередині цього прямокутника показуємо вільний резерв часу роботи. Вертикальною суцільною лінією показуємо зв’язок між роботами, що утворюють критичний шлях. Пунктирними вертикальними лініями показуємо залежності між некритичними роботами.

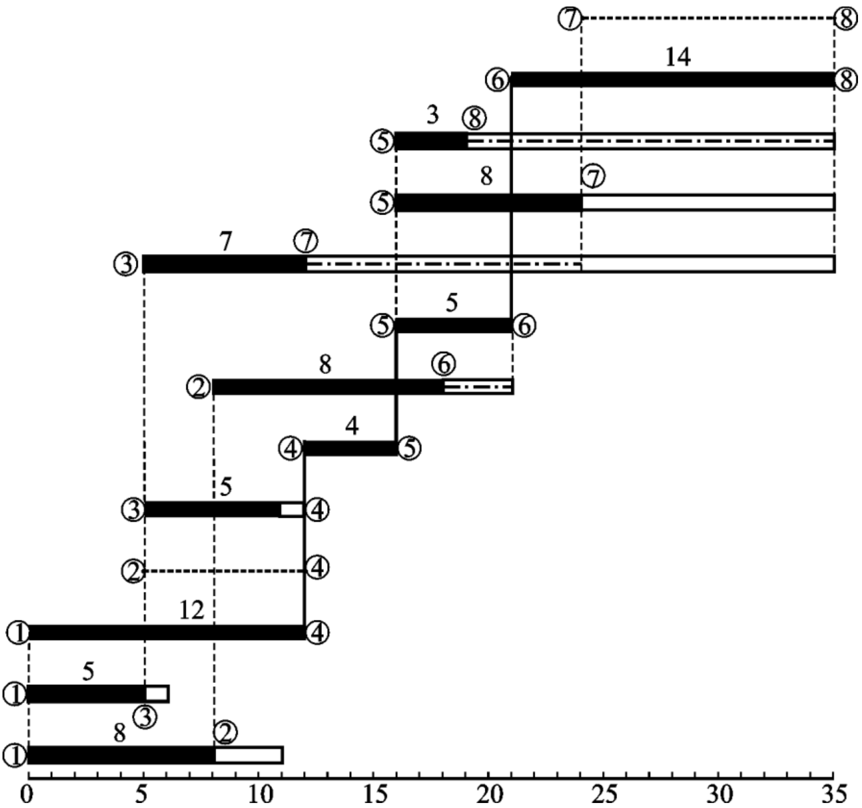


Рисунок 9.4 – Лінійний графік робіт

ЗАДАЧА 10

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІГОР

Автотранспортне підприємство (*A*) може виділяти щодня три типи автомобілів для перевезення вантажовідправнику (*B*), що використовує їх на перевезеннях трьох видів вантажу. Прибуток сторін від виконання перевезень (в умовних грошових одиницях) заданий платіжною матрицею 3×3. Методами теорії ігор оцінити економічну доцільність виконання перевезень з боку АТП та визначити його оптимальну стратегію з метою максимізації середньоденного прибутку.

Для рішення задачі використати наближений ітераційний метод Брауна-Робінсон (виконати 15 ітерацій). Вихідні дані до задачі наведені у таблиці 10.1.

Таблиця 10.1 – Вихідні дані до задачі 10

Вар.		B_1	B_2	B_3	Вар.		B_1	B_2	B_3
1	A_1	5	6	7	9	A_1	2	–4	10
	A_2	9	8	1		A_2	–5	0	8
	A_3	–6	–4	8		A_3	3	–1	–9
2	A_1	–5	0	4	10	A_1	–8	0	2
	A_2	3	2	2		A_2	0	6	–4
	A_3	7	1	1		A_3	5	–5	–5
3	A_1	6	–5	1	11	A_1	9	0	–4
	A_2	9	0	–4		A_2	–2	6	–2
	A_3	3	4	5		A_3	–1	–5	7
4	A_1	–1	8	1	12	A_1	–2	–8	12
	A_2	2	6	0		A_2	0	7	–1
	A_3	–4	0	5		A_3	4	0	9
5	A_1	9	–6	0	13	A_1	–5	–9	1
	A_2	2	5	–5		A_2	–1	5	–2
	A_3	1	8	2		A_3	3	8	–4
6	A_1	0	–1	7	14	A_1	2	1	–4
	A_2	3	–2	2		A_2	5	0	1
	A_3	–5	4	0		A_3	–8	2	3
7	A_1	–6	–1	5	15	A_1	0	0	6
	A_2	5	–4	7		A_2	–3	1	4
	A_3	0	1	–5		A_3	2	6	–5
8	A_1	–1	–3	1	16	A_1	0	–7	11
	A_2	2	9	–5		A_2	9	3	2
	A_3	4	4	0		A_3	–7	7	1

Продовження таблиці 10.1.

Вар.		B_1	B_2	B_3	Вар.		B_1	B_2	B_3
17	A_1	8	1	–1	22	A_1	5	–4	12
	A_2	9	–4	7		A_2	3	0	10
	A_3	0	8	2		A_3	–15	3	–1
18	A_1	2	8	–4	23	A_1	0	12	–1
	A_2	–10	1	5		A_2	4	–2	9
	A_3	–3	6	–2		A_3	2	1	6
19	A_1	–3	–1	8	24	A_1	–2	8	1
	A_2	2	–1	–5		A_2	8	–5	–7
	A_3	6	0	6		A_3	–6	1	8
20	A_1	9	3	9	25	A_1	1	7	–3
	A_2	–2	5	6		A_2	4	1	8
	A_3	7	–1	0		A_3	–6	–1	5
21	A_1	10	–5	0					
	A_2	5	8	–3					
	A_3	–4	2	1					

Приклад розв'язання задачі

Розглянемо приклад розв'язку задачі за умов задачі, заданих платіжною матрицею 3×3 :

	B_1	B_2	B_3
A_1	–9	0	10
A_2	5	–2	1
A_3	3	1	–2

Розв'язок.

У таблиці 10.2 наведені 15 кроків ітераційного процесу. Рішення починаємо з того, що гравець A обирає будь-яку свою активну стратегію (у нашому прикладі стратегію A_3).

Нижче наведені пояснення до ітераційної таблиці.

1. У першому стовпчику зазначений номер розігруваної партії (пари виборів) k , у другому – номер i вибраної у даній партії стратегії гравця A.

2. У наступних трьох стовпчиках записують накопичений виграш за перші k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці у попередніх партіях та при стратегіях B_1 , B_2 , B_3 гравця B у даній партії. Результат

одержується додаванням елементів відповідного рядка платіжної матриці до значень попереднього рядка розрахункової таблиці.

3. Серед цих накопичених виграшів знаходять мінімальний (у таблиці 10.2 такий виграш позначено зірочкою). Якщо мінімальних виграшів декілька, позначаються всі. Позначене число визначає відповідний вибір гравця *B* у даній партії – він обирає ту стратегію, яка відповідає позначеному мінімальному виграшу (якщо їх декілька, вибирається будь-яке). Таким чином, визначається номер оптимальної (у даній партії) стратегії гравця *B*. Номер цієї стратегії записується у наступному стовпчику.

4. У наступних трьох стовпчиках фіксується накопичений виграш за k партій, відповідно, при стратегіях A_1, A_2, A_3 гравця *A* (визначається додаванням елементів відповідного стовпчика платіжної матриці до значень попереднього рядка розрахункової таблиці). З цих значень у таблиці 10.2 позначено зірочкою максимальне – воно визначає вибір стратегії сторони *A* у наступній партії (рядком нижче).

5. В останніх трьох стовпчиках таблиці 10.2 записують: $\gamma_{н}$ – нижню оцінку ціни гри, яка дорівнює накопиченому виграшу гравця *A*, поділеному на кількість розіграних партій k ; $\gamma_{в}$ – верхню оцінку ціни гри, яка дорівнює накопиченому виграшу гравця *B*, поділеному на k ; $\bar{\gamma}$ – середнє арифметичне між цими двома оцінками.

Для знаходження наближеного рішення гри необхідно підрахувати частоту використання активних стратегій гравців за виконану кількість кроків ітераційного процесу N .

Гравець *A* використав за N = 15 партій стратегію A_1 3 рази (m_1 = 3), стратегію A_2 – 2 рази (m_2 = 2), стратегію A_3 – 10 разів (m_3 = 10).

Гравець *B* використав за N = 15 партій стратегію B_1 2 рази (w_1 = 3), стратегію B_2 – 11 разів (w_2 = 11), стратегію B_3 – 2 рази (w_3 = 2).

Таким чином, наближені значення компонентів оптимальних змішаних стратегій гравців складуть:

гравця A:

$$p_1 \approx \frac{m_1}{N} \approx \frac{3}{15} = 0,2\,; \quad p_2 \approx \frac{m_2}{N} \approx \frac{2}{15} = 0,13\,; \quad p_3 \approx \frac{m_3}{N} \approx \frac{10}{15} = 0,67\,;$$

Таблиця 10.2 – Розрахункова таблиця

Номер партії k	Стратегія гравця A	Накопичений виграш гравця A при стратегіях гравця B			Стратегія гравця B	Накопичений виграш гравця B при стратегіях гравця A			Ціна гри		
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3	$\gamma_н$	$\gamma_в$	$\bar{\gamma}$
1	3	3	1	-2^*	3	10^*	1	–2	–2	10	4
2	1	-6^*	1	8	1	1	6^*	1	–3	3	0
3	2	-1^*	-1^*	9	2	1	4^*	2	–0,33	1,33	0,5
4	2	4	-3^*	10	2	1	2	3^*	–0,75	0,75	0
5	3	7	-2^*	8	2	1	0	4^*	–0,4	0,8	0,2
6	3	10	-1^*	6	2	1	–2	5^*	–0,17	0,71	0,27
7	3	13	0^*	4	2	1	–4	6^*	0	0,86	0,43
8	3	16	1^*	2	2	1	–6	7^*	0,13	0,88	0,51
9	3	19	2	0^*	3	11^*	–5	5	0	1,22	0,61
10	1	10	2^*	10	2	11^*	–3	4	0,2	1,1	0,65
11	1	1^*	2	20	1	2	2	7^*	0,09	0,64	0,37
12	3	4	3^*	18	2	2	0	8^*	0,25	0,67	0,46
13	3	7	4^*	16	2	2	–2	9^*	0,31	0,69	0,5
14	3	10	5^*	14	2	2	–4	10^*	0,36	0,71	0,54
15	3	13	6^*	12	2	2	–6	11^*	0,4	0,73	0,57

гравця B:

$$q_1 \approx \frac{w_1}{N} \approx \frac{2}{15} = 0,13; \quad q_2 \approx \frac{w_2}{N} \approx \frac{11}{15} = 0,73; \quad q_3 \approx \frac{w_3}{N} \approx \frac{2}{15} = 0,13;$$

Наближене значення ціни гри (значення $\bar{\gamma}$ у останньому рядку розрахункової таблиці) $\gamma^* \approx 0,57$.

Оптимальною стратегією АТП буде $S_A^* = (0,2;\ 0,13;\ 0,67)$, тобто слід у 20% днів планового періоду виділяти для перевезень автомобілі першого типу, у 13% днів – автомобілі другого типу і у 67% днів – автомобілі третього типу. При цьому автомобілі будуть у 13% днів перевозити перший вид вантажу, у 73% днів – другий вид вантажу і у 13% днів – третій вид вантажу. Це економічно вигідно АТП, оскільки воно буде в середньому отримувати щодня 0,57 у.г.о. прибутку.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972.– 552 с.
2. Вітлинський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування.– К.: КНЕУ, 2001.– 248 с.
3. Банди Б. Основы линейного программирования.– М.: Радио и связь, 1989.– 176 с.
4. Геронимус Б.Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте.– М.: Транспорт, 1982.– 160 с.
5. Акулиничев В.М., Кудрявцев В.А., Корешков В.Н. Математические методы в эксплуатации железных дорог.– М.: Транспорт, 1981.– 223 с.
6. Смехов А.А. Математические модели процессов грузовой работы.– М.: Транспорт, 1982.– 256 с.
7. Лащених О.А., Кузькін О.Ф. Методи і моделі оптимізації транспортних процесів і систем. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2006.– 435 с.
8. Калихман И.Д., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах.– М.: Высшая школа, 1979.– 125 с.
9. Новиков О.А., Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания.– М.: Советское радио, 1969.– 400 с.
10. Диордица Ю. С., Нефедов Ю. М. Исследование операций в планировании и управлении. – К.: Высшая школа, 1991 — 270 с.