

**Кузькін О.Ф., Турпак С.М., Фурсіна А.Д.,  
Шевченко В.Г., Шумикін С.О.**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**  
**ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**  
**Частина 2**  
**Теорія механізмів і машин**

**TEXTBOOK**  
**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**  
**Part 2**  
**Theory of Mechanisms and Machines**

**2026**

**УДК 531.8 (075.8)**

**ТЗЗ**

Рекомендовано до видання Вченою радою НУ «Запорізька політехніка», протокол № 9 від 27 березня 2026 р.

*Рецензенти:* докт. техн. наук, професор **О.В. Фомін**  
докт. техн. наук, професор **М. Ю. Пазюк**

*Автори:* Кузькін О.Ф., докт. техн. наук, професор;  
Турпак С.М., докт. техн. наук, професор;  
Фурсіна А.Д., канд. техн. наук, доцент;  
Шевченко В.Г., канд. техн. наук, доцент;  
Шумикін С.О., канд. техн. наук, доцент;

**ТЗЗ** Теоретична та прикладна механіка = Theoretical and Applied Mechanics: навчальний посібник: в 4 ч. Ч. 2 : Теорія механізмів і машин / О.Ф. Кузькін, С.М. Турпак, А.Д.Фурсіна, В.Г.Шевченко, С.О. Шумикін. – 2-ге вид., допов. і переробл.– Запоріжжя : НУ«Запорізька політехніка», 2026. – 164 с.  
**ISBN 978-966-653-568-2**

Книга «Теоретична та прикладна механіка» є навчальним посібником із прикладної механіки для студентів немеханічних спеціальностей. Обсяг матеріалу обумовлений програмою з теоретичної та прикладної механіки для технічних вищих навчальних закладів. Даний навчальний посібник призначений для освоєння студентами програмного матеріалу українською та англійською мовами.

© НУ «Запорізька політехніка»

© Кузькін О.Ф., Турпак С.М.,  
Фурсіна А.Д., Шевченко В.Г.,  
Шумикін С.О.

**ISBN 978-966-653-568-2**

© Видавництво «Просвіта»

**UDC 531.8 (075.8)**

**T33**

Recommended for publication by the Academic Council of National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Minutes No. 9 of March 2026.

*Reviewers:* Fomin O.V., doctor of Technical Sciences, Professor;  
Pazyuk M.Y., doctor of Technical Sciences, Professor

*Authors:* Kuzkin O.F., doctor of Technical Sciences, Professor;

Turpak S.M., doctor of Technical Sciences, Professor;  
Fursina A.D., PhD in Technical Sciences, Associate Professor;  
Shevchenko V.G., PhD in Technical Sciences, Associate Professor;  
Shumykin S.O., PhD in Technical Sciences, Associate Professor;

**T33** Theoretical and Applied Mechanics: textbook in 4 parts. Pt. 2: Theory of Mechanisms and Machines / O.F. Kuzkin, S.M. Turpak, A.D. Fursina, V.G. Shevchenko, S.O. Shumykin – 2-nd ed., added and recycled. – Zaporizhzhia : National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, 2026. – 164 p.

**ISBN 978-966-653-568-2**

The book “Theoretical and Applied Mechanics” is a textbook on applied mechanics for students of non-mechanical majors. The scope of the material corresponds to the syllabus in theoretical and applied mechanics for technical universities. This textbook is intended to help students master the course content in both Ukrainian and English.

© NU “Zaporizhzhia Polytechnic”

© Kuzkin O.F., Turpak S.M.,  
Fursina A.D., Shevchenko V.G.,  
Shumykin S.O.

**ISBN 978-966-653-568-2**

© Publishing House “Prosvita”

## ПЕРЕДМОВА

Необхідність перевидання навчального посібника «Теоретична та прикладна механіка» зумовлена комплексом чинників, які визначають сучасний розвиток вищої освіти України. З одного боку, зберігається потреба у доступному та системному викладі фундаментальних технічних дисциплін для студентів немеханічних спеціальностей, а з іншого освітній процес сьогодні відбувається в умовах, що суттєво відрізняються від тих, у яких створювалось перше видання. Вимушене дистанційне навчання, нові стандарти Європейського простору вищої освіти та компетентнісний підхід диктують необхідність перегляду форм і методів викладання, у тому числі й змістового наповнення навчальних матеріалів.

Попереднє видання мало на меті стислість і компактність. Воно виконувало роль конспективного підручника, який дозволяв охопити основні теми дисципліни. Проте практика останніх років показала, що студенти, особливо у дистанційному форматі, потребують значно більш деталізованого викладу. Тому у новому виданні матеріал розширено та оновлено.

Введено докладні пояснення до ключових понять і термінів, зокрема там, де у попередньому виданні інформація була занадто стислою; додано сучасні приклади застосування теоретичних положень у різних галузях інженерії – від автоматизованих виробничих систем та робототехніки до біомеханіки й сучасних транспортних технологій; значну увагу приділено ілюстративному матеріалу та поясненням до рисунків, що підвищує наочність; розроблено блоки контрольних запитань після кожного розділу, що дають можливість студентам перевіряти власний рівень засвоєння; оновлено список літератури, орієнтований на сучасні джерела.

Особливе місце у цьому перевиданні відведено самостійній роботі студентів. У нинішніх умовах, коли значна частина навчального процесу відбувається дистанційно, здобувачі освіти часто змушені опановувати матеріал без безпосередньої участі викладача. Саме тому кожний розділ посібника завершується блоком із контрольних запитань, які дозволяють студентам не тільки перевірити рівень власного розуміння, але й структурувати знання у вигляді ключових понять і практичних завдань.

## PREFACE

The need to republish the textbook Theoretical and Applied Mechanics is driven by a set of factors that define the current development of higher education in Ukraine. On the one hand, there remains a demand for an accessible and systematic presentation of fundamental technical disciplines for students of non-mechanical majors; on the other hand, today's educational process takes place under conditions that differ significantly from those in which the first edition was created. War, forced distance learning, the new standards of the European Higher Education Area, and the competency-based approach dictate the need to revise teaching formats and methods, including the content of learning materials.

The previous edition was intended to be concise and compact. It served as a summary-style textbook that allowed the main topics of the discipline to be covered. However, recent years have shown that students, especially in distance learning, require a much more detailed presentation. Therefore, in the new edition the material has been expanded and updated.

Detailed explanations have been added for key concepts and terms, particularly where the earlier edition was overly brief; modern examples have been included to demonstrate the application of theoretical principles in various fields of engineering – from automated production systems and robotics to biomechanics and modern transport technologies; considerable attention has been devoted to illustrative material and explanations to figures to increase clarity; blocks of review questions have been developed at the end of each section to enable students to assess their own level of mastery; the list of references has been updated and oriented toward contemporary sources.

A special place in this new edition is given to independent student work. Under current conditions, where much of the educational process takes place remotely, students often have to master material without direct involvement of an instructor. For this reason, each chapter of the textbook ends with a block of review questions that allow students not only to check their understanding but also to structure knowledge in the form of key concepts and practical tasks.

Посібник дає можливість студентам, які орієнтуються на здобуття освіти у двомовному середовищі, не лише вивчати матеріал державною мовою, але й засвоювати сучасну англomовну термінологію, що є необхідною умовою інтеграції у міжнародний науковий і професійний простір. Важливо підкреслити й орієнтацію на компетентнісний підхід, закладений у сучасних стандартах вищої освіти України. Завдання викладання механіки полягає не лише у передачі теоретичних знань, а й у формуванні здатності застосовувати їх у практичних ситуаціях. Саме тому у новому виданні зроблено акцент на практичному сенсі понять: не лише формули, а й пояснення, як ці формули працюють у реальних технічних задачах, які ризики враховуються при проектуванні механізмів, які приклади дає сучасна техніка. Отже, підручник стає не лише основним джерелом базових знань із дисципліни, але й зручним інструментом для самостійного навчання, орієнтованим на формування аналітичних і професійних навичок у студентів.

Двомовність посібника відповідає вимогам Європейського простору вищої освіти, де поряд із професійними компетентностями вагоме місце займає володіння іноземною мовою у професійній сфері. Тому нове видання враховує білінгвальний підхід, спрямований на формування навичок роботи зі спеціальною термінологією двома мовами.

Таким чином, перевидання цього посібника має на меті не лише оновлення тексту, а створення сучасного навчального інструменту, який відповідає новим освітнім викликам, орієнтований на дистанційне навчання, формує компетентності й дає студентам змогу оволодіти дисципліною навіть у складних суспільних умовах.

The textbook enables students studying in a bilingual environment not only to learn the material in the state language but also to acquire modern English terminology, which is a necessary condition for integration into the international scientific and professional community. It is also important to emphasize the focus on the competency-based approach embedded in current standards of higher education in Ukraine. The task of teaching mechanics is not only to transmit theoretical knowledge, but also to form the ability to apply it in practice. Therefore, in the new edition emphasis is placed on the practical meaning of concepts: not only formulas, but also explanations of how these formulas work in real technical problems, what risks are considered in designing mechanisms, and what examples modern technology provides. Thus, the textbook becomes not only a primary source of basic knowledge in the discipline but also a convenient tool for self-study, aimed at developing students' analytical and professional skills.

The bilingual nature of the textbook corresponds to the requirements of the European Higher Education Area, where, alongside professional competencies, mastery of a foreign language in the professional sphere plays an important role. Therefore, the new edition adopts a bilingual approach, aimed at developing skills for working with specialized terminology in two languages.

In this way, the reissue of this textbook is not simply an update of the text, but the creation of a modern educational tool that meets new educational challenges, is adapted to distance learning, develops competencies, and enables students to master the discipline even under difficult social conditions.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	10
1 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ МЕХАНІЗМІВ .....	14
1.1 Основні поняття теорії механізмів і машин .....	14
1.2 Кінематичні пари та ланцюги .....	18
1.3 Структурна класифікація та аналіз плоских механізмів .....	34
1.3.1 Визначення ступеню рухомості плоских механізмів .....	38
1.3.2 Формування механізмів .....	42
1.3.3 Структурна класифікація механізмів .....	46
1.3.4 Визначення класу механізму .....	48
1.3.5 Структурний аналіз плоских механізмів .....	54
Контрольні запитання .....	58
2 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ .....	62
2.1 Задачі та методи кінематичного дослідження .....	62
2.2 Побудова планів механізму і вибір масштабів .....	64
2.3 Побудова планів швидкостей і прискорень .....	70
Контрольні запитання .....	84
3 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕДАЧ .....	88
3.1 Прості зубчасті механізми .....	88
3.2 Рядові зубчасті механізми .....	92
3.3 Сателітні механізми .....	102
Контрольні запитання .....	108
4 ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ І МАШИН .....	112
4.1 Основні задачі динамічного дослідження механізмів .....	112
4.2 Сили, що діють у машинах .....	116
4.3 Визначення сил інерції ланок і сил реакцій у кінематичних парах .....	120
4.4 Силовий розрахунок плоских механізмів без врахування сил тертя .....	132
4.5 Визначення зрівноважувальної сили .....	148
Контрольні запитання .....	156
ЛІТЕРАТУРА .....	160

# CONTENTS

INTRODUCTION.....	11
1 THEORETICAL PRINCIPLES OF THE CONSTRUCTION OF MECHANISMS .....	15
1.1 Basic concepts of the theory of mechanisms and machines .....	15
1.2 Kinematic pairs and chains .....	19
1.3 Structural classification and analysis of planar mechanisms .....	35
1.3.1 Determining the degree of mobility of planar mechanisms .....	39
1.3.2 Formation of mechanisms. ....	43
1.3.3 Structural classification of mechanisms .....	47
1.3.4 Determining the class of a mechanism .....	49
1.3.5 Structural analysis of planar mechanisms .....	55
Control questions .....	59
2 KINEMATIC ANALYSIS OF MECHANISMS .....	63
2.1 Tasks and methods of kinematic analysis .....	63
2.2 Construction of mechanism diagrams and choice of scales .....	65
2.3 Construction of velocity and acceleration diagrams .....	71
Control questions .....	85
3 KINEMATIC ANALYSIS OF GEAR .....	89
3.1 Simple gear mechanisms .....	89
3.2 Ordinary gear mechanisms .....	93
3.3 Planetary (epicyclic) gear mechanisms .....	103
Control questions .....	109
4 DYNAMICS OF MECHANISMS AND MACHINES .....	113
4.1 Main tasks of dynamic analysis of mechanisms .....	113
4.2 Forces acting in machines .....	117
4.3 Determination of inertia forces of links and reaction forces in kinematic pairs .....	121
4.4 Force calculation of planar mechanisms without considering friction.....	133
4.5 Determination of balancing force .....	149
Control questions .....	157
LITERATURE.....	160

## ВСТУП

Технічну політику на сучасному підприємстві визначають три ключові фахівці: технолог, механік і електрик. Саме вони формують основу виробничих процесів, забезпечують їхню ефективність і безперервність. Провідна роль належить технологю, адже раціонально спроектований і грамотно керований технологічний процес визначає продуктивність підприємства, якість готової продукції та рівень її собівартості. Проте технологічний процес не може існувати сам по собі, він реалізується через машини й обладнання. Саме тому механік і електрик доповнюють роботу технолога. Завдання механіка полягає в забезпеченні працездатності машин, виборі конструктивних рішень і дотриманні вимог до експлуатації. Електрик, своєю чергою, відповідає за електроприводи, системи керування, автоматизацію й енергетичну ефективність обладнання. Разом ці три фахівці формують єдину систему знань і рішень, без якої неможливий сучасний виробничий процес. Така міждисциплінарність знань є невід'ємною складовою сучасної інженерної освіти.

Серед усіх засобів виробництва центральне місце займають машини. Вони використовуються у всіх галузях господарства – від харчової промисловості до аерокосмічної техніки. Важко уявити сферу людської діяльності, де б не застосовувалися машини: вони перетворюють енергію, забезпечують обробку матеріалів, переміщують вантажі, автоматизують процеси. Саме тому знання принципів роботи механізмів і машин є необхідними не лише для механіків, а й для інженерів інших спеціальностей: електриків, металургів, технологів, будівельників.

Сучасні тенденції машинобудування пов'язані з інтеграцією механічних систем із цифровими технологіями. У виробництві дедалі частіше використовуються кіберфізичні системи, роботизовані комплекси, «розумні» машини, які здатні самостійно аналізувати власний стан і оптимізувати роботу. Це означає, що інженер повинен знати не лише принципи проектування класичних механізмів, а й орієнтуватися в питаннях автоматизації, сенсорики, систем керування та штучного інтелекту.

## INTRODUCTION

The technical policy of a modern enterprise is determined by three key specialists: the technologist, the mechanic, and the electrician. They form the foundation of production processes, ensuring their efficiency and continuity. The leading role belongs to the technologist, since a rationally designed and competently managed technological process defines the productivity of the enterprise, the quality of the finished product, and its cost level. However, the technological process cannot exist on its own – it is implemented through machines and equipment. That is why the mechanic and the electrician complement the work of the technologist. The mechanic's task is to ensure the operability of machines, select design solutions, and meet operating requirements. The electrician, in turn, is responsible for electric drives, control systems, automation, and the energy efficiency of the equipment. Together, these three specialists form an integrated system of knowledge and solutions without which a modern production process is impossible. Such interdisciplinarity of knowledge is an integral component of contemporary engineering education.

Among all means of production, machines occupy a central place. They are used in every industry – from food processing to aerospace technology. It is difficult to imagine a field of human activity where machines are not applied: they convert energy, process materials, move loads, and automate processes. Therefore, knowledge of the principles of mechanisms and machines is necessary not only for mechanics, but also for engineers of other specialties: electricians, metallurgists, technologists, and civil engineers.

Modern trends in machine-building are associated with the integration of mechanical systems with digital technologies. Production increasingly employs cyber-physical systems, robotic complexes, and “smart” machines capable of analyzing their own state and optimizing their operation. This means that an engineer must know not only the principles of designing classical mechanisms, but also be familiar with automation, sensors, control systems, and artificial intelligence.

Вивчення теорії механізмів і машин (ТММ) забезпечує студентів фундаментальними знаннями про структуру й властивості механізмів, про закономірності руху ланок та взаємодію їхніх елементів. Розуміння цих основ дозволяє інженерам різних спеціальностей швидко адаптуватися до нових умов, грамотно експлуатувати сучасне обладнання та брати участь у його вдосконаленні.

Отже, весь комплекс питань, пов'язаних із будовою та принципами роботи механізмів, у тій мірі, в якій це необхідно інженерам немеханічних спеціальностей, розглядається в курсі теоретичної та прикладної механіки. Цей курс формує базис для подальшого вивчення спеціальних дисциплін і сприяє розвитку системного інженерного мислення, необхідного в умовах швидкої технологічної еволюції.

Studying the theory of mechanisms and machines (TMM) provides students with fundamental knowledge about the structure and properties of mechanisms, the laws of link motion, and the interaction of their elements. Understanding these fundamentals allows engineers of various specialties to adapt quickly to new conditions, competently operate modern equipment, and participate in its improvement.

Thus, the entire set of issues related to the structure and principles of operation of mechanisms, to the extent required for non-mechanical engineering majors, is considered within the course of theoretical and applied mechanics. This course forms the foundation for further study of specialized disciplines and contributes to the development of systems engineering thinking, which is essential in the context of rapid technological evolution.

# 1 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ МЕХАНІЗМІВ

## 1.1 Основні поняття теорії механізмів і машин

Кожен механізм або машина складається з окремих елементів, що мають власне функціональне призначення. Найменшою складовою частиною, яку не можна розділити без порушення її цілісності, є деталь.

*Деталлю* називають частину машини, виготовлену без застосування складальних операцій. У конструкціях стаціонарних машин деякі деталі залишаються нерухомими, а інші здійснюють рух відносно перших. Для зручності аналізу механізмів у теорії механізмів і машин часто замінюють складні креслення на *кінематичні схеми*, де зображення суттєво спрощується, але зберігається необхідна інформація для аналізу руху.

На відміну від теоретичної механіки, де використовується термін «тіло», у ТММ застосовується термін «ланка». Ланка може бути рухомою або нерухомою, і це дозволяє чітко відокремити функції кожного елемента механізму. *Рухома ланка* – це деталь або група деталей, які утворюють *єдину систему* і здатні переміщуватися відносно інших елементів. Нерухомі ланки утворюють *стояк* – основу, до якої приєднані всі інші елементи. Таким чином, у будь-якому механізмі завжди є одна нерухома ланка і кілька рухомих.

*Механізм* визначається як штучно створена система тіл, призначена для перетворення руху одних тіл у заданий рух інших. Ключовим елементом будь-якого механізму є *кінематичний ланцюг*, що складається з ланок, з'єднаних таким чином, щоб забезпечити необхідний рух. Саме кінематичний ланцюг формує основу для досягнення цілей виробничого процесу. Наприклад, у промислових роботах кінематичні ланцюги дозволяють реалізувати рух маніпуляторів із високою точністю, а в транспортних засобах забезпечують перетворення обертально-го руху двигуна у поступальний рух коліс.

Сучасним прикладом таких механізмів є дрони, які використовуються у цивільних і військових цілях. Кожен дрон має набір кінематичних ланцюгів у конструкції гвинтів і підвісів камер, що дозволяють перетворювати обертальний рух електродвигунів у поступальний рух апарата в просторі. Інженери при проектуванні таких систем застосовують ті ж самі принципи ТММ, що й у класичних машинах, але доповнюють їх алгоритмами стабілізації та програмним керуванням.

# 1 THEORETICAL PRINCIPLES OF THE CONSTRUCTION OF MECHANISMS

## 1.1 Basic concepts of the theory of mechanisms and machines

Every mechanism or machine consists of separate elements that have their own functional purpose. The smallest indivisible component, which cannot be split without destroying its integrity, is called a part.

A *part* is defined as a machine element manufactured without the use of assembly operations. In the construction of stationary machines, some parts remain fixed, while others move relative to the first. For convenience of analysis in the theory of mechanisms and machines, complex drawings are often replaced with *kinematic diagrams*, where the representation is significantly simplified but retains the necessary information for analyzing motion.

Unlike theoretical mechanics, where the term *body* is used, TMM employs the term *link*. A link can be either moving or fixed, which makes it possible to clearly separate the functions of each element of a mechanism. A *moving link* is a part or a group of parts that form a *single system* and can move relative to other elements. Fixed links form the *frame*, to which all other elements are attached. Thus, in any mechanism there is always one fixed link and several moving links.

A *mechanism* is defined as an artificially created system of bodies designed to transform the motion of some bodies into a prescribed motion of others. The key element of any mechanism is the *kinematic chain*, which consists of links connected in such a way as to provide the required motion. It is the kinematic chain that forms the basis for achieving the goals of a production process. For example, in industrial robots, kinematic chains enable manipulators to move with high precision, while in vehicles they allow the conversion of the rotational motion of the engine into the translational motion of the wheels.

A modern example of such mechanisms is drones, used for both civilian and military purposes. Each drone contains a set of kinematic chains in the design of its propellers and camera gimbals, which convert the rotational motion of electric motors into the translational motion of the aircraft in space. Engineers designing such systems apply the same TMM principles as in classical machines, but complement them with stabilization algorithms and software control.

Це яскраво демонструє, що знання теорії механізмів і машин залишається актуальним навіть в умовах сучасних високотехнологічних рішень.

Рухомі ланки поділяються на *вхідні та вихідні*. *Вхідні* (або ведучі) ланки сприймають енергію від джерела (двигуна чи зовнішньої сили) та передають її далі. *Вихідні* (або ведені) ланки виконують корисну роботу, перетворюючи отриманий рух у потрібний результат – наприклад, обертання колеса, рух робочого органа або переміщення вантажу. Ланки, що передають рух між ведучою та веденою, називають *проміжними* або *прогінними*. Критерій відмінності ведучої та веденої ланки можна описати через роботу зовнішніх сил. Якщо робота додатна, то ланка є ведучою, якщо від’ємна – вона ведена. Це визначення дозволяє формально описати енергетичні процеси в механізмах і правильно будувати розрахунки при аналізі їх ефективності.

*Машина* у загальному розумінні – це технічний пристрій, що виконує механічний рух з метою перетворення енергії, матеріалів або інформації. Машини створюються для того, щоб замінити чи суттєво полегшити фізичну або інтелектуальну працю людини. Якщо на початку розвитку техніки машини були переважно механічними (млини, водяні колеса, прості верстати), то сучасні машини - це складні багатокomпонентні системи, що включають механічні, електронні, програмні та інформаційні елементи.

Сучасний розвиток техніки демонструє, що межа між машинами і роботизованими системами стає дедалі умовнішою. Наприклад, у виробництві застосовуються верстати з числовим програмним керуванням (ЧПК), які є водночас і класичними машинами, і інтелектуальними комплексами, здатними самостійно контролювати параметри обробки. У транспорті активно розвиваються безпілотні автомобілі, де механічні системи інтегровані з комп’ютерними алгоритмами. У медицині механізми перетворюються на роботизовані хірургічні комплекси, що дозволяють проводити операції з мікронною точністю.

Таким чином, вивчення основних понять теорії механізмів і машин є необхідною умовою для розуміння сучасних технічних систем. Це дає студентам не лише фундаментальні знання, але й можливість усвідомити роль механізмів у сучасному світі, де інженер повинен бути готовим працювати з інтегрованими та високотехнологічними системами.

This clearly demonstrates that knowledge of the theory of mechanisms and machines remains relevant even in modern high-tech solutions.

Moving links are divided into *input* and *output*. *Input* (or driving) links receive energy from a source (an engine or external force) and transmit it further. *Output* (or driven) links perform useful work by converting the received motion into the desired result – for example, the rotation of a wheel, the motion of a working element, or the transportation of a load. Links that transmit motion between the driving and the driven are called *intermediate* (transmission) links. The criterion for distinguishing a driving link from a driven one can be expressed through the work of external forces: if the work is positive, the link is driving; if it is negative, the link is driven. This definition makes it possible to formally describe energy processes in mechanisms and correctly build calculations when analyzing their efficiency.

A *machine*, in the general sense, is a technical device that performs mechanical motion in order to transform energy, materials, or information. Machines are created to replace or significantly facilitate human physical or intellectual labor. At the early stages of technological development, machines were mainly mechanical (mills, water wheels, simple lathes), but modern machines are complex multi-component systems that include mechanical, electronic, software, and information elements.

Modern technological development demonstrates that the boundary between machines and robotic systems is becoming increasingly blurred. For example, production employs computer numerical control (CNC) machines, which are at once classical machines and intelligent complexes capable of independently controlling processing parameters. In transportation, self-driving vehicles are actively developing, where mechanical systems are integrated with computer algorithms. In medicine, mechanisms have evolved into robotic surgical complexes that allow operations to be performed with micron-level precision.

Thus, the study of the basic concepts of the theory of mechanisms and machines is a necessary condition for understanding modern technical systems. It provides students not only with fundamental knowledge but also with the ability to comprehend the role of mechanisms in today's world, where an engineer must be ready to work with integrated and high-tech systems.

## 1.2 Кінематичні пари та ланцюги

У будь-якому механізмі або машині окремі ланки не існують самі по собі, а взаємодіють між собою, утворюючи єдину систему. З'єднання цих ланок має забезпечувати не лише їхнє зчеплення, а й можливість відносного руху. Таке рухоме з'єднання двох ланок, які стикаються одна з одною в певних точках, лініях або поверхнях, отримало назву *кінематична пара*.

В основі цього визначення лежить принцип: кожна ланка механізму може мати шість ступенів вільності, але коли вона з'єднується з іншою ланкою, частина цих ступенів вільності обмежується умовами контакту. Кількість і характер накладених обмежень визначають клас кінематичної пари та можливі траєкторії руху.

Коли дві ланки взаємодіють, то сукупність поверхонь, ліній або точок, які знаходяться в контакті при відносному русі, називають *елементами кінематичної пари*. Саме форма і геометрія цих елементів визначають характер руху: поступальний, обертальний, гвинтовий тощо. Наприклад, циліндрична поверхня, що рухається всередині втулки, утворює циліндричну пару; плоска поверхня, яка ковзає по іншій плоскій поверхні, утворює поступальну пару.

Кінематична пара може бути утворена як двома рухомими ланками, так і поєднанням рухомої ланки з нерухомою (стояком). Наявність стояка в кожному механізмі є обов'язковою умовою, адже саме він слугує базою, відносно якої відбувається рух усіх інших елементів.

*Ведучі та ведені ланки.* У структурі кінематичного ланцюга одна з ланок завжди виконує роль ведучої. Це означає, що до неї прикладається рушійна сила або момент, які зумовлюють роботу всього механізму. Решта ланок можуть бути або веденими (ті, що безпосередньо виконують роботу), або проміжними (ті, що лише передають рух від ведучої до веденої). Таке розмежування дає змогу аналізувати передачу енергії та визначати, які елементи підлягають найбільшому навантаженню.

*Класифікація кінематичних пар.* Важливо підкреслити, що кінематичні пари розрізняють за кількістю ступенів свободи, які вони залишають ланці. Це дозволяє формально віднести пару до одного з п'яти класів: від I до V. Наприклад, обертальна пара дозволяє тілу здійснювати лише обертальний рух навколо однієї осі, отже, накладає п'ять обмежень і має лише один ступінь свободи.

## 1.2 Kinematic Pairs and Chains

In any mechanism or machine, individual links do not exist by themselves, but interact with each other, forming a single system. The connection of these links must provide not only their coupling but also the possibility of relative motion. Such a movable connection of two links that come into contact with each other at certain points, lines, or surfaces is called a *kinematic pair*.

The basis of this definition is the principle that each link of a mechanism may have six degrees of freedom, but when it is connected to another link, part of these degrees of freedom is limited by the conditions of contact. The number and nature of the imposed constraints determine the class of the kinematic pair and the possible trajectories of motion.

When two links interact, the set of surfaces, lines, or points that are in contact during relative motion are called *the elements of the kinematic pair*. The shape and geometry of these elements determine the character of the motion: translational, rotational, helical, etc. For example, a cylindrical surface moving inside a bushing forms a cylindrical pair; a flat surface sliding along another flat surface forms a translational pair.

A kinematic pair can be formed by two moving links as well as by the combination of a moving link with a fixed link (the frame). The presence of the frame in each mechanism is a mandatory condition, since it serves as the base relative to which the motion of all other elements takes place.

*Driving and driven links.* In the structure of a kinematic chain, one of the links always performs the role of the driving link. This means that a driving force or moment is applied to it, which causes the entire mechanism to operate. The other links may be either driven (those that directly perform work) or intermediate (those that only transmit motion from the driving link to the driven link). Such a distinction makes it possible to analyze the transfer of energy and determine which elements are subject to the greatest load.

*Classification of kinematic pairs.* It is important to emphasize that kinematic pairs are distinguished by the number of degrees of freedom they leave to the link. This allows the pair to be formally assigned to one of five classes: from I to V. For example, a rotational pair allows a body to perform only rotational motion around one axis, thus imposing five constraints and having only one degree of freedom.

Вищі класи пар забезпечують більшу рухливість, але водночас знижують можливість передавати значні навантаження.

*Практичне значення.* У машинобудуванні та сучасних технологіях аналіз кінематичних пар має принципове значення. Правильний вибір типу з'єднання визначає не лише довговічність механізму, а й точність виконання ним функцій. Наприклад, у промислових роботах часто застосовуються сферичні пари, які забезпечують багатовимірну рухливість маніпуляторів. У транспортних засобах, навпаки, більш поширені поступальні та обертальні пари, адже вони гарантують надійність і витримують значні навантаження.

*Кінематичні ланцюги.* Коли декілька кінематичних пар об'єднуються у послідовність, утворюється кінематичний ланцюг. Він може бути простим (коли кожна ланка належить не більше ніж до двох пар) або складним (якщо якась ланка одночасно входить більше, ніж у дві пари). Кінематичний ланцюг може бути замкнутим (утворює контур) або незамкнутим (ланцюг має відкриті кінці). Саме з кінематичних ланцюгів конструюються всі механізми.

У сучасній практиці кінематичні ланцюги знаходять застосування не тільки в класичних машинах, але й у новітніх галузях, наприклад, у біоніці для створення протезів із природною траєкторією руху або у сфері космічних апаратів для маніпуляторів, що працюють у відкритому космосі.

Таким чином, кінематичні пари є фундаментальним елементом побудови механізмів. Розуміння їхніх властивостей і способів класифікації дозволяє інженеру прогнозувати поведінку складних систем і створювати надійні технічні пристрої. У подальшому розглянемо приклад – схему механізму преса (див. рисунок 1.1), яка ілюструє застосування кінематичних пар у реальній машині. Ланки 1, 2, 3, 4 і 5 – рухомі. Ланка 1 – ведуча, а інші ланки 2, 3, 4, 5 – ведені. Ланка 6 – нерухома, тобто стійка. Як правило, ведучою ланкою є вхідна ланка.

Ці ланки утворюють кінематичні пари:  $O$  (6-1),  $A$  (1-2),  $B$  (2-3, 2-4),  $C$  (6-3) і  $D$  (4-5, 5-6).

Як відомо з теоретичної механіки, вільне абсолютне тверде тіло  $ABC$  (рис. 1.2), що рухається у просторі, має шість ступенів свободи  $H$ .

Higher classes of pairs provide greater mobility, but at the same time reduce the ability to transmit significant loads.

*Practical significance.* In machine-building and modern technologies, the analysis of kinematic pairs is of fundamental importance. The correct choice of type of connection determines not only the durability of a mechanism but also the accuracy of its functions. For example, in industrial robots spherical pairs are often used, ensuring multidimensional mobility of manipulators. In transport vehicles, by contrast, translational and rotational pairs are more widespread, since they guarantee reliability and can withstand significant loads.

*Kinematic chains.* When several kinematic pairs are combined into a sequence, a kinematic chain is formed. It can be simple (when each link belongs to no more than two pairs) or complex (if some link simultaneously belongs to more than two pairs). A kinematic chain may be closed (forming a contour) or open (the chain has free ends). All mechanisms are constructed from kinematic chains.

In modern practice, kinematic chains are applied not only in classical machines but also in advanced fields, for example, in bionics to create prostheses with natural motion trajectories or in space engineering for manipulators operating in outer space.

Thus, kinematic pairs are a fundamental element in the construction of mechanisms. Understanding their properties and methods of classification allows the engineer to predict the behavior of complex systems and to create reliable technical devices. Further, let us consider an example — the diagram of a press mechanism (see Fig. 1.1), which illustrates the application of kinematic pairs in a real machine. Links 1, 2, 3, 4, and 5 are moving. Link 1 is the driving link, while links 2, 3, 4, and 5 are driven. Link 6 is fixed, i.e., the frame. As a rule, the driving link is the input link.

These links form the following kinematic pairs:  $O$  (6-1),  $A$  (1-2),  $B$  (2-3, 2-4),  $C$  (6-3) i  $D$  (4-5, 5-6).

As is known from theoretical mechanics, a free rigid body  $ABC$  (see Fig. 1.2), moving in space, has six degrees of freedom  $H$ .

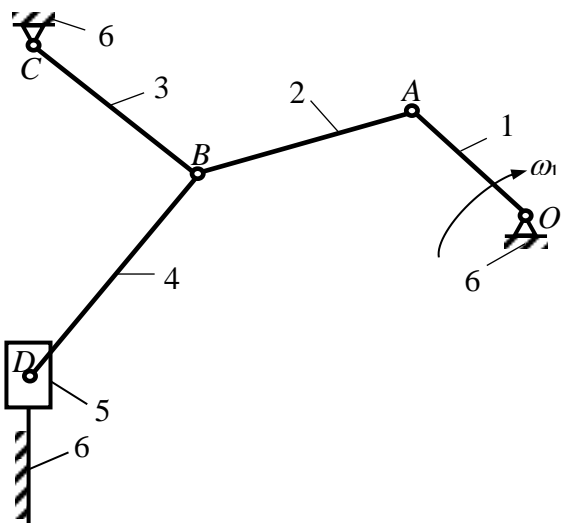


Рис. 1.1. Схема механізму преса

Рух такого тіла можна розглядати як обертання навколо осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  та ковзання вздовж цих самих осей (три обертальні та три поступальні рухи).

Входження ланок у кінематичну пару накладає на їх відносний рух певні умови зв'язку (в'язі).

Число таких умов зв'язку  $S$  змінюється у межах від 1 до 5 і визначається за формулою

$$S=6-H, \quad (1)$$

де  $H$  – число ступенів свободи, які має ланка, що входить у кінематичну пару.

Треба відмітити, що при  $S=0$ , ланки не стикаються, а отже кінематична пара припиняє своє існування, а при  $S=6$  ланки втрачають відносну рухомість і кінематична пара переходить у тверде з'єднання двох ланок.

Таким чином кількість ступенів рухомості ланки кінематичної пари у відносному русі може бути визначено

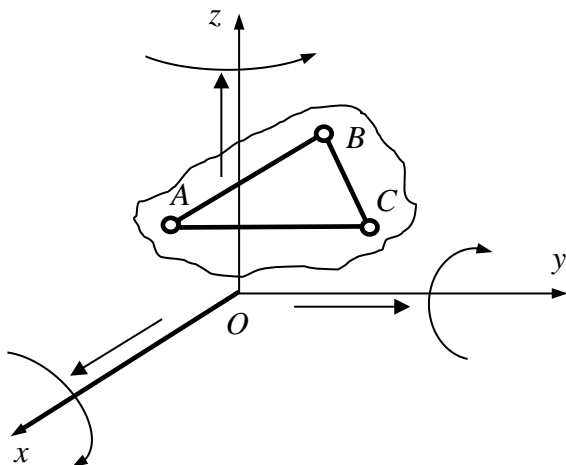


Рис. 1.2. Ступені свободи тіла у просторі

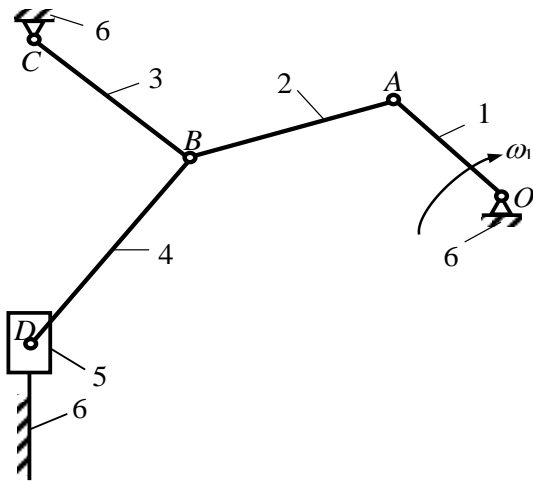


Fig. 1.1. Diagram of a press mechanism

The motion of such a body can be considered as rotation around the X, Y, Z axes and sliding along these same axes (three rotational and three translational motions).

The inclusion of links into a kinematic pair imposes certain constraints on their relative motion. The number of such constraints  $S$  varies from 1 to 5 determined

by the formula:

$$S=6-H, \quad (1)$$

where  $H$  is the number of degrees of freedom that a link entering a kinematic pair possesses.

It should be noted that when  $S = 0$ , the links do not come into contact, and therefore the kinematic pair ceases to exist; and when  $S = 6$ , the links lose their relative mobility, and the kinematic pair becomes a rigid connection of two links.

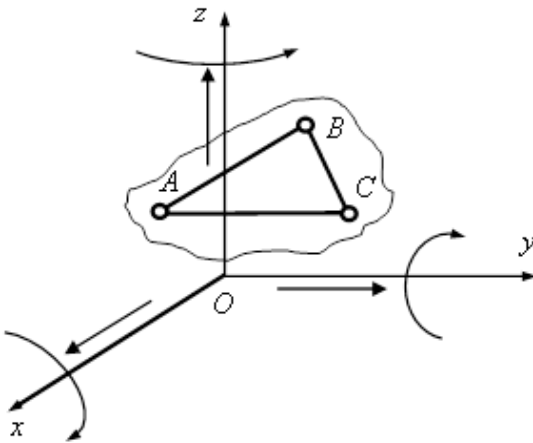


Fig. 1.2. Degrees of freedom of a body in space

Thus, the number of degrees of mobility of a link in a kinematic pair during relative motion can be determined as

$$H = 6 - S, \quad (2)$$

де  $S$  – кількість в'язей.

Кінематичні пари можуть бути поділені на класи у залежності від кількості умов в'язей, які накладаються на відносний рух ланок. Оскільки, кількість умов в'язей змінюється від 1 до 5, то кількість класів кінематичних пар дорівнює п'яти. Тому маємо кінематичні пари I, II, III, IV і V класів (табл. 1.1), клас яких визначається за формулою 1.1.

У таблиці 1.1 для наведених кінематичних пар стрілками вказані можливі рухи однієї ланки відносно другої, значення  $S$  і  $H$  та клас кінематичної пари. У сучасних механізмах найпоширеніші кінематичні пари V, IV та III класів.

Таблиця 1.1 – Класифікація кінематичних пар

№ рисунок	Рисунок	Умовне позначення	Назва пари	$H$	$S$	Клас пари
1			обертальна	1	5	V
2			поступальна	1	5	V
3			гвинтова	1	5	V

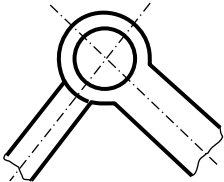
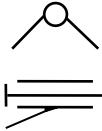
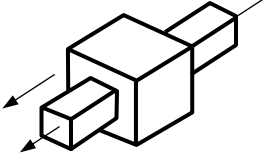

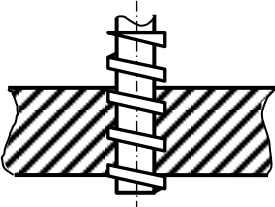

$$H = 6 - S, \quad (2)$$

where  $S$  is the number of constraints.

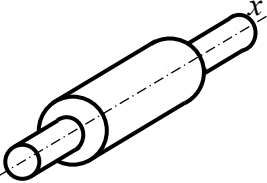

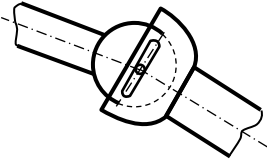

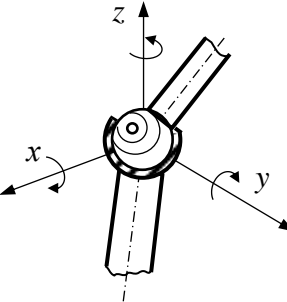

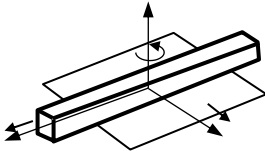

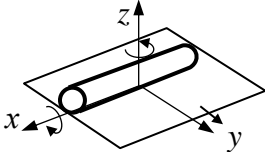

Kinematic pairs can be divided into classes depending on the number of constraints imposed on the relative motion of the links. Since the number of constraints varies from 1 to 5, the number of kinematic pair classes equals five. Therefore, we have kinematic pairs of Classes I, II, III, IV, and V (see Table 1.1), with the class determined by formula (1.1).

In Table 1.1, for the given kinematic pairs, arrows indicate the possible motions of one link relative to another, as well as the values of  $S$  and  $H$  and the class of the kinematic pair. In modern mechanisms, the most widespread are kinematic pairs of Classes V, IV, and III.

Table 1.1 – Classification of kinematic pairs

Figure No	Figure	Symbol	Name of pair	$H$	$S$	Class
1			Rotational	1	5	V
2			Translational	1	5	V
3			Helical	1	5	V

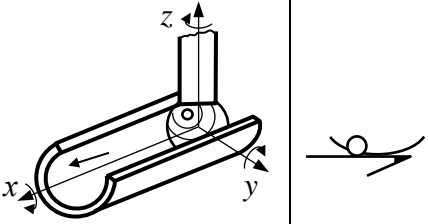

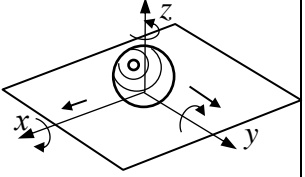

Продовження таблиці 1.1

№ рисунок	Рисунок	Умовне позначення	Назва пари	<i>H</i>	<i>S</i>	Клас пари
4			циліндрична	2	4	IV
5			сферична з пальцем	2	4	IV
6			сферична	3	3	III
7			площинна	3	3	III
8			циліндр- площина	4	2	II

Continuation of Table 1.1

Figure No	Figure	Symbol	Name of pair	$H$	$S$	Class
4			Cylindrical	2	4	IV
5			Spherical with pin	2	4	IV
6			Spherical	3	3	III
7			Planar	3	3	III
8			Cylinder-plane	4	2	II

Продовження таблиці 1.1

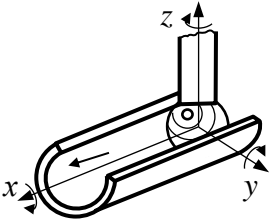

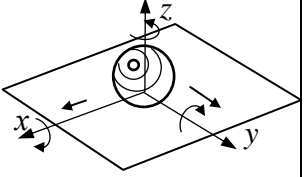

№ рисунок	Рисунок	Умовне позначення	Назва пари	$H$	$S$	Клас пари
9			куля-циліндр	4	2	II
10			куля-площина	5	1	I

Залежно від форми елементів кінематичних пар їх прийнято поділяти на нижчі та вищі.

*Нижчі кінематичні пари* утворюються тоді, коли контакт між ланками відбувається по поверхні. Прикладами є обертальні пари (вісь у підшипнику ковзання), поступальні (ковзання напрямної у пазу), циліндричні або сферичні пари. Перевага таких з'єднань полягає у значній площі контакту, що дозволяє передавати великі навантаження без втрати стійкості. Наприклад, у промислових верстатах напрямні ковзання виконуються саме як нижчі пари, адже вони забезпечують точність руху важких деталей. Разом з тим, через велику площу контакту зростають сили тертя, а отже і втрати енергії. Тому у сучасному машинобудуванні для зменшення тертя в нижчих парах широко застосовуються антифрикційні матеріали та мастильні системи.

*Вищі кінематичні пари* характеризуються тим, що контакт між ланками відбувається лише по лінії або у точці. До таких пар належать, наприклад, пара «циліндр-площина» або «куля-циліндр». Вищі пари мають невелику площу дотику, завдяки чому втрати на тертя менші, а рух – більш легкий і плавний. Це робить їх корисними.

Continuation of Table 1.1

Figure No	Figure	Symbol	Name of pair	$H$	$S$	Class
9			Sphere-cylinder	4	2	II
10			Sphere-plane	5	1	I

Depending on the shape of the elements of kinematic pairs, they are conventionally divided into lower and higher pairs.

*Lower kinematic pairs* are formed when the contact between links occurs over a surface. Examples include rotational pairs (a shaft in a sliding bearing), translational pairs (a guide sliding in a groove), cylindrical, or spherical pairs. The advantage of such connections lies in the large contact area, which allows the transmission of heavy loads without loss of stability. For example, in industrial machine tools, sliding guides are made precisely as lower pairs, since they ensure the accuracy of movement of heavy parts. At the same time, due to the large contact area, frictional forces increase, leading to energy losses. Therefore, in modern machine-building, antifriction materials and lubrication systems are widely used in lower pairs to reduce friction.

*Higher kinematic pairs* are characterized by contact between links only along a line or at a point. Such pairs include, for example, the “cylinder–plane” or “sphere–cylinder” pair. Higher pairs have a very small contact area, which results in significantly lower friction losses and lighter, smoother motion. This makes them extremely useful in devices requiring

у приладах, що потребують високої чутливості, наприклад, у вимірвальних механізмах або годинникових системах. Однак через малу площу контакту вони не здатні сприймати великі навантаження, що обмежує сферу їх застосування.

Варто підкреслити, що вибір між нижчими та вищими кінематичними парами завжди визначається умовами експлуатації механізму. Там, де потрібна міцність і здатність працювати під високим навантаженням (будівельна техніка, металорізальні верстати), використовуються нижчі пари. Якщо ж важливішими є точність, легкість ходу та мінімальні втрати енергії (годинникові механізми, медична техніка, роботи-маніпулятори), віддають перевагу вищим парам.

Окрім цього, кінематичні пари класифікують і за характером руху, який вони забезпечують. Якщо елементи ланок переміщуються паралельно одній площині, то такі пари називають *плоскими*. Вони є основою більшості класичних машин та механізмів, адже простота їхньої геометрії дозволяє проводити аналітичні розрахунки і будувати наочні кінематичні схеми. Прикладами можуть бути механізми двигунів внутрішнього згоряння, пресові механізми або важільні передачі.

Якщо ж рух елементів відбувається у різних непаралельних площинах, кінематичні пари відносять до *просторових*. У таких парах траєкторії руху більш складні, що дає змогу реалізовувати багатофункціональні механізми. Просторові пари є основою сучасної робототехніки, авіаційних систем керування та медичних хірургічних роботів, де потрібно поєднати рух у кількох напрямках.

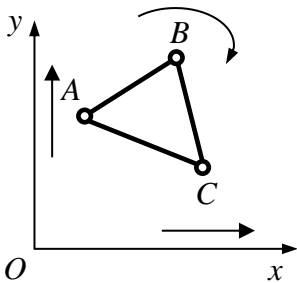


Рис. 1.3. Ступені свободи тіла в плоскому русі

До складу плоских механізмів можуть входити лише кінематичні пари IV та V класів. Це пояснюється тим, що вільне тверде тіло в площинному русі має тільки три ступені вільності: два поступальні рухи вздовж осей координат ( $X$  та  $Y$ ) і один обертальний рух у площині  $XY$  (дивись рисунок 1.3). Саме ця обмеженість і робить плоскі механізми зручними для розрахунків та практичного застосування. У той час як просторові механізми, маючи шість ступенів свободи, значно складніші для аналізу, але й набагато універсальніші у використанні.

high sensitivity, such as measuring mechanisms or clockwork systems. However, due to the small contact area, they cannot withstand heavy loads, which limits the scope of their application.

It should be emphasized that the choice between lower and higher kinematic pairs is always determined by the operating conditions of the mechanism. Where strength and the ability to work under high loads are required (construction equipment, metal-cutting machine tools), lower pairs are used. Where accuracy, lightness of movement, and minimal energy loss are more important (clock mechanisms, medical equipment, robotic manipulators), preference is given to higher pairs

In addition, kinematic pairs are also classified according to the type of motion they provide. If the elements of the links move in parallel to a single plane, such pairs are called planar pairs. They are the basis of most classical machines and mechanisms, since the simplicity of their geometry allows analytical calculations and the construction of clear kinematic diagrams. Examples include internal combustion engine mechanisms, press mechanisms, or lever transmissions.

If the motion of elements takes place in different non-parallel planes, the kinematic pairs are classified as spatial pairs. In such pairs, the motion trajectories are more complex, enabling the realization of multifunctional mechanisms. Spatial pairs form the basis of modern robotics, aviation control systems, and medical surgical robots, where it is necessary to combine motion in several directions.

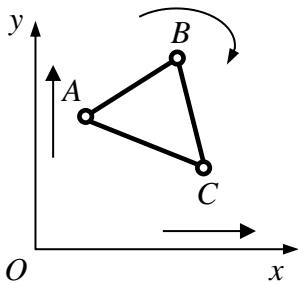


Fig. 1.3. Degrees of freedom of a body in planar motion

Only kinematic pairs of Classes IV and V can be included in planar mechanisms. This is explained by the fact that a free rigid body in planar motion has only three degrees of freedom: two translational motions along the coordinate axes (X and Y) and one rotational motion in the XY plane (see Fig. 1.3). It is precisely this limitation that makes planar mechanisms convenient for calculations and practical application. Spatial mechanisms, on the other hand, having six degrees of freedom, are much more complex for analysis but also far more versatile in use.

Формули (1) і (2) для плоских кінематичних пар будуть:

$$H=3-S; \quad S=3-H. \quad (3)$$

Для того щоб елементи кінематичних пар залишалися у сталому взаємному контакті, необхідна наявність *замикання*. Під замиканням розуміють умови, які гарантують неперервність з'єднання ланок у процесі їх відносного руху. Якщо замикання відсутнє, то кінематична пара втрачає свою працездатність: рух стає неконтрольованим, виникають додаткові удари, вібрації, а іноді навіть повне роз'єднання деталей.

Замикання може бути *геометричним* або *силовим*. *Геометричне замикання* реалізується завдяки формі поверхонь ланок, що стикаються. Наприклад, у класичних обертальних або поступальних парах контакт забезпечується співпадінням циліндричних чи призматичних поверхонь. Такий тип замикання не потребує зовнішніх сил чи додаткових елементів – він «вбудований» у геометрію деталей. Саме тому геометричні пари є основою більшості машинобудівних конструкцій.

*Силове замикання* передбачає, що контакт ланок підтримується дією певних зовнішніх сил. Найчастіше це сила пружності (наприклад, у пружинних механізмах), сила ваги або ж електромагнітні сили у сучасних високотехнологічних пристроях. У випадку циліндр-площина або куля-площина контакт був би нестійким без додаткової дії, і саме пружина чи інший елемент створюють тиск, який утримує ланки у парі.

У сучасному машинобудуванні силове замикання часто використовується там, де необхідна регульована або тимчасова фіксація. Наприклад, у автомобільних амортизаторах пружини забезпечують постійний контакт деталей незалежно від дорожніх умов. У робототехніці подібні принципи реалізуються за допомогою пневматичних або гідравлічних циліндрів, що створюють необхідну силу для утримання контактуючих поверхонь.

Варто зазначити, що вибір між геометричним і силовим замиканням є важливим конструкторським рішенням. Геометричне замикання забезпечує високу надійність і меншу залежність від зовнішніх факторів, проте вимагає більш складної обробки деталей і точного виготовлення. Силове замикання, навпаки, гнучкіше, дає змогу регулювати силу контакту, але вносить додаткові навантаження на ланки, що може призводити до зношування. Саме тому при проектуванні сучасних механізмів часто застосовують *комбіновані системи замикання*, які поєднують переваги обох підходів.

For planar kinematic pairs, formulas (1) and (2) take the form:

$$H=3-S; \quad S=3-H \quad (3)$$

For the elements of kinematic pairs to remain in constant mutual contact, *closure* is required. Closure refers to the conditions that guarantee continuity of the connection of links during their relative motion. If closure is absent, the kinematic pair loses its functionality: the motion becomes uncontrolled, additional impacts and vibrations occur, and sometimes even complete separation of parts.

Closure can be *geometric* or *force-based*. *Geometric closure* is realized through the shape of the contacting surfaces of the links. For example, in classical rotational or translational pairs, contact is ensured by the coincidence of cylindrical or prismatic surfaces. This type of closure does not require external forces or additional elements – it is “built into” the geometry of the parts. That is why geometric pairs form the basis of most machine-building designs.

*Force closure* means that the contact of the links is maintained by the action of certain external forces. Most often this is elastic force (as in spring mechanisms), gravitational force, or electromagnetic forces in modern high-tech devices. In the case of a cylinder-plane or sphere-plane pair, the contact would be unstable without additional action, and it is the spring or another element that creates the pressure keeping the links in the pair.

In modern machine-building, force closure is often used where adjustable or temporary fixation is required. For example, in automotive shock absorbers, springs ensure constant contact of parts regardless of road conditions. In robotics, similar principles are implemented through pneumatic or hydraulic cylinders that create the necessary force to maintain contact between surfaces.

It should be noted that the choice between geometric and force closure is an important design decision. Geometric closure provides high reliability and less dependence on external factors, but requires more complex machining of parts and precise manufacturing. Force closure, on the contrary, is more flexible, allows regulation of the contact force, but introduces additional loads on the links, which can lead to wear. That is why in the design of modern mechanisms, *combined closure systems* are often used, which combine the advantages of both approaches.

Яскравим прикладом використання силового замикання є сучасні безпілотні літальні апарати (дрони). У конструкції квадрокоптерів та інших типів дронів часто застосовують з'єднання з пружинним або магнітним замиканням.

Складані пропелери. У багатьох дронів лопаті пропелерів складаються для зменшення габаритів під час транспортування. У робочому режимі вони утримуються завдяки пружинним елементам, які забезпечують силове замикання і не дозволяють лопатям відхилитися від робочого положення під час обертання.

Кріплення батарей та модулів. Акумулятори та змінні камери фіксуються за допомогою спеціальних силових замикальних механізмів (пружинні фіксатори, магнітні замки). Це дозволяє швидко замінювати батарею чи модуль без застосування інструментів і одночасно гарантує надійний контакт у польоті, де вібрації та навантаження досить значні.

Системи стабілізації. У складних підвісах для камер використовуються комбінації геометричного та силового замикання. Механічна форма забезпечує основне положення, а пружини або електромагніти компенсують мікровібрації.

Таким чином, у дронах силове замикання відіграє важливу роль для компактності, модульності та надійності. Це сучасний приклад, який показує, що класичні поняття теорії механізмів і машин залишаються актуальними, але знаходять нові сфери застосування у високотехнологічних пристроях.

### **1.3 Структурна класифікація та аналіз плоских механізмів**

Зв'язана система ланок, що входять у кінематичні пари, утворює *кінематичний ланцюг*. Саме з нього формується будь-який механізм, незалежно від складності його конструкції чи галузі застосування. Для того, щоб механізм міг виконувати задану функцію, ланки повинні бути з'єднані в певному порядку й утворювати замкнуту або незамкнуту структуру.

Кінематичні ланцюги поділяються на *прості та складні*.

*Простим кінематичним* називають такий ланцюг, у якого кожна ланка входить не більше ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.4, *a*). Це, по суті, найпростіші конструкції, які часто застосовуються в підйомних механізмах, дверних петлях або педальних системах.

A vivid example of the use of force closure is modern unmanned aerial vehicles (drones). In the construction of quadcopters and other types of drones, connections with spring or magnetic closure are often applied.

Folding propellers. In many drones, propeller blades fold to reduce dimensions during transportation. In operating mode, they are held in place by spring elements that provide force closure and prevent the blades from deviating from the working position during rotation.

Battery and module mounts. Batteries and interchangeable cameras are fixed by special force-locking mechanisms (spring latches, magnetic locks). This allows quick replacement of the battery or module without tools, while guaranteeing reliable contact during flight, where vibrations and loads are quite significant.

Stabilization systems. In complex camera gimbals, combinations of geometric and force closure are used. The mechanical shape ensures the main position, while springs or electromagnets compensate for micro-vibrations.

Thus, in drones, force closure plays an important role in compactness, modularity, and reliability. This is a modern example that shows that classical concepts of the theory of mechanisms and machines remain relevant, but find new applications in high-tech devices.

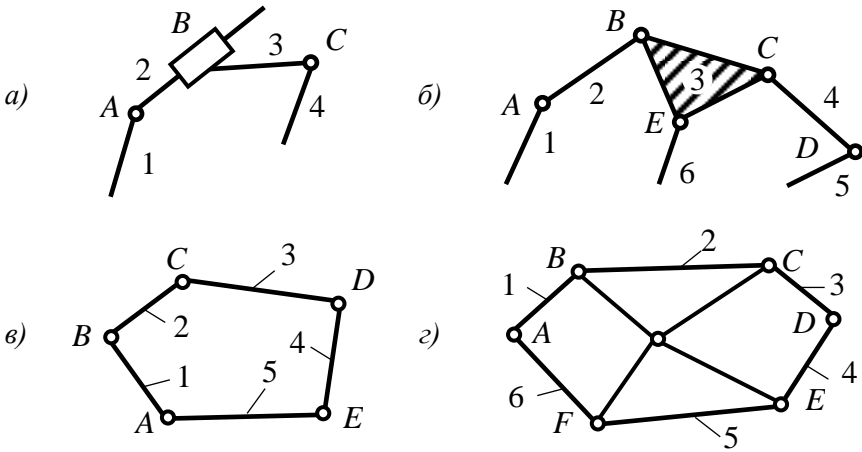
### **1.3 Structural Classification and Analysis of Planar Mechanisms**

A connected system of links that enter into kinematic pairs forms a *kinematic chain*. It is from such a chain that any mechanism is formed, regardless of the complexity of its design or its field of application. In order for a mechanism to perform a given function, the links must be connected in a certain sequence and form either a closed or an open structure.

Kinematic chains are divided into *simple* and *complex*.

A *simple kinematic chain* is one in which each link belongs to no more than two kinematic pairs (Fig. 1.4a). These are essentially the simplest designs, often used in lifting mechanisms, door hinges, or pedal systems.

Складним вважається ланцюг, у якому є хоча б одна ланка, що входить більше ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.4, б). Складні кінематичні ланцюги зазвичай зустрічаються у сучасних роботизованих маніпуляторах або у важких верстатах з числовим програмним керуванням (ЧПК), де від однієї ланки часто залежить рух кількох виконавчих органів.



*a* – простий незамкнутий, *б* – складний незамкнутий;  
*в* – простий замкнутий; *г* – складний замкнутий

Рис. 1.4. Класифікація кінематичних ланцюгів

У свою чергу, прості та складні кінематичні ланцюги поділяються на *замкнуті* та *незамкнуті*. У *незамкнутому ланцюгу* завжди є ланки, що входять лише в одну кінематичну пару (рис. 1.4, *a, б*). Прикладом є маніпулятор з «відкритою» структурою, що використовується у медичній робототехніці для виконання мінімально інвазивних операцій.

У *замкнутому ланцюгу* кожна ланка входить, принаймні, у дві пари (рис. 1.4, *в, г*). Саме такі ланцюги характерні для більшості машинобудівних конструкцій – від автомобільних двигунів внутрішнього згоряння до сучасних промислових 3D-принтерів, де точність і повторюваність рухів забезпечуються завдяки замкнутим ланцюгам.

Крім того, за аналогією з кінематичними парами, кінематичні ланцюги поділяють ще на *плоскі* та *просторові*.

A chain is considered *complex* if it contains at least one link that belongs to more than two kinematic pairs (Fig. 1.4*b*). Complex kinematic chains are usually found in modern robotic manipulators or in heavy computer numerical control (CNC) machine tools, where the motion of several working elements often depends on a single link.

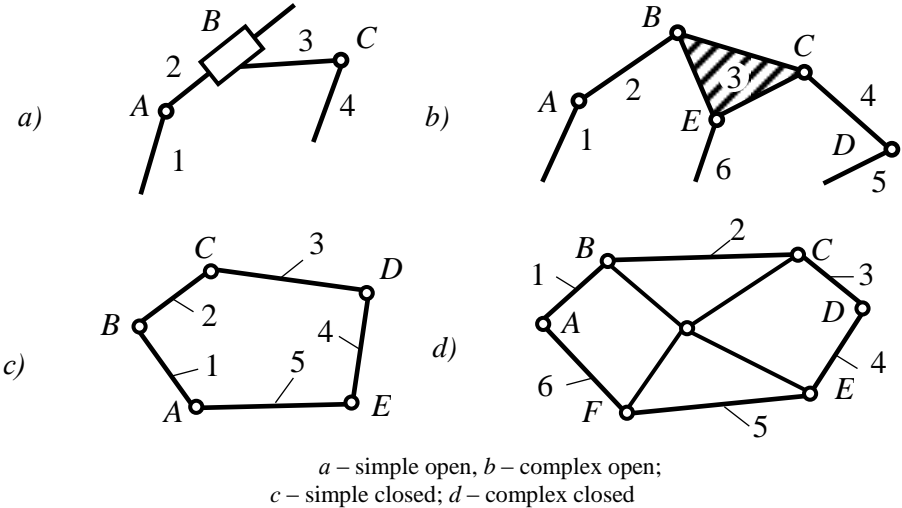


Fig. 1.4. Classification of kinematic chains

In turn, simple and complex kinematic chains are divided into *closed* and *open*. In an *open chain*, there are always links that belong to only one kinematic pair (Fig. 1.4, *a*, *b*). An example is a manipulator with an “open” structure, used in medical robotics to perform minimally invasive surgeries.

In a *closed chain*, each link belongs to at least two pairs (Fig. 1.4, *c*, *d*). Such chains are typical of most machine-building designs – from automobile internal combustion engines to modern industrial 3D printers, where accuracy and repeatability of motion are ensured precisely by closed chains.

In addition, by analogy with kinematic pairs, kinematic chains are further divided into *planar* and *spatial*.

У плоских механізмах усі ланки рухаються паралельно одній площині, і приклади їх можна знайти у більшості транспортних засобів, від велосипедів до трансмісій автомобілів. Просторові кінематичні ланцюги використовуються там, де необхідно забезпечити рух у тривимірному просторі: у промислових роботах, дроїдах, а також в екзоскелетах, що повторюють рухи людських суглобів.

Варто наголосити, що у сучасних умовах інженери часто комбінують різні типи кінематичних ланцюгів. Наприклад, у електромобілях системи підвіски базуються на плоских замкнутих ланцюгах, тоді як механізми керування кермом та адаптивні системи стабілізації мають ознаки просторових кінематичних структур.

Таким чином, кожний механізм можна розглядати як кінематичний ланцюг із принаймні однією нерухомою ланкою, що виконує роль стояка. Властивостями будь-якого механізму є *ступінь рухомості* (кількість незалежних рухів, які можуть виконувати рухомі ланки відносно стояка) та *визначеність або узгодженість руху*, що гарантує можливість передбачити роботу механізму в конкретних умовах.

Саме ці характеристики дозволяють інженерам не лише описати механізм теоретично, а й оцінити його практичні можливості, визначити потенційну ефективність та обмеження при застосуванні у сучасних технологіях.

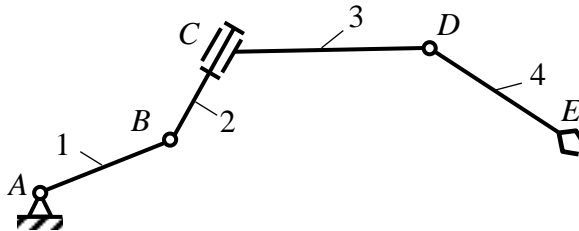


Рис. 1.5. Механізм маніпулятора

### 1.3.1 Визначення ступеню рухомості плоских механізмів

Для визначення числа ступенів рухомості будь-якого кінематичного ланцюга (тобто механізму) необхідно підрахувати число ступенів свободи всіх рухомих ланок, вважаючи їх вільними, не зв'язаними кінематичними парами тіл, а потім від цього числа слід відняти число умов зв'язку, які накладаються на ланки кінематичними парами.

In planar mechanisms, all links move parallel to a single plane, and examples can be found in most vehicles, from bicycles to automobile transmissions. Spatial kinematic chains are used where motion in three-dimensional space must be ensured: in industrial robots, drones, and also in exoskeletons that replicate human joint movements.

It should be emphasized that in modern practice engineers often combine different types of kinematic chains. For example, in electric vehicles, suspension systems are based on planar closed chains, while steering mechanisms and adaptive stabilization systems exhibit features of spatial kinematic structures.

Thus, any mechanism can be considered as a kinematic chain with at least one fixed link that performs the role of the frame. The main properties of any mechanism are *the degree of mobility* (the number of independent motions that the moving links can perform relative to the frame) and *the determinacy or consistency of motion*, which guarantees the ability to predict the operation of the mechanism under specific conditions.

It is these characteristics that allow engineers not only to describe a mechanism theoretically but also to evaluate its practical capabilities, determine potential efficiency, and identify limitations when applied in modern technologies.

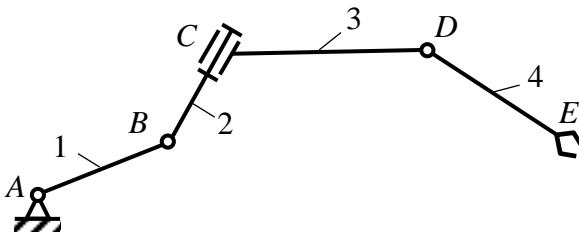


Fig. 1.5. Manipulator mechanism

### 1.3.1 Determining the degree of mobility of planar mechanisms

To determine the number of degrees of mobility of any kinematic chain (that is, a mechanism), it is necessary to count the degrees of freedom of all moving links, assuming them to be free bodies not connected by kinematic pairs, and then subtract the number of constraints imposed on the links by the kinematic pairs.

Нехай механізм складається з  $k$  ланок. Кожна вільна ланка, про що вже йшлося раніше, має у загальному випадку шість ступенів свободи. Одна із ланок механізму є нерухомою. Тому кількість рухомих ланок механізму складає  $n = k - 1$ . Якщо б ланки механізму не були зв'язані між собою, то загальна кількість простих рухів усіх рухомих ланок механізму складала б  $H = 6n$ . Але ж ланки механізму не є вільними тілами, вони зв'язані між собою кінематичними парами. Кожна кінематична пара I...V класів зменшує загальну кількість рухів на число  $P_1, 2P_2, 3P_3, 4P_4, 5P_5$ , де  $P_i$  – пари відповідних класів ( $i = 1...5$ ).

Віднявши ці зв'язки від  $H = 6n$ , дістанемо число ступенів свободи, які мають ланки механізму:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \quad (4)$$

Рівність (1.4) носить назву *структурної формули просторового кінематичного ланцюга загального вигляду (формула Сомова-Малишева)* і дозволяє обчислити кількість ступенів свободи кінематичного ланцюга відносно ланки прийнятої за нерухому. Число  $W$  називається *ступенем рухомості кінематичного ланцюга*.

На рис. 1.6 зображений кінематичний ланцюг, ланки якого з'єднані між собою парами V класу з паралельними осями.

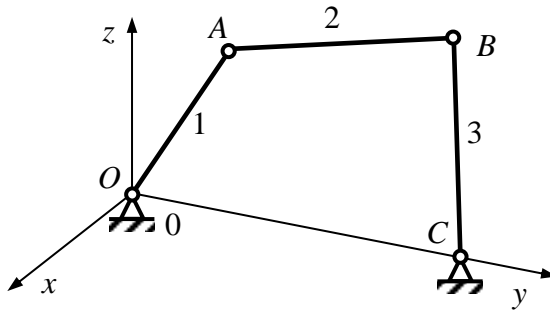


Рис. 1.6. Плоский шарнірний чотириланковий механізм

Такий кінематичний ланцюг є плоским, тому що всі його ланки рухаються паралельно деякій одній площині  $yOz$ , яка перпендикулярна до осей обертальних пар. Ланки механізму не можуть рухатися вздовж осі  $x$  і обертатися навколо осей  $y$  і  $z$ , тобто з шести можливих рухів три не можуть бути здійсненими.

Let the mechanism consist of  $k$  links. Each free link, as already mentioned earlier, has, in the general case, six degrees of freedom. One of the links of the mechanism is fixed. Therefore, the number of moving links of the mechanism is  $n = k - 1$ . If the links of the mechanism were not connected with each other, then the total number of simple motions of all moving links of the mechanism would be  $H = 6n$ . However, the links of the mechanism are not free bodies; they are connected by kinematic pairs. Each kinematic pair of Classes I...V reduces the total number of motions by the value  $P_1, 2P_2, 3P_3, 4P_4, 5P_5$ , where  $P_i$  is the number of pairs of the corresponding class ( $i = 1 \dots 5$ ).

By subtracting these constraints from  $H = 6n$ , we obtain the number of degrees of freedom that the links of the mechanism possess:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \tag{4}$$

Equation (4) is called *the structural formula of a spatial kinematic chain of general form (Somov–Malyshev formula)* and makes it possible to calculate the number of degrees of freedom of a kinematic chain relative to the link taken as fixed. *The number  $W$  is called the degree of mobility of the kinematic chain.*

In Fig. 1.6 a kinematic chain is shown whose links are connected by Class V pairs with parallel axes.

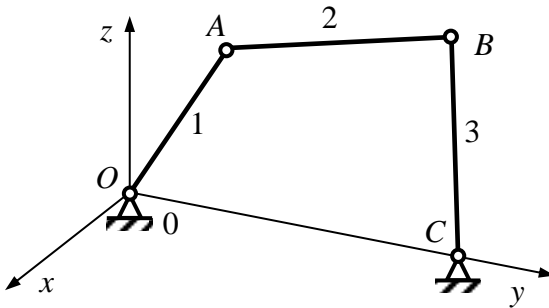


Fig. 1.6. Planar four-bar hinge mechanism

Such a kinematic chain is planar because all its links move parallel to a certain plane  $yOz$ , which is perpendicular to the axes of the rotational pairs. The links of the mechanism cannot move along the  $x$ -axis and cannot rotate around the  $y$  and  $z$  axes, that is, of the six possible motions three cannot be performed

Отже, на ланки цього механізму накладено три загальні умови зв'язку і структурну формулу (4) у цьому випадку не можна застосувати. Число ступенів свободи окремо взятої ланки такого ланцюга із врахуванням загальних зв'язків дорівнює трьом, а загальне число ступенів свободи  $n$  ланок дорівнює  $3n$ .

До складу плоских механізмів можуть входити тільки пари IV і V класів, які накладають відповідно одну або дві умови зв'язку, тому для плоского механізму структурна формула (4) набирає вигляду:

$$W=3n-2P_5-P_4. \quad (5)$$

Рівність (5) називається *формулою Чебишева*.

Для плоского механізму, який показано на рис. 1.6, число ступенів рухомості визначається:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

### 1.3.2 Формування механізмів

У науковій традиції теорії механізмів і машин особливе місце належить роботам Л. В. Ассура. Він одним із перших систематизував підхід до побудови механізмів і запропонував методика, що дозволяє складні кінематичні системи розкласти на прості структурні групи. Такий підхід зберігає актуальність і сьогодні, адже саме він дає змогу студентам і практикам зрозуміти логіку побудови механізмів та їх функціонування.

Ассур визначив, що найпростішим механізмом можна вважати систему з двох ланок – нерухомої (стояка) та рухомої. Разом вони утворюють кінематичний ланцюг V класу. Цей базовий випадок отримав назву *початковий механізм I класу*. Його особливість полягає у тому, що ступінь рухомості такої системи дорівнює одиниці ( $W=1$ ), а значить, рух визначається однією координатою. На рис. 1.7 (а, б) наведено приклади таких механізмів: обертальна пара, що імітує дверну петлю, та поступальна пара, аналогічна напрямній шухляди.

Важливо підкреслити, що початковий механізм I класу не має ведених ланок, а отже, не виконує перетворення руху. Проте саме він є базою, до якої додаються інші групи ланок.

Therefore, three general constraints are imposed on the links of this mechanism, and the structural formula (4) cannot be applied in this case. The number of degrees of freedom of an individual link of such a chain, taking into account the general constraints, is equal to three, and the total number of degrees of freedom of  $n$  links is equal to  $3n$ .

Only pairs of Classes IV and V, which impose one or two constraints respectively, can be part of planar mechanisms. Therefore, for a planar mechanism, the structural formula (4) takes the form:

$$W=3n-2P_5-P_4. \tag{5}$$

Equation (5) is called *the Chebyshev formula*.

For the planar mechanism shown in Fig. 1.6, the number of degrees of mobility is determined as follows:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot3-2\cdot4=1.$$

### 1.3.2 Formation of Mechanisms

In the scientific tradition of the theory of mechanisms and machines, a special place belongs to the works of L. V. Assur. He was one of the first to systematize the approach to constructing mechanisms and proposed a method that allows complex kinematic systems to be decomposed into simple structural groups. This approach remains relevant today, as it enables both students and practitioners to understand the logic of constructing mechanisms and their functioning.

Assur defined that the simplest mechanism can be considered a system of two links – a fixed one (the frame) and a moving one. Together they form a kinematic chain of Class V. This basic case received the name *initial mechanism of Class I*. Its feature is that the degree of freedom of such a system equals one ( $W = 1$ ), which means that the motion is determined by a single coordinate. In Fig. 1.7 (a, b), examples of such mechanisms are given: a rotational pair simulating a door hinge, and a translational pair similar to a drawer guide.

It is important to emphasize that the initial mechanism of Class I has no driven links and therefore does not perform motion transformation. However, it serves as the basis to which other groups of links are added.

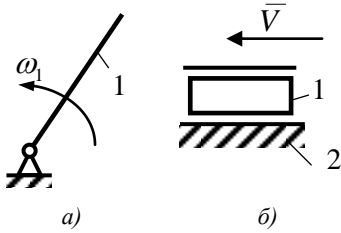


Рис. 1.7. Механізми I класу  
(а – обертальна пара; б – поступальна пара)

Будь-який складніший механізм з веденими ланками створюється шляхом *приєднання групи Ассура* – спеціальної структурної групи, яка має нульовий ступінь рухомості відносно тих ланок, до яких вона приєднана. Таким чином, Ассур фактично запропонував «будівельний конструктор» для механізмів: від найпростішого до найскладніших систем.

Сьогодні цей підхід активно використовується при комп'ютерному моделюванні у CAD-системах (SolidWorks, CATIA, Autodesk Inventor тощо), коли механізм проектується не одразу як складна система, а через нарощування простих груп. У медицині аналогічний принцип застосовується при створенні біонічних протезів: початковий механізм може відтворювати рух суглоба, а додані групи Ассура – забезпечувати складнішу траєкторію руху кінцівки.

Таким чином, ідея Ассура – це не просто теоретичне визначення, а універсальний інструмент, який допомагає зрозуміти і конструювати сучасні механізми. Вона надає студенту можливість побачити логіку побудови складних систем і зрозуміти, що будь-яка складна конструкція складається з простих базових елементів.

В групах Ассура маємо певну залежність між кількістю ланок і кінематичних пар, яка випливає із основної умови існування групи:

$$W=3n-2P_5-P_4=0. \quad (6)$$

Якщо врахувати, що пари IV класу можна замінити парами V класу, то з рівняння (6) можна записати:

$$P = \frac{3}{2}n. \quad (7)$$

Оскільки число ланок і пар може бути цілим, то умову (7) задовольняють такі сполучення чисел ланок і кінематичних пар, що входять у групу:

$$\begin{array}{l} n: 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ \dots \\ P_5: 3 \ 6 \ 9 \ 12 \ \dots \end{array}$$

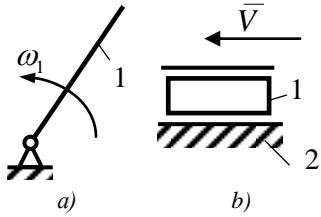


Fig. 1.7. Mechanisms of Class I  
(a – rotational pair; b – translational pair)

Any more complex mechanism with driven links is created by *attaching an Assur group* – a special structural group that has zero degree of mobility relative to the links to which it is connected. Thus, Assur essentially proposed a “construction set” for mechanisms: from the simplest to the most complex systems.

Today this approach is actively used in computer modeling in CAD systems (SolidWorks, CATIA, Autodesk Inventor, etc.), where a mechanism is designed not immediately as a complex system but through the incremental addition of simple groups. In medicine, an analogous principle is applied in the creation of bionic prostheses: the initial mechanism may reproduce the motion of a joint, while the added Assur groups provide a more complex trajectory of limb movement.

Thus, Assur’s idea is not merely a theoretical definition but a universal tool that helps to understand and design modern mechanisms. It gives the student the opportunity to see the logic of constructing complex systems and to understand that any complicated design is composed of simple basic elements.

In Assur groups, there is a certain dependence between the number of links and kinematic pairs, which follows from the basic condition of the group’s existence:

$$W=3n-2P_5-P_4=0. \quad (6)$$

If we take into account that Class IV pairs can be replaced by Class V pairs, then from equation (6) we can write:

$$P = \frac{3}{2}n. \quad (7)$$

Since the number of links and pairs must be integers, condition (7) is satisfied by the following combinations of numbers of links and kinematic pairs included in the group:

$$\begin{array}{l} n: 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ \dots \\ P_5: 3 \ 6 \ 9 \ 12 \ \dots \end{array}$$

Таким чином, кількість ланок у групі Ассура повинна бути тільки парною, а тому мінімальна кількість кінематичних пар дорівнює трьом.

Прикладом такої групи є шатун і коромисло (2-3) у шарнірному чотириланковому механізмі (рис. 1.6). Після прикріплення цієї групи до ведучої ланки, ступінь рухомості механізму дорівнює

$$W=3n-2P_5=3\cdot 3-2\cdot 4=1,$$

тому що ступінь рухомості групи (2-3)

$$W=3n-2P_5=3\cdot 2-2\cdot 3=0,$$

оскільки група Ассура має дві рухомих ланки і три кінематичних пари.

### 1.3.3 Структурна класифікація механізмів

Структурна класифікація механізмів має важливе практичне значення, оскільки дозволяє систематизувати різноманітні конструкції та швидко орієнтуватися у їхніх властивостях. Замість хаотичного набору ланок і пар інженер або студент бачить логічну систему, в якій кожен елемент виконує певну роль. Це значно спрощує не лише навчання, але й проектування нових машин.

При структурній класифікації механізмів користуються такими поняттями:

- *Клас механізму* визначається найвищим класом групи Ассура, що входить до його складу. Це означає, що загальна «складність» механізму визначається найбільш складною структурною групою.
- *Клас групи Ассура* визначається найвищим класом контура, що входить до її складу. Тобто чим складніший контур, тим вищий клас має група.
- *Клас контура* визначається кількістю кінематичних пар, які його утворюють. Наприклад, трикутний контур належить до III класу, а багатокутний – до IV або V класу.
- *Контуром* називають замкнуту область площини, яка обмежена ланками механізму. Саме ці замкнені структури дозволяють визначати рух і передавати його від ведучих до ведених ланок.

Thus, the number of links in an Assur group must always be even, and therefore the minimum number of kinematic pairs equals three.

An example of such a group is the connecting rod and rocker (2–3) in the planar four-bar hinge mechanism (Fig. 1.6). After attaching this group to the driving link, the degree of mobility of the mechanism is:

$$W=3n-2P_5=3\cdot3-2\cdot4=1,$$

since the degree of mobility of the group (2–3) is:

$$W=3n-2P_5=3\cdot2-2\cdot3=0,$$

because the Assur group has two moving links and three kinematic pairs.

### 1.3.3 Structural Classification of Mechanisms

The structural classification of mechanisms has important practical significance, as it allows various designs to be systematized and makes it possible to quickly navigate their properties. Instead of a chaotic set of links and pairs, an engineer or student sees a logical system in which each element performs a specific role. This greatly simplifies not only learning but also the design of new machines.

In structural classification of mechanisms, the following concepts are used:

- *The class of a mechanism* is determined by the highest class of the Assur group included in it. This means that the overall “complexity” of the mechanism is defined by the most complex structural group.
- *The class of an Assur group* is determined by the highest class of the contour included in it. That is, the more complex the contour, the higher the class of the group.
- *The class of a contour* is determined by the number of kinematic pairs that form it. For example, a triangular contour belongs to Class III, while a polygonal contour belongs to Class IV or V.
- *A contour* is a closed area of a plane bounded by the links of a mechanism. These closed structures make it possible to define motion and transfer it from driving to driven links.

Важливо розуміти, що структурна класифікація допомагає не лише «розкласти» механізм по полицях, але й передбачити його поведінку. Наприклад, у простих механізмах (I – II класу) траєкторії руху легко описати математично, а у складніших (III – IV класу) потрібні спеціальні методи аналізу.

У реальному житті приклади класифікації зустрічаються всюди: у двигунах внутрішнього згоряння використовується кривошипно-шатунний механізм II класу; у автоматизованих лініях – багатоланкові механізми III класу; у робототехніці та екзоскелетах – складні механізми IV класу, що дають змогу повторювати рухи людини.

Таким чином, структурна класифікація є своєрідною «мовою» для опису складності механізмів, яка зрозуміла як студенту, так і інженеру-практику.

### 1.3.4 Визначення класу механізму

Для зручності вивчення механізмів і розробки загальних методів проектування доцільно механізми класифікувати. Розглянемо визначення класу механізму на деяких прикладах.

1. *Кривошипно-повзунний механізм.* Цей механізм (рис. 1.8) складається з початкового механізму I класу і групи Ассура, яка складається у свою чергу із шатуна (ланка 2) і повзуна (ланка 3). Контури, які утворюють цю групу (ланки 2 і 3), кожен II класу, оскільки ці ланки належать до двох кінематичних пар. Отже, група Ассура також II класу і весь механізм II класу.

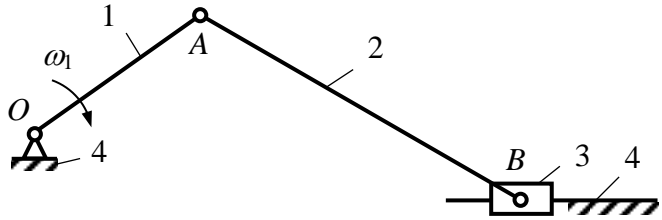


Рис. 1.8. Кривошипно-повзунний механізм II класу

2. На рис. 1.9 зображений шестилашковий механізм, який має у своєму складі жорсткий трикутник  $BFC$ . Якщо ведучою є ланка  $OA$ , то група Ассура тільки одна. Вона складається із трьох стержнів (ланки 2, 4 і 5) і одного трикутника (ланка 3).

It is important to understand that structural classification not only “arranges” a mechanism but also helps predict its behavior. For example, in simple mechanisms (Classes I – II) motion trajectories can be described easily with mathematics, while in more complex mechanisms (Classes III – IV) special methods of analysis are required.

In real life, examples of classification are found everywhere: in internal combustion engines the crank-and-rod mechanism of Class II is used; in automated production lines – multi-link mechanisms of Class III; in robotics and exoskeletons – complex mechanisms of Class IV, which make it possible to replicate human motion.

Thus, structural classification is a kind of “language” for describing the complexity of mechanisms, understandable to both the student and the practicing engineer.

### 1.3.4 Determining the Class of a Mechanism

For the convenience of studying mechanisms and developing general design methods, it is appropriate to classify mechanisms. Let us consider the determination of the class of a mechanism using several examples.

1. *Crank-slider mechanism.* This mechanism (Fig. 1.8) consists of an initial mechanism of Class I and an Assur group, which in turn consists of the connecting rod (link 2) and the slider (link 3). The contours formed by this group (links 2 and 3) are each of Class II, since these links be-

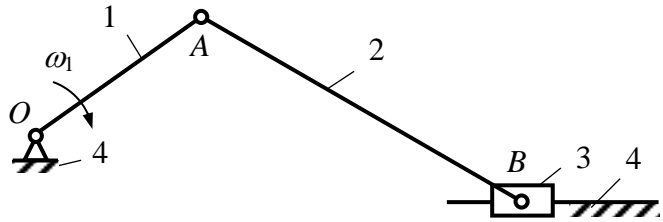


Fig. 1.8. Crank-slider mechanism of Class II

long to two kinematic pairs. Hence, the Assur group is also of Class II, and the entire mechanism is of Class II.

2. In Fig. 1.9 a six-link mechanism is shown, which contains within its structure a rigid triangle  $BFC$ . If the driving link is  $OA$ , then there is only one Assur group. It consists of three rods (links 2, 4, and 5) and one triangle (link 3).

Трикутник  $BFC$  – контур III класу, тому і весь механізм III класу. Але якщо вибрати за ведучу ланку  $FM$ , то картина змінюється і тоді дістанемо механізм II класу, який складається із двох груп Ассура II класу (це ланки 1-2 і 3-4).

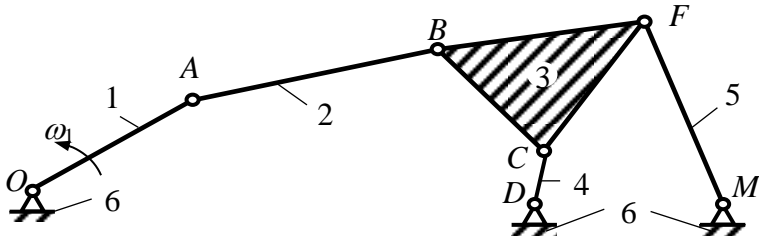


Рис. 1.9. Шестиланковий механізм III класу

3. На рис. 1.10 зображений механізм іншого класу. Тут у складі групи Ассура маємо чотиристоронній замкнутий нежорсткий контур  $BCDF$ . Ця група відноситься до IV класу, тому і весь механізм IV класу.

Можуть бути контури і групи Ассура, а також і механізми вищих класів. Але частіше зустрічаються групи і механізми II і III класів.

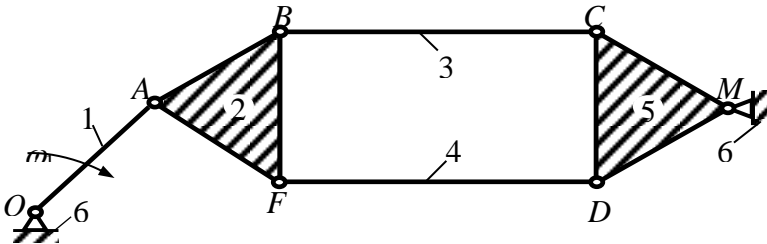


Рис. 1.10. Шестиланковий механізм IV класу

Крім класів механізмів і груп важливо розрізнити ще й *порядок групи Ассура*. Якщо «клас» показує складність внутрішньої структури групи (кількість контурів і кінематичних пар), то «порядок» описує, як саме група приєднана до основного механізму. Порядок групи визначається кількістю точок (елементів), через які ця група з'єднана з уже існуючим механізмом.

The triangle  $BFC$  is a contour of Class III, therefore the entire mechanism is of Class III. But if  $FM$  is chosen as the driving link, the situation changes, and then we obtain a mechanism of Class II, which consists of two Assur groups of Class II (links 1-2 and 3-4).

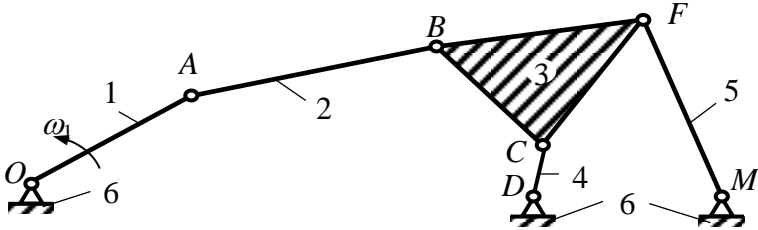


Fig. 1.9. Six-link mechanism of Class III

3. In Fig. 1.10 a mechanism of another class is shown. Here, within the Assur group, we have a four-sided closed flexible contour  $BCDF$ . This group belongs to Class IV, therefore the entire mechanism is of Class IV.

There may exist contours and Assur groups, as well as mechanisms of even higher classes. However, groups and mechanisms of Classes II and III are encountered most frequently.

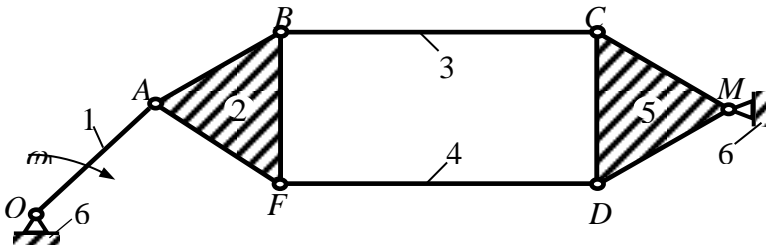


Fig. 1.10. Six-link mechanism of Class IV

In addition to the classes of mechanisms and groups, it is also important to distinguish *the order of an Assur group*. If the “class” indicates the complexity of the internal structure of the group (the number of contours and kinematic pairs), the “order” describes *how exactly the group is connected to the main mechanism*. *The order of a group is determined by the number of points (elements) through which the group is attached to the existing mechanism.*

У найпростішому випадку група приєднується у двох точках – це група *II порядку*. Приклад: кривошипно-шатунний механізм. Тут шатун і повзун утворюють групу, яка прикріплюється до кривошипа й стійки у двох місцях (див. рис. 1.8).

Якщо ж для приєднання потрібні три або більше точок, то група має вищий порядок (III чи IV). Це вже складніші механізми, у яких нова група зв'язана з основною системою більш жорстко й багатосторонньо (див. рис. 1.9).

*Навіщо це потрібно?* Знання порядку групи Ассура дозволяє правильно будувати алгоритм структурного аналізу. Розуміння того, у скількох точках група контактує з механізмом, дає змогу визначити її роль

- групи II порядку зазвичай застосовують для формування простих механізмів, де потрібна передача руху без ускладнень;
- групи III–IV порядку використовуються у складніших машинах, де необхідно забезпечити багатоточкову опору, стабільність і високу точність руху.

Таким чином, класи та порядки груп Ассура – це своєрідний «алфавіт», яким користується інженер, щоб скласти з простих елементів складні механізми.

Приклади для кращого розуміння. Побутовий приклад (LEGO або конструктор). Уявімо, що ви приєднуєте деталь LEGO до конструкції. Якщо вона закріплена лише у двох точках – вона рухлива, і це група II порядку. Якщо ж ви закріпили її у трьох чи чотирьох точках – рух обмежений значно сильніше, і це вже група вищого порядку.

Сучасні приклади з техніки. У 3D-принтерах прості групи II порядку забезпечують рух друкуючої голівки по напрямних осях. У роботизованих маніпуляторах промислових роботів групи III порядку створюють більш складні комбінації рухів руки, коли треба точно позиціонувати інструмент у просторі.

У авіаційній техніці (наприклад, у механізації крила літака) використовуються групи високого порядку, щоб забезпечити одночасний і синхронізований рух декількох елементів при розкладанні закрилків чи елеронів.

In the simplest case, a group is connected at two points – this is a group of *second order*. Example: the crank-and-rod mechanism. Here, the connecting rod and the slider form a group that is attached to the crank and the frame at two places (see Fig. 1.8).

If three or more points are required for attachment, then the group is of a higher order (III or IV). These are already more complex mechanisms, in which the new group is connected to the main system more rigidly and in multiple ways (see Fig. 1.9).

*Why is this necessary?* Knowing the order of an Assur group makes it possible to correctly construct the algorithm of structural analysis. Understanding how many points the group contacts the mechanism through allows us to determine its role:

- groups of second order are usually used to form simple mechanisms where motion transfer is needed without complications;
- groups of third–fourth order are used in more complex machines, where multi-point support, stability, and high precision of motion must be ensured.

Thus, the classes and orders of Assur groups are a kind of “alphabet” used by the engineer to compose complex mechanisms from simple elements.

Examples for better understanding. A household example (LEGO or construction kit). Imagine that you attach a LEGO piece to a structure. If it is fixed at only two points, it remains movable, and this is a group of second order. If you fix it at three or four points, the motion is much more restricted, and this is already a higher-order group.

Modern engineering examples. In 3D printers, simple groups of second order ensure the movement of the print head along the guide axes. In robotic manipulators of industrial robots, groups of third order create more complex combinations of arm motions when precise positioning of a tool in space is required.

In aviation technology (for example, in wing mechanization of an aircraft), high-order groups are used to ensure simultaneous and synchronized movement of several elements during the deployment of flaps or ailerons.

### 1.3.5 Структурний аналіз плоских механізмів

У залежності від класу механізму і порядку груп Ассура використовуються різні методи кінематичного та динамічного дослідження. Саме структурний аналіз дозволяє «розібрати» складну конструкцію на прості елементи й краще зрозуміти логіку її роботи.

*Структурний аналіз* – процес визначення рухомості механізму (кількості ступенів рухомості), його розкладання на початковий механізм та групи Ассура. Такий підхід дозволяє систематизувати велику кількість різноманітних механізмів і створює основу для подальших кінематичних та силових розрахунків.

При структурному аналізі необхідно дотримуватися правил:

- починати виділення груп Ассура з тих ланок, які найбільш віддалені від ведучої;
- в першу чергу відокремлювати більш прості структурні групи (діади), щоб спростити подальший аналіз;
- стежити, щоб ступінь рухомості механізму залишався незмінним після кожного виділення;
- пам'ятати, що кожна ланка і кожна пара може входити лише до однієї структурної групи.

Розглянемо кілька знайомих прикладів.

*Складний диван.* Коли ми розкладаємо диван у ліжко, бачимо складну систему важелів і шарнірів. Якщо застосувати структурний аналіз, то можна виділити початковий механізм (основа дивана) та кілька груп Ассура, що відповідають за різні етапи руху: підйом сидіння, розкриття спинки, висування нижньої секції.

*Ножичі.* Це найпростіший плоский механізм: дві ланки (ручки з лезами) з'єднані однією обертальною кінематичною парою (шарнір). Структурний аналіз тут дуже простий – уся система зводиться до однієї групи Ассура. Проте цей приклад показує, що навіть найпростіші інструменти ґрунтуються на тих самих принципах, що й складні машини.

*Парасолька.* При розкритті парасольки працює механізм з ведучою ланкою (рухома втулка) та групою спиць, що розходяться, утворюючи купол. Умовно можна виділити початковий механізм і кілька груп Ассура, які визначають напрям і синхронність руху спиць. Це чудовий приклад зручного прикладного механізму.

### 1.3.5 Structural Analysis of Planar Mechanisms

Depending on the class of the mechanism and the order of Assur groups, different methods of kinematic and dynamic analysis are used. Structural analysis makes it possible to “break down” a complex design into simple elements and better understand the logic of its operation.

*Structural analysis* is the process of determining the mobility of a mechanism (the number of degrees of mobility), decomposing it into the initial mechanism and Assur groups. This approach allows the systematization of a large number of different mechanisms and creates the foundation for further kinematic and force calculations.

During structural analysis, certain rules must be followed:

- start identifying Assur groups with the links that are farthest from the driving link;
- first separate the simpler structural groups (dyads) to simplify further analysis;
- ensure that the degree of mobility of the mechanism remains unchanged after each separation;
- remember that each link and each pair may belong to only one structural group.

Let us consider several familiar examples:

*Folding sofa.* When we unfold a sofa into a bed, we see a complex system of levers and hinges. Applying structural analysis, we can distinguish the initial mechanism (sofa base) and several Assur groups responsible for different stages of motion: lifting the seat, unfolding the backrest, extending the lower section.

*Scissors.* This is the simplest planar mechanism: two links (handles with blades) connected by a single rotational kinematic pair (hinge). The structural analysis here is very simple – the whole system reduces to one Assur group. However, this example shows that even the simplest tools are based on the same principles as complex machines.

*Umbrella.* When an umbrella is opened, the mechanism operates with a driving link (the sliding sleeve) and a group of ribs that spread out to form the canopy. Conditionally, we can distinguish the initial mechanism and several Assur groups that determine the direction and synchronization of rib movements. This is an excellent example of a convenient applied mechanism.

Тепер повернемося до класичного прикладу (рисунок 1.11). Розглядуваний шестиланковий плоский механізм (рис. 1.11, *a*) має п'ять рухомих ланок ( $n = 5$ ) і стаяк (нерухома ланка 6). Він утворює сім кінематичних пар V класу ( $P_5 = 7$ ), серед яких шість обертальних (6-1, 1-2, 2-3, 2-4, 6-3, 4-5) і одна поступальна (5-6). Ведучою є ланка 1.

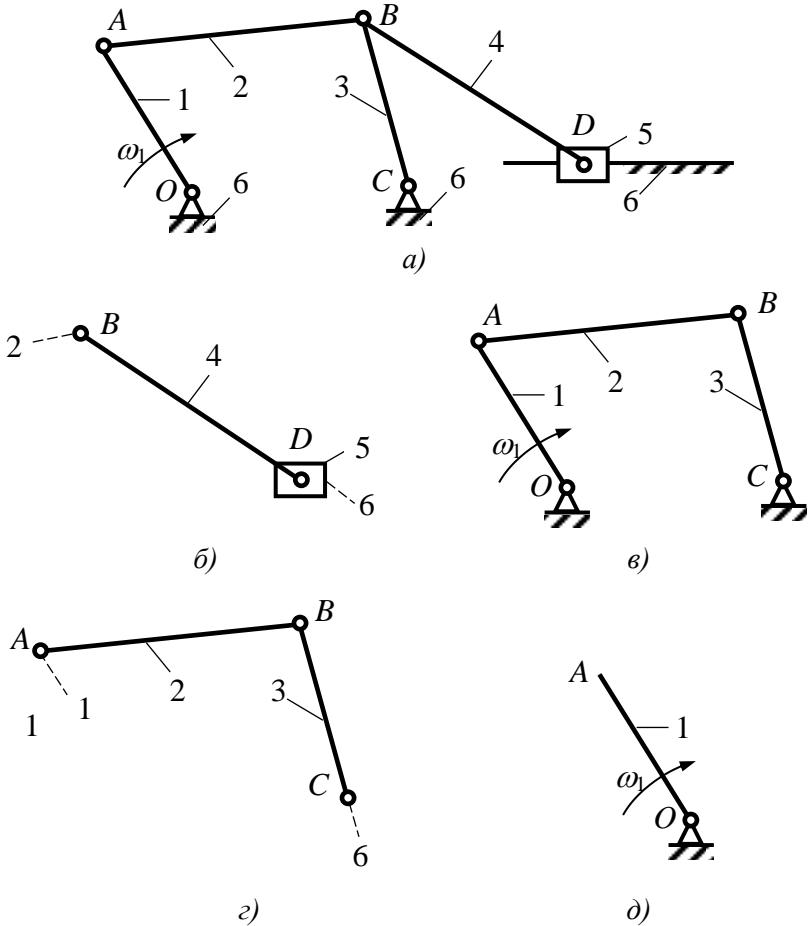


Рис. 1.11. Шестиланковий плоский механізм

Now let us return to a classical example (Fig. 1.11). The six-link planar mechanism shown (Fig. 1.11, *a*) has five moving links ( $n = 5$ ) and a frame (fixed link 6). It forms seven kinematic pairs of Class V ( $P_5 = 7$ ), among which six are rotational (6–1, 1–2, 2–3, 2–4, 6–3, 4–5) and one translational (5–6). Link 1 is the driving link.

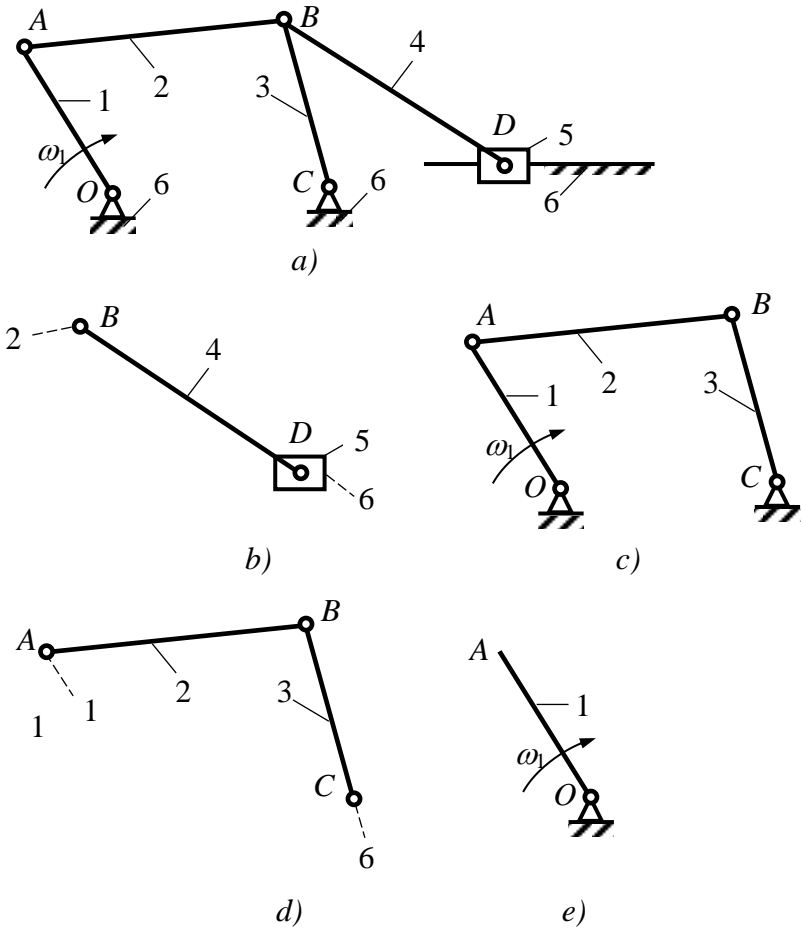


Fig. 1.11. Six-link planar mechanism

Визначаємо ступінь рухомості механізму (формула Чебишева)

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 5-2\cdot 7-0=1.$$

Далі послідовно відокремлюємо групи Ассура. Спочатку відокремлюємо найбільш віддалену від ведучої ланки групу Ассура. Це ланки 4 і 5, які утворюють три кінематичні пари V класу (рис. 1.11, б). Залишок системи ( $n=3$ ,  $P_5=4$ ) має  $W=1$ , що підтверджує правильність відокремлення групи (рис. 1.11, в). Наступним кроком виділяються ланки 2 і 3 (рис. 1.11, з). Залишок механізму – початковий механізм I класу (рис. 1.11, д). Всі групи Ассура другого класу, а отже, весь механізм належить до II класу.

Формула побудови цього механізму

$$I(6-1) \leftarrow II(2-3) \leftarrow II(4-5).$$

Таким чином, структурний аналіз не є лише формальною процедурою для інженерів. Це універсальний метод, який дозволяє зрозуміти логіку роботи як складних машин у промисловості, так і простих пристроїв у побуті. Саме завдяки йому інженери можуть прогнозувати роботу механізмів, перевіряти правильність проектних рішень і створювати нові, зручні та ефективні конструкції.

### Контрольні запитання

1. Що таке ланка механізму?
2. У чому різниця між механізмом і машиною?
3. Що таке кінематична схема і чому її застосовують?
4. Дайте визначення ведучої та веденої ланки.
5. Які існують типи кінематичних пар?
6. Чим відрізняються нижчі та вищі пари?
7. Що таке ступінь свободи тіла?
8. Наведіть приклади плоских механізмів.
9. Що таке просторовий механізм?
10. Яка формула визначає ступінь рухомості просторового механізму?
11. Яка формула Чебишева?
12. Хто ввів поняття груп Ассура?

The degree of mobility of the mechanism is determined using Chebyshev's formula:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot5-2\cdot7-0=1.$$

Next, we sequentially separate the Assur groups. First, we isolate the group farthest from the driving link. These are links 4 and 5, which form three kinematic pairs of Class V (Fig. 1.11, *b*). The remaining system ( $n = 3$ ,  $P_5 = 4$ ) has  $W = 1$ , which confirms the correctness of separating the group (Fig. 1.11, *c*). The next step is to separate links 2 and 3 (Fig. 1.11, *d*). The remaining mechanism is the initial mechanism of Class I (Fig. 1.11, *e*). All the Assur groups are of Class II, and therefore the entire mechanism belongs to Class II.

The construction formula of this mechanism is:

$$I(6-1) \leftarrow II(2-3) \leftarrow II(4-5).$$

Thus, structural analysis is not just a formal procedure for engineers. It is a universal method that makes it possible to understand the logic of operation of both complex machines in industry and simple devices in everyday life. Thanks to it, engineers can predict the functioning of mechanisms, verify the correctness of design decisions, and create new, convenient, and efficient constructions.

### Control Questions

1. What is a link of a mechanism?
2. What is the difference between a mechanism and a machine?
3. What is a kinematic diagram, and why is it used?
4. Give the definition of driving and driven links.
5. What types of kinematic pairs exist?
6. How do lower pairs differ from higher pairs?
7. What is the degree of freedom of a body?
8. Give examples of planar mechanisms.
9. What is a spatial mechanism?
10. Which formula determines the degree of mobility of a spatial mechanism?
11. What is Chebyshev's formula?
12. Who introduced the concept of Assur groups?

13. Для чого застосовується структурна класифікація механізмів?
14. Що таке контур у механізмах?
15. Які класи механізмів ви знаєте?
16. Яка особливість кривошипно-повзунного механізму?
17. Чим відрізняються групи Ассура II і III класів?
18. Які правила структурного аналізу механізмів?
19. Чому важливо знати ступінь рухомості?
20. Як пов'язані структура механізму та його динамічний розрахунок?

13. For what purpose is the structural classification of mechanisms used?
14. What is a contour in mechanisms?
15. Which classes of mechanisms do you know?
16. What is the specific feature of the crank-slider mechanism?
17. How do Assur groups of Class II and Class III differ?
18. What are the rules of structural analysis of mechanisms?
19. Why is it important to know the degree of mobility?
20. How are the structure of a mechanism and its dynamic calculation related?

## 2 Кінематичне дослідження механізмів

### 2.1 Задачі та методи кінематичного дослідження

Кінематичне дослідження механізму – це один із ключових етапів вивчення його роботи. На цьому етапі ми розглядаємо рух ланок без урахування сил, які на них діють. Увага зосереджується виключно на геометрії руху та факторі часу. Це дозволяє створити математичну та графічну модель механізму, яка надалі стане основою для динамічного аналізу.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, будь-який рух тіла можна описати через три основні характеристики

- *переміщення* у просторі (зміна положення з часом);
- *швидкість* – темп зміни положення;
- *прискорення* – темп зміни швидкості.

Саме тому задачі кінематичного аналізу поділяють на три групи:

1. Визначення положень ланок механізму в будь-який момент часу, побудова траєкторій точок і визначення переміщень.
2. Знаходження швидкостей окремих точок і ланок.
3. Визначення прискорень (нормальних і дотичних складових).

Завдяки такому дослідженню ми отримуємо картину руху, яку можна порівняти із «сценарієм» роботи механізму. Далі ця інформація використовується для розрахунку: динамічних сил (сил інерції, моментів інерції), кінетичної енергії, споживаної потужності машини.

#### **Методи кінематичного дослідження**

Сьогодні застосовують кілька методів кінематичного аналізу.

*Графічний метод.* Базується на побудові схем, планів швидкостей та прискорень. Дуже наочний і зрозумілий, особливо для початкового навчання. Використовується для відносно простих механізмів, де потрібна швидка оцінка параметрів.

*Графоаналітичний метод.* Поєднує геометричні побудови з алгебраїчними розрахунками. Він зручний, коли необхідна більша точність, ніж у чисто графічному методі.

*Аналітичний метод.* Використовує рівняння та формули, що описують рух. Найточніший метод, який застосовується в інженерній практиці, зокрема з використанням комп'ютерного моделювання (наприклад, САД-програм).

## 2 Kinematic Analysis of Mechanisms

### 2.1 Tasks and Methods of Kinematic Analysis

Kinematic analysis of a mechanism is one of the key stages in studying its operation. At this stage, we consider the motion of the links without taking into account the forces acting on them. That is, attention is focused exclusively on the geometry of motion and the factor of time. This makes it possible to create a mathematical and graphical model of the mechanism, which later becomes the basis for dynamic analysis.

As is known from the course of theoretical mechanics, any motion of a body can be described through three main characteristics: *displacement* in space (change of position over time); *velocity* – the rate of change of position; *acceleration* – the rate of change of velocity.

Therefore, the tasks of kinematic analysis are divided into three groups:

1. Determining the positions of the links of the mechanism at any given moment in time, constructing trajectories of points, and defining displacements.
2. Finding the velocities of individual points and links.
3. Determining accelerations ( normal and tangential components).

Through such an analysis, we obtain a complete picture of motion, which can be compared to the “scenario” of the mechanism’s operation. Later this information is used for the calculation of dynamic forces (inertial forces, moments of inertia), kinetic energy, and the machine’s power consumption.

#### Methods of Kinematic Analysis

Today, several methods of kinematic analysis are used:

*Graphical method.* Based on constructing diagrams, velocity plans, and acceleration plans. Very illustrative and understandable, especially for initial learning. Used for relatively simple mechanisms where a quick estimation of parameters is required

*Graph-analytical method.* Combines geometric constructions with algebraic calculations. It is convenient when greater accuracy is needed than in the purely graphical method.

*Analytical method.* Uses equations and formulas that describe motion. This is the most accurate method, applied in engineering practice, in particular with the use of computer modeling (e.g., CAD software).

*Експериментальний метод.* Заснований на спостереженні та вимірюванні параметрів руху реального механізму (з використанням датчиків, камер високої швидкості тощо). Застосовується для перевірки складних систем, які важко розрахувати теоретично.

Щоб краще зрозуміти важливість кінематичного дослідження, розглянемо кілька прикладів:

*Підйомна платформа інвалідного візка.* Для плавного та безпечного руху необхідно точно розрахувати швидкості і прискорення. Будь-які ривки чи перевантаження можуть зробити пристрій небезпечним.

*Сучасні роботи-пилососи.* Вони мають багато рухомих вузлів (колеса, щітки, механізм обертання). Без кінематичного аналізу було б неможливо забезпечити їх синхронну роботу в умовах обмеженого простору.

### **Особливості руху ланок**

Закон руху ведучої ланки задається функцією  $\varphi = \varphi(t)$  для обертального руху або  $s = s(t)$  для поступального руху.

У практиці найчастіше припускають, що рух ведучої ланки *рівномірний* (обертальний з  $\omega_1 = \text{const}$  або поступальний із  $s_1 = \text{const}$ ). Це наближення спрощує розрахунки, і воно добре відображає реальні умови роботи багатьох механізмів.

Більшість механізмів у машинах мають *періодичний рух*. Це означає, що через певний проміжок часу (період  $T$ ) система повертається у вихідне положення, і її параметри повторюються. Для кінематичного дослідження достатньо проаналізувати один цикл, адже всі наступні будуть ідентичними.

## **2.2 Побудова планів механізму і вибір масштабів**

У попередньому підрозділі ми з'ясували, що кінематичний аналіз дозволяє визначати положення, швидкості та прискорення ланок механізму, забезпечуючи інженера вихідними даними для динамічних розрахунків. Проте для того, щоб перейти від теоретичних формул до конкретних рішень, необхідно навчитися будувати наочні плани механізмів. Саме ці графічні побудови слугують фундаментом для подальших обчислень і дають можливість зрозуміти взаємозв'язки між окремими ланками. Тому наступним кроком є розгляд методів побудови планів механізмів і вибору масштабів.

*Experimental method.* Based on observation and measurement of motion parameters of a real mechanism (using sensors, high-speed cameras, etc.). Applied for testing complex systems that are difficult to calculate theoretically.

To better understand the importance of kinematic analysis, let us consider several examples:

- *Wheelchair lifting platform.* For smooth and safe motion, it is necessary to accurately calculate velocities and accelerations. Any jerks or overloads may make the device unsafe.
- *Modern robotic vacuum cleaners.* They have many moving units (wheels, brushes, rotation mechanisms). Without kinematic analysis it would be impossible to ensure their synchronized operation in a limited space.

### **Features of link motion**

The law of motion of the driving link is defined by the function  $\varphi = \varphi(t)$  for rotational motion or  $s = s(t)$  for translational motion.

In practice, it is most often assumed that the motion of the driving link is uniform (rotational with  $\omega_1 = \text{const}$  or translational with  $s_1 = \text{const}$ ). This assumption simplifies calculations and well reflects the real operating conditions of many mechanisms.

Most mechanisms in machines have *periodic motion*. This means that after a certain time interval (the period  $T$ ) the system returns to its initial position, and its parameters repeat. For kinematic analysis, it is sufficient to analyze one cycle, since all subsequent ones will be identical.

## **2.2 Construction of Mechanism Diagrams and Choice of Scales**

In the previous subsection, we found that kinematic analysis makes it possible to determine the positions, velocities, and accelerations of the links of a mechanism, providing the engineer with initial data for dynamic calculations. However, in order to move from theoretical formulas to concrete solutions, it is necessary to learn how to construct clear mechanism diagrams. These graphical constructions serve as the foundation for further calculations and make it possible to understand the interrelations between individual links. Therefore, the next step is to consider methods for constructing mechanism diagrams and choosing scales.

Побудову положень ланок (планів) механізмів II класу можна здійснювати методом засічок. Цей метод вважається одним із найнауочніших і найзручніших для студентів, адже дозволяє покроково простежити рух окремих точок і ланок у просторі. Він широко застосовується як у класичних завданнях ТММ, так і в сучасних інженерних розробках – від автомобільної техніки до роботизованих маніпуляторів.

Розглянемо це питання на прикладі кривошипно-повзунного механізму, кінематична схема та закон руху кривошипа  $OA$  ( $\omega_1 = \text{const}$ ) якого задані (рис. 2.1). Побудову здійснюють у певному масштабі, що забезпечує зручність вимірювань і точність розрахунків.

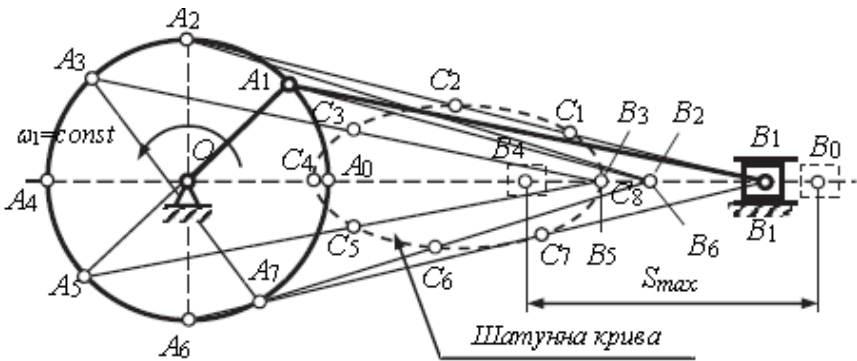


Рис. 2.1. Побудова положень ланок кривошипно-повзунного механізму

Для цього використовують масштабний коефіцієнт, який у загальному вигляді є відношенням фізичної величини (шляху, швидкості тощо) до довжини відрізка, який цю величину зображує на рисунку. Масштабний коефіцієнт, який у подальшому будемо називати “масштабом”, позначимо літерою  $\mu$  з індексом тієї величини, яку зображено графічно. Масштаб  $\mu$  має розмірність, у чисельнику якої – розмірність величини, яка зображується, у знаменнику – розмірність довжини (мм).

Наприклад, коли зображати лінійні розміри механізму, масштаб (м/мм) визначається за формулою:

$$\mu = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{l_{OA}}{OA}, \quad (7)$$

The construction of positions of links (diagrams) of Class II mechanisms can be carried out using the arc method. This method is considered one of the most illustrative and convenient for students, since it allows them to trace step by step the motion of individual points and links in space. It is widely used both in classical TMM problems and in modern engineering applications – from automotive engineering to robotic manipulators.

Let's consider this issue using the example of a crank-slider mechanism, whose kinematic diagram and law of motion of the crank  $OA$  ( $\omega_1 = \text{const}$ ) are given (Fig. 2.1). The construction is performed at a certain scale, which ensures measurement convenience and calculation accuracy.

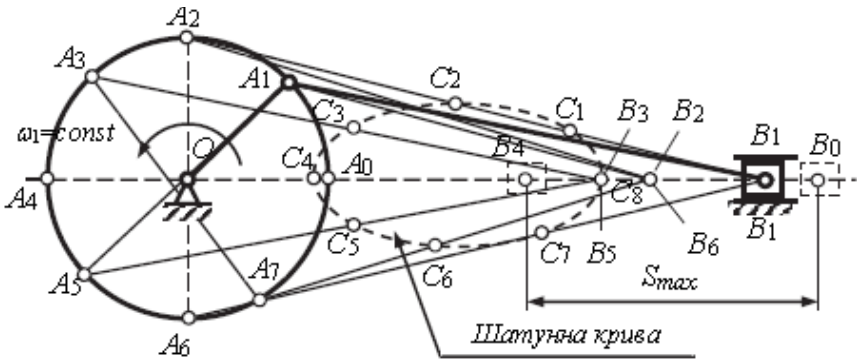


Fig. 2.1. Construction of positions of links of a crank-slider mechanism

For this purpose, a scale coefficient is used, which in general is the ratio of the physical quantity (displacement, velocity, etc.) to the length of the segment that represents this quantity in the drawing. The scale coefficient, which we will hereafter call simply the “scale,” is denoted by the letter  $\mu$  with the index of the quantity being represented graphically. The scale  $\mu$  has dimensions, where the numerator corresponds to the dimension of the physical quantity represented, and the denominator corresponds to the dimension of length (mm).

For example, when representing the linear dimensions of a mechanism, the scale (m/mm) is defined by the formula:

$$\mu = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{l_{OA}}{OA}, \quad (7)$$

де  $l_{OA}$  – дійсна довжина кривошипа, м;

$OA$  – довжина відрізка  $\overline{OA}$ , мм на рисунку 2.1.

У практичних умовах дуже важливо правильно вибрати масштаб. Якщо він буде надто дрібним, план стане незручним для роботи - дрібні деталі важко побачити і ще важче виміряти. Якщо ж занадто великим - креслення не поміститься на аркуші і стане нечитабельним. Тому інженери дотримуються стандартних масштабів, утворених із таких цифр: 1, 2, 4, 5, 8 або їх комбінацій (25, 125), помножених на  $10^{\pm k}$ , де  $k=1, 2, 3, \dots$  і т.д.

У сучасній інженерній практиці, крім традиційних креслень, застосовуються комп'ютерні CAD-системи (SolidWorks, AutoCAD, Fusion 360 тощо), де масштабування здійснюється автоматично. Однак базовий принцип, викладений тут, залишається актуальним: студент повинен навчитися «бачити» пропорції механізму і розуміти логіку побудови, перш ніж покладатися на програмне забезпечення.

Щоб знайти методом дугових засічок положення всіх точок і ланок механізму, необхідно послідовно розглянути рух кожної ланки, від початкової до вихідної, у тому самому порядку, в якому вони приєднуються до механізму. Кривошип  $OA$  здійснює рівномірний обертальний рух ( $\omega_1 = \text{const}$ ) навколо нерухомого центра  $O$ . Шатун  $AB$  здійснює складний рух: центр шарніра  $A$  рухається по колу радіуса  $OA$ , а центр шарніра  $B$  – по прямій разом із повзуном  $B$ , який шарнірно зв'язаний із шатуном  $AB$  і рухається вздовж нерухомої напрямної.

У прикладній інженерії цей принцип часто використовується, наприклад, при розрахунках механізмів у двигунах внутрішнього згоряння або у підйомних платформах. Усі вони базуються на кривошипно-повзунному механізмі, і саме правильний вибір масштабу дозволяє з високою точністю передбачити поведінку системи.

Далі за початкове положення механізму, як правило, вибирають одне з його крайніх положень. Нехай таким положенням буде випадок, коли кривошип і шатун витягаються в одну лінію  $OA_0B_0$ . У центральному кривошипно-повзунному механізмі ця лінія збігається з напрямком руху центра шарніра  $B$ . Це важливо, оскільки саме від такого положення зручно починати подальші побудови.

where  $l_{oa}$  – the actual length of the crank, m;

$OA$  – the length of the segment  $\overline{OA}$ , mm, in Fig. 2.1.

In practical conditions, it is very important to choose the correct scale. If it is too small, the diagram will be inconvenient to work with – small details will be hard to see and even harder to measure. If it is too large, the drawing will not fit on the sheet and will become unreadable. Therefore, engineers adhere to standard scales formed from the numbers: 1, 2, 4, 5, 8 or their combinations (25, 125), multiplied by  $10^{\pm k}$ , where  $k = 1, 2, 3 \dots$  etc.

In modern engineering practice, in addition to traditional drawings, computer CAD systems (SolidWorks, AutoCAD, Fusion 360, etc.) are used, where scaling is performed automatically. However, the basic principle outlined here remains relevant: a student must learn to “see” the proportions of the mechanism and understand the logic of construction before relying on software.

To find, by the arc method, the positions of all points and links of the mechanism, it is necessary to sequentially consider the motion of each link, from the initial to the output, in the same order in which they are connected to the mechanism. The crank  $OA$  performs uniform rotational motion ( $\omega_1 = \text{const}$ ) around the fixed center  $O$ . The connecting rod  $AB$  performs complex motion: the center of joint  $A$  moves along a circle of radius  $OA$ , while the center of joint  $B$  moves along a straight line together with the slider  $B$ , which is connected by a hinge to the connecting rod  $AB$  and moves along a fixed guide.

In applied engineering, this principle is often used, for example, in the calculation of mechanisms in internal combustion engines or in lifting platforms. All of them are based on the crank-slider mechanism, and it is the correct choice of scale that allows engineers to predict the system’s behavior with high accuracy.

Next, as the initial position of the mechanism, one of its extreme positions is usually chosen. Let such a position be the case when the crank and the connecting rod are aligned in a straight line  $OA_0B_0$ . In the central crank-slider mechanism, this line coincides with the direction of motion of the center of joint  $B$ . This is important because it is from this position that it is convenient to begin further constructions.

Далі поділимо траєкторію точки  $A$  на довільне число рівних частин, наприклад 8, як це показано на рисунку 2.1. Точки поділу позначимо  $A_0, A_1, A_2, \dots$  у напрямі обертання кривошипа. Тобто перехід з одного положення в інше здійснюється за час  $T/8$ , де  $T$  – період обертання кривошипа ( $T=60/n$ , с;  $n$  – частота обертання кривошипа,  $\text{хв}^{-1}$ ).

Положення точки  $B$  визначаємо методом дугових засічок, враховуючи, що довжина шатуна  $AB$  протягом руху залишається незмінною. Для цього з точок  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_7$  радіусом  $AB$  робимо дугові засічки на траєкторії точки  $B$ . У результаті отримуємо положення центрів шарніра  $B: B_0, B_1, B_2, \dots, B_7$ . З'єднавши точки  $A_i$  і  $B_i$  відрізком  $A_iB_i$ , дістанемо положення шатуна  $AB$  і повзуна  $B$  ( $i = 0, 1, \dots, 7$ ).

Таким самим способом будується траєкторія точки  $C$ , яка лежить на шатуні  $AB$ . Для цього з точок  $A_i$  робимо на відповідних положеннях  $A_iB_i$  дугові засічки радіусом  $AC$ . Визначивши точки  $C_i$  і з'єднавши їх плавною кривою, дістанемо траєкторію точки  $C$ . Через те, що точка  $C$  лежить на шатуні, її траєкторію називають шатунною кривою.

Шатунні криві широко застосовуються у сучасній техніці для визначення відповідних рухів виконавчих органів механізмів і машин. Наприклад, у медичному обладнанні (рентгенівські установки з рухомими столами), у промислових роботах, у складальних лініях автомобільних заводів. У всіх цих випадках правильне відображення руху забезпечує високу точність і надійність роботи обладнання. На рис.2.2 показано приклади шатунних кривих.

### 2.3 Побудова планів швидкостей і прискорень

У попередньому підрозділі ми розглянули, як будуються плани положень ланок механізму. Однак для повного кінематичного аналізу цього недостатньо, адже інженеру важливо знати не лише, де опиниться та чи інша точка у певний момент часу, а й з якою швидкістю та прискоренням вона рухається. Саме ці параметри безпосередньо впливають на навантаження в деталях, на їх зносостійкість, витрати енергії та надійність усього механізму.

На практиці для визначення швидкостей та прискорень широко застосовування набув *графоаналітичний метод* – метод планів швидкостей та прискорень.

Next, we divide the trajectory of point  $A$  into an arbitrary number of equal parts, for example 8, as shown in Fig. 2.1. The division points are denoted  $A_0, A_1, A_2, \dots$  in the direction of crank rotation. That is, the transition from one position to another takes place in the time  $T/8$ , where  $T$  the period of crank rotation ( $T=60/n$ , s;  $n$  – crank rotation frequency,  $\text{min}^{-1}$ ).

The position of point  $B$  is determined by the arc method, considering that the length of the connecting rod  $AB$  remains constant during motion. For this, from points  $A_0, A_1, A_2 \dots A_7$ , using radius  $AB$ , arc cuts are made on the trajectory of point  $B$ . As a result, we obtain the positions of the centers of joint  $B$ :  $B_0, B_1, B_2 \dots B_7$ . Connecting the points  $A_i$  and  $B_i$  with the segment  $A_iB_i$ , we obtain the position of the connecting rod  $AB$  and the slider  $B$  ( $i = 0, 1, \dots 7$ ).

In the same way, the trajectory of point  $C$ , which lies on the connecting rod  $AB$ , is constructed. For this, from points  $A_i$  arcs are drawn on the corresponding positions  $A_iB_i$  with radius  $AC$ . By determining points  $C_i$  and connecting them with a smooth curve, we obtain the trajectory of point  $C$ . Since point  $C$  lies on the connecting rod, its trajectory is called the connecting-rod curve.

Connecting-rod curves are widely used in modern engineering to determine the corresponding motions of actuators of mechanisms and machines. For example, in medical equipment (X-ray machines with moving tables), in industrial robots, in assembly lines of automobile factories. In all these cases, correct representation of motion ensures high accuracy and reliability of equipment operation. Fig. 2.2 shows examples of connecting-rod curves.

### 2.3 Construction of Velocity and Acceleration Diagrams

In the previous subsection, we examined how position diagrams of mechanism links are constructed. However, for a complete kinematic analysis, this is not sufficient, since for an engineer it is important to know not only where a particular point will be at a given moment in time, but also at what velocity and acceleration it moves. These parameters directly affect the loads in the parts, their wear resistance, energy consumption, and the reliability of the entire mechanism.

In practice, *the graph-analytical method* – the method of velocity and acceleration diagrams – has found wide application for determining velocities and accelerations.

Його сутність полягає в тому, що замість складних обчислень усі відносини між швидкостями та прискореннями виражаються через геометричні побудови на кресленні. Таким чином, завдання, яке могло б вимагати довгих алгебраїчних розрахунків, зводиться до побудови векторних діаграм.

Основні переваги цього методу

- точність – за умови правильно виконаного креслення похибки мінімальні;
- наочність – студент чи інженер буквально «бачить» швидкості та прискорення у вигляді векторів;
- простота у виконанні – відсутня необхідність у складних математичних викладках, достатньо знань з геометрії;
- універсальність – метод підходить як для простих навчальних прикладів, так і для аналізу складних промислових механізмів.

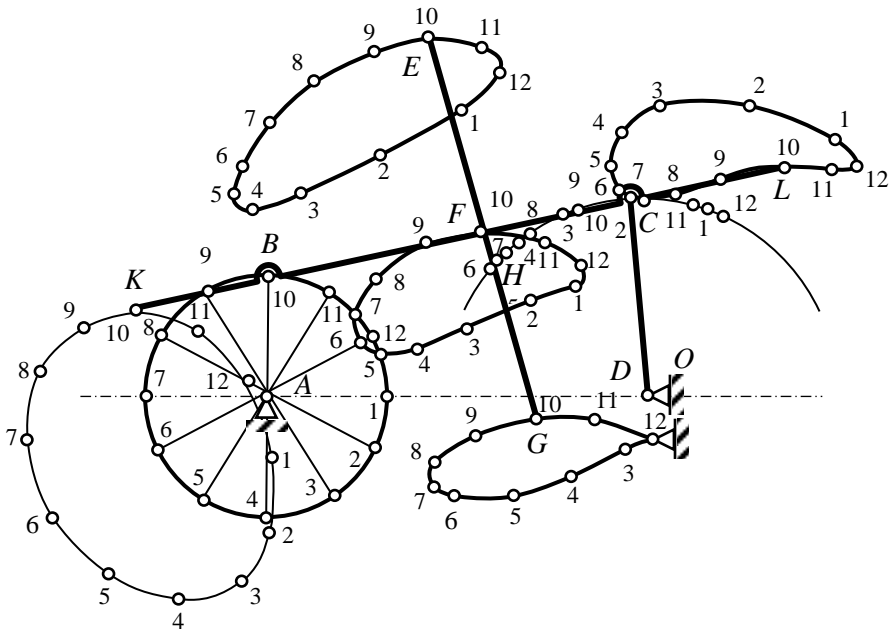


Рис. 2.2. Приклади шатунних кривих шарнірного чотириланкового механізму

Its essence lies in the fact that instead of complex calculations, all relationships between velocities and accelerations are expressed through geometric constructions in the drawing. Thus, a problem that could require lengthy algebraic computations is reduced to the construction of vector diagrams.

The main advantages of this method are:

- accuracy – provided the drawing is made correctly, errors are minimal;
- clarity – the student or engineer literally “sees” velocities and accelerations in the form of vectors;
- simplicity – there is no need for complex mathematical derivations, knowledge of geometry is sufficient;
- versatility – the method is suitable both for simple educational examples and for the analysis of complex industrial mechanisms.

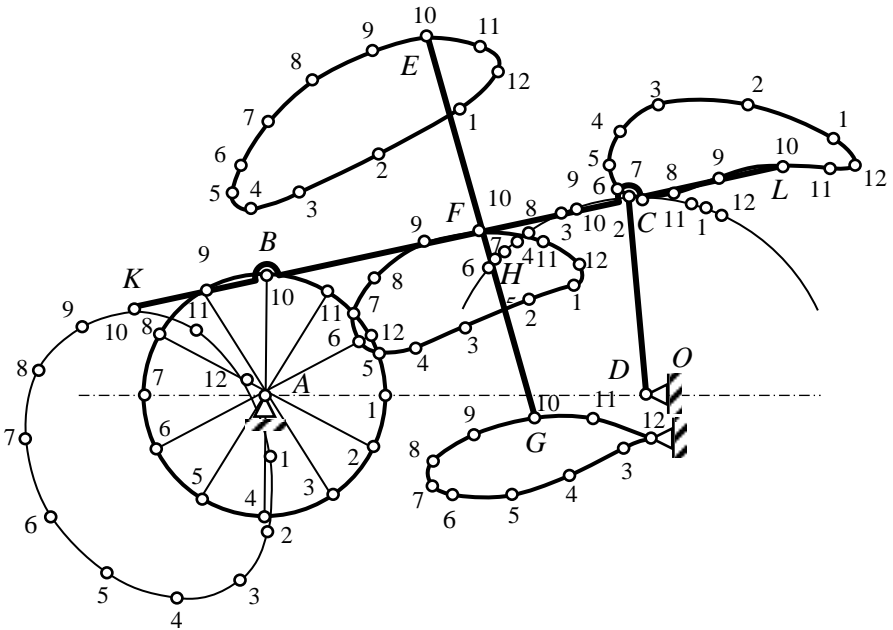


Fig. 2.2. Examples of connecting-rod curves of a four-bar hinge mechanism

У сучасній техніці цей метод не втратив актуальності, навіть попри широке використання комп'ютерних програм. Наприклад, у CAD-системах (SolidWorks Motion, ANSYS, CATIA) для верифікації результатів чисельного моделювання досі застосовуються аналогії з побудовами планів швидкостей і прискорень, які допомагають перевірити правильність алгоритмів.

Для кращого розуміння можна уявити роботу автомобільного двигуна: положення поршня легко визначити по діаграмі кривошипно-повзунного механізму, але для розрахунку навантажень на шатун чи палець потрібно знати швидкість і прискорення. Саме план швидкостей і прискорень дає змогу отримати ці величини без довгих обчислень.

Розглянемо побудову плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3, а), для якого задані розміри ланок і закон руху кривошипа  $OA$ , ( $\omega_1 = \text{const}$ ) та кут  $\varphi_1$ . Цей механізм складається з трьох рухомих ланок, які здійснюють: 1 – кривошип  $OA$  – обертальний рух навколо центра нерухомого шарніра  $O$ ; 2 – шатун  $AB$  – складний рух; 3 – повзун  $B$  – зворотно-поступальний рух відносно нерухомих напрямних. Четверта ланка цього механізму нерухома і називається стояком.

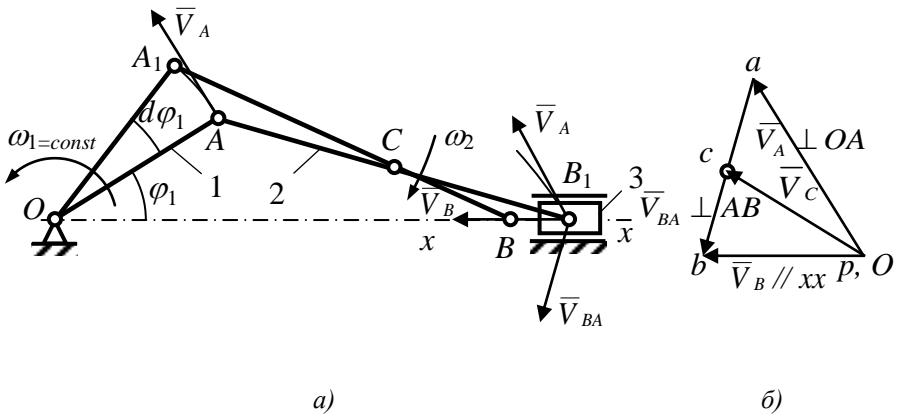


Рис. 2.3. Побудова плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму

Щоб побудувати план швидкостей механізму, спочатку будемо в деякому вибраному масштабі довжини (він визначається за формулою 7) і заданому куту  $\varphi_1$  положенні кривошипа, схему механізму.

In modern engineering, this method has not lost its relevance, even despite the widespread use of computer programs. For example, in CAD systems (SolidWorks Motion, ANSYS, CATIA), analogies with the construction of velocity and acceleration diagrams are still used to verify the results of numerical modeling and help validate algorithms.

To better understand, one can imagine the operation of a car engine: the position of the piston can be easily determined from the diagram of the crank-slider mechanism, but to calculate the loads on the connecting rod or pin, it is necessary to know velocity and acceleration. It is precisely the velocity and acceleration diagram that makes it possible to obtain these quantities without lengthy calculations.

Let us consider the construction of the velocity diagram of a crank-slider mechanism (Fig. 2.3, a), for which the dimensions of the links and the law of motion of the crank  $OA$  ( $\omega_1 = const$ ) and angle  $\varphi_1$  are given. This mechanism consists of three moving links that perform the following:

1 – the crank  $OA$  performs rotational motion around the center of the fixed hinge  $O$ ; 2 – the connecting rod  $AB$  performs complex motion; 3 – the slider  $B$  performs reciprocating translational motion relative to fixed guides. The fourth link of this mechanism is fixed and is called the frame

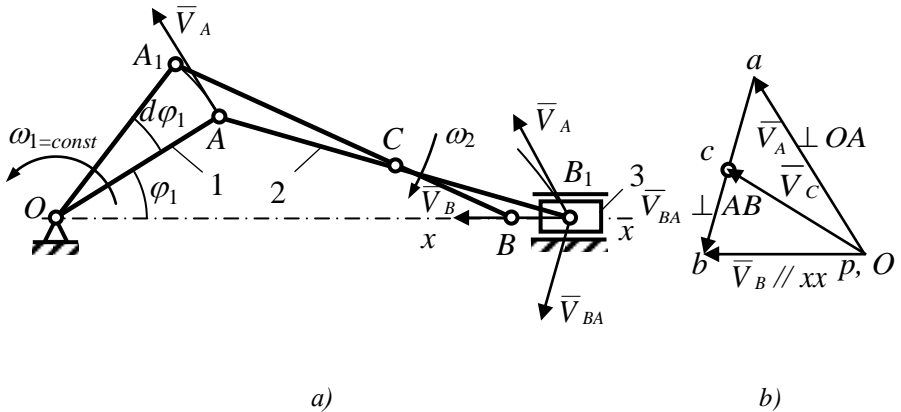


Fig. 2.3. Construction of the velocity diagram of a crank-slider mechanism

To construct the velocity diagram of a mechanism, we first draw, at a chosen scale of lengths (determined by formula 7) and at a given angle  $\varphi_1$  of the crank, the diagram of the mechanism.

Знаючи кутову швидкість  $\omega_1$  кривошипа  $OA$  і його дійсну довжину  $l_{OA}$ , знаходимо модуль швидкості точки  $A$  за формулою  $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$ .

Вектор  $\bar{V}_A$  направлений перпендикулярно до кривошипа  $OA$  в бік його руху. Вибираємо відрізок  $pa$ , бажано у межах 80... 120 мм, і визначаємо масштаб швидкостей за формулою:

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa}. \quad (8)$$

Після чого цей масштаб закругляємо до величини  $(1, 2, 4, 5, 25, 125)^{\pm k}$ . Відрізок  $pa$  зображує на плані швидкості точки  $A$  (рис. 2.3, б.). Враховуючи, що шатун рухається плоско-паралельно, то можемо записати аналітичне рівняння з визначення швидкості точки  $B$ :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}. \quad (9)$$

Це рівняння розв'язується графічно за формулою побудови плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму. Для визначення швидкостей  $\bar{V}_B$  і  $\bar{V}_{BA}$  проводимо через точку  $a$  (рис. 2.3, б) лінію, яка показує напрям відносної швидкості  $\bar{V}_{BA}$  (перпендикулярно  $AB$ ), а з полюса  $p$  – лінію, яка паралельна напрям руху повзуна  $B$  ( $\parallel x-x$ ). Точка перетину цих ліній визначає точку  $b$  – кінець векторів  $\bar{V}_B$  і  $\bar{V}_{BA}$ . Відрізок  $ab$  не тільки визначає у масштабі модуль відносної швидкості  $V_{AB} = ab \cdot \mu_V$ , але одночасно він є планом швидкостей шатуна  $AB$ . А тому точка  $C$ , яка лежить на ньому, на плані буде, згідно з теоремою подібності лежати на відріжку  $ab$ . Склавши пропорцію:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{l_{AB}}{l_{AC}}. \quad (10)$$

знаходимо довжину відрізка  $ac$ , який відкладаємо на плані швидкостей, з'єднавши точку  $c$  з полюсом  $p$ , тобто  $V_C = pc \cdot \mu_V$ .

Knowing the angular velocity  $\omega_1$  of the crank  $OA$  and its actual length  $l_{oa}$ , we find the magnitude of the velocity of point  $A$  using the formula:  $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$ . The vector  $\vec{V}_A$  is directed perpendicular to the crank  $OA$  in the direction of its motion. We choose a segment  $pa$ , preferably within 80...120 mm, and determine the velocity scale using the formula:

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa}. \quad (8)$$

Afterward, this scale is rounded to a convenient value (1, 2, 4, 5, 25, 125)<sup>±k</sup>. The segment  $pa$  represents, on the velocity diagram, the velocity of point  $A$  (Fig. 2.3, *b*). Considering that the connecting rod moves in a plane-parallel manner, we can write the analytical equation for the velocity of point  $B$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (9)$$

This equation is solved graphically according to the construction rule of the velocity diagram of the crank-slider mechanism. To determine the velocities  $\vec{V}_B$  and  $\vec{V}_{BA}$  we draw from point  $a$  (Fig. 2.3, *b*) a line indicating the direction of relative velocity  $\vec{V}_{BA}$  (perpendicular to  $AB$ ), and from the pole  $p$  a line parallel to the direction of motion of the slider  $B$  ( $\parallel x-x$ ). The intersection of these lines determines point  $b$  – the end of vectors  $\vec{V}_B$  and  $\vec{V}_{BA}$ . The segment  $ab$  not only determines, in scale, the magnitude of the relative velocity  $V_{AB} = ab \cdot \mu_V$ , but it is also the velocity diagram of the connecting rod  $AB$ . Therefore, point  $C$ , lying on it, will on the velocity diagram also lie on the segment  $ab$  in accordance with the similarity theorem. By forming the proportion:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{l_{AB}}{l_{AC}}. \quad (10)$$

we find the length of segment  $ac$ , which we mark on the velocity diagram, joining point  $c$  with the pole  $p$ , thus  $V_C = pc \cdot \mu_V$ .

Планом швидкостей кривошипа  $OA$  буде відрізок  $pa$  (точка  $O$  нерухома і тому вона потрапила в полюс  $p$ ), повзуна  $B$  – точка  $v$  (усі точки повзуна мають однакову швидкість  $\bar{V}_B$ ).

Знайшовши лінійні швидкості всіх точок ланок механізму, можна знайти кутові швидкості. У нашому випадку кутова швидкість шатуна  $AB$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_V}{l_{AB}}. \quad (11)$$

Для визначення напрямку кутової швидкості  $\omega_2$  переносимо вектор швидкості  $\bar{V}_{BA}$  у точку  $B$  і розглядаємо рух точки  $B$  відносно точки  $A$  у напрямі швидкості  $\bar{V}_{BA}$ . У нашому випадку (рис. 2.3,  $a$ ) кутова швидкість  $\omega_2$  напрямлена за годинниковою стрілкою.

Розглянемо методику побудови планів прискорень на прикладі кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3). Вихідними даними для побудови плану прискорень є положення ланок механізму і план швидкостей. Рівняння, які використовуються при побудові плану прискорень, відрізняються тільки тим, що повні прискорення точки розкладають на окремі складові. У нашому випадку (рис. 2.4,  $a$ ) повним прискоренням точки  $A$  є геометрична сума нормального (доцентрового) і дотичного (тангенціального) прискорення:

$$\overline{a_A} = \overline{a_{AO}} = \overline{a_{AO}^n} + \overline{a_{AO}^r}. \quad (12)$$

де  $\overline{a_{AO}}$  – прискорення точки  $A$  при обертанні кривошипа  $OA$  навколо точки  $O$ .

Нормальне прискорення  $\overline{a_{AO}^n}$  напрямлене по лінії  $AO$  до центра обертання кривошипа  $O$ , дотичне  $\overline{a_{AO}^r}$  – перпендикулярно до  $AO$  у бік, який відповідає напрямку кутового прискорення  $\varepsilon_1$  кривошипа  $OA$ . Модулі цих прискорень знаходять із співвідношень:

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}; \quad a_{AO}^r = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}. \quad (13)$$

The velocity diagram of the crank  $OA$  is the segment  $pa$  (point  $O$  is fixed, so it coincides with the pole  $p$ ), and the velocity of the slider  $B$  is represented by point  $v$  (all points of the slider have the same velocity  $\bar{V}_B$ ).

Having found the linear velocities of all points of the mechanism's links, we can determine the angular velocities. In our case, the angular velocity of the connecting rod  $AB$  is:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_V}{l_{AB}}. \quad (11)$$

To determine the direction of angular velocity  $\omega_2$ , we transfer the velocity vector  $\bar{V}_{BA}$  to point  $B$  and consider the motion of point  $B$  relative to point  $A$  in the direction of velocity  $\bar{V}_{BA}$ . In our case (Fig. 2.3,  $a$ ), the angular velocity  $\omega_2$  is directed clockwise.

Now let us consider the procedure for constructing acceleration diagrams using the example of a crank-slider mechanism (Fig. 2.3). The initial data for constructing the acceleration diagram are the positions of the mechanism's links and the velocity diagram. The equations used for constructing the acceleration diagram differ only in that the total acceleration of a point is decomposed into separate components. In our case (Fig. 2.4,  $a$ ), the total acceleration of point  $A$  is the geometric sum of the normal (centripetal) and tangential accelerations:

$$\overline{a_A} = \overline{a_{AO}^n} + \overline{a_{AO}^\tau}. \quad (12)$$

where  $\overline{a_{AO}^n}$  – is the acceleration of point  $A$  when the crank  $OA$  rotates around point  $O$ .

The normal acceleration  $\overline{a_{AO}^n}$  is directed along line  $AO$  toward the center of rotation of the crank  $O$ , the tangential acceleration  $\overline{a_{AO}^\tau}$  – is perpendicular to  $AO$  in the direction corresponding to the angular acceleration  $\varepsilon_1$  of the crank  $OA$ . The magnitudes of these accelerations are found using the relations:

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}; \quad a_{AO}^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}. \quad (13)$$

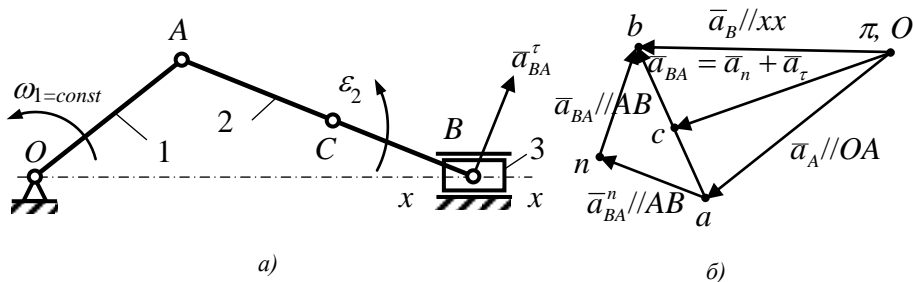


Рис. 2.4. Побудова плану прискорень кривошипно-повзунного механізму

Якщо кривошип  $OA$  обертається рівномірно ( $\omega_1 = const$ ), то

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$$

а отже, у нашому випадку:  $a_{AO}^\tau = 0$

тобто прискорення точки  $A$  чисто нормально  $\overline{a_A} = \overline{a_{AO}^n}$ .

Узявши деяку точку  $\pi$  за полюс плану прискорень (рис. 2.4, б), відкладаємо вектор, який зображує нормальне прискорення точки  $A$  у вигляді відрізка  $\pi a$ , який бажано приймати у межах 80... 120 мм.

Тоді масштаб (масштабний коефіцієнт),  $\frac{m/c^2}{mm}$ :

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} \quad (14)$$

Прискорення точки  $B$  знаходимо з рівняння

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}} \quad (15)$$

У цьому рівнянні вектор прискорення  $\overline{a_B}$  напрямлений вздовж прямої  $x - x$ ; прискорення  $\overline{a_{BA}}$  розкладаємо на дві складові:

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$$

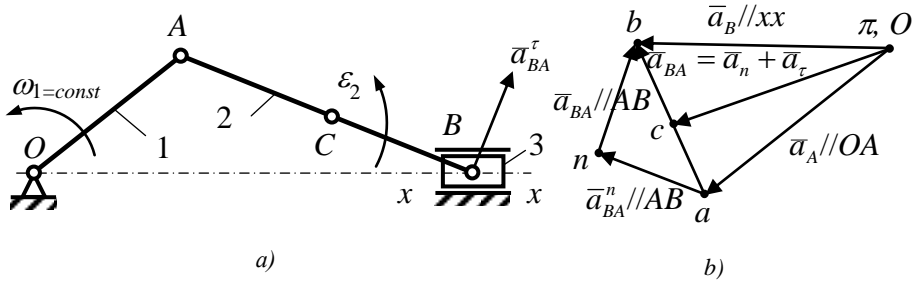


Fig. 2.4. Construction of the acceleration diagram of a crank-slider mechanism

If the crank  $OA$  rotates uniformly ( $\omega_1 = \text{const}$ ), then

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$$

and therefore in our case:  $a_{AO}^\tau = 0$

i.e., the acceleration of point  $A$  is purely normal.  $\overline{a_A} = \overline{a_{AO}^n}$ .

Taking a point  $\pi$  as the pole of the acceleration diagram (Fig. 2.4, b), we lay off a vector representing the normal acceleration of point  $A$  in the form of the segment  $\pi a$ , which should preferably be within 80...120 mm.

Then the scale (scale coefficient),  $\frac{\text{M}/\text{c}^2}{\text{MM}}$  is:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} \quad (14)$$

The acceleration of point  $B$  is determined from the equation:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}} \quad (15)$$

In this equation, the acceleration vector  $\overline{a_B}$  is directed along the straight line  $x - x$ ; the relative acceleration  $\overline{a_{BA}}$  is decomposed into two components:

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$$

Тоді (15) можна записати так:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}. \quad (16)$$

Вектор нормального прискорення  $\overline{a_{AO}^n}$  напрямлений вдовж лінії  $AB$

від точки  $B$  до точки  $A$ , а його модуль:  $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$ .

На плані прискорень  $\overline{a_{BA}^n}$  зображено відрізком:

$$a_n = \frac{a_{BA}}{\mu_a},$$

який прикладено своїм початком у точці  $a$  (згідно з правилом додавання векторів). Через його кінець (точку  $n$ ) проводимо напрям дотичного прискорення  $\overline{a_{BA}^\tau}$ . Він перпендикулярний до лінії  $AB$  ( $\overline{a_{BA}^\tau}$  перпендикулярний  $\overline{a_{BA}^n}$ ). І нарешті, через полюс  $\pi$  проводимо напрям прискорення точки  $B$  (паралельно  $x - x$ ), тоді точка перетину напрямів прискорень  $\overline{a_{BA}^n}$  і  $\overline{a_{BA}^\tau}$  дасть точку  $b$ . З'єднавши точки  $a$  і  $b$ , знайдемо вектор повного відносного прискорення  $\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$  і цим самим побудуємо план прискорень шатуна  $AB$ .

Положення точки  $C$  на плані прискорень можна визначити методом подібності, склавши пропорцію (10), з якої визначаємо відрізок  $ac$ . Тоді прискорення точки  $C$ :

$$a_c = \pi c \cdot \mu_a.$$

Модуль кутового прискорення ланки 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \frac{nb \cdot \mu_a}{l_{AB}}.$$

Для визначення напрямку  $\varepsilon_2$  переносимо вектор дотичного прискорення  $\overline{a_{BA}^\tau}$  у точку  $B$  (рис. 2.4,  $a$ ) і спостерігаємо, в який бік цей вектор обертає шатун  $AB$  відносно вибраного полюса (точка  $A$ ).

Then equation (15) can be written as:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau} \cdot \quad (16)$$

The vector of normal acceleration  $\overline{a_{AO}^n}$  is directed along the line  $AB$  from point  $B$  toward point  $A$ , and its magnitude is:  $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$ .

On the acceleration diagram  $\overline{a_{BA}^n}$  is represented by the segment:

$$a_n = \frac{a_{BA}}{\mu_a},$$

applied with its beginning at point  $a$  (according to the vector addition rule). Through its end (point  $n$ ) we draw the direction of the tangential acceleration  $\overline{a_{BA}^\tau}$ . It is perpendicular to line  $AB$  ( $\overline{a_{BA}^\tau} \perp \overline{a_{BA}^n}$ ). Finally, through the pole  $\pi$  we draw the direction of the acceleration of point  $B$  (parallel to  $x - x$ ); then the intersection of the directions of accelerations  $\overline{a_{BA}^n}$  i  $\overline{a_{BA}^\tau}$  gives point  $b$ . Connecting points  $a$  and  $b$ , we obtain the vector of the full relative acceleration  $\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$  and thus we construct the acceleration diagram of the connecting rod  $AB$ .

The position of point  $C$  on the acceleration diagram can be determined by the method of similarity, forming proportion (10), from which segment  $ac$  is defined. Then the acceleration of point  $C$  is:

$$a_c = \pi c \cdot \mu_a.$$

The magnitude of the angular acceleration of link 2 is:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \frac{nb \cdot \mu_a}{l_{AB}}.$$

To determine the direction of  $\varepsilon_2$ , we transfer the vector of tangential acceleration  $\overline{a_{BA}^\tau}$  to point  $B$  (Fig. 2.4,  $a$ ), observe in which direction this vector rotates the connecting rod  $AB$  relative to the chosen pole (point  $A$ ).

Таким чином, побудова планів швидкостей і прискорень дозволяє не лише провести точні розрахунки, а й отримати наочну картину руху механізму. Для студента це означає можливість «побачити механізм на папері» ще до його виготовлення. Важливо розуміти, що всі ці побудови не є абстрактними вправами: саме так інженери прогнозують роботу двигунів, роботизованих маніпуляторів чи навіть складних побутових пристроїв.

Наприклад, у парасольці, яка розкривається завдяки шарнірним ланкам, план швидкостей допоміг би передбачити, чи не буде механізм заїдати в момент різкого руху; у складному дивані-трансформері правильне визначення прискорень рухомих ланок дозволяє уникнути зайвих зусиль для користувача та збільшити термін служби меблів.

Тобто вивчення планів швидкостей і прискорень допомагає майбутньому інженеру не лише працювати з формулами, а й навчитися бачити приховану «динаміку життя» у найзвичайніших речах, від двигуна автомобіля до офісного стільця.

### Контрольні запитання

1. Які основні задачі кінематичного дослідження механізмів?
2. Чим відрізняється кінематичне дослідження від динамічного?
3. Які методи кінематичного аналізу механізмів існують?
4. У чому полягає особливість графоаналітичного методу?
5. Що таке закон руху ведучої ланки і як він задається?
6. Як визначається період (цикл) роботи механізму?
7. Що таке масштабний коефіцієнт і як він використовується у кінематиці?
8. Як правильно вибрати масштаб при побудові планів механізму?
9. У чому полягає суть методу дугових засічок?
10. Як визначається початкове положення механізму?
11. Що таке шатунна крива і для чого вона використовується?
12. Чому побудова планів механізму є важливою для подальших розрахунків?
13. У чому переваги методу планів швидкостей та прискорень?
14. Як визначається масштаб швидкостей?

Thus, the construction of velocity and acceleration diagrams allows not only accurate calculations but also a clear visualization of the mechanism's motion. For a student, this means the ability to "see the mechanism on paper" even before it is manufactured. It is important to understand that all these constructions are not abstract exercises: this is precisely how engineers predict the operation of engines, robotic manipulators, and even complex household devices.

For example, in an umbrella that opens thanks to hinged links, a velocity diagram would help predict whether the mechanism might jam at the moment of a sudden movement; in a complex sofa-bed transformer, correctly determining the accelerations of moving links helps to avoid unnecessary user effort and increases the lifespan of the furniture.

In other words, studying velocity and acceleration diagrams helps a future engineer not only to work with formulas but also to learn to see the hidden "dynamics of life" in the most ordinary things – from a car engine to an office chair.

### **Control Questions**

1. What are the main tasks of kinematic analysis of mechanisms?
2. How does kinematic analysis differ from dynamic analysis?
3. What methods of kinematic analysis of mechanisms exist?
4. What is the peculiarity of the graph-analytical method?
5. What is the law of motion of the driving link and how is it defined?
6. How is the period (cycle) of a mechanism's operation determined?
7. What is a scale coefficient and how is it used in kinematics?
8. How is the scale correctly chosen when constructing mechanism diagrams?
9. What is the essence of the arc method?
10. How is the initial position of a mechanism determined?
11. What is a connecting-rod curve and what is it used for?
12. Why is the construction of mechanism diagrams important for further calculations?
13. What are the advantages of the velocity and acceleration diagram method?
14. How is the velocity scale determined?

15. Як будують план швидкостей для кривошипно-повзунного механізму?
16. Які складові входять до прискорення точки механізму?
17. Чим відрізняється нормальне та дотичне прискорення?
18. Як визначають напрямки кутової швидкості ланки?
19. Які практичні приклади застосування кінематичного аналізу ви можете навести з побутової або виробничої техніки?
20. Чому важливо поєднувати графічні й аналітичні методи дослідження?

15. How is the velocity diagram constructed for a crank-slider mechanism?
16. What components make up the acceleration of a point of a mechanism?
17. How do normal and tangential acceleration differ?
18. How is the direction of angular velocity of a link determined?
19. What practical examples of applying kinematic analysis can you give from household or industrial technology?
20. Why is it important to combine graphical and analytical research methods?

### 3 Кінематичне дослідження передач

#### 3.1 Прості зубчасті механізми

У різних машинах і передачах широко застосовуються механізми для відтворення обертального руху з постійним передаточним відношенням між двома по-різному заданими осями.

Такі механізми називають *механізмами передач обертального руху*, або скорочено – *механізмами передач*. Їх завдання полягає в тому, щоб узгодити рух різних ланок машини: зменшити чи збільшити швидкість обертання, передати обертання на інший вал або змінити напрям руху.

Найпростішим механізмом передачі з твердими ланками є *триланковий механізм*, який складається із двох рухомих ланок, що входять у дві обертальні і одну вищу пару. Це означає, що зв'язок між ланками дозволяє їм обертатися відносно одна одної і при цьому зберігати синхронність.

Відношення кутової швидкості однієї ланки до кутової швидкості другої ланки у механізмі з одним ступенем волі називається *передаточним відношенням*. Саме воно визначає, скільки разів ведуче колесо обернеться відносно веденого. Наприклад, якщо передаточне відношення дорівнює 1:3, то при одному оберті ведучого колеса ведене зробить три оберти. Широке застосування в машинах і приладах мають *зубчасті механізми* (рис. 3.1), оскільки зубчасте зчеплення забезпечує точність, надійність і відсутність прослизання. На відміну від пасових або ланцюгових передач, зубчасті здатні передавати значні навантаження при компактних розмірах.

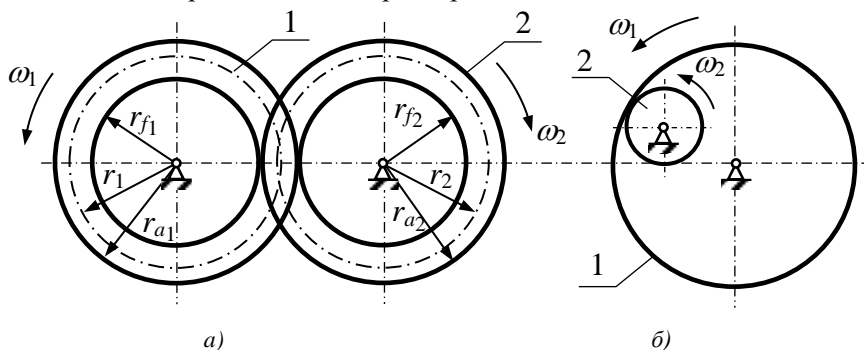


Рис. 3.1. Зубчасті механізми

### 3 Kinematic Analysis of Gears

#### 3.1 Simple Gear Mechanisms

In various machines and transmissions, mechanisms are widely used to reproduce rotary motion with a constant transmission ratio between two shafts set at different axes.

Such mechanisms are called *rotation transmission mechanisms*, or simply *gearing mechanisms*. Their purpose is to coordinate the motion of different machine links: to decrease or increase rotational speed, to transmit rotation to another shaft, or to change the direction of motion.

The simplest transmission mechanism with rigid links is a *three-link mechanism*, which consists of two moving links connected by two revolute and one higher pair. This means that the connection between the links allows them to rotate relative to each other while maintaining synchronism.

The ratio of the angular velocity of one link to the angular velocity of another link in a mechanism with one degree of freedom is called the *transmission ratio*. It determines how many times the driving gear will rotate relative to the driven gear. For example, if the transmission ratio is 1:3, then for one revolution of the driver gear, the driven gear will make three revolutions. *Gear mechanisms* (Fig. 3.1) are widely used in machines and devices, since gear meshing ensures accuracy, reliability, and absence of slipping. Unlike belt or chain drives, gears can transmit significant loads while remaining compact.

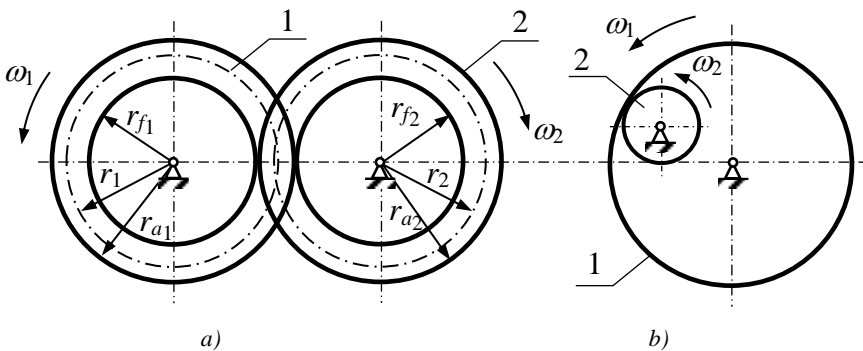


Fig. 3.1. Gear mechanisms

В теорії механізмів зубчастих передач кола радіусами  $r_1$  і  $r_2$  носять назву *початкових кіл*, кола радіусами  $r_{f1}$  і  $r_{f2}$  називаються *колами западин*, кола радіусами  $r_{a1}$  і  $r_{a2}$  – *колами виступів*, або *вершин зубців*. Для двох ланок 1 і 2, які обертаються з кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , передаточне відношення визначається:

при зовнішньому зачепленні (рис. 3.1, а)

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad (17)$$

при внутрішньому зачепленні (рис. 2.16, б)

$$i_{12} = +\frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{n_1}{n_2} = +\frac{r_2}{r_1} = +\frac{z_2}{z_1}. \quad (18)$$

Якщо рух здійснюється між паралельними осями, то *передаточне відношення* має знак “плюс”, якщо кутові швидкості ланок мають однакову направленість (внутрішнє зачеплення) і знак “мінус”, якщо направленість руху протилежна (зовнішнє зачеплення).

Відношення кроку  $P$  зубців до числа  $\pi$  називається *модулем зачеплення* і позначається літерою  $m$ , мм

$$m = \frac{P}{\pi}.$$

Об’єднуючи обидва види зачеплення, формули (17) і (18) можна записати

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{D_2}{D_1}, \quad (19)$$

де  $n_1, n_2$  – кількість обертів за хвилину відповідно ланок 1 і 2;

$z_1, z_2$  – кількість зубців ланок 1 і 2;

$r_1, r_2, D_1, D_2$  – радіуси та діаметри початкових кіл зубчастих коліс.

Крок зубців – це відстань між двома однойменними профілями сусідніх зубців колеса

$$P = m \cdot z.$$

Враховуючи, що  $\pi d = P \cdot z$ , отримаємо  $d = m \cdot z$ .

In the theory of gear transmissions, circles with radii  $r_1$  and  $r_2$  are called *pitch circles*, circles with radii  $r_{f1}$  and  $r_{f2}$  are called root circles, and circles with radii  $r_{a1}$  and  $r_{a2}$  are called *addendum circles* (or *tooth tip circles*). For two links 1 and 2 rotating with angular velocities  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , the transmission ratio is defined as follows:

for external gearing (Fig. 3.1, a):

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad (17)$$

for internal gearing (Fig. 2.16, b):

$$i_{12} = +\frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{n_1}{n_2} = +\frac{r_2}{r_1} = +\frac{z_2}{z_1}. \quad (18)$$

If motion is transmitted between parallel axes, then *the transmission ratio* is *positive* when the angular velocities of the links have the same direction (internal gearing) and *negative* when the directions of motion are opposite (external gearing).

The ratio of *the tooth pitch*  $P$  to  $\pi$  is called *the module of gearing* and is denoted by  $m$  (mm):

$$m = \frac{P}{\pi}.$$

Combining both types of gearing, formulas (17) and (18) can be written as:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{D_2}{D_1}, \quad (19)$$

where  $n_1, n_2$  – number of revolutions per minute of links 1 and 2;

$z_1, z_2$  – number of teeth of links 1 and 2;

$r_1, r_2, D_1, D_2$  – radii and diameters of the pitch circles of the gears.

*The tooth pitch* is the distance between two corresponding profiles of adjacent gear teeth:

$$P = m \cdot z.$$

Considering that  $\pi d = P \cdot z$ , we obtain:  $d = m \cdot z$ .

Зубчасті механізми зустрічаються буквально всюди – від побутових приладів до високотехнологічного обладнання: у годинниках мініатюрні зубчасті колеса забезпечують точний хід стрілок; пральні машини, міксери, електродрелі використовують зубчасті редуктори для регулювання швидкості; в автомобілях коробка передач є класичним прикладом багатоступеневого зубчастого механізму.

Найпростіші зубчасті механізми виконують ключову роль у роботі сучасної техніки. Вивчення принципів їх роботи дозволяє зрозуміти, як улаштовані складні передачі, що застосовуються у промисловості та транспорті. Розглянемо приклади із повсякденного життя.

Електрична м'ясорубка має невеликий електродвигун, який обертається на високій швидкості. Проте для переробки м'яса потрібен значний крутний момент, а не швидкість. Саме тому між двигуном і ножем встановлений зубчастий редуктор. Він зменшує оберти у кілька разів, натомість збільшуючи силу на ножі. Завдяки зубчастим колесам м'ясорубка працює стабільно і не потребує надпотужного двигуна.

Електровелосипед. У більшості моделей використовується мотор-колесо або двигун із редуктором. У редукторних моторах є система планетарних зубчастих передач, яка дозволяє невеликому двигуну обертатися з високою швидкістю, а колесо велосипеда отримує знижені, але потужніші оберти. Це дозволяє велосипеду легко долати підйоми й водночас забезпечувати комфортну швидкість руху.

Обидва приклади показують, що навіть у звичайних побутових приладах чи транспорті можна зустріти роботу зубчастих механізмів. Це дозволяє краще уявити, як теоретичні поняття про передаточне відношення чи роботу триланкового механізму безпосередньо застосовуються у щоденному житті.

### **3.2 Рядові зубчасті механізми**

У реальних машинах часто виникає потреба передати обертання з дуже великим передаточним відношенням. Наприклад, у побутових міксерах, пральних машинах чи автомобільних коробках передач не завжди достатньо однієї пари шестерень. Адже одна ступінь зубчастої передачі може забезпечити передаточне відношення лише в межах від 1 до 12.5. Якщо ж необхідно зменшити чи збільшити швидкість у десятки або навіть сотні разів, застосовують комбінації декількох пар зубчастих коліс.

Gear mechanisms are found literally everywhere – from household appliances to high-tech equipment: in watches, miniature gears ensure precise movement of the hands; washing machines, mixers, and electric drills use gear reducers to regulate speed; in cars, the gearbox is a classic example of a multi-stage gear mechanism.

Thus, even the simplest gear mechanisms play a key role in the operation of modern technology. Studying the principles of their operation allows us to understand the structure of more complex transmissions used in industry and transport. To make the picture clearer, let us consider two examples from everyday life.

Electric meat grinder. Inside such a device there is a small electric motor that rotates at high speed. However, for processing meat, significant torque, not speed, is required. That is why a gear reducer is installed between the motor and the knife. It reduces the revolutions several times while increasing the force on the knife. Thanks to the gears, the meat grinder works smoothly, without jerks, and does not require an overpowered motor.

Electric bicycle. Most models use a hub motor or a geared motor. Geared motors have a system of planetary gears that allows a small motor to rotate at high speed, while the bicycle wheel receives reduced but more powerful revolutions. This enables the bicycle to easily climb hills and at the same time provide a comfortable riding speed.

Both examples show that even in ordinary household appliances or vehicles, the operation of gear mechanisms can be observed. This helps better visualize how theoretical concepts of transmission ratios or the functioning of a three-link mechanism are directly applied in everyday life.

### **3.2 Compound Gear Mechanisms**

In real machines, there is often a need to transmit rotation with a very large transmission ratio. For example, in household mixers, washing machines, or automobile gearboxes, a single gear pair is not always sufficient. This is because one stage of gear transmission can provide a transmission ratio only within the range of 1 to 12.5. If it is necessary to reduce or increase speed by tens or even hundreds of times, combinations of several pairs of gears are used.

Такі механізми називають *рядовими зубчастими передачами* або просто серіями зубчастих коліс. Вони складаються з кількох ступенів (послідовних пар коліс), які працюють одна за одною. При цьому всі вали встановлені у нерухомих підшипниках, що забезпечує стабільність і надійність роботи.

Роглянемо це на простому прикладі. Уявімо велосипед із кількома передачами. Коли ми крутимо педалі, невелика зірочка (ведуча) через ланцюг обертає більшу зірочку (ведену), і ми отримуємо вигравш у силі. Якщо ж у механізмі потрібно ще більше зменшити швидкість, додається нова пара коліс – і так утворюється цілий ряд передач.

Ще один приклад – автомобільна коробка передач. У ній використовується декілька рядів шестерень, що дозволяють вибирати різні передаточні відношення. На першій передачі автомобіль має найбільший крутний момент (завдяки великому передаточному числу), а на п'ятій чи шостій – вищу швидкість при меншій силі.

Таким чином, рядові зубчасті механізми є невід'ємною частиною сучасної техніки: від побутових приладів до промислових установок. Вони дозволяють оптимально поєднувати швидкість і силу, роблячи роботу машин більш ефективною.

Визначимо передаточне відношення рядового механізму, який складається із трьох пар циліндричних зубчастих коліс (рис. 3.2).

Колеса 2-3 і 4-5 жорстко пов'язані між собою, тобто обертаються з однаковою кутовою швидкістю ( $\omega_2 = \omega_3$ ,  $\omega_4 = \omega_5$ ). Загальне передаточне відношення механізму  $i_{16} = -\frac{\omega_1}{\omega_6}$ . Запишемо

передаточне відношення для кожної зубчастої пари

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{34} = -\frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad i_{56} = -\frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

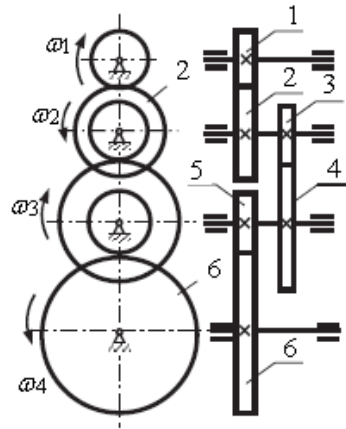


Рис. 3.2. Рядовий зубчастий механізм

Such mechanisms are called *compound gear trains*, or simply *gear series*. They consist of several stages (consecutive gear pairs) that operate one after another. At the same time, all shafts are mounted in fixed bearings, which ensures stability and reliability of operation.

To understand this more easily, imagine a bicycle with multiple gears. When we pedal, a small sprocket (driver) through the chain turns a larger sprocket (driven), and we gain torque. If the mechanism needs to further reduce speed, another gear pair is added – and thus a whole gear train is formed.

Another example is the automobile gearbox. It uses several gear trains that allow selecting different transmission ratios. In first gear, the car has the greatest torque (due to a large gear ratio), while in fifth or sixth gear it achieves higher speed with less torque.

Thus, compound gear mechanisms are an integral part of modern technology: from household appliances to industrial equipment. They make it possible to optimally combine speed and force, making the operation of machines more efficient.

Let us determine the transmission ratio of a compound mechanism consisting of three pairs of cylindrical gears (Fig. 3.2).

Gears 2-3 and 4-5 are rigidly connected, i.e., they rotate with the same angular velocity ( $\omega_2 = \omega_3$ ,  $\omega_4 = \omega_5$ ). The overall transmission ratio of the mechanism is:

$$i_{16} = -\frac{\omega_1}{\omega_6}. \text{ Write the transmission}$$

ratio for each gear pair:

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{34} = -\frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3};$$

$$i_{56} = -\frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

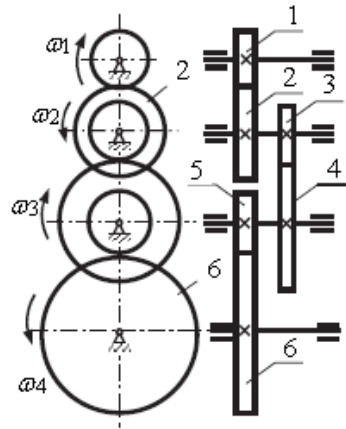


Fig. 3.2. Compound gear mechanism

Перемноживши праві і ліві частини цих рівнянь, дістанемо:

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_5}{\omega_6}\right) = -i_{16}. \quad (20)$$

Отже, передаточне відношення рядового зубчастого механізму дорівнює добутку передаточних відношень окремих зубчастих пар. Знак передаточного відношення рядового механізму при парній кількості зовнішніх зачеплень *додатний*, при непарній кількості – *від’ємний*.

При передачі руху на значні відстані або при необхідності відтворення передаточного відношення певного знаку застосовують такі рядові з’єднання коліс, як показано на рис. 3.3.

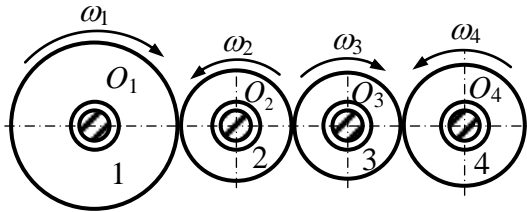


Рис. 3.3 Схема рядового з’єднання зубчастих коліс з паразитними колесами

Загальне передаточне відношення такого з’єднання дорівнює

$$i_{14} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = -\frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Рядові зубчасті механізми достатньо різноманітні (рис.3.4).

Для рядових механізмів з кінчними колесами знак передаточного відношення визначається за *правилом стрілок*: якщо стрілки, які визначають напрямок обертання коліс напрямлені однаково у ведучого і веденого коліс, то знак буде додатним, якщо протилежно – знак буде від’ємним.

Multiplying the left and right sides of these equations, we obtain:

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_5}{\omega_6}\right) = -i_{16}. \quad (20)$$

Thus, the transmission ratio of a compound gear mechanism is equal to the product of the transmission ratios of the individual gear pairs. The sign of the transmission ratio of a compound mechanism is *positive* for an even number of external gear meshes and *negative* for an odd number.

When transmitting motion over significant distances or when it is necessary to obtain a transmission ratio of a certain sign, compound gear connections such as those shown in Fig. 3.3 are used.

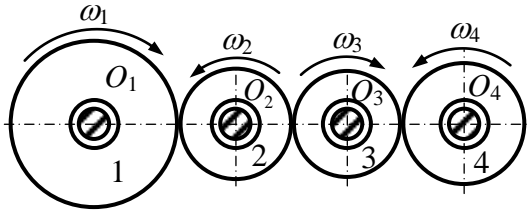


Fig. 3.3. Diagram of a compound gear train with idler gears

The overall transmission ratio of such a connection is:

$$i_{14} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = -\frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Compound gear mechanisms are quite diverse (Fig. 2.19).

For compound mechanisms with bevel gears, the sign of the transmission ratio is determined by *the arrow rule*: if the arrows indicating the direction of rotation of the gears point the same way for the driver and driven gears, the sign will be positive; if they point in opposite directions, the sign will be negative.

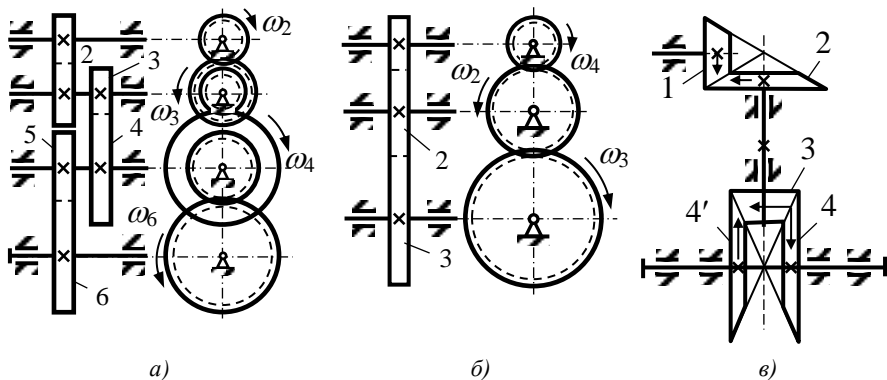


Рис. 3.4. Рядові зубчасті механізми

Визначення цього знаку будемо вести таким чином. У місці стикання коліс 1 і 2 (рис 3.5 або рис. 3.6) поставимо стрілки  $a$  і  $b$ , причому, якщо стрілка  $a$  спрямована від місця стикання, то і стрілка  $b$  повинна бути спрямована від місця стикання (рис. 3.5) або до місця стикання (рис. 3.6).

На колесах  $2'$ , жорстко пов'язаними з колесами 2, в місцях стикання з колесами 3 ставимо стрілку  $c$  того ж напрямку, що і стрілка  $b$ . Тоді стрілка  $d$ , згідно вищевказаній умові, буде мати напрямок: для колеса 3 на рис. 3.5 співпадаючим зі стрілкою  $a$ , а для колеса 3 на рис. 3.6 протилежний стрілці  $a$ . Якщо напрямки стрілок ведучого і веденого коліс співпадають (рис. 3.5), то знак передаточного відношення слід вважати додатним. Якщо ж напрямки цих стрілок протилежні (рис. 3.6), то знак передаточного відношення слід вважати від'ємним.

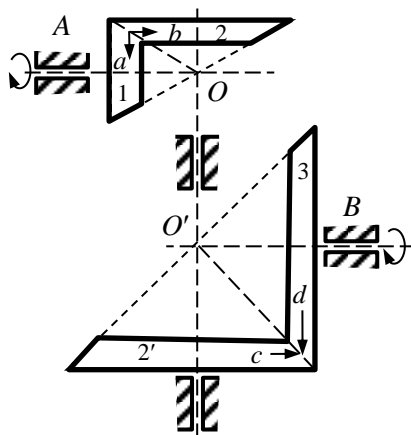


Рис. 3.5 Схема двохступеневої кінцевої передачі з додатним передаточним відношенням

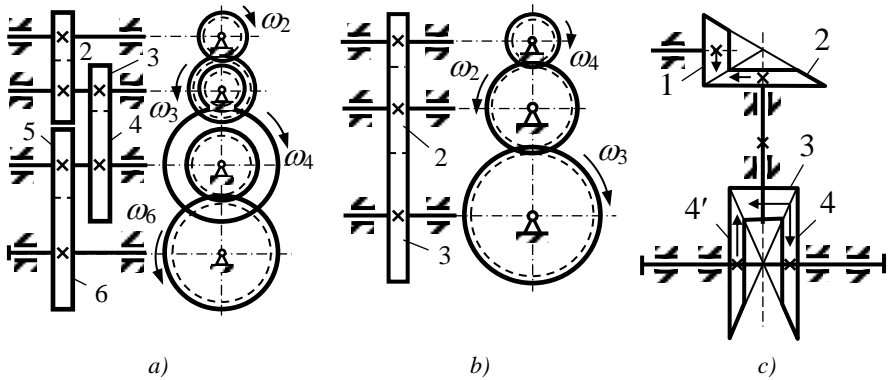


Fig. 3.4. Compound gear mechanisms

The determination of this sign is carried out as follows. At the point of contact of gears 1 and 2 (Fig. 3.5 or Fig. 3.6), we place arrows *a* and *b*. If arrow *a* is directed away from the point of contact, then arrow *b* must also be directed away from the point of contact (Fig. 3.5) or toward the point of contact (Fig. 3.6).

On gears 2', which are rigidly connected with gears 2, at the points of contact with gears 3 we place arrow *c* in the same direction as arrow *b*. Then arrow *d*, according to the above rule, will have the following orientation: for gear 3 in Fig. 3.5, coinciding with arrow *a*, and for gear 3 (Fig. 3.6), opposite to arrow *a*. If the directions of the arrows on the driver and driven gears coincide (Fig. 3.5), then the transmission ratio is considered positive. If the directions of these arrows are opposite (Fig. 3.6), then the transmission ratio is considered negative.

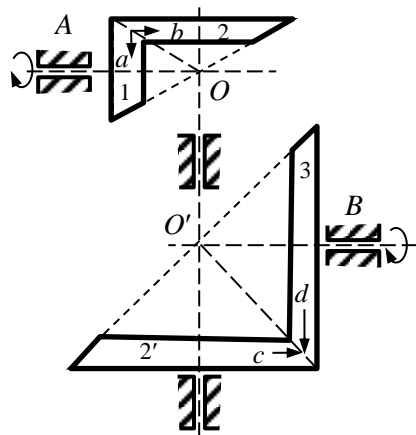


Fig. 3.5. Diagram of a two-stage bevel gear transmission with a positive transmission ratio

Отже передаточне відношення для схеми зображеної на рис. 3.5 набирає вигляду

$$i_{12} = + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

а для схеми зображеної на рис. 3.6 передаточне відношення передачі має від'ємний знак

$$i_{12} = - \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = - \frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

Таким чином, виведені співвідношення показують, що загальне передаточне відношення рядового механізму є результатом послідовного множення відношень окремих зубчастих пар. На практиці це означає, що конструктор може «гратися» з кількістю коліс і їх розташуванням, отримуючи потрібні значення швидкостей і напрямів обертання. Наприклад, у сучасних електромобілях рядові зубчасті передачі використовуються для узгодження високої швидкості обертання електродвигуна з відносно низькою швидкістю коліс. А в побутовій техніці ( від міксерів до електровикруток ) рядові механізми дозволяють отримати необхідний крутний момент без зайвих втрат енергії.

З практичної точки зору важливо пам'ятати: знак передаточного відношення визначає не лише «математику» обертання, а й реальний напрям руху виконавчих органів машини. Це критично, наприклад, для роботизованих маніпуляторів або автоматичних коробок передач у автомобілях, де від узгодженості напряму обертання залежить безпечна та надійна робота всієї системи.

Отже, підсумовуючи: рядові зубчасті механізми – це не лише суха теорія з формулами, а й фундаментальна основа сучасної техніки, яка щодня працює у нашому побуті, транспорті та промисловості.

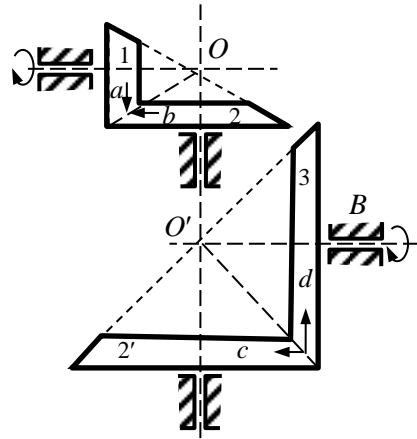


Рис. 3.6. Схема двохступеневої конічної передачі з від'ємним передаточним відношенням

Thus, the transmission ratio for the scheme shown in Fig. 3.5 is expressed as:

$$i_{12} = + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

and for the scheme shown in Fig. 3.6 the transmission ratio has a negative sign:

$$i_{12} = - \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = - \frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

In this way, the derived relationships show that the overall transmission ratio of a compound mechanism is the result of sequential multiplication of the ratios of individual gear pairs. In practice, this means that the designer can “play” with the number of gears and their arrangement to obtain the required values of speeds and rotation directions. For example, in modern electric vehicles, compound gear trains are used to match the high rotational speed of the electric motor with the relatively low rotational speed of the wheels. And in household appliances (from mixers to electric screwdrivers), compound gear mechanisms make it possible to achieve the required torque without unnecessary energy losses.

From a practical point of view, it is important to remember: the sign of the transmission ratio determines not only the “mathematics” of rotation but also the actual direction of motion of the machine’s actuators. This is critical, for instance, in robotic manipulators or automatic transmissions in cars, where the safety and reliability of the entire system depend on the coordination of the rotation direction.

In summary, compound gear mechanisms are not just dry theory with formulas but the fundamental basis of modern technology, working every day in our households, transportation, and industry.

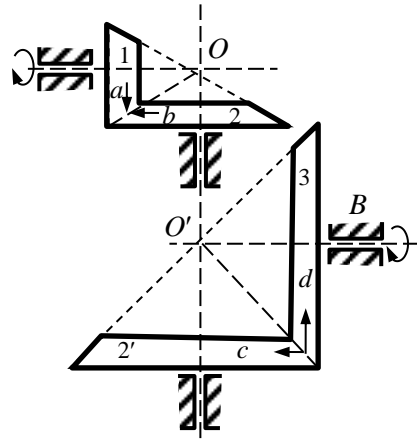


Fig. 3.6. Diagram of a two-stage bevel gear transmission with a negative transmission ratio

### 3.3 Сателітні механізми

Механізми, які мають колеса з рухомими осями, називаються *сателітними*. Сам термін походить від латинського *satelles*, що означає «супутник». Назва підкреслює суть явища: як природні супутники обертаються навколо планет, так і сателіт у механізмі здійснює подвійний рух – він обертається навколо власної осі й одночасно разом зі своєю віссю рухається навколо центрального колеса. Така конструкція надає сателітним механізмам унікальних властивостей, які відрізняють їх від звичайних зубчастих передач із нерухомими осями.

На рис. 3.7 зображено типовий приклад сателітного механізму. У ньому зубчасті колеса 1 і 3, осі яких збігаються з головною геометричною віссю механізму, називаються *центральною колесами*. Колесо 2 виконує складний рух: воно обертається навколо власної осі та водночас переміщується разом зі своєю віссю навколо одного з центральних коліс. Це колесо й називається *сателітом*. Вісь сателіта кріпиться на спеціальному важелі, що отримав назву *води́ло* (позначене  $H$ ). Таким чином, у сателітному механізмі основними ланками є центральні колеса та водило.

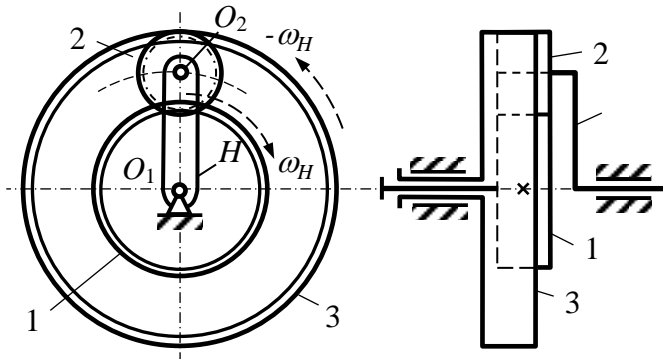


Рис. 3.7. Сателітний механізм

Розглянемо приклад із повсякденного життя. Уявімо велосипедне колесо. Його вісь закріплена нерухомо, і воно обертається лише навколо власної осі. Але якщо вісь зробити рухомою та примусити її одночасно рухатись навколо іншої осі – отримаємо поведінку, подібну до сателіта. Така ідея лежить в основі багатьох сучасних механізмів, включно з автомобільними трансмісіями.

### 3.3 Planetary (Epicyclic) Mechanisms

Mechanisms that have gears with moving axes are called *planetary* mechanisms. The term itself comes from the Latin *satelles*, meaning “satellite.” The name aptly reflects the essence of the phenomenon: just as natural satellites revolve around planets, so too does the planet gear in a mechanism perform a double motion – it rotates around its own axis and at the same time, together with its axis, revolves around the central gear. This design gives planetary mechanisms unique properties that distinguish them from ordinary gear transmissions with fixed axes.

In the example shown in Fig. 3.7, gears 1 and 3, whose axes coincide with the main geometric axis of the mechanism, are called *central gears*. Gear 2 performs complex motion: it rotates about its own axis and at the same time moves with its axis around one of the central gears. This gear is called *the planet gear* (or simply planet). The axis of the planet gear is mounted on a special arm called *the carrier* (denoted  $H$ ). Thus, in a planetary mechanism, the main links are the central gears and the carrier.

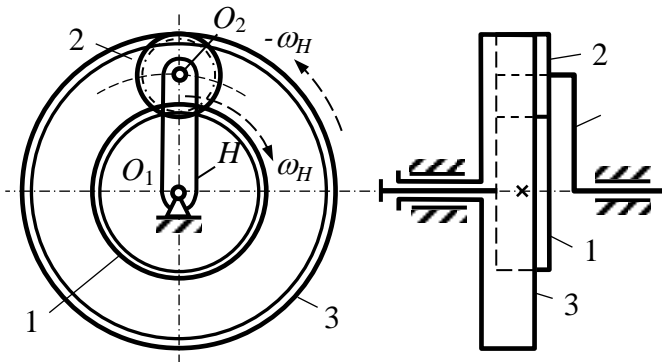


Fig. 3.7. Planetary mechanism

To better understand this, let us consider an everyday example. Imagine a bicycle wheel. Its axis is fixed, and it rotates only around its own axis. But if the axis were made movable and forced to rotate simultaneously around another axis, we would obtain behavior similar to that of a planet gear. This idea underlies many modern mechanisms, including automobile transmissions.

Практичне застосування. Сателітні механізми (особливо їх різновид – планетарні передачі) широко застосовуються у автоматичних коробках передач автомобілів; гібридних та електричних транспортних засобах (де потрібне компактне передавання високого крутного моменту); робототехніці, де важлива компактність і точність рухів; авіаційній техніці, наприклад, у редукторах гелікоптерів.

Завдяки цим властивостям сателітні механізми стали невід’ємним елементом сучасного машинобудування. Їхня компактність і високий коефіцієнт корисної дії дозволяють передавати значні навантаження при відносно малих розмірах механізму.

Ступінь рухомості сателітних механізмів, визначають за стандартними правилами структурного аналізу, але особливість у тому, що наявність водила створює додаткові можливості для формування різних передаточних відношень. У цьому й полягає головна перевага сателітних механізмів: вони забезпечують більшу різноманітність кінематичних схем в межах тих самих геометричних габаритів.

Ступінь рухомості механізму, показано на рис. 3.7:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2. \quad (21)$$

*Сателітні механізми, ступінь волі яких дорівнює двом, називаються диференціальними механізмами.* Це означає, що вони здатні виконувати два незалежні рухи одночасно. Така властивість робить їх особливо цінними в техніці, де потрібно узгоджувати або розподіляти крутний момент між кількома вихідними ланками.

Щоб зрозуміти принцип їх роботи, зручно скористатися так званим *методом оберненого руху*. Він полягає в тому, що ми уявно надаємо всьому механізму додатковий обертальний рух, рівний швидкості водила  $H$ , але у протилежному напрямку ( $-\omega_H$ ). Таким чином, ми «прибираємо» рух водила і переводимо задачу до більш простої - розглядаємо механізм із нерухомими осями. Це спрощує аналіз і дає змогу легко визначити відносні кутові швидкості ланок.

У такому випадку кутові швидкості рухомих ланок відносно водила будуть рівні:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H; \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_H.$$

Індекс  $H$  означає, що водило зупинено.

Practical applications. Planetary mechanisms (especially their subtype – planetary gear trains) are widely used in automatic car transmissions; in hybrid and electric vehicles (where compact transmission of high torque is required); in robotics, where compactness and precise motion are important; and in aviation, for example, in helicopter gear reducers.

Thanks to these properties, planetary mechanisms have become an integral part of modern mechanical engineering. Their compactness and high efficiency allow them to transmit significant loads with relatively small overall dimensions.

The degree of mobility of planetary mechanisms is determined by standard rules of structural analysis, but with the peculiarity that the presence of the carrier creates additional possibilities for forming various transmission ratios. This is the main advantage of planetary mechanisms: they provide a greater variety of kinematic schemes within the same geometric dimensions.

The degree of mobility of the mechanism shown in Fig. 3.7 is:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2. \quad (21)$$

*Planetary mechanisms with a degree of freedom equal to two are called differential mechanisms.* This means that they are capable of performing two independent motions simultaneously. Such a property makes them especially valuable in applications where it is necessary to coordinate or distribute torque between several output links.

To understand the principle of their operation, it is convenient to use the so-called *method of inverted motion*. This consists in imaginatively imparting to the entire mechanism an additional rotational motion equal to the angular velocity of the carrier  $H$  but in the opposite direction ( $-\omega_H$ ). In this way, we “eliminate” the motion of the carrier and reduce the problem to a simpler one – an ordinary mechanism with fixed axes. This simplifies the analysis and makes it easy to determine the relative angular velocities of the links.

In this case, the angular velocities of the moving links relative to the carrier will be:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H; \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_H.$$

The index  $H$  means that the carrier is fixed.

Далі, як і у звичайних рядових зубчастих з'єднаннях, можна записати передаточне відношення для механізму, де водило вважається нерухомим

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (22)$$

У загальному випадку для диференціального механізму, який складається із  $K$  коліс, передаточне відношення визначається *відомою формулою Віліса*

$$i_{1K}^H = \frac{\omega_1'}{\omega_K'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_K - \omega_H}. \quad (23)$$

Ця формула є базовим інструментом для розрахунку багатьох сучасних редукторів.

*Чому саме формула Віліса важлива?* Вона дозволяє швидко отримати залежність між швидкостями без громіздких розрахунків. Завдяки цьому можна проектувати компактні та ефективні механізми для автомобілів, роботів чи верстатів.

Якщо в сателітному механізмі накласти додаткову кінематичну в'язь (наприклад, зупинити одне з центральних коліс, тобто зробити  $\omega_3=0$ ) ми отримуємо *планетарний механізм*. Його ступінь рухомості дорівнює  $W=1$ . У такому випадку формула Віліса спрощується і набуває вигляду:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}. \quad (24)$$

Це означає, що планетарний механізм може забезпечувати дуже велике передаточне відношення навіть при невеликій кількості коліс. Саме тому він настільки популярний у сучасній техніці.

Приклади з практики. Диференціальні передачі в автомобільних мостах дозволяють колесам обертатися з різними швидкостями під час повороту. Це забезпечує безпеку та зносостійкість шин. В гібридних автомобілях (Toyota Prius, Lexus Hybrid Drive) планетарний редуктор використовується як «силовий розподільник», узгоджуючи роботу бензинового двигуна і електромотора.

Next, just as in ordinary compound gear trains, one can write the transmission ratio for a mechanism where the carrier is assumed to be immovable:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} . \quad (22)$$

In the general case, for a differential mechanism consisting of  $K$  gears, the transmission ratio is determined by the well-known *Willis formula*:

$$i_{1K}^H = \frac{\omega_1'}{\omega_K'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_K - \omega_H} . \quad (23)$$

This formula is a fundamental tool for calculating many modern gear reducers.

*Why is Willis's formula important?* It allows us to quickly obtain the relationship between speeds without cumbersome calculations. Thanks to this, it is possible to design compact and efficient mechanisms for automobiles, robots, or machine tools.

If in a planetary mechanism we impose an additional kinematic constraint (for example, stop one of the central gears, i.e., set  $\omega_3 = 0$ ), we obtain a *planetary gear train*. Its degree of freedom is  $W = 1$ . In this case, Willis's formula simplifies and takes the form:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H} . \quad (24)$$

This means that a planetary gear train can provide a very large transmission ratio even with a small number of gears. That is why it is so popular in modern technology.

Practical examples. Differential gears in automobile axles allow the wheels to rotate at different speeds while turning. This ensures safety and tire durability. In hybrid cars (Toyota Prius, Lexus Hybrid Drive), a planetary reducer is used as a "power splitter," coordinating the operation of the gasoline engine and the electric motor.

Планетарні редуктори застосовуються у гелікоптерних трансмісіях для зниження швидкості обертання турбіни до прийнятної для лопатей. У дрелях, шурупвертах і навіть кухонних комбайнах планетарні редуктори дозволяють отримати великий крутний момент у компактному корпусі.

Таким чином, диференціальні та планетарні механізми - це не абстрактні схеми з підручника, а основа сучасної техніки, від автомобілів до роботів і побутових пристроїв. Завдяки їх компактності, надійності та широким можливостям зміни передаточного відношення, вони стали справжнім «серцем» багатьох машин.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке простий зубчастий механізм і які основні елементи він містить?
2. У чому полягає відмінність між зовнішнім і внутрішнім зачепленням зубчастих коліс?
3. Як визначається передаточне відношення простого зубчастого механізму?
4. Яке практичне значення має модуль зачеплення та як він розраховується?
5. Які приклади простих зубчастих передач можна зустріти у побутовій техніці?
6. Чим відрізняється рядовий зубчастий механізм від простого?
7. Як визначається загальне передаточне відношення рядового зубчастого механізму?
8. Чому знак передаточного відношення змінюється залежно від кількості зовнішніх зачеплень?
9. Як впливають паразитні колеса на загальне передаточне відношення рядових механізмів?
10. Яким чином визначається знак передаточного відношення у конічних рядових механізмах?
11. Наведіть приклади використання рядових зубчастих механізмів у сучасній техніці.
12. Що таке сателітний механізм і які його основні складові?
13. У чому полягає відмінність між центральними колесами та сателітами?
14. Що таке водило в сателітному механізмі і яку роль воно виконує?
15. Які механізми називаються диференціальними та де вони застосовуються?

Planetary reducers are used in helicopter transmissions to reduce the rotational speed of the turbine to a value acceptable for the blades. In drills, screwdrivers, and even kitchen food processors, planetary reducers provide high torque in a compact housing.

Thus, differential and planetary mechanisms are not abstract textbook schemes but the basis of modern engineering, from automobiles to robots and household devices. Thanks to their compactness, reliability, and wide possibilities of varying transmission ratios, they have become the true “heart” of many machines.

### **Control Questions**

1. What is a simple gear mechanism and what are its main elements?
2. What is the difference between external and internal gear meshing?
3. How is the transmission ratio of a simple gear mechanism determined?
4. What is the practical significance of the module of meshing and how is it calculated?
5. What examples of simple gear transmissions can be found in household appliances?
6. How does a compound gear mechanism differ from a simple one?
7. How is the overall transmission ratio of a compound gear mechanism determined?
8. Why does the sign of the transmission ratio change depending on the number of external meshes?
9. How do idler gears affect the overall transmission ratio of compound mechanisms?
10. How is the sign of the transmission ratio determined in bevel compound mechanisms?
11. Give examples of the use of compound gear mechanisms in modern technology.
12. What is a planetary (satellite) mechanism and what are its main components?
13. What is the difference between central gears and planet gears?
14. What is the carrier in a planetary mechanism and what role does it play?
15. What mechanisms are called differential and where are they used?

16. Як працює метод оберненого руху при аналізі диференціальних механізмів?
17. У чому полягає суть формули Віліса і для чого вона використовується?
18. Які особливості планетарних механізмів порівняно з диференціальними?
19. Наведіть приклади застосування планетарних передач у транспорті, авіації та побутовій техніці.
20. Чому планетарні механізми здатні забезпечувати велике передачне відношення при компактних розмірах?

16. How does the method of inverted motion work in the analysis of differential mechanisms?
17. What is the essence of Willis's formula and what is it used for?
18. What are the features of planetary mechanisms compared to differential ones?
19. Give examples of applications of planetary gear trains in transport, aviation, and household technology.
20. Why can planetary mechanisms provide a large transmission ratio with compact dimensions?

## 4 Динаміка механізмів і машин

### 4.1 Основні задачі динамічного дослідження механізмів

У сучасній інженерній практиці динамічне дослідження механізмів є ключовим етапом при проектуванні і вдосконаленні машин, від промислових роботів і медичного обладнання до дронів і електромобілів. Воно дозволяє не лише змоделювати рух частин машини, але й зрозуміти, як сили впливають на цей рух, як навантаження передаються між елементами, і які динамічні ефекти можуть виникати під час роботи механізму.

При динамічному аналізі механізмів розглядається рух окремих ланок з урахуванням усіх діючих сил: як зовнішніх, так і внутрішніх. Це дозволяє перейти від простого кінематичного опису (як ланки рухаються) до розуміння причин і наслідків цього руху (чому і з яким ефектом рухаються).

Розрізняють дві базові постановки задач динаміки:

*Силовий аналіз (пряма задача динаміки)* – відомий закон руху початкової (керуючої) ланки, необхідно визначити сили, які забезпечують цей рух. Приклад: у сучасному 3D-принтері керуюча програма визначає траєкторію сопла. Силовий аналіз дозволяє розрахувати, які зусилля мають передавати електродвигуни та які моменти виникатимуть на опорах.

*Зворотна задача динаміки* – задані сили, що діють на ланки механізму, необхідно визначити закон руху керуючої ланки. Приклад: у механізмі активного підвісу автомобіля зовнішні сили від нерівностей дороги змінюються довільно. Потрібно розрахувати, як буде змінюватись положення коліс та кузова залежно від цих впливів.

Обидві задачі можуть бути актуальні одночасно: наприклад, у біонічних протезах – де важливо як передбачити рух, так і забезпечити його мінімальними зусиллями.

Тепер слід зробити термінологічний коментар, оскільки у літературі існують дві школи з дещо відмінною термінологією. Так, у сучасній механіці та робототехніці усталася така відповідність: *forward dynamics* (пряма задача) – з відомих сил (моментів) знайти рух; *inverse dynamics* (зворотна задача) – з відомого руху знайти сили (моменти). В окремих курсах можна зустріти інше найменування цих самих постановок, де назви міняють місцями.

## 4 Dynamics of Mechanisms and Machines

### 4.1 Main Tasks of Dynamic Analysis of Mechanisms

In modern engineering practice, the dynamic study of mechanisms is a key stage in the design and improvement of machines – from industrial robots and medical equipment to drones and electric vehicles. It allows not only modeling the motion of machine parts but also understanding how forces affect this motion, how loads are transmitted between elements, and what dynamic effects may arise during operation.

In dynamic analysis of mechanisms, the motion of individual links is considered with account of all acting forces – both external and internal. This makes it possible to move from a simple kinematic description (how the links move) to an understanding of the causes and consequences of this motion (why and with what effect they move).

Two basic problem statements in dynamics are distinguished:

*Force analysis (direct dynamics problem):* the law of motion of the input (driving) link is known, and it is necessary to determine the forces that ensure this motion. *Example:* in a modern 3D printer, the control program defines the trajectory of the nozzle. Force analysis allows calculation of what forces must be transmitted by the electric motors and what moments will arise on the supports.

*Inverse dynamics problem:* the forces acting on the links of the mechanism are given, and it is necessary to determine the law of motion of the driving link. *Example:* in an active suspension system of a car, external forces from road irregularities vary arbitrarily. It is necessary to calculate how the positions of the wheels and body will change depending on these influences.

Both tasks can be relevant simultaneously – for example, in bionic prosthetics, where it is important both to predict motion and to provide it with minimal effort.

Now it is worth making a terminological note, since there are two schools in the literature with slightly different terminology. In modern mechanics and robotics, the following correspondence is generally accepted: *forward dynamics* – from known forces (moments) to find motion; *inverse dynamics* – from known motion to find forces (moments). In some courses, the same problem statements may be referred to with opposite names.

## **Класи задач: аналіз і синтез**

Подібно до інших розділів механіки, задачі динаміки поділяють на два великих класи:

*Аналіз* – вивчення поведінки вже заданого механізму при заданих навантаженнях. Наприклад, чи витримають деталі редуктора задану частоту обертання і моменти?

*Синтез* – побудова механізму, який за заданих динамічних умов забезпечить потрібну поведінку. Наприклад, проектування системи стабілізації камери дрона з урахуванням зовнішніх вітрових збурень.

У межах динаміки механізмів досліджується низка задач, які мають практичне значення у машинобудуванні, мехатроніці, авіації та інших галузях:

- розрахунок маховика – забезпечення рівномірності обертання двигуна внутрішнього згоряння або компресора;
- зрівноваження мас – мінімізація вібрацій у роботах-маніпуляторах, промислових пресах або двигунах;
- визначення ККД механізму – критично важливо, наприклад, для електротранспорту, де кожна втрата енергії зменшує запас ходу;
- Дослідження коливань і віброзахист – застосовується у проектуванні верстатів, гіроскопів, антенних систем, де навіть мікроколивання можуть вплинути на точність.

Чому це важливо для сучасного інженера? Без глибокого розуміння динаміки неможливо створити енергоефективні, безпечні, надійні механізми. Знання динамічних процесів дозволяє інженеру передбачати і мінімізувати удари при зміні режимів; втомні навантаження та ризики поломок; зайві втрати енергії, пов'язані з розбалансованістю чи резонансами.

У контексті переходу на інтелектуальні системи управління, коли датчики зчитують стан механізму в режимі реального часу, а системи управління адаптивно реагують, динамічні моделі стають базою для створення цифрових двійників машин.

## **Classes of problems: analysis and synthesis**

As in other branches of mechanics, dynamic problems are divided into two large classes:

*Analysis* – studying the behavior of a given mechanism under specified loads.

Example: will the gearbox parts withstand the specified rotation speed and torque?

*Synthesis* – *designing a mechanism that, under given dynamic conditions, will provide the desired behavior.*

*Example: designing a camera stabilization system for a drone, taking into account external wind disturbances.*

Within the dynamics of mechanisms, a number of problems with practical significance in mechanical engineering, mechatronics, aviation, and other fields are studied:

- calculation of a flywheel – ensuring uniform rotation of an internal combustion engine or a compressor;
- mass balancing – minimizing vibrations in robotic manipulators, industrial presses, or engines;
- determination of the efficiency of a mechanism – critically important, for example, for electric transport, where every energy loss reduces driving range;
- study of vibrations and vibration protection – applied in the design of machine tools, gyroscopes, antenna systems, where even micro-vibrations can affect accuracy.

Why is this important for the modern engineer?

Without a deep understanding of dynamics, it is impossible to create energy-efficient, safe, and reliable mechanisms. Knowledge of dynamic processes allows the engineer to predict and minimize impacts during regime changes; fatigue loads and risks of failure; and unnecessary energy losses associated with imbalance or resonances.

In the context of the transition to intelligent control systems, when sensors read the state of the mechanism in real time and control systems respond adaptively, dynamic models become the foundation for creating digital twins of machines.

## 4.2 Сили, що діють у машинах

Усі сили, що впливають на роботу машин і механізмів, поділяють на дві базові групи:

- *рушійні сили*, діють у бік миттєвого руху тіла, намагаються його прискорити;
- *сили опору*, діють проти руху, намагаються його сповільнити.

Сили опору, своєю чергою, поділяють на:

- *корисний (технологічний) опір* – саме заради його подолання машина й створюється (різання, пресування, прокачування рідини тощо);
- *шкідливий (невиробничий) опір* – той, що лише забирає енергію: тертя в парах, опір середовища, паразитні втрати.

*Рушійні сили* приводять механізм у рух. До них належать тиск газу, пари чи рідини, електромагнітні сили в електроприводах, пружні сили, інколи вага (якщо вона «працює» у напрямі руху).

*Пневмоприводи, гідроприводи:*  $F=pA$  (тиск  $p$  помножити на площу поршня  $A$ ).

*Електроприводи:* обертальний момент двигуна приблизно пропорційний струму.

*Пружні елементи:*  $F=kx$  – пружини, торсіони, газові упори, противаги.

*Гравітація як рушійна сила:* вага вантажу може «допомагати», якщо рух відбувається вниз по схилу або при опусканні маніпулятора.

Якщо напрям сили й миттєвої швидкості точки збігається або утворює гострий кут – робота додатна,

Сучасні приклади: Е-байк чи електросамокат: рушійний момент двигуна перемагає опір кочення, аеродинамічний опір і підйом у гору; дрон: сумарна тяга гвинтів долає вагу й вітровий опір, керування тягою кожного ротора створює моменти керування.

### **Сили опору: корисні та шкідливі**

*Корисний опір* – це технологічна «робота» машини: механічна обробка: сила різання (залежить від подачі, глибини, матеріалу); верстат має бути жорстким, щоб уникати автоколивань; прокачування рідин, газів: напір, втрати в трубопроводах, кавітація; преси, екструдери, дробарки, міксери: корисний момент зростає зі збільшенням в'язкості або щільності матеріалу.

## 4.2 Forces acting in machines

All forces that affect the operation of machines and mechanisms are divided into two basic groups:

- *driving forces*, act in the direction of the instantaneous motion of the body, seek to accelerate it;
- *resistive forces*, act against the motion, seek to decelerate it.

Resistive forces, in turn, are divided into:

- *useful (technological) resistance* – *precisely the resistance the machine is created to overcome (cutting, pressing, pumping a fluid, etc.);*
- *harmful (non-productive) resistance* – *that which only consumes energy: friction in pairs, resistance of the medium, parasitic losses.*

*Driving forces* set the mechanism in motion. They include gas, steam, or fluid pressure, electromagnetic forces in electric drives, elastic forces, sometimes weight (if it “works” in the direction of motion).

*Pneumatic and hydraulic drives:*  $F = pA$  (pressure  $p$  multiplied by piston area  $A$ ).

*Electric drives:* the motor torque is approximately proportional to current.

*Elastic elements:*  $F=kx$  – springs, torsion bars, gas struts, counterweights.

*Gravity as a driving force:* the weight of the load can “help” if motion occurs down a slope or when lowering a manipulator.

If the directions of the force and the instantaneous velocity of the point coincide or form an acute angle – the work is positive.

Modern examples: E-bike or e-scooter: the driving torque of the motor overcomes rolling resistance, aerodynamic drag, and uphill grade; drone: the total thrust of the propellers overcomes weight and wind drag, control of each rotor’s thrust creates control moments.

### **Resistive forces: useful and harmful**

*Useful resistance* is the technological “work” of the machine: machining: cutting force (depends on feed, depth, material); the machine tool must be rigid to avoid self-excited vibrations; pumping of liquids, gases: head, losses in pipelines, cavitation; presses, extruders, crushers, mixers: the useful torque increases with increasing viscosity or density of the material.

*Шкідливий опір* – усе, що знижує ККД: тертя в кінематичних парах (сухе, в'язке, перехідна «крива Штрибека»); спадаючий перехід від залипання до ковзання, явище stick-slip; опір кочення; опір середовища (критично для авто, БПЛА, швидкохідних механізмів); паразитні втрати в редукторах і підшипниках (зсув мастила, герметизатори, попередні натяги); електромагнітні втрати (гістерезис і вихрові струми в двигунах перетворюються в тепло). *Важливо*: тертя не завжди «шкідливе». У гальмах, муфтах, клинопасових передачах і в контакті шини з дорогою саме тертя робить роботу можливою – це *кероване* корисне тертя.

*Вага, інерція та реакції зв'язків* - ці сили не утворюють окремого класу, залежно від напрямку можуть бути рушійними або опором.

Вага – на підйомі діє як опір, на спуску може бути рушійною. Через потенційну енергію впливає на вибір противаг і балансування.

Сили інерції – виникають при зміні швидкості або напрямку. У формулі Д'Аламбера їх зручно переносити в рівняння рівноваги як «уявні» сили: за періодичного руху сумарна робота сил інерції за один період дорівнює нулю (без урахування втрат на тертя) – енергія накопичується й повертається.

Реакції в кінематичних парах – це внутрішні сили для механізму в цілому. В ідеальних безтертевих парах їх робота нульова; за наявності тертя – завжди від'ємна.

Рушійні та опорні сили часто є функціями перемішень, швидкостей, прискорень і часу: аеродинамічний опір (дрони, авто, вентилятор); в'язке тертя в мастилi, рідинах; сили різання зростають зі збільшенням подачі, глибини; високі оберти можуть викликати резонансні коливання; у приводах ЧПК та 3D-друку профілі «обмеження ривка» зменшують пікові інерційні сили й підвищують якість поверхні.

У сучасному проектуванні використовують вимірювання та ідентифікацію сил: датчики ваги та тензодатчики для сил і моментів у технологічних операціях; датчики крутного моменту на валах, або непряме оцінювання за струмом двигуна; IMU/акселерометри для ідентифікації інерційних складових і вібрацій; Spin-down-тести для оцінки сумарних опорів обертання; ідентифікація моделей (метод найменших квадратів, ARX-моделі) для отримання коефіцієнтів зі стендових або польових даних; цифрові двійники – зв'язують виміряні потужності, струми, вібрації з розрахунковими, коригують параметри моделі.

*Harmful* resistance is everything that reduces efficiency: friction in kinematic pairs (dry, viscous, the transient “Stribeck curve”: a decreasing transition from sticking to sliding, the stick-slip phenomenon); rolling resistance; resistance of the medium (critical for cars, UAVs, high-speed mechanisms); parasitic losses in gearboxes and bearings (oil shear, seals, preloads); electromagnetic losses (hysteresis and eddy currents in motors). (Converted into heat).*Important*: friction is not always “harmful.” In brakes, clutches, V-belt drives, and in tire-road contact, friction makes the work possible – it is controlled useful friction.

*Weight, inertia, and constraint reactions* do not form a separate class; depending on direction they can be driving or resistive.

Weight – on an ascent acts as resistance, on a descent can be driving. Through potential energy it affects the choice of counterweights and balancing.

Inertial forces – arise when speed or direction changes. In D’Alembert’s formula it is convenient to transfer them into the equilibrium equations as “fictitious” forces: for periodic motion, the total work of inertial forces over one period is zero (neglecting friction losses) – energy is stored and returned.

Reactions in kinematic pairs – these are internal forces for the mechanism as a whole. In ideal frictionless pairs their work is zero; in the presence of friction – always negative. Examples: linear guides of CNC machine tools, bearings of robots.

Driving and resistive forces are often functions of displacements, velocities, accelerations, and time: aerodynamic drag (drones, cars, fan); viscous friction in lubricants and fluids; cutting forces increase with increasing feed and depth; high rotational speeds can cause resonant vibrations; in CNC and 3D-printing drives, jerk-limited profiles reduce peak inertial forces and improve surface quality.

In modern design, measurement and identification of forces are used: weight sensors and strain gauges for forces and torques in technological operations; torque sensors on shafts, or indirect estimation from motor current; IMUs/accelerometers for identifying inertial components and vibrations; spin-down tests to assess total rotational resistances; model identification (least-squares method, ARX models) to obtain coefficients from bench or field data; digital twins – reconcile measured powers, currents, vibrations with calculated ones, adjust model parameters.

Викладені положення стосуються і моментів пар сил  $M = F \cdot r$ . Для обертальних механізмів зручно оперувати моментами і кутовою швидкістю.

Отже, треба пам'ятати, що *рушійні сили* дають додатну роботу; корисний опір – від'ємну, але саме він і є «ціллю» машини; шкідливий опір треба мінімізувати конструктивно або через режими; інерція «позиचाє» енергію під час розгону й «повертає» при гальмуванні; ідеальні реакції в'язів роботи не виконують, але будь-яке тертя – це втрати.

#### 4.3 Визначення сил інерції ланок і сил реакції у кінематичних парах

Сили інерції та реакції в парах – це «мова», якою механізм відповідає на прискорення, гальмування й контакт. У світі робототехніки, дронів, електромобілів і ЧПК-верстатів від коректного обліку сил інерцій і реакцій залежать точність траєкторій (якість друку, обробки, плавність руху маніпулятора); довговічність (втомат матеріалу, пікові навантаження в опорах і редукторах); енергоефективність і запас ходу; безпека (правильні реакції в гальмах, муфтах, підвісках).

*Де це зустрічається щодня?*

- Робот-маніпулятор: при розгоні важкого інструмента інерційний момент диктує потрібний крутний момент у приводах і навантаження на підшипники;

- Електросамокат (е-байк): стрибок прискорення, а отже виникає пікова сила інерції, а реакції в підвісці задають комфорт і керуваність;

- 3D-принтер (ЧПК): профілі з обмеженням ривка зменшують інерційні піки, отримуємо менше вібрацій і «хвилястості» поверхні.

#### Завдання.

1. Скласти рівняння рівноваги за Д'Аламбером для кожної ланки/групи.
2. Перевірити розмірності, знаки, точки прикладання.

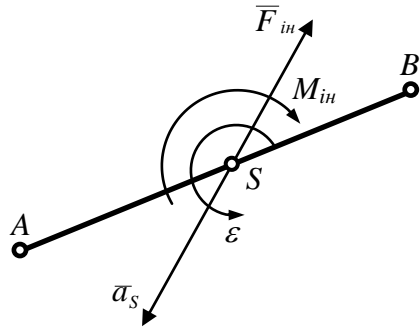


Рис. 4.1. Визначення сил інерції

All the above applies to moments of couples as well,  $M = F \cdot r$ . For rotational mechanisms it is convenient to operate with torques and angular speed.

Therefore, one must remember that *driving forces* do positive work; useful resistance – negative, but it is precisely the “goal” of the machine; harmful resistance must be minimized by design or by operating modes; inertia “borrows” energy during acceleration and “returns” it during braking; ideal constraint reactions do no work, but any friction is a loss.

### 4.3 Determination of inertia forces of links and reaction forces in kinematic pairs

Inertia forces and reactions in pairs are the “language” by which a mechanism responds to acceleration, braking, and contact. In the world of robotics, drones, electric vehicles, and CNC machine tools, correct accounting of inertia forces and reactions determines trajectory accuracy (print/processing quality, smoothness of manipulator motion); durability (material fatigue, peak loads in bearings and gearboxes); energy efficiency and range; safety (proper reactions in brakes, clutches, suspensions).

*Where does this occur every day?*

- Robot manipulator: when accelerating a heavy tool, the inertia moment dictates the required drive torque and the bearing loads;
- E-scooter (e-bike): a jump in acceleration produces a peak inertia force, and reactions in the suspension set comfort and controllability;
- 3D printer (CNC): jerk-limited profiles reduce inertia peaks, yielding less vibration and less “waviness” of the surface.

#### Tasks.

1. Write the equilibrium equations by D’Alembert for each link/group.
2. Check dimensions, signs, points of application.

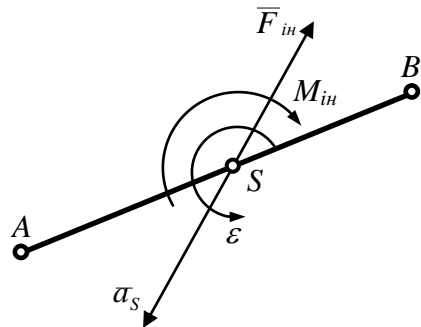


Fig. 4.1. Determination of inertia forces

Як відомо з теоретичної механіки, у загальному випадку всі сили інерції будь-якої ланки  $AB$  (рис. 4.1), яка здійснює плоскопаралельний рух і має площину симетрії, паралельну площині руху, можуть бути зведені до сили інерції  $\overline{F}_{in}$ , яку прикладаємо в центрі мас (ваги)  $S$ , і до пари сил інерції, момент яких дорівнює  $M_{in}$ .

Сила інерції ланки визначається

$$\overline{F}_{in} = -m\overline{a}_S, \quad (25)$$

де  $\overline{F}_{in}$  – вектор сили інерції ланки  $AB$ , Н;

$m$  – маса ланки, кг;

$\overline{a}_S$  – вектор повного прискорення центра мас  $S$ ,  $\text{м/с}^2$ .

Сила інерції ланки  $\overline{F}_{in}$  напрямлена протилежно вектору прискорення центра мас  $\overline{a}_S$ .

Таким чином, для визначення сили інерції  $\overline{F}_{in}$  ланки треба знайти її масу та вектор повного прискорення  $\overline{a}_S$  центра мас. Як видно із формули (25), сила інерції має розмірність  $[\text{кг} \cdot \text{м/с}^2]$ , тобто вимірюється у ньютонках (Н).

Момент пари сил інерції напрямлений протилежно кутовому прискоренню  $\varepsilon$  і може бути визначений як

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}. \quad (26)$$

У формулі (26)  $J_S$  – момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до площини руху ланки, а  $\overline{\varepsilon}$  – кутове прискорення ланки.

Момент інерції  $J_S$  має розмірність  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ , кутове прискорення  $\overline{\varepsilon}$  –  $\text{рад/с}^2$ , тому момент пари сил інерції має розмірність  $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ , що представляє собою Н·м.

As is known from theoretical mechanics, in the general case all inertia forces of any link  $AB$  (Fig. 4.1) that performs plane-parallel motion and has a symmetry plane parallel to the plane of motion can be reduced to an inertia force  $\overline{F}_{in}$  applied at the center of mass (weight)  $S$ , and to a couple of inertia forces whose moment equals a certain value  $\overline{M}_{in}$ .

The inertia force of the link is determined by

$$\overline{F}_{in} = -m\overline{a}_S, \quad (25)$$

where  $\overline{F}_{in}$  – the vector of the inertia force of link  $AB$ , N;

$m$  – the mass of the link, kg;

$\overline{a}_S$  – the vector of the total acceleration of the center of mass  $S$ , m/s<sup>2</sup>.

The inertia force of the link  $\overline{F}_{in}$  is directed opposite to the acceleration vector of the center of mass  $\overline{a}_S$ .

Thus, to determine the inertia force  $\overline{F}_{in}$  one must find its mass and the vector of the total acceleration  $\overline{a}_S$  of the center of mass. As follows from formula (25), the inertia force has the dimension [kg·m/s<sup>2</sup>], i.e., it is measured in newtons (N).

The moment of the couple of inertia forces is directed opposite to the angular acceleration  $\varepsilon$  and can be determined as:

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}. \quad (26)$$

In formula (26)  $J_S$  – the moment of inertia of the link with respect to the axis passing through the center of mass and perpendicular to the plane of motion of the link, and  $\overline{\varepsilon}$  is the angular acceleration of the link.

The moment of inertia  $J_S$  has the dimension kg·m<sup>2</sup>, the angular acceleration  $\overline{\varepsilon}$  – rad/s<sup>2</sup>, therefore the moment of the couple of inertia forces has the dimension kg·m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, which is N·m.

Силу інерції  $\overline{F}_{in}$  і момент пари сил інерції  $\overline{M}_{in}$  можна замінити однією рівнодійною силою  $\overline{F}'_{in}$ , що дорівнює силі інерції  $\overline{F}_{in}$  (рис. 4.2), лінія дії якої зміщена відносно центра мас  $S$  на відстань  $h = \frac{M_{in}}{F_{in}}$ ,

тобто момент пар сил інерції

$$M_{in} = F_{in} \cdot h$$

замінюємо парою сил

( $\overline{F}_{in}$ ,  $\overline{F}'_{in}$ ).

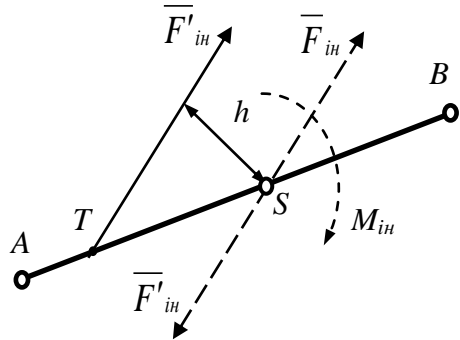


Рис. 4.2. Зведення сил інерції ланки до однієї рівнодійної

Визначення сил реакцій у кінематичних парах зводиться до пошуку їх величини, напрямку і точки прикладення.

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені нормально до стичних поверхонь. Тому в обертальній кінематичній парі V класу (рис. 4.3, а) реакція  $\overline{R}_{21}$  яка прикладена до ланки 1 з боку ланки 2, буде завжди проходити через центр шарніра  $O$ . Значення і напрям дії цієї сили  $\overline{R}_{21}$  невідомий, тому що вони залежать від сил, які прикладені до ланок 1 і 2.

Викладене повністю стосується і реакції  $\overline{R}_{12}$ , яка прикладена до ланки 2 з боку ланки 1, тому що сили взаємодії зв'язані між собою третім законом Ньютона:  $\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$ .

У поступальній парі (рис. 4.3, б) результуюча реакція  $\overline{R}_{21}$  буде напрямлена перпендикулярно до осі руху  $x - x$  ланок цієї пари, при цьому невідомими лишаються її значення та точка прикладення.

У вищій парі IV класу (рис. 4.3, в) реакція  $\overline{R}_{21}$  напрямлена вздовж нормалі  $n - n$  (без врахування тертя) і прикладена у точці дотику  $C$ . Тому в такій кінематичній парі відомі точка прикладення та напрям сили реакції. Невідомим є її значення.

The inertia force  $\bar{F}_{in}$  and the moment of the couple of inertia forces  $\bar{M}_{in}$  can be replaced by a single resultant force  $\bar{F}'_{in}$ , equal to the inertia force  $\bar{F}_{in}$  (Fig. 4.2), whose line of action is shifted relative to the center of mass  $S$

$$\text{by a distance } h = \frac{M_{in}}{F_{in}},$$

That is, the moment of the couple of inertia forces

$$M_{in} = F_{in} \cdot h$$

is replaced by a pair of forces  $(\bar{F}_{in}, \bar{F}'_{in})$ .

The determination of reaction forces in kinematic pairs reduces to finding their magnitude, direction, and point of application.

Reaction forces (interaction forces) between two bodies (links) in contact, in the absence of friction, are always directed normal to the contacting surfaces. Therefore, in a revolute kinematic pair of class V (Fig. 4.3, a) the reaction  $\bar{R}_{21}$  applied to link 1 from link 2 will always pass through the center of the hinge  $O$ . The value and direction of action of this force  $\bar{R}_{21}$  are unknown, because they depend on the forces applied to links 1 and 2.

The above fully applies as well to the reaction  $\bar{R}_{12}$  applied to link 2 from link 1, because the interaction forces are related by Newton's third law:  $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ .

In a prismatic pair (Fig. 4.3, b) the resultant reaction  $\bar{R}_{21}$  will be directed perpendicular to the axis of motion  $x - x$  of the links of this pair; at the same time its value and point of application remain unknown.

In a higher pair of class IV (Fig. 4.3, c) the reaction  $\bar{R}_{21}$  is directed along the normal  $n - n$  (neglecting friction) and applied at the point of contact  $C$ . Therefore, in such a kinematic pair the point of application and the direction of the reaction force are known. Its value is unknown.

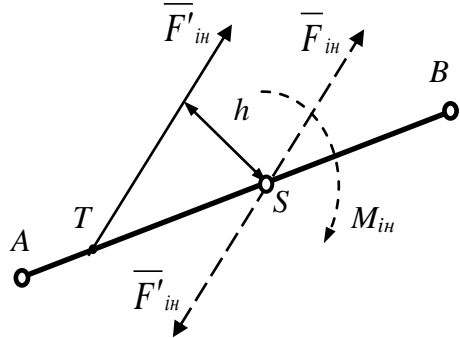


Fig. 4.2. Reduction of the inertia forces of a link to a single resultant

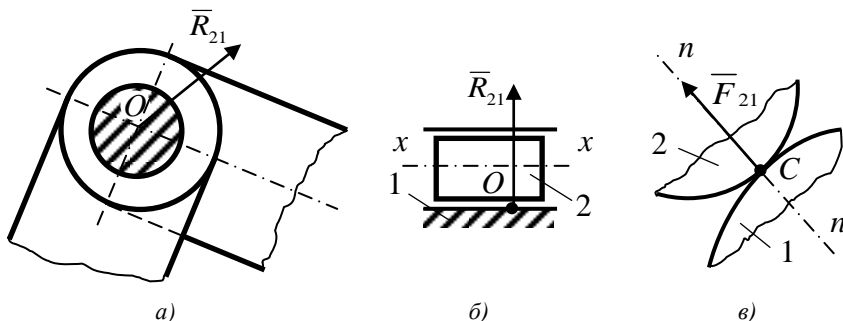


Рис. 4.3. Реакції в кінематичних парах V і IV класів

Отже, під час визначення реакцій у кінематичних парах V класу необхідно відшукати дві невідомі у кожній парі. Якщо число пар п'ятого класу у механізмі  $P_5$ , то число невідомих дорівнює  $2P_5$  і якщо  $n$  – число рухомих ланок, то число рівнянь рівноваги дорівнює  $3n$ . Механізм буде статично визначений при умові  $2P_5=3n$ . Отримана рівність співпадає із структурною формулою групи Ассур. Отже групи Ассур є статично визначеними, а під час пошуку реакцій у кінематичних парах механізму можна розглядати рівновагу кожної групи Ассур окремо.

В основі метода визначення реакцій прийнято принцип Д'Аламбера, у відповідності з яким динамічна система умовно зводиться до статичної шляхом приєднання сил інерції і для розв'язання задачі використовуються рівняння рівноваги статички:

$$\sum \bar{F}_i + \bar{G}_i + \sum \bar{R}_{ji} + \bar{F}_{in_i} = 0, \quad (27)$$

де  $\sum \bar{F}_i$  – сума всіх зовнішніх сил, які діють на  $i$ -ту ланку;

$\bar{G}_i$  – сила ваги  $i$ -тої ланки;

$\sum \bar{R}_{ji}$  – сума силової взаємодії з боку інших ланок на  $i$ -ту ланку ( $j$ -та ланка стикається з  $i$ -тою ланкою);

$\bar{F}_{in_i}$  – сила інерції  $i$ -тої ланки.

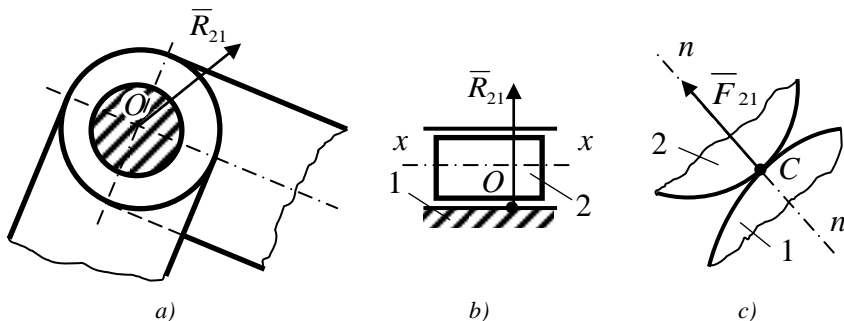


Fig. 4.3. Reactions in kinematic pairs of classes V and IV

Thus, when determining reactions in kinematic pairs of class V it is necessary to find two unknowns in each pair. If the number of fifth-class pairs in the mechanism is  $P_5$ , then the number of unknowns equals  $2P_5$  and if  $n$  is the number of moving links, then the number of equilibrium equations equals  $3n$ . *The mechanism will be statically determinate under the condition  $2P_5=3n$ .* The obtained equality coincides with the structural formula of an Assur group. Hence Assur groups are statically determinate, and when seeking reactions in the kinematic pairs of a mechanism one can consider the equilibrium of each Assur group separately.

D'Alembert's principle is adopted as the basis of the method for determining reactions, according to which a dynamic system is conditionally reduced to a static one by appending the inertia forces, and the problem is solved using the equilibrium equations of statics:

$$\sum \bar{F}_i + \bar{G}_i + \sum \bar{R}_{ji} + \bar{F}_{in_i} = 0, \quad (27)$$

where  $\sum \bar{F}_i$  – the sum of all external forces acting on the  $i$ -th link;

$\bar{G}_i$  – the weight force of the  $i$ -th link;

$\sum \bar{R}_{ji}$  – the sum of interaction forces from other links on the  $i$ -th link (the  $j$ -th link is in contact with the  $i$ -th link);

$\bar{F}_{in_i}$  – the inertia force of the  $i$ -th link.

*Визначення реакцій у кінематичних парах механізмів виконується у такій послідовності:*

- спочатку викреслюється механізм у заданих положеннях і у прийнятому масштабі  $\mu_i$ ;
- механізм розподіляємо на групи Ассура, які викреслюються у відповідному масштабі  $\mu_i$ ;
- до ланок групи Ассура у відповідних точках прикладаємо всі задані сили і моменти (сили інерції, сили ваги, сили корисного опору і інші);
- до зовнішніх пар кожної групи прикладаємо невідомі сили реакцій, які замінюють дію відкинутих ланок сусідніх груп;
- потім складаються рівняння рівноваги ланок для визначення відповідних тангенційних складових реакцій у зовнішніх кінематичних парах;
- у прийнятому масштабі  $\mu_F$  будуються силові багатокутники і визначаються нормальні складові, а також повні реакції у кінематичних парах;
- визначення реакцій необхідно починати з групи Ассура, найбільш віддаленої від ведучої ланки, поступово переходячи до послідовуючих груп, а закінчувати дослідження ведучою ланкою, тобто механізму I класу.

Розраховуючи сили інерції та реакції в кінематичних парах, інженер насправді описує те, як механізм сприймає вплив прискорення, гальмування і контакт у реальних умовах. Формула (25) говорить нам, що сила інерції завжди спрямована проти вектора прискорення центра мас, ніби нагадуючи: будь-яке бажання розігнати ланку коштує додаткових зусиль у приводі й підшипниках. А формула (26) додає другий шар змісту – обертальний: коли ланка не лише зсувається, а й змінює кутову швидкість, інерція проявляється як момент, пропорційний моменту інерції та кутовому прискоренню. У підсумку механізм відповідає одразу двома «голосами»: силою та моментом, які ми зручно зводимо до рівнодійної (рис. 4.2), зберігаючи еквівалентність дії на опори. Ця логіка добре відчувається на сучасних прикладах. У промислового маніпулятора точність позиціонування визначається не лише ПІД-налаштуванням, а й тим, наскільки правдиво оцінені  $m$ ,  $a$  та  $I$  кожної ланки.

*The determination of reactions in the kinematic pairs of mechanisms is performed in the following sequence:*

- first, the mechanism is drawn in the specified positions and at the adopted scale  $\mu_i$ ;
- the mechanism is divided into Assur groups, which are drawn at the corresponding scale  $\mu_i$ ;
- to the links of an Assur group at the corresponding points all given forces and moments are applied (inertia forces, weight forces, useful resistance forces, and others);
- to the external pairs of each group the unknown reaction forces are applied, which replace the action of the discarded links of adjacent groups;
- then the equilibrium equations of the links are written to determine the corresponding tangential components of the reactions in the external kinematic pairs;
- at the adopted scale  $\mu_F$  force polygons are constructed and the normal components, as well as the total reactions in the kinematic pairs, are determined;
- the determination of reactions must begin with the Assur group farthest from the driving link, gradually proceeding to the subsequent groups, and end with the study of the driving link, i.e., the mechanism of class I.

By calculating the inertia forces and the reactions in kinematic pairs, the engineer is in fact describing how the mechanism experiences acceleration, braking, and contact under real conditions. Formula (25) tells us that the inertia force is always directed opposite to the acceleration vector of the center of mass, as if reminding us: any desire to accelerate a link costs additional effort in the drive and bearings. And formula (26) adds a second, rotational layer of meaning: when a link not only translates but also changes angular speed, inertia manifests itself as a moment proportional to the moment of inertia and the angular acceleration. As a result, the mechanism responds with two “voices” at once: a force and a moment, which we conveniently reduce to a resultant (Fig. 4.2), preserving the equivalence of action on the supports. This logic is clearly felt in modern examples. In an industrial manipulator, positioning accuracy is determined not only by PID tuning, but also by how truthfully the  $m$ ,  $a$  and  $I$  of each link are assessed.

Коли інструмент важкий або далеко винесений, інерційний момент різко зростає, і привід «бачить» пікові вимоги до крутного моменту саме через доданок  $I\epsilon$ . У підсумку реакції в шарнірах (рис. 4.3, *a*) стають більшими, ніж очікувалося за статичними міркуваннями, а це впливає на вибір підшипників, на жорсткість корпусу й навіть на розклад профілактичних заміні. Подібна картина в ЧПК-верстаті або 3D-принтері: за складних траєкторій прискорення й ривки породжують інерційні піки, які передаються в напрямні, і якщо нехтувати моментом інерції рухомого порталу, у моделях з'являються «ідеальні», але неіснуючі у практиці траєкторії.

Реакції в парах, описані на рис. 4.3, – це ще й мова безпеки. У поступальній парі (напрямна ковзання) результуюча реакція завжди перпендикулярна осі руху, тож у реальному вузлі навіть невелике перекошування або локальний знос прямої може змінити точку прикладання й розподіл напружень. Вищі пари (кочення, зачеплення) ще чутливіші: нормаль у точці дотику диктує напрям реакції, а тонкі ефекти – мікроковзання, пружні деформації профілів – уже переходять з ідеалізації в джерело втрат енергії та тепла. Тому, користуючись принципом Д'Аламбера (27) і зводячи задачу динаміки до статичного вигляду, важливо пам'ятати: «ідеальні» пари – це інструмент для розрахунку, але реальний вузол завжди має межу навантаження, жорсткість і деякий рівень тертя.

Практичний сенс структурної умови  $2P_5=3n$  полягає в тому, що ми задалегідь розуміємо, чи вистачить рівнянь рівноваги для незалежного визначення реакцій. Коли умова виконується, групи Ассура стають зручними «цеглинками»: розглядаючи їх по чергово – від периферії механізму до ведучої ланки – ми обмежуємо складність і зберігаємо фізичну наочність. Це особливо цінно в епоху цифрових двійників: чисельний розв'язок може бути миттєвим, але ідея послідовного відокремлення груп зберігає контроль над якістю моделі, дозволяє інтерпретувати результати і швидше знаходити джерело помилки.

Окремо варто згадати про «перевірки на здоровий глузд», які не видно у формулах, але рятують від типових похибок. Розмірнісна узгодженість і знаки – очевидні кандидати, проте не менш корисно мислити через енергію: без урахування тертя робота інерційних сил за період має зійтися до нуля; якщо цього не відбувається в моделі періодичного руху, значить десь переплутано напрямок або точку прикладання.

When the tool is heavy or has a large overhang, the inertia moment increases sharply, and the drive “sees” peak torque demands precisely through the  $I\epsilon$  term. As a result, the reactions in the joints (Fig. 2.25, *a*) become larger than expected from static considerations, which affects the choice of bearings, the stiffness of the housing, and even the schedule of preventive replacements. A similar picture occurs in a CNC machine or a 3D printer: for complex trajectories, accelerations and jerks generate inertia peaks that are transmitted into the guides, and if the moment of inertia of the moving gantry is neglected, “ideal” trajectories appear in the models that do not exist in practice.

The reactions in pairs described in Fig. 4.3 are also a language of safety. In a prismatic pair (a sliding guide) the resultant reaction is always perpendicular to the axis of motion, so in a real unit even a slight skew or local wear of the guide can change the point of application and the stress distribution. Higher pairs (rolling, meshing) are even more sensitive: the normal at the contact point dictates the direction of the reaction, and subtle effects – micro-slip, elastic deformations of the profiles – already pass from idealization into a source of energy loss and heat. Therefore, when using D’Alembert’s principle (27) and reducing a dynamics problem to a static form, it is important to remember: “ideal” pairs are a tool for calculation, but a real unit always has a load limit, stiffness, and some level of friction.

The practical meaning of the structural condition  $2P_5=3n$  lies in the fact that we understand in advance whether the equilibrium equations are sufficient for the independent determination of reactions. When the condition is satisfied, Assur groups become convenient “building blocks”: by considering them in turn from – the periphery of the mechanism to the driving link – we limit complexity and preserve physical clarity. This is especially valuable in the era of digital twins: a numerical solution can be instantaneous, but the idea of sequential separation of groups preserves control over the quality of the model, allows better interpretation of results, and enables faster identification of the source of an error.

It is also worth mentioning the “sanity checks,” which are not visible in formulas but save you from typical errors. Dimensional consistency and signs are obvious candidates, but it is no less useful to think in terms of energy: neglecting friction, the work of inertia forces over a period should sum to zero; if this does not occur in a model of periodic motion, it means that somewhere the direction or the point of application has been mixed up.

Нарешті, зв'язок цього розділу з наступними темами природний. Сили інерції, визначені тут, переходять у нерівномірності обертального руху, для яких добирають маховик відповідної енергоємності; реакції в парах та розподіл мас – у задачі балансування, де від точності оцінки  $m$  і  $I$  залежить рівень вібрацій і шуму. Ті самі реакції, покладені на пружні моделі опор і рам, стають вихідними даними для аналізу коливань і віброзахисту. Таким чином, розділ 4.3 – це не лише формули й схеми, а початок «живої» механіки машини, у якій кожне прискорення має відповідь, а кожен контакт – свою історію навантаження.

#### **4.4 Силевий розрахунок плоских механізмів без врахування сил тертя**

Силевий розрахунок плоских механізмів - це перехід від кінематики до причин руху: маючи закон руху ведучої ланки та зовнішні навантаження, ми визначаємо реакції в парах і потрібний рушійний момент (або силу) у функції положення та часу. У цьому підрозділі свідомо не враховується тертя, щоб виділити головне: вплив мас, моментів інерції та корисних опорів на силеву взаємодію ланок. Такий підхід відповідає першому етапу інженерного проектування: спочатку знаходять «ідеальний» силевий баланс, а вже потім додають втрати на тертя, мастило та гідро- чи аеродинамічні ефекти.

Далі ми працюємо з плоскими, абсолютно жорсткими ланками, з'єднаними ідеальними кінематичними парами; поле тягіння вважаємо сталою зовнішньою дією. Відомими вважаються геометрія механізму, маси ланок і їхні моменти інерції, закон руху ведучої ланки та технологічні (корисні) сили опору. Розв'язання ґрунтується на принципі Д'Аламбера, коли до кожної ланки додаються сили та моменти інерції, після чого система «динамічна» зводиться до рівнянь рівноваги для окремих ланок або груп Ассура.

Типовий представник для відпрацювання методики - шарнірний чотириланковий механізм. На його прикладі легко простежити, як змінюються реакції в шарнірах упродовж циклу, як інерційні складові формують пікові вимоги до приводу і як корисні опори «перекладаються» на ведучу ланку. В такому формулюванні силевий розрахунок відповідає тому, що в сучасній термінології називають *inverse dynamics*: з відомого руху ланок і навантажень визначаються сили й моменти в з'єднаннях та на приводі.

The inertia forces determined here carry over into irregularities of rotational motion, for which a flywheel of appropriate energy capacity is selected; the reactions in pairs and the distribution of masses – into balancing problems, where the level of vibrations and noise depends on the accuracy of estimating  $m$  and  $I$ . Those same reactions, when applied to elastic models of supports and frames, become input data for the analysis of vibrations and vibration protection. Thus, Section 4.3 is the beginning of the “living” mechanics of the machine, in which every acceleration has a response, and every contact has its own loading history.

#### **4.4 Force calculation of planar mechanisms without accounting for friction forces**

The force calculation of planar mechanisms is the transition from kinematics to the causes of motion: having the law of motion of the driving link and the external loads, we determine the reactions in the pairs and the required driving torque (or force) as a function of position and time. In this subsection friction is deliberately not taken into account in order to single out the main thing: the influence of masses, moments of inertia, and useful resistances on the force interaction of the links. Such an approach corresponds to the first stage of engineering design: first the “ideal” force balance is found, and only then are losses due to friction, lubrication, and hydro- or aerodynamic effects added.

Hereafter we work with planar, absolutely rigid links connected by ideal kinematic pairs; the gravity field is assumed to be a constant external action. The geometry of the mechanism, the masses of the links and their moments of inertia, the law of motion of the driving link, and the technological (useful) resistance forces are assumed known. The solution is based on D’Alembert’s principle, when forces and moments of inertia are added to each link, after which the “dynamic” system is reduced to equilibrium equations for individual links or Assur groups.

Using the example of a four-link mechanism, it is easy to see how the reactions in the joints change during the cycle, how inertial components form peak loads on the drive, and how useful supports are “transmitted” to the driving link. In this formulation, the force calculation corresponds to what in modern terminology is called *inverse dynamics*: from the known motion of the links and loads the forces and moments in the joints and at the drive are determined.

Практичний сенс результатів цього підрозділу – у доборі приводів і передач, у перевірці підшипників і пальців на міцність і довговічність, у формуванні вимог до жорсткості конструкції. Саме тут з'являються чисельно оцінені «піки» навантажень, які важливо знати для енергоефективності, ресурсу та безпеки майбутньої машини. Після опанування базового, «нетертяного» варіанту ці ж схеми легко доповнюються силами тертя і втратами, утворюючи повну картину силової роботи механізму.

Методику силового розрахунку механізмів II класу розглянемо на прикладі шарнірного чотириланкового механізму, кінематичну схему якого зображено на рисунку 4.4.

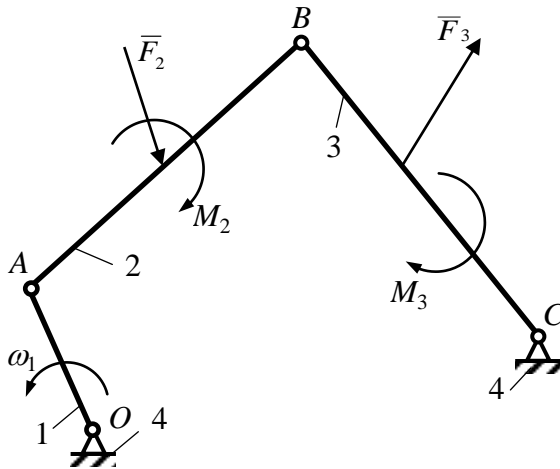


Рис. 4.4. Схема силового навантаження шарнірного чотириланкового механізму

При цьому будемо вважати, що всі зовнішні сили (сили опору, ваги, інерції тощо), які діють на ланки групи, відомі і для кожної ланки зведеної до однієї рівнодійної сили  $\bar{F}_i$  та одного рівнодійного моменту  $\bar{M}_i$  де  $i=1, 2, 3, \dots, n$  – номер ланки. Таке спрощення не впливає на методику силового розрахунку структурної групи, яка входить до складу механізму (рис. 4.4).

The practical meaning of the results of this subsection is in the selection of drives and transmissions, in checking bearings and pins for strength and durability, and in forming the requirements for structural stiffness. It is here that numerically evaluated “peaks” of loads appear, which are important to know for the energy efficiency, service life, and safety of the future machine. After mastering the basic, “frictionless” variant, these same schemes are easily supplemented with friction forces and losses, forming a complete picture of the force operation of the mechanism.

We will consider the methodology of force calculation for class II mechanisms using the example of a hinged four-link mechanism, the kinematic scheme of which is shown in Figure 4.4.

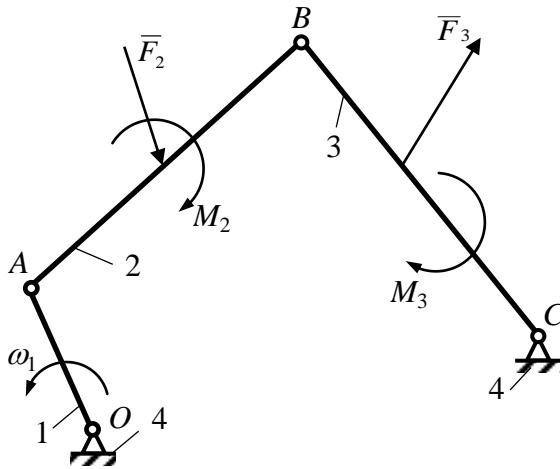


Fig. 4.4. Scheme of force loading of the hinged four-link mechanism

Assuming that all external forces (resistance forces, weights, inertia, etc.) acting on the links of the group are known and, for each link, have been reduced to a single resultant force  $\bar{F}_i$  and a single resultant moment  $\bar{M}_i$  where  $i=1,2,3,\dots, n$  is the link number. Such a simplification does not affect the methodology of the force calculation of the structural group that is part of the mechanism (Fig. 4.4).

При силовому розрахунку необхідно визначити реакції у кінематичних парах та зрівноважуючу силу або зрівноважуючий момент, який прикладають до початкової ланки.

До складу механізму входить механізм I класу, утворений кривошипом 1 і стояком 4 та групи Ассура II класу II порядку (шатун 2 та коромисло 3). Силовий розрахунок починаємо з групи 2-3.

Для цього групу від'єднуємо від інших ланок (кривошипа 1 і стояка 4) і замість них прикладаємо до елементів кінематичних пар  $A$  і  $C$  реакції  $\bar{R}_{12}$  та  $\bar{R}_{43}$  (рис. 4.5,  $a$ ), значення та напрям яких невідомі.

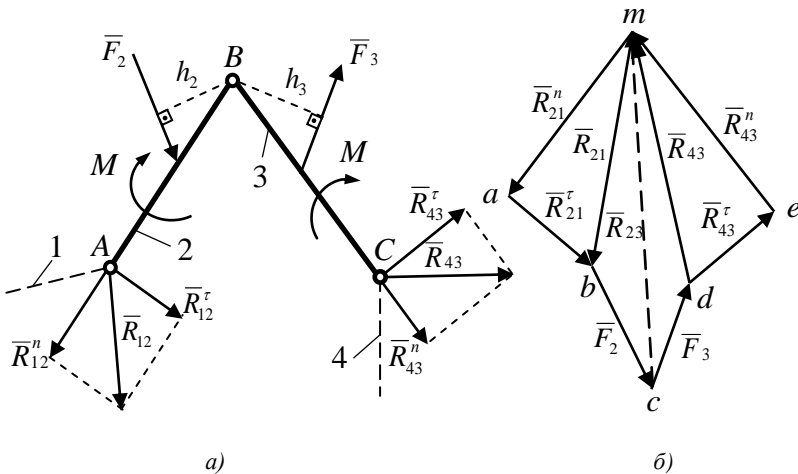


Рис. 4.5. Побудова плану сил групи II класу II порядку

Крім цього до ланок групи прикладаємо всі зовнішні сили  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  та моменти  $M_2$  і  $M_3$ .

Запишемо рівняння рівноваги ланок групи під дією прикладених сил

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0. \quad (28)$$

У рівнянні (28) відомими є сили  $\bar{F}_2$  і  $\bar{F}_3$ , а невідомими – реакції  $\bar{R}_{12}$  і  $\bar{R}_{43}$ , тобто чотири невідомі (невідомими вважаються і значення і напрям сил). Моменти  $M_2$  і  $M_3$  та реакція у кінематичній парі  $B$  у рівняння (28) не входять.

In the force calculation it is necessary to determine the reactions in the kinematic pairs and the balancing force or balancing moment applied to the initial link.

The mechanism includes a class I mechanism formed by the crank 1 and the fixed link (frame) 4, and an Assur group of class II, second order (connecting rod 2 and rocker 3). We begin the force calculation with the group 2-3. To this end, the group is disconnected from the other links (crank 1 and frame 4), and instead of them the reactions  $\bar{R}_{12}$  and  $\bar{R}_{43}$  are applied to the elements of the kinematic pairs A and C (Fig. 4.5, a), whose values and directions are unknown.

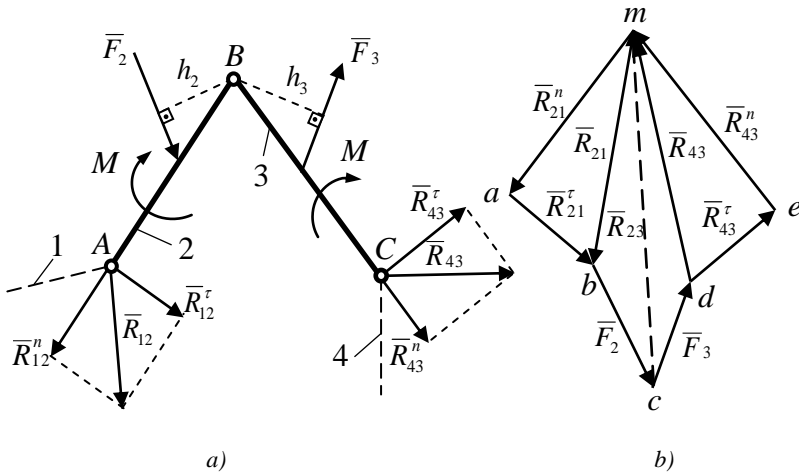


Fig. 4.5. Construction of the force plan for the class II, second-order group

In addition, all external forces  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  and the moments  $M_2$  and  $M_3$  are applied to the links of the group. Let us write the equilibrium equations of the links of the group under the action of the applied forces

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0. \quad (28)$$

In equation (28) the known forces are  $\bar{F}_2$  and  $\bar{F}_3$  and the unknowns are the reactions  $\bar{R}_{12}$  and  $\bar{R}_{43}$ , i.e., four unknowns (both the magnitudes and the directions of the forces are considered unknown). The moments  $M_2$  and  $M_3$  and the reaction in kinematic pair B do not enter equation (28).

Задача про знаходження сил може розв'язуватися аналітично та графічно. На практиці досить широко використовується графічний спосіб визначення сил шляхом побудови планів сил. Для побудови плану сил у рівнянні рівноваги (28) може бути не більше, як два невідомих. У нашому випадку необхідно зменшити кількість невідомих із 4 до 2. Розкладаємо реакції  $\bar{R}_{12}$  і  $\bar{R}_{43}$  на дві складові, які напрямлені вздовж відповідних ланок  $AB$  і  $BC$  та перпендикулярно до них, тобто

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r \quad \text{і} \quad \bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^r. \quad (29)$$

Визначаємо дотичні складові реакцій. Для цього складаємо для кожної ланки рівняння рівноваги у вигляді суми моментів сил відносно точки  $B$ :

для ланки 2

$$\sum_{i=1}^n M_B^{(2)}(\bar{F}_i) = R_{12}^r \cdot l_{AB} + F_2 \cdot h_2 - M_2 = 0,$$

звідки

$$R_{12}^r = \frac{M_2 - F_2 \cdot h_2}{l_{AB}}; \quad (30)$$

для ланки 3

$$\sum_{i=1}^n M_B^{(3)}(\bar{F}_i) = R_{43}^r \cdot l_{BC} + F_3 \cdot h_3 - M_3 = 0,$$

звідки

$$R_{43}^r = \frac{M_3 - F_3 \cdot h_3}{l_{BC}}, \quad (31)$$

де  $h_2$  і  $h_3$  – дійсні величини плечей;

$l_{AB}$  і  $l_{BC}$  – дійсні довжини ланок.

У залежностях (30), (31) і далі вказані в дужках цифри 2 та 3, які показують номери ланок, рівновага яких розглядається. Якщо при обчисленні дотичні складові дістанемо від'ємними, то на плані сил треба їх спрямувати у протилежний бік.

The problem of finding the forces can be solved analytically or graphically. In practice, the graphical method of determining forces by constructing force plans is widely used. To construct a force plan, there may be no more than two unknowns in the equilibrium equation (28). In our case, it is necessary to reduce the number of unknowns from 4 to 2. We decompose the reactions  $\bar{R}_{12}$  and  $\bar{R}_{43}$  into two components directed along the corresponding links  $AB$  and  $BC$  and perpendicular to them, i.e.,

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r \quad \bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^r. \quad (29)$$

We determine the tangential components of the reactions. To this end, for each link we write the equilibrium equation in the form of the sum of the moments of forces about point  $B$ :

for link 2

$$\sum_{i=1}^n M_B^{(2)}(\bar{F}_i) = R_{12}^r \cdot l_{AB} + F_2 \cdot h_2 - M_2 = 0,$$

whence

$$R_{12}^r = \frac{M_2 - F_2 \cdot h_2}{l_{AB}}; \quad (30)$$

for link 3

$$\sum_{i=1}^n M_B^{(3)}(\bar{F}_i) = R_{43}^r \cdot l_{BC} + F_3 \cdot h_3 - M_3 = 0,$$

whence

$$R_{43}^r = \frac{M_3 - F_3 \cdot h_3}{l_{BC}}, \quad (31)$$

where  $h_2$  and  $h_3$  – the actual lever arms;

$l_{AB}$  and  $l_{BC}$  – the actual lengths of the links.

In relations (30), (31) and hereafter the digits 2 and 3 in parentheses indicate the numbers of the links whose equilibrium is considered. If, in the calculations, we obtain negative tangential components, then on the force plan they must be directed in the opposite direction.

Підставивши залежності (29) у рівняння рівноваги (28), отримаємо:

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43}^r + \bar{R}_{43}^n = 0. \quad (32)$$

У цьому рівнянні невідомі тільки нормальні складові реакцій  $\bar{R}_{12}^n$ ,  $\bar{R}_{43}^n$  значення яких можна визначити, побудувавши план сил за рівнянням (32). Для цього проводимо пряму, паралельну лінії дії  $\bar{R}_{12}^n$ , на якій вибираємо довільну точку  $a$ , з якої у вибраному масштабі  $\mu_F$  послідовно відкладаємо вектори дотичної складової  $\bar{R}_{12}^r$  (рис. 4.5, б),  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{R}_{43}^r$  (див. рівняння 32).

План сил – це перевірка правильності: якщо багатокутник не замикається, значить десь переплутано знак, масштаб або напрям. У практиці це зручно поєднувати з чисельною перевіркою: короткий розрахунок дає ті самі дотичні складові, що ви відкладаєте на плані, і вчить «читати» геометрію навантажень очима інженера.

Вектор  $\bar{R}_{43}^n$  продовжуємо до перетину з напрямом вектора  $\bar{R}_{12}^n$ .

Точка перетину напрямів  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{43}^n$  (точка  $m$ ) визначає величини відрізків, які зображують у вибраному масштабі вектори  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{43}^n$ . Напрями цих векторів повинні бути такими, щоб при обході контура плану всі сили були напрямлені у напрямі обходу. Складаючи на плані сил вектори  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{12}^r$ , дістанемо повну реакцію  $\bar{R}_{12}$ , аналогічно знаходимо повну реакцію  $\bar{R}_{43}$  (29).

Щоб визначити реакцію  $\bar{R}_{32}$  ланки 3 на ланку 2, напишемо рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 2:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32}. \quad (33)$$

У цьому рівнянні маємо два невідомих: значення та напрям реакції  $\bar{F}_{32}$ . Їх можна визначити, побудувавши план сил для ланки 2 згідно з рівнянням (33). Для цього на плані сил (рис. 4.5, б) досить сполучити початок вектора  $\bar{R}_{12}$  з кінцем вектора  $\bar{F}_2$  і дістанемо реакцію  $\bar{R}_{32}$  (вона показана штриховою лінією). Очевидно, що реакція  $\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}$  і її можна визначити так само, як і  $\bar{R}_{32}$ , розглянувши рівновагу ланки 3.

Substituting relations (29) into the equilibrium equation (28), we obtain:

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43}^r + \bar{R}_{43}^n = 0. \quad (32)$$

In this equation only the normal components of the reactions

$\bar{R}_{12}^n$ ,  $\bar{R}_{43}^n$  are unknown; their values can be determined by constructing a force plan according to equation (32). To do this, draw a straight line parallel to the line of action  $\bar{R}_{12}^n$ , on which choose an arbitrary point  $a$ ; from it, in the chosen scale  $\mu_F$  lay off in sequence the vectors of the tangential component  $\bar{R}_{12}^r$  (Fig. 4.5,  $b$ ),  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{R}_{43}^r$  (see equ. 32).

A force plan is a correctness check: if the polygon does not close, then somewhere a sign, a scale, or a direction has been mixed up. In practice, it is convenient to combine this with a numerical check: a short calculation yields the same tangential components that you lay off on the plan and teaches you to “read” the geometry of loads with an engineer’s eye.

Extend the vector  $\bar{R}_{43}^n$  to intersect the direction of the vector  $\bar{R}_{12}^n$ . The intersection point of the directions  $\bar{R}_{12}^n$  and  $\bar{R}_{43}^n$  (point  $m$ ) determines the lengths of the segments which, in the chosen scale, represent the vectors  $\bar{R}_{12}^n$  and  $\bar{R}_{43}^n$ . The directions of these vectors must be such that, when traversing the contour of the plan, all forces are directed along the traversal. By adding on the force plan the vectors  $\bar{R}_{12}^n$  and  $\bar{R}_{12}^r$ , we obtain the total reaction  $\bar{R}_{12}$ , similarly, we find the total reaction  $\bar{R}_{43}$  (29).

To determine the reaction  $\bar{R}_{32}$  of link 3 on link 2, we write the equilibrium equation of the forces acting on link 2:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32}. \quad (33)$$

In this equation we have two unknowns: the magnitude and direction of the reaction  $\bar{F}_{32}$ . They can be determined by constructing a force plan for link 2 according to equation (33). For this, on the force plan (Fig.4.5,  $b$ ) it is sufficient to connect the start of the vector  $\bar{R}_{12}$  with the end of the vector  $\bar{F}_2$  and we obtain the reaction  $\bar{R}_{32}$  (it is shown by a dashed line). Obviously, the reaction  $\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}$  can be determined in the same way as  $\bar{R}_{32}$ , by considering the equilibrium of link 3.

Згідно з рис. 4.5, б величини реакцій  $\bar{R}_{12}$  і  $\bar{R}_{43}$  визначаються:

$$\bar{R}_{12} = mb \cdot \mu_F; \quad \bar{R}_{43} = md \cdot \mu_F. \quad (34)$$

Слід виділити, що при силовому розрахунку структурної групи кривошипно-повзунного механізму, тангенційну складову реакції  $\bar{R}_{43}^r$  визначати не потрібно, тому що напрям реакції  $\bar{R}_{43}$  відомий (реакція  $\bar{R}_{43}$  має напрям перпендикулярний руху переміщення повзуна).

Після силового розрахунку всіх груп Ассура, які входять до складу механізму, переходимо до силового розрахунку початкової ланки, тобто початкового механізму I класу.

Ведуча ланка не є групою Ассура, і не може знаходитись у рівновазі під дією прикладених сил, тому для її зрівноваження необхідно прикладати зрівноважувальний момент або силу. Величина зрівноважувальної сили або моменту залежить від способу приведення ведучої ланки у рух.

Так, якщо вал електродвигуна безпосередньо з'єднаний з валом ланки 1, то вона зрівноважується моментом; якщо обертання виконується через зубчасту або фрикційну передачу, то на ланку 1 діє зрівноважувальна сила.

Лінія дії і точка прикладення сили  $\bar{F}_{zp}$  залежить від механізму приводу. Величина і напрямок зрівноважувального моменту  $M_{zp}$  (рис. 4.6, а) визначається із умови рівноваги ланки I

$$\sum M_o = 0;$$

$$-F_1 \cdot h_1 - R_{21} \cdot h_{21} + M_{zp} = 0,$$

звідки

$$M_{zp} = F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}. \quad (35)$$

При ньому величина реакції  $\bar{R}_{41}$  визначається за планом сил (рис. 4.6 б), який задовольняє умову

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (36)$$

According to Fig. 4.5, *b* the magnitudes of the reactions  $\bar{R}_{12}$  i  $\bar{R}_{43}$  are determined:

$$\bar{R}_{12} = mb \cdot \mu_F; \quad \bar{R}_{43} = md \cdot \mu_F. \quad (34)$$

It should be noted that in the force calculation of the structural group of a crank–slider mechanism, it is not necessary to determine the tangential component of the reaction  $\bar{R}_{43}^r$ , because the direction of the reaction  $\bar{R}_{43}$  is known (the reaction  $\bar{R}_{43}$  is directed perpendicular to the motion of the slider).

After the force calculation of all the Assur groups that are part of the mechanism, we proceed to the force calculation of the initial link, i.e., the initial class-I mechanism.

The driving link is not an Assur group and cannot be in equilibrium under the action of the applied forces; therefore, to balance it, it is necessary to apply a balancing moment or a balancing force. The magnitude of the balancing force or moment depends on the way the driving link is set in motion.

Thus, if the shaft of the electric motor is directly connected to the shaft of link 1, then it is balanced by a moment; if the rotation is performed through a gear or friction transmission, a balancing force acts on link 1.

The line of action and the point of application of the force  $\bar{F}_{3p}$  depend on the drive mechanism. The magnitude and direction of the balancing moment  $M_{3p}$  (Fig. 4.6, *a*) are determined from the condition of equilibrium of link 1:

$$\begin{aligned} \sum M_o &= 0; \\ -F_1 \cdot h_1 - R_{21} \cdot h_{21} + M_{3p} &= 0, \end{aligned}$$

whence 
$$M_{3p} = F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}. \quad (35)$$

In this case the magnitude of the reaction  $\bar{R}_{41}$  is determined from the force plan (Fig. 4.6, *b*), which satisfies the condition

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (36)$$

Якщо зрівноважувальний момент співпадає за напрямком з кутовою швидкістю ланки 1, то він є рушійним, а якщо проти руху – гальмом.

Якщо ланка 1 зрівноважується силою  $\bar{F}_{3p}$  (рис. 4.6, в), лінія дії якої відома, то її величина визначається з рівняння  $\sum M_o = 0$ .

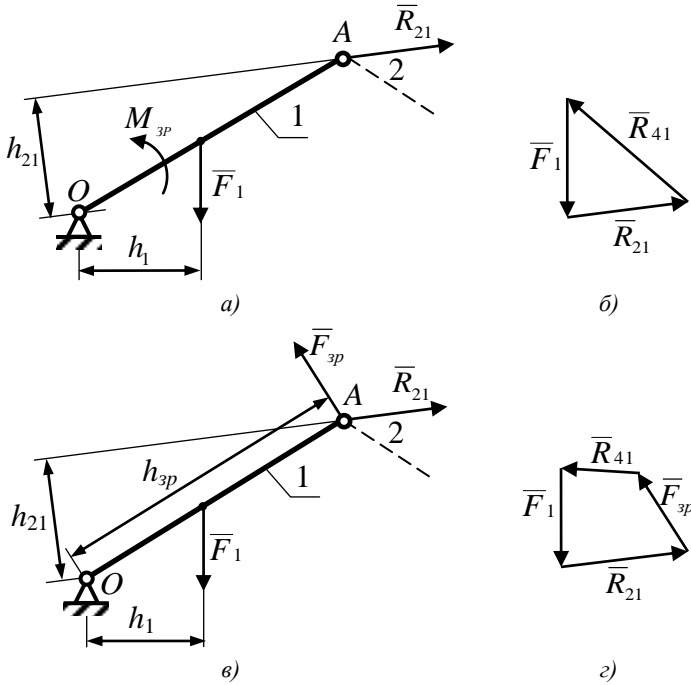


Рис. 4.6.. Визначення зрівноважувальних момента та сили

$$F_{3p} = \frac{F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}}{h_{3p}}. \tag{37}$$

Вибір між зрівноважувальним моментом і силою – це ще й конструктивна стратегія: пряме приєднання двигуна фіксує профіль потрібного моменту по циклу (корисно для вибору сервопривода й редуктора), тоді як силова дія через передачу дозволяє «розкласти» піки навантажень по елементах зчеплення або паса, інколи зменшуючи віб-

рації на валу двигуна.

If the balancing moment coincides in direction with the angular velocity of link 1, then it is driving; and if it is opposite to the motion – it is braking. If link 1 is balanced by a force  $\bar{F}_{3p}$  (Fig. 4.6, c), whose line of action is known, then its magnitude is determined from the equation  $\sum M_o = 0$ .

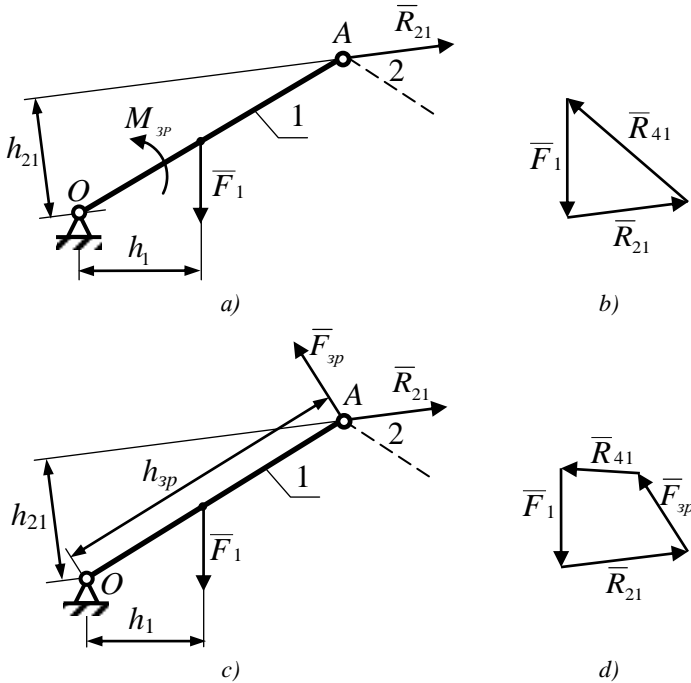


Fig. 4.6. Determination of the balancing moment and force

$$F_{3p} = \frac{F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}}{h_{3p}}. \quad (37)$$

The choice between a balancing moment and a balancing force is also a design strategy: direct coupling of the motor fixes the profile of the required torque over the cycle (useful for selecting a servodrive and gearbox), whereas force excitation through a transmission makes it possible to “spread” load peaks across the gearing or belt elements, sometimes

reducing vibration on the motor shaft.

Величина реакції  $\bar{R}_{41}$  у цьому випадку також визначається із рівняння рівноваги ланки 1

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{F}_{zp} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (38)$$

Це рівняння розв'язується графічно (дивись рис. 4.6, *d*).

Силовий розрахунок чотириланкового механізму без тертя – це спосіб «почути», як через геометрію та інерцію корисні опори перекладаються на привод і опори. Коли ми зводимо зовнішні дії до рівнодійної сили та моменту для кожної ланки і дотримуємося принципу Д'Аламбера, то багатокутник сил припиняє бути суто графічною вправою: він показує, де і чому з'являються піки реакцій, у які моменти циклу потрібен найбільший крутний момент, як змінюється навантаження підшипників і пальців. У реальних вузлах саме ці піки зумовлюють втому й нагрів, а отже – вибір класу підшипника, перерізів деталей і типу привода. Якщо механізм з'єднується безпосередньо з двигуном, то зрівноважувальний момент по суті є «паспортним» для привода; якщо через передачу – зрівноважувальна сила допомагає побачити, які зусилля підуть у зубчасте зачеплення або пас. Далі до цієї «ідеальної» картини додаються втрати на тертя, пружність і демпфування – і силовий портрет механізму стає повним. Але саме тут народжується інженерна інтуїція: замкнутий план сил означає внутрішню узгодженість розрахунку; зміна знаків дотичних складових пояснює, чому «провалюються» траєкторії в деяких положеннях; а контури з великим розмахом одразу підказують, де механізм вимагатиме жорсткішої конструкції або м'якшого профілю прискорень.

The magnitude of the reaction  $\bar{R}_{41}$  in this case is also determined from the equilibrium equation of link 1

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{F}_{3p} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (38)$$

This equation is solved graphically (see Fig. 4.6, *d*).

The force calculation of a four-link mechanism without friction is a way to “hear” how, through geometry and inertia, the useful resistances are transferred to the drive and supports. When we reduce the external actions to a resultant force and moment for each link and adhere to D’Alembert’s principle, the force polygon ceases to be a purely graphical exercise: it shows where and why peaks of reactions appear, at which moments of the cycle the greatest torque is required, how the loads on bearings and pins change. In real units it is precisely these peaks that cause fatigue and heating, and therefore – the choice of bearing class, cross-sections of parts, and the type of drive. If the mechanism is connected directly to the motor, then the balancing moment is essentially the “nameplate” for the drive; if through a transmission – the balancing force helps to see what forces will go into the gear mesh or the belt. Afterwards, friction losses, elasticity, and damping are added to this “ideal” picture – and the force portrait of the mechanism becomes complete. But it is here that engineering intuition is born: a closed force plan means internal consistency of the calculation; a change of signs of tangential components explains why trajectories “fail” in certain positions; and contours with large span immediately suggest where the mechanism will require a stiffer structure or a softer acceleration profile.

#### 4.5 Визначення зрівноважувальної сили

Метод «жорсткого важеля» (Жуковського) зручний там, де інженеру не потрібна повна картина реакцій у всіх парах, а важливо швидко дізнатись, який саме зрівноважувальний момент або сила потрібні на ведучій ланці в конкретному положенні механізму. Це, зокрема, етап попереднього підбору привода й редуктора, коли треба оцінити піки моментів по циклу; оперативна перевірка коректності виміряних моментів на стенді; задачі керування, де формується «підпір» за моментом (feedforward) для сервопривода; навчальні та проєктні ситуації, коли тертя або детальні контакти невідомі або несуттєві, а механізм має одну ступінь вільності і домінують задані корисні опори чи інерційні силові складові.

Натомість повний силовий розрахунок раціональний тоді, коли потрібні реакції для перевірки підшипників і пальців на міцність, коли маємо істотне тертя (гальма, муфти, ковзні напрямні), коли кілька ступенів свободи або пружні деформації суттєво змінюють кінематику.

Практичний зміст правила такий: план швидкостей для обраного положення механізму можна сприймати як «ваговий важіль», що перетворює сили на моменти відносно полюса. Після повороту плану на  $90^\circ$  проти миттєвого обертання відстань від полюса до відповідної точки стає «плечем» сили; якщо сила в реальному механізмі працює в певній точці й напрямі, то на важелі вона прикладається паралельно сама собі в однойменній точці. Сума моментів усіх зовнішніх сил і пар сил відносно полюса дорівнює нулю – звідси безпосередньо впливає шуканий зрівноважувальний момент або сила на ведучій ланці. Реакції ідеальних пар зникають з рівняння, бо їхня елементарна робота на можливих переміщеннях дорівнює нулю; якщо потрібна динаміка, сили інерції та пари інерції просто додаються як зовнішні, і правило продовжує працювати. На практиці корисно домовитись про знак: додатним вважати момент, що намагається повернути «важіль» у вибраному додатному напрямі (зручно – проти годинникової стрілки). Сила, чия лінія дії проходить через полюс плану, моменту не дає; чисті пари сил, прикладені до ланок, переносяться у суму моментів без змін. Знак знайденого зрівноважувального моменту відразу підказує режим привода: якщо напрямом збігається з кутовою швидкістю ведучої ланки – це рушійний момент, якщо протилежний – гальмівний (а іноді й потенційно рекуперативний).

## 4.5 Determination of the balancing force

Zhukovsky's "rigid lever" method is convenient where the engineer does not need a full picture of the reactions in all pairs, but it is important to quickly find out what balancing moment or force is required on the driving link in a specific position of the mechanism. This includes, in particular, the stage of preliminary selection of a drive and gearbox, when the torque peaks over the cycle must be estimated; an operational check of the correctness of measured torques on a test stand; control tasks where a torque "preload" (feedforward) for a servodrive is formed; educational and design situations where friction or detailed contacts are unknown or insignificant, and the mechanism has one degree of freedom and the dominant factors are given useful resistances or inertial force components.

Conversely, a full force calculation is rational when reactions are needed to check bearings and pins for strength, when friction is significant (brakes, clutches, sliding guides), when there are several degrees of freedom, or when elastic deformations substantially change the kinematics.

The practical meaning of the rule is as follows: the velocity diagram for the chosen position of the mechanism can be perceived as a "weighing lever" that converts forces into moments relative to a pole. After rotating the diagram by  $90^\circ$  opposite to the instantaneous rotation, the distance from the pole to the corresponding point becomes the "arm" of the force; if a force in the real mechanism acts at a certain point and in a certain direction, then on the lever it is applied parallel to itself at the homonymous point. The sum of the moments of all external forces and couples about the pole is equal to zero – hence the sought balancing moment or force on the driving link follows directly. The reactions of ideal pairs disappear from the equation because their elementary work on the possible displacements is zero; if dynamics is needed, the inertia forces and inertia couples are simply added as external, and the rule continues to work. In practice it is useful to agree on a sign convention: consider positive the moment that tends to turn the "lever" in the chosen positive direction (conveniently – counterclockwise). A force whose line of action passes through the pole of the diagram produces no moment; pure couples applied to the links are carried into the sum of moments unchanged. The sign of the found balancing moment immediately indicates the drive mode: if the direction coincides with the angular velocity of the driving link – it is a driving moment; if opposite – a braking moment (and sometimes potentially regenerative).

Інтуїтивні перевірки допомагають уникнути помилок: поблизу «мертвих» положень окремі плечі на плані швидкостей малі, тому навіть помірні сили дають великі моменти; якщо на «важелі» багатокутник моментів не «замикається» у нуль, значить десь переплутано знак або масштаб. У періодичних задачах без тертя сума віртуальних робіт за період має компенсуватися – якщо цього не відбувається, треба перевірити напрям повороту плану, вибір полюса і відповідність точок.

Щоб відчутти метод, варто осмислити два типові сценарії. Кривошипно-повзунний механізм із силою різання на повзуні: на «жорсткому важелі» момент цієї сили відносно полюса дорівнює її величині, помноженій на плечі до точки повзуна; рівновага негайно дає потрібний зрівноважувальний момент на кривошипі. У «мертвих» околах плече повзуна відносно полюса мале – від цього й високі вимоги до пікового моменту привода в реальному пресуванні чи різанні. Шарнірний чотириланковий механізм із вантажем на коромислі: якщо на ведучу ланку подається не момент, а дотична сила (наприклад, пас або зубчасте зачеплення), то її шукаємо з тієї ж умови рівноваги моментів – відношення моменту навантаження на «важелі» до плеча ведучої точки одразу дає потрібну величину і знак дії. У керуванні це знання перетворюється на профіль задання для сервопривода: згладжуючи піки через обмеження ривка чи додаючи маховик (пружний елемент), інженер зменшує вимоги до струмів і нагріву й підвищує ресурс.

Точність методу визначається якістю кінематичного плану: якщо переплутати напрям миттєвого обертання або обрати полюс не в тій точці, плечі на «важелі» будуть хибні, і помилка у моменті зросте пропорційно. Масштаб має значення лише для абсолютних чисел – співвідношення моментів зберігаються у будь-якому масштабі; тому в перших прикидках достатньо дбати про правильний напрям та відповідність «однойменних» точок. Важливо також чесно оцінити область застосовності: правило розраховане на механізми з одним ступенем свободи в фіксованому положенні; якщо у вузлі істотно сухе тертя або пружні деформації помітно змінюють швидкості точок, результат слід сприймати як прикидку і, за потреби, переходити до повного силового аналізу або моделі з тертям і пружністю.

Intuitive checks help to avoid errors: near “dead” positions individual arms on the velocity diagram are small, therefore even moderate forces produce large moments; if on the “lever” the polygon of moments does not “close” to zero, then somewhere a sign or scale has been mixed up. In periodic problems without friction the sum of virtual works over a period must compensate – if this does not occur, one should check the direction of rotation of the diagram, the choice of the pole, and the correspondence of points.

To feel the method, it is worth understanding two typical scenarios. A crank-slider mechanism with a cutting force on the slider: on the “rigid lever” the moment of this force relative to the pole equals its magnitude multiplied by the arm to the slider point; equilibrium immediately yields the required balancing moment on the crank. In the vicinity of “dead” positions the arm of the slider relative to the pole is small – hence the high demands on the peak torque of the drive in real pressing or cutting. A hinged four-link mechanism with a load on the rocker: if a tangential force (for example, a belt or gears) is applied to the driving link instead of a moment, it is sought from the same moment-equilibrium condition – the ratio of the load moment on the “lever” to the arm of the driving point immediately gives the required magnitude and direction of action. In control this knowledge turns into a feedforward profile for the servodrive: by smoothing peaks through jerk limitation or by adding a flywheel (elastic element), the engineer reduces current and heating demands and increases service life.

The accuracy of the method is determined by the quality of the kinematic diagram: if the direction of instantaneous rotation is confused or the pole is chosen at the wrong point, the arms on the “lever” will be incorrect, and the error in the moment will grow proportionally. Scale matters only for absolute numbers – ratios of moments are preserved in any scale; therefore, in first estimates it is sufficient to care about the correct direction and correspondence of “homonymous” points. It is also important to honestly assess the domain of applicability: the rule is designed for mechanisms with one degree of freedom in a fixed position; if there is significant dry friction in the unit or elastic deformations noticeably change the point velocities, the result should be taken as an estimate and, if necessary, one should proceed to a full force analysis or a model with friction and elasticity.

Таким чином, метод «жорсткого важеля» – це місток між геометрією руху і вимогами до привода. Коли завданням є вибір двигуна та передавального числа, оцінка енергоспоживання за цикл, швидкий контроль пікових навантажень або синтез профілю моменту для системи керування, «жорсткий важіль» дає швидку і наочну відповідь без обтяжливих обчислень реакцій. А коли постає питання ресурсу підшипників, напружень у пальцях або контактів у зачепленні – це сигнал перейти від цієї зручної ідеалізації до повного силового розрахунку з урахуванням усіх чинників.

Спосіб побудови такого важеля сформульований у теоремі:

*Якщо вектори всіх сил, що прикладені у різних точках ланок і зрівноважених на механізмі, перенести паралельно самим собі в одній-менні точки повернутого на  $90^\circ$  проти миттєвого обертання плану швидкостей, узявши фігуру плану за жорсткий важіль, то сума моментів усіх указаних сил відносно полюса плану буде дорівнювати нулю.*

У математичній формі це записується так:

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0, \quad (39)$$

де  $h_i$  – плече сили  $F_i$  відносно полюса повернутого плану швидкостей.

Така геометрична інтерпретація принципу можливих переміщень дуже зручна для розв’язування задач динаміки.

Розглянемо приклад визначення зрівноважуючої сили  $\bar{F}_{zp}$  за допомогою правила важеля Жуковського. Нехай нам задана кінематична схема кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.7, а), на ланки якого діють сили  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  і момент сил  $M_2$ , швидкість обертання кривошипу  $OA$  дорівнює  $\omega_1$ . Зрівноважуючу силу прикладаємо до кривошипу  $OA$  у точці  $A$  і спрямовуємо перпендикулярно до лінії  $OA$ . Будуємо для заданого положення механізму повернутий проти миттєвого обертання на  $90^\circ$  план швидкостей (рис. 4.7, б), у відповідних точках якого прикладаємо сили  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{F}_{zp}$ , а момент  $M_2$  розкладаємо на пару сил  $F'_2 = \frac{M_2}{l_{AB}}$  (на рис. 4.7 сили  $F'_2$  показано штриховими лініями), які прикладаємо відповідно у точках  $a$  та  $b$  перпендикулярно до  $AB$  ( $ab \parallel AB$ ).

Thus, method “rigid lever” is a bridge between the geometry of motion and the requirements for the drive. When the task is the selection of the motor and gear ratio, the assessment of energy consumption per cycle, a quick check of peak loads, or the synthesis of a torque profile for a control system, the “rigid lever” gives a quick and visual answer without burdensome computations of reactions. And when the question concerns bearing life, stresses in pins, or contacts in a mesh – that is a signal to move from this convenient idealization to a full force calculation with all factors taken into account. The way to construct such a lever, formulated by M. Ye. Zhukovsky, is set out in the following theorem:

*If the vectors of all forces applied at different points of the links and balanced on the mechanism are transferred parallel to themselves to the homonymous points of the velocity diagram rotated by 90° opposite to the instantaneous rotation, taking the diagram as a rigid lever, then the sum of the moments of all the indicated forces with respect to the pole of the diagram will be equal to zero.*

In mathematical form this is written as:

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0, \quad (39)$$

where  $h_i$  – the arm of the force  $F_i$  relative to the pole of the rotated velocity diagram.

Such a geometric interpretation of the principle of virtual displacements is very convenient for solving dynamics problems.

Let us consider an example of determining the balancing force  $\bar{F}_{3p}$  using Zhukovsky’s lever rule. Let the kinematic scheme of a crank-slider mechanism be given (Fig. 4.7, *a*), on whose links the forces  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  and the couple  $M_2$ , act, and the angular speed of the crank  $OA$  equals  $\omega_1$ . The balancing force is applied to the crank  $OA$  at point  $A$  and directed perpendicular to the line  $OA$ . For the given position of the mechanism we construct the velocity diagram rotated by 90° opposite to the instantaneous rotation (Fig. 4.7, *b*), at the corresponding points of which we apply the forces  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{F}_{3p}$ , and we decompose the couple  $M_2$  into a pair of

forces  $F'_2 = \frac{M_2}{l_{AB}}$  (in Fig. 4.7 these forces  $F'_2$  are shown by dashed lines),

which we apply at points  $a$  and  $b$  perpendicular to  $AB$  ( $ab \parallel AB$ ).

Враховуючи, що під дією цих сил, включаючи зрівноважуючу силу, механізм знаходиться у рівновазі, то можна записати таке рівняння моментів усіх сил, що прикладені до повернутого плану швидкостей, який умовно вважаємо жорстким важелем.

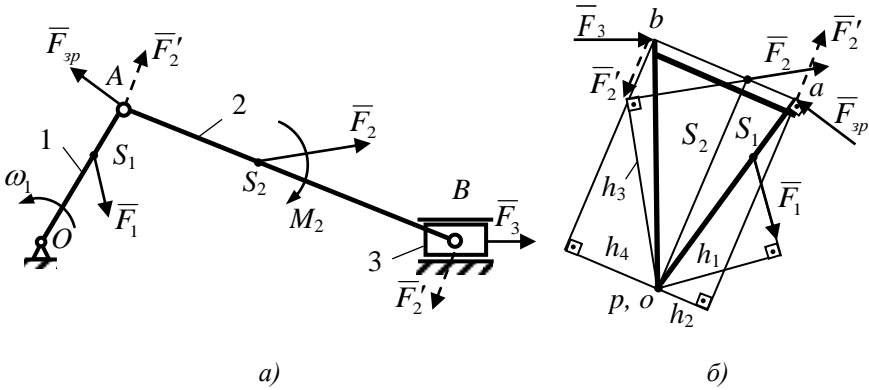


Рис. 4.7. Визначення зрівноважуючих сил за допомогою «жорсткого важеля»

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = F_{3p}pa - F_1 \cdot h_1 + F_2' \cdot h_2 - F_2 \cdot h_3 + F_2' \cdot h_4 - F_3pb = 0,$$

звідки маємо

$$F_{3p} = \frac{F_1 \cdot h_1 - F_2' \cdot h_2 + F_2 \cdot h_3 - F_2' \cdot h_4 + F_3pb}{pa}, \quad (40)$$

де  $h_i$  – плечі відповідних сил відносно полюса повернутого плану швидкостей, мм. Зауважимо, що модуль не залежить від того, в який бік повернути на  $90^\circ$  план швидкостей.

В розділі 4 зводиться попередній матеріал, який студент бачив окремими темами. Наскрізна ідея проста: кінематика відповідає на «як рухається?», а динаміка – на питання «чому й якою ціною?», де ціною є сили, моменти, енергія і ресурс. Ви навчилися читати рух очима силового балансу, розуміти, як корисні опори перекладаються на привід і опори, чому інерція «позичає» енергію на розгоні та «повертає» на гальмуванні, як ідеальні моделі допомагають спроектувати реальні вузли.

Taking into account that under the action of these forces, including the balancing force, the mechanism is in equilibrium, we can write the following equation of the moments of all the forces applied to the rotated velocity diagram, which we conventionally regard as a rigid lever.

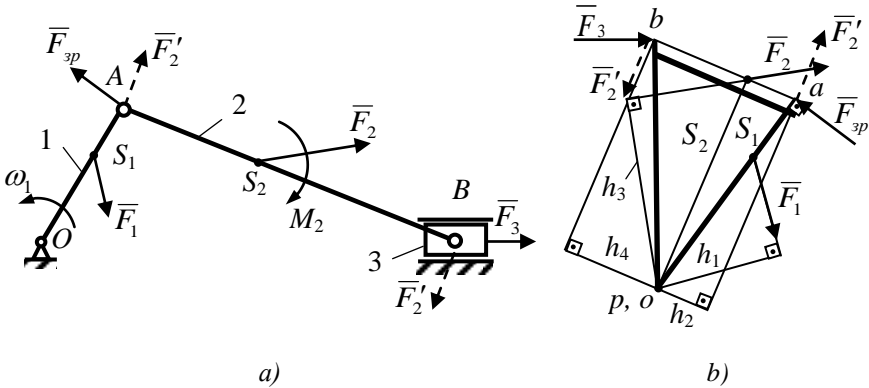


Fig. 4.7. Determination of balancing forces using «rigid lever»

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = F_{3p}pa - F_1 \cdot h_1 + F_2' \cdot h_2 - F_2 \cdot h_3 + F_2' \cdot h_4 - F_3pb = 0,$$

whence we have

$$F_{3p} = \frac{F_1 \cdot h_1 - F_2' \cdot h_2 + F_2 \cdot h_3 - F_2' \cdot h_4 + F_3pb}{pa}, \quad (40)$$

where  $h_i$  – the arms of the corresponding forces relative to the pole of the rotated velocity diagram, mm. Note that the magnitude does not depend on which way the velocity diagram is rotated by  $90^\circ$ .

Section 4 summarizes the previous material that the student has seen in separate topics. The underlying idea is simple: kinematics answers “how does it move?”, and dynamics – the question “why and at what cost?”, where the cost is forces, moments, energy, and service life. You have learned to read motion through the lens of force balance, to understand how useful resistances are transferred to the drive and supports, why inertia “borrows” energy during acceleration and “returns” it during braking, and how ideal models help design real units.

Надалі ці інструменти працюють поза межами класичних схем: у робототехніці – для підбору сервоприводів і синтезу профілів прискорень, у транспорті – для енергоефективності й безпеки, у верстатобудуванні – для точності та демпфування, у цифрових двійниках – для співставлення розрахунку з виміром.

Цей посібник не вичерпує теми – він задає мову і навички, на яких будуватиметься більш складний аналіз. Природними продовженнями стануть коливання і віброзахист, нерівномірність обертальних рухів і підбір маховиків, балансування та зниження вібрацій, моделі тертя і пружності, а також чисельні методи багатофізичного моделювання. Наприкінці – побажання, що виходить за межі формул: перевіряйте знаки й розмірності, тренуйте інтуїцію на граничних випадках, звіряйте розрахунки з експериментом і не бійтеся спрощувати там, де це виправдано, рівно настільки, щоб ухвалити правильне інженерне рішення. Саме так механіка стає мовою практики.

### Контрольні запитання

1. Що саме вивчає динаміка механізмів і машин у порівнянні з кінематикою?
2. Чим відрізняються пряма задача динаміки і обернена задача динаміки? Наведіть по одному прикладу для кожної.
3. У чому різниця між аналізом і синтезом механізмів?
4. Що називають рушійними силами. Наведіть три джерела таких сил.
5. Що таке сили опору? Поясніть відмінність між корисним опором і шкідливим опором.
6. Яку роль відіграють вага ланок, сили інерції та реакції у кінематичних парах?
7. Чому за відсутності тертя робота сил інерції за один період руху дорівнює нулю? Поясніть словами.
8. Як принцип Даламбера дозволяє звести динамічну задачу до умови рівноваги?
9. Сформулюйте умову статичної визначеності для механізмів з парами п'ятого класу і поясніть її зв'язок з групами Ассура.

Further on, these tools work beyond classical schemes: in robotics – for selecting servodrives and synthesizing acceleration profiles; in transport – for energy efficiency and safety; in machine tool building – for accuracy and damping; in digital twins – for comparing calculation with measurement.

This textbook does not exhaust the subject – it sets the language and skills on which more complex analysis is built. Natural continuations will be vibrations and vibration protection; nonuniformity of rotational motion and selection of flywheels; balancing and vibration reduction; friction and elasticity models; as well as numerical methods of multiphysics modeling. Finally – a wish that goes beyond formulas: check signs and dimensions, train intuition on limiting cases, compare calculations with experiment, and do not be afraid to simplify where justified, exactly as much as needed to make the right engineering decision. That is how mechanics becomes the language of practice.

### **Control questions**

1. What exactly does the dynamics of mechanisms and machines study compared to kinematics?
2. How do the direct problem of dynamics and the inverse problem of dynamics differ? Give one example for each.
3. What is the difference between analysis and synthesis of mechanisms?
4. What are called driving forces? Give three sources of such forces.
5. What are resistive forces? Explain the difference between useful resistance and harmful resistance.
6. What role do the weight of the links, inertia forces, and reactions in kinematic pairs play?
7. Why, in the absence of friction, is the work of inertia forces over one period of motion equal to zero? Explain in words.
8. How does D'Alembert's principle allow a dynamic problem to be reduced to an equilibrium condition?
9. Formulate the condition of static determinacy for mechanisms with fifth-class pairs and explain its connection with Assur groups.

10. Як визначається напрям реакції у шарнірній парі і у поступальній парі за відсутності тертя?
11. Для чого використовують побудову плану сил, які типові помилки трапляються під час його побудови?
12. Опишіть послідовність силового розрахунку чотириланкового механізму без урахування тертя для одного положення.
13. Чому у кривошипно-повзунному механізмі часто не потрібно окремо визначати тангенційну складову реакції в повзуні?
14. Як маса ланки і віддаленість центра мас впливають на пікові вимоги до моменту на ведучій ланці?
15. Чим відрізняються зрівноважувальний момент і зрівноважувальна сила на ведучій ланці? Коли обирають кожний варіант?
16. Сформулюйте правило жорсткого важеля Жуковського своїми словами.
17. У яких випадках доцільно користуватися методом Жуковського замість повного силового розрахунку?
18. Як у методі Жуковського враховують сили інерції і пари інерції?
19. Як результати силового аналізу впливають на вибір двигуна, передавального числа, на підшипники, жорсткість конструкції?
20. Які теми логічно продовжують вивчення цього розділу і чому вони важливі для практики?

10. How is the direction of the reaction determined in a revolute pair and in a prismatic pair in the absence of friction?
11. What is the purpose of constructing a force plan, and what typical mistakes occur when building it?
12. Describe the sequence of force calculation of a four-link mechanism without accounting for friction for one position.
13. Why in a crank–slider mechanism is it often unnecessary to determine separately the tangential component of the reaction in the slider?
14. How do the mass of a link and the offset of the center of mass affect the peak torque requirements on the driving link?
15. How do the balancing moment and the balancing force on the driving link differ? When is each option chosen?
16. Formulate Zhukovsky’s rigid-lever rule in your own words.
17. In what cases is it advisable to use Zhukovsky’s method instead of a full force calculation?
18. How are inertia forces and inertia couples taken into account in Zhukovsky’s method?
19. How do the results of the force analysis affect the choice of the motor, gear ratio, and the bearings, structural stiffness?
20. What topics logically continue the study of this section, and why are they important for practice?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко І. В., Теорія механізмів і машин. – Київ: Видавництво НТУУ «КПІ», 2015.
2. Бабич В. М., Механізми і машини. – Київ: Ліра-К, 2016.
3. Мартинюк А. А., Теорія механізмів і машин. – Київ: НТУУ «КПІ», 2018.
4. Мороз В. І., Братченко О. В., Павшенко А. В. Теорія механізмів і машин: дослідження та проектування механізмів типових технічних засобів. Харків, 2013.
5. Кудрявцев В. М., Машини та механізми. – Одеса: ОНПУ, 2014
6. Усатенко В. Ф., Прикладна механіка. – Харків: ХНАДУ, 2013.
7. Бойко С. М. Механізми та машини: навчальний посібник. – Харків: ХНУМГ, 2020.
8. Матвійчук В. М., Теорія машин і механізмів: навчальний посібник, Київ: Каравела, 2014.
9. Ткачук О. І., Сучасні методи аналізу механізмів та машин, Київ: Ліра-К, 2019.
10. Чорний А. С. Теорія механізмів і машин: підручник. – Київ: Кондор, 2016.
11. Кочетов А. В. Теоретична механіка та ТММ. – Харків: ХНУМГ, 2014.
12. Удодов О. І., Дубина В. В. Кінематика та динаміка механізмів. – Київ: КПІ ім. І. Сікорського, 2019.
13. Фурсіна А. Д., Теоретична та прикладна механіка – Theoretical and Applied Mechanics : навчальний посібник : в 4 ч. Ч.2 : Теорія механізмів і машин / А. Д. Фурсіна, В. Г. Шевченко, С. Ю. Кружнова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2023.
14. Тексти (конспект) лекцій з дисципліни “Прикладна механіка” (Частина І) для студентів заочної форми навчання спеціальностей 8.092206 “Електричні машини і апарати”, 8.090403 “Ливарне виробництво чорних і кольорових металів”, 8.090603 “Електротехнічні системи електроспоживання”, 8.092203 “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод” / Укл.: Б.О. Трескунов, В.Г. Шевченко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2002.

## LITERATURE

1. Hryhorenko I. V., Theory of Mechanisms and Machines. – Kyiv: NTUU “KPI” Publishing House, 2015.
2. Babych V. M., Mechanisms and Machines. – Kyiv: Lira-K, 2016.
3. Martyniuk A. A., Theory of Mechanisms and Machines. – Kyiv: NTUU “KPI”, 2018.
4. Moroz V. I., Bratchenko O. V., Pavshenko A. V., Theory of Mechanisms and Machines: Research and Design of Mechanisms of Typical Technical Devices. – Kharkiv, 2013.
5. Kudriavtsev V. M., Machines and Mechanisms. – Odesa: ONPU, 2014.
6. Usatenko V. F., Applied Mechanics. – Kharkiv: KhNADU, 2013.
7. Boiko S. M., Mechanisms and Machines: A Textbook. – Kharkiv: KhNUMG, 2020.
8. Matviichuk V. M., Theory of Machines and Mechanisms: A Textbook. – Kyiv: Karavela, 2014.
9. Tkachuk O. I., Modern Methods of Analysis of Mechanisms and Machines. – Kyiv: Lira-K, 2019.
10. Chorny A. S., Theory of Mechanisms and Machines: Textbook. – Kyiv: Kondor, 2016.
11. Kochetov A. V., Theoretical Mechanics and TMM. – Kharkiv: KhNUMG, 2014.
12. Udodov O. I., Dubyna V. V., Kinematics and Dynamics of Mechanisms. – Kyiv: KPI im. I. Sikorskoho, 2019.
13. Fursina A. D., Theoretical and Applied Mechanics: Study letter: in 4 parts Part 2: Theory of Machines and Mechanismus / A. D. Fursina, V. G. Shevchenko, S. Yu. Kruzhnova. – Zaporizhzhia: National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, 2023.
14. Texts (summaries) of lectures on the discipline “Applied Mechanics” (Part I) for students of correspondence studies in specialties 8.092206 “Electrical Machines and Devices”, 8.090403 “Foundry of Ferrous and Nonferrous Metals”, 8.090603 “Electrical Systems of Electricity Consumption”, 8.092203 “Electromechanical Automation Systems and Electric Drive” / Compiled by: B.O. Treskunov, V.G. Shevchenko. – Zaporizhzhia: ZNTU, 2002.

15. Norton R. L., *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. – 6th ed. – McGraw-Hill, 2020.
16. Shigley J. E., *Mechanical Engineering Design*. – 11th ed. – McGraw-Hill, 2020.
17. Rao J. S., *Mechanism and Machine Theory*. – New Age International, 2018.
18. Lynch K. M., Park F. C., *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. – Cambridge University Press, 2017.
19. Erdman A. G., Sandor G. N., Kota S., *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. – 5th ed. – Prentice Hall, 2019.
20. Tsai L.-W. *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*. – CRC Press, 2021.
21. Angeles J. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. – Springer, 2022.
22. Ting K. *Kinematics of Machinery Through HyperWorks*. – Academic Press, 2019.
23. Angeles J., López-Cajún C. *Dynamic Response of Linear Mechanical Systems*. – Springer, 2018.

15. Norton R. L., *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. – 6th ed. – McGraw-Hill, 2020.
16. Shigley J.E., *Mechanical Engineering Design*. – 11th ed. – McGraw-Hill, 2020
17. Rao J. S., *Mechanism and Machine Theory*. – New Age International, 2018.
18. Lynch K. M., Park F. C. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017.
19. Erdman A. G., Sandor G. N., Kota S. *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. – 5th ed. – Prentice Hall, 2019.
20. Tsai L.-W., *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*. – CRC Press, 2021.
21. Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. – Springer, 2022.
22. Ting K., *Kinematics of Machinery Through HyperWorks*. – Academic Press, 2019.
23. Angeles J., López-Cajún C., *Dynamic Response of Linear Mechanical Systems*. – Springer, 2018.



*Навчальне видання*

**Кузькін Олексій Феліксович**  
**Турпак Сергій Миколайович**  
**Фурсіна Анна Дмитрівна**  
**Шевченко Володимир Григорович**  
**Шумикін Сергій Олександрович**

**ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**  
**Частина 2**  
**Теорія механізмів і машин**

**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**  
**Part 2**  
**Theory of Mechanisms and Machines**

*Навчальний посібник*

Підписано до друку 01.04.2026,  
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Друк цифровий.  
Ум. друк. арк. 9,30. Облік.-вид. арк. 9.53  
Зам. 13-26. Тираж 30прим.

Видавець і виготовлювач Видавництво «Просвіта»  
пр. Соборний, 75, м. Запоріжжя, 69002  
E-mail: [prosvitabook@gmail.com](mailto:prosvitabook@gmail.com)

Свідоцтво серія ДК № 7409 від 27.07.2021 р