

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

ЛЕКЦІЇ З ФІЗИКИ

Частина 1

МЕХАНІКА

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей

151, 152, 153, 172 РТ-факультету

денної форми навчання

ЗАПОРІЖЖЯ

2019

Лекції з фізики. Частина 1. Механіка, молекулярна фізика, електродинаміка. Для студентів інженерно-технічних спеціальностей 151, 152, 153, 172 РТ-факультету денної форми навчання./Укладач: В.К.Манько.-Запоріжжя: ЗНТУ, 2019.-140 с.

Укладач:
доцент кафедри фізики

В.К.Манько

Рецензент: Швець Юлій Олександрович - зав. кафедри інформатики та інформаційних технологій в освіті, КЗ "ЗОШПО" ЗОР, доцент, к.ф.- м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
фізики

Протокол № 5 від 26 березня 2019 р.

Рекомендовано до видання

НМК РТ - факультету.

Протокол № 5 від 21 лютого 2019 р.

ЗМІСТ

1 ВСТУП	6
1.1 Предмет і задачі фізики	6
1.2 Поняття про вимір. Інтерн. система одиниць вим (СИ)	6
2 МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА	7
2.1 Основні поняття і задача кінематики	7
2.2 Класифікація механічного руху	8
2.3 Способи задавання руху точки у просторі	8
2.4 Швидкість при криволінійному русі	9
2.5 Прискор. при криволін. русі. Дотична та норм.склад. приск	10
2.6 Класифік руху в залежності від значень норм. і дотичн приск	12
2.7 Рух по колу. Кут швид та кут приск.Аналогія поступ і оберт р	12
3 ДИНАМІКА	15
3.1 Закони Ньютона. Маса. Сила	15
3.2 Імпульс. Заг формул 2-го з-ну Ньютона. З-н збер імп	16
3.3 Другий закон Ньютона і дві задачі динаміки	17
3.4 Принцип відн Галілея. Правило склад швид в клас мех	19
3.5 Сили пружності. Закон Гука для деформ розтяг(стиск)	21
3.6 Закон Гука для деформації зсуву	23
3.7 Сили тертя. Сухе тертя. Сили тертя спок, ковз, коч	24
3.8 Сила тяжіння. З-н всесвітн тяж. Гравіт поле та його напруж	25
3.9 Сили в неінерціальних системах відліку. Сили інерції	26
4. РОБОТА. ЕН. ІМПУЛЬС. З-НИ ЗБЕРЕЖЕННЯ	29
4.1 Імпульс тіла. Імпульс системи тіл. Центр інерції системи Закон збереження імпульсу	29
4.2 Принцип реак руху. Рівн Мещерського і Цюлковського	30
4.3 Механічна робота. Потужність	32
4.4 Поняття про енергію. Кінетична та потенціальна енергії	33
4.5 Закон збереження механічної енергії	34
4.6 Потенціал гравітаційного поля. Градієнт потенціалу. Зв'язок між напруженістю і потенціалом	35
4.7 Потенціальні криві. Потенціальний бар'єр. Рух класичної частинки в одномірній потенціальній ямі	37
4.8 Застос з-нів збереж імпульсу і ен до центр. удару куль	38
4.9 Перша та друга космічні швидкості	41
4.10 Обер. тв. тіл. Абсолютно тв. тіло.Момент сили. Пара сил	42
4.11 Основне рівняння динаміки обертального руху	43
4.12 Аналогія величин і рівнянь поступального і обертального руху. Кінетична енергія обертання тіла	45
4.13 Розрахунок моментів інерції деяких тіл. Теорема Штейнера	46
4.14 Гіроскоп. Гіроскопічний ефект	48

5. МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ.....	49
5.1 Сили в'язкості. Рух тіл в рідинах і в газах. Формула Стокса.....	49
5.2 Елементи гідроаеродинаміки. Рівняння Д. Бернуллі.....	51
5.3 Вимірювання коефіцієнта в'язкості методом Пуазейля.....	52
5.4 Ламінарний та турбулентний режими течії рідин (газів).....	54
6. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА.....	57
6.1 Положення молекулярно-кінетичної теорії та її задача.....	57
6.2 Ідеальний газ та його закони.....	58
6.3 Закон Дальтона. Рівняння стану для суміші газів.....	59
6.4 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії.....	60
6.5 Середня ен. поступ. руху молекул. Молек.-кін. тлумач темп.....	62
6.6 Поняття про функцію розподілу. Функція розподілу Максвелла.....	63
6.7 Швидкості молекул. Правило статистичного усереднення.....	66
6.8 Експ.перев. розпод.Максвелла мол. по швидк (дослід Штерна).....	68
6.9 Баром. формула. Больцманівський розпод. мол. в силовому полі.....	69
6.10 Ефективний діаметр молекул. Частота зіткнень та середня довжина вільного пробігу молекул.....	70
6.11 Явища переносу в газах. Внутрішнє тертя.....	72
6.12 Теплопровідність газів.....	74
6.13 Дифузія.....	75
6.14 Зв'язок між коеф.переносу. Властив. газу при низькому тиск.....	76
6.15 Внутр. ен. системи. К-ть теплоти.Перше начало термодин.....	77
6.16 Степені вільності молекул. Розподіл енергії по степеням вільності. Внутрішня енергія ідеального газу.....	78
6.17 Робота газу в ізопроцесах.....	80
6.18 Молекулярно-кінетична теорія теплоємності газів.....	81
6.19 Адіабатний процес.....	83
6.20 Оборотні і необоротні процеси. Цикли.....	84
6.21 Принцип дії тепл. і холод. машин та їх коеф. корисної дії (ККД). Холодильний коефіцієнт. Друге начало термодинаміки.....	85
6.22 Ідеальна тепла машина Карно та її ККД.....	87
6.23 Поняття про ентропію. Властивості ентропії.....	88
6.24 Зміна ентропії ід. газу. Ізоентропійний (адіабатний) процес.....	91
7 ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОСТАТИКА.....	91
7.1 Поняття про заряд. Закон збереження заряду. Взаємодія зарядів. Закон Кулона. Силові характеристики поля.....	91.
7.2 Принцип суперпо. та його застосув. до розрах.електрост. поля.....	94
7.3 Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування до розрахунку електростатичного поля заряджених тіл.....	97

<u>7.4</u>	<u>Робота в електростатичному полі. Різниця потенціалів. Потенціал.</u>	
	<u>Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля....</u>	<u>101</u>
<u>7.5</u>	<u>Еквіпотен. поверхні. Зв'язок між напруж і потенц. електр. поля....</u>	<u>103</u>
<u>7.6</u>	<u>Електросмність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів.....</u>	<u>104.</u>
<u>7.7</u>	<u>Енергія та густина енергії електростатичного поля.....</u>	<u>106</u>
<u>8</u>	<u>ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТР СТРУМ ТА ЙОГО ЗАКОНИ.....</u>	<u>107</u>
<u>8.1</u>	<u>Сила струму. Електроруш. сила (е.р.с.). Напруга. Густина струму...<u></u></u>	<u>107</u>
<u>8.2</u>	<u>Основні полож. класичн. теорії електропров. металів. Експерим.</u>	
	<u>підтвердження електронної природи струму в металах.....</u>	<u>108</u>
<u>8.3</u>	<u>З-н Ома за клас. теорією електропров. металів. Електр. опір пров.<u></u></u>	<u>111.</u>
<u>8.4</u>	<u>Закон Джоуля-Ленца по класичній теорії електропров. металів.....</u>	<u>113</u>
<u>8.5</u>	<u>Закон Відемана-Франца по клас теорії електропров. металів.....</u>	<u>114</u>
<u>8.6</u>	<u>Протиріччя класичної теорії електропровідності металів.....</u>	<u>115</u>
<u>8.7</u>	<u>Закони Кірхгофа для розгалужених електричних кіл.....</u>	<u>116</u>
<u>8.8</u>	<u>Роб. вих електр. із металу. Контактна рiзн. потенц. (КРП). З-ни Вольта.....</u>	<u>117</u>
<u>8.9</u>	<u>Термоелектричні явища. Ефекти Зеебека і Пельтьє.....</u>	<u>121</u>
<u>9</u>	<u>ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....</u>	<u>122</u>
<u>9.1</u>	<u>Магнітне поле рух. зарядів. Індукція.магнітн. поля. З-н Ампера.....</u>	<u>122</u>
<u>9.2</u>	<u>З-н Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпоз. для магнітн. поля.....</u>	<u>124</u>
<u>9.3</u>	<u>Застосув. з-ну Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції</u>	
	<u>для розрахунку магнітного поля на осі колового струму.....</u>	<u>125</u>
<u>9.4</u>	<u>Застосув. з-ну Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпоз для</u>	
	<u>розрах. магнітн. поля прямолін. провідника із струмом.....</u>	<u>127</u>
<u>9.5</u>	<u>Циркуляція вектора напруж. магнітн. поля. З-н повного</u>	
	<u>струму та його застосув. для розрахунку магнітн. поля.....</u>	<u>128</u>
<u>9.6</u>	<u>Дія магн.поля на рух. заряд (сила Лоренца)Рух зар в магн. полі.....</u>	<u>130</u>
<u>9.7</u>	<u>Магнітний потік. Механічна робота в магнітному полі.....</u>	<u>133</u>
<u>9.8</u>	<u>Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца.....</u>	<u>134</u>
<u>9.9</u>	<u>Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність соленоїда.....</u>	<u>135</u>
<u>9.10</u>	<u>Зміна струму в котушці при його вмик. і вимик.Фіз.зміст індукт...<u></u></u>	<u>136</u>
<u>9.11</u>	<u>Енергія та густина енергії магнітного поля.....</u>	<u>138</u>
<u>ЧАСТИНА 2.....</u>		<u>138</u>

1 ВСТУП

1.1 Предмет і задачі фізики

Предметом вивчення фізики являється оточуючий нас матеріальний світ.

Фізика вивчає:

- а) загальні закони руху (зміни) матерії, які не вивчають інші природничі науки. Наприклад, закон збереження імпульсу, закон збереження енергії. Вона вивчає такі види руху матерії: механічний, тепловий, електромагнітний, оптичний, атомний і ядерний;
- б) внутрішню будову тіл і зв'язок властивостей тіл з їх внутрішньою структурою. Наприклад, електропровідність, твердість, магнітні властивості і т.д. Цими питаннями займається молекулярна фізика, атомна і ядерна фізика, фізика твердого тіла;
- в) можливості практичного використання явищ, законів, властивостей тіл. Це технічна фізика.

1.2 Поняття про вимірювання. Інтернаціональна система одиниць вимірювання (СІ)

Вимірювання – це процес порівняння фізичної величини з відповідним їй еталоном, який називається одиницею вимірювання цієї фізичної величини.

Основні одиниці вимірювання встановлюються міжнародними угодами. Інші одиниці, які виражаються через них називаються неосновними. Сукупність основних і неосновних одиниць вимірювання складають систему одиниць. До інтернаціональної системи (СІ) відносяться 7 основних одиниць і 2 додаткові.

Основні одиниці:

- а) метр (м) – одиниця довжини, дорівнює $1\ 650\ 763,73$ довжин хвиль випромінювання, яке виникає при переході електрона між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ атома криптона-86;
- б) кілограм (кг) – одиниця маси, дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма;

- в) секунда (с) – одиниця часу, дорівнює 9 192 631 770 періодам випромінювання, яке виникає при електронному переході між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезія-133;
- г) Ампер (А) – одиниця сили струму, дорівнює силі постійного струму, який при проходженні по двом паралельним прямолінійним провідникам нескінченної довжини і мізерною площею перерізу, які розміщені у вакуумі на відстані 1 м один від другого, викликає на відрізьку провідника довжиною 1 м силу взаємодії $2 \cdot 10^{-7}$ Н;
- д) Кельвін (К) – одиниця термодинамічної температури, дорівнює $1/273,16$ частини термодинамічної температури потрійної точки води;
- е) моль (моль) – одиниця кількості речовини, дорівнює кількості речовини, що містить стільки ж структурних елементів, скільки атомів містить 0,012 кг вуглецю-12 ($\sim 6,02 \cdot 10^{23}$);
- ж) кандела (кд) – одиниця сили світла, дорівнює силі світла, яке випромінюється з площі $1/600\,000$ м² в перпендикулярному напрямку при температурі затвердіння платини при тискові 101 325 Па.

Додаткові одиниці:

- а) радіан (рад) – одиниця плоского кута, дорівнює куту між двома радіусами кола, довжина дуги між яким дорівнює радіусу;
- б) стерadian (ср) – одиниця просторового кута, дорівнює просторовому куту с вершиною в центрі сфери, який вирізає на її поверхні площу, рівну площі квадрата із стороною, яка дорівнює радіусу сфери.

Означення основних, додаткових і похідних одиниць міжнародної системи можна знайти в книзі А.Г.Чертов. Единиці фізических величин. - М. "Высшая школа", 1977.

2 МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

Механіка – це розділ фізики, який вивчає різні види механічного руху тіл, не вияснюючи його причини (кінематика); причину руху тіл (динаміка); умови відносного спокою (статика).

2.1 Основні поняття і задача кінематики

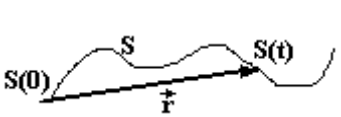
Механічний рух – переміщення тіла у просторі й часі відносно інших тіл, які вважаються нерухомими.

Система відліку – це сукупність тіл і зв'язана з ними система координат, відносно яких вивчається рух тіл.

Початок відліку – момент часу, з якого вивчається рух тіл.

Матеріальна точка – тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з відстанню, яке воно проходить при своєму русі, а всю масу тіла вважати сконцентрованою в його центрі мас.

Траєкторія – сукупність точок простору, які послідовно проходить тіло при своєму русі, або простіше це слід тіла у просторі.



Шлях (S) – відстань між початковим і кінцевим положенням тіла, виміряна по траєкторії, тобто це довжина траєкторії. Шлях – величина скалярна.

Переміщення (\vec{r}) – відрізок прямої, який з'єднує початкове і кінцеве положення тіла. Це векторна величина, яка вказує напрямок руху тіла і співпадає із шляхом тільки у випадку прямолінійної траєкторії.

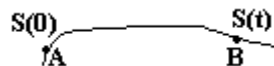
Задача кінематики – визначити положення тіла (його координати) і швидкість руху в будь-який момент часу.

2.2 Класифікація механічного руху

По формі траєкторії механічний рух буває прямолінійний і криволінійний, по швидкості – рівномірний і нерівномірний. Для тіл, які не можна вважати матеріальними точками, рух буває поступальний і обертальний. При поступальному русі будь-яка пряма, проведена через дві точки тіла, залишається паралельною сама собі. При обертальному русі всі точки тіла описують концентричні кола, центри яких лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання.

2.3 Способи задавання руху точки у просторі

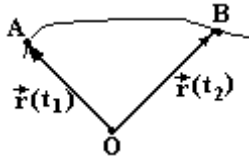
Є три способи задавання положення і руху точки у просторі: звичайний, векторний і координатний.



При **звичайному (траєкторному)** способі повинно бути відомо: траєкторія; начало відліку, тобто дугова координата $S(0)$ точки A в початковий

момент часу; напрямок руху по траєкторії від початкового положення; дугова координата $S(t)$ точки В, яка вимірюється довжиною траєкторії від початкової точки до положення тіла в будь-який момент часу, тобто повинна бути відома функція $S = S(t)$.

Наприклад, $S(t) = 10 + 2t - 3t^2 + 5t^3$ (м).

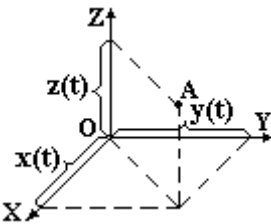


При **векторному** способі положення точки задається кінцем радіус-вектора $\vec{r}(t)$, проведеним із деякого центра О. Повинно бути відомо: 1) положення полюса О; 2) Векторна функція часу $\vec{r}(t)$, яка називається векторним

законом руху тіла.

Наприклад, $\vec{r}(t) = 4t \cdot \vec{i} - 7t^2 \cdot \vec{j} + 2t^3 \cdot \vec{k}$, (2.1)

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} - одиничні вектори (орти) вздовж координатних осей X, Y, Z відповідно.



При **координатному** способі повинні бути заданими: система координат X, Y, Z; функції часу: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Наприклад, $x(t) = 4t$ (м); $y(t) = -7t^2$ (м); $z(t) = 2t^3$ (м).

Всі способи взаємозв'язані. Найпростішим є зв'язок двох останніх. Якщо помножити координатні функції на відповідні орти і додати, одержимо векторну функцію (2.1) для $\vec{r}(t)$.

2.4 Швидкість при криволінійному русі

Нехай точка рухається вздовж деякої кривої лінії. Положення точки будемо задавати звичайним і

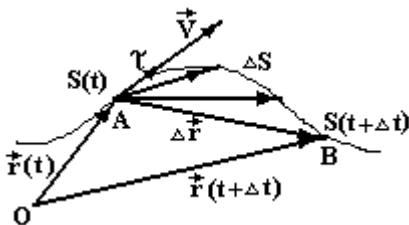


Рисунок 2.1

векторним способами. В момент часу t точка знаходиться в положенні А. Її криволінійна координата $S(t)$, а радіус-вектор $\vec{r}(t)$. В момент часу $(t + \Delta t)$ точка займе положення В з криволінійною координатою $S(t + \Delta t)$ і радіусом

вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$. Шлях ΔS ,

який пройшла точка за час Δt дорівнює різниці криволінійних координат: $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, а переміщення $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (рис.2.1).

За означенням, модуль миттєвої (в даний момент часу) швидкості є границя відношення шляху ΔS до проміжку часу Δt , за який цей шлях пройдено, при умові, що проміжок часу зменшується до нуля, тобто першій похідній за часом від криволінійної координати

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (2.2)$$

Швидкість величина векторна. Напрямок швидкості співпадає з граничним положенням вектора переміщення $\Delta \vec{r}$. Як видно з рис.2.1, при зменшенні часу Δt до нуля точка B наближається до точки A, а вектор переміщення $\Delta \vec{r}$ повертається навколо точки A і в граничний момент співпадає з дотичною до траєкторії. Вектор швидкості

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.3)$$

дорівнює першій похідній за часом від радіус-вектора положення точки. Вводячи одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$, можна записати

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V \cdot \vec{\tau} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau}. \quad (2.4)$$

В інтернаціональній системі одиниць швидкість вимірюється в м/с.

2.5 Прискорення при криволінійному русі. Дотична та нормальна складові прискорення

У загальному випадку при криволінійному русі змінюється як величина швидкості так і її напрямок. Мірою зміни швидкості з часом є прискорення \vec{a} . Це границя відношення вектора зміни швидкості

$\Delta \vec{V}$ до проміжку часу Δt , за який ця зміна відбулася, при умові зменшення Δt до нуля

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (2.5)$$

тобто це перша похідна від вектора швидкості, або друга похідна від радіус-

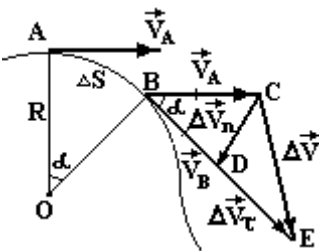


Рисунок 2.2

вектора за часом. Прискорення – це швидкість зміни швидкості. Одиницею вимірювання прискорення є м/с².

Нехай тіло за час Δt перемістилось із т.А в т.В (рис.2.2). Вектор зміни швидкості $\Delta \vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ розкладемо на дві складові $\Delta \vec{V}_n$ і $\Delta \vec{V}_\tau$ так, щоб величина $\Delta V_\tau = V_B - V_A = DE$. Із рис.2.2 видно, що $\Delta \vec{V} = \Delta \vec{V}_n + \Delta \vec{V}_\tau$, причому $\Delta \vec{V}_n$ відображає зміну напрямку швидкості, а $\Delta \vec{V}_\tau$ зміну її модуля. Таким чином, прискорення

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad (2.6)$$

теж буде мати дві складові: нормальне прискорення \vec{a}_n і тангенціальне (дотичне) \vec{a}_τ .

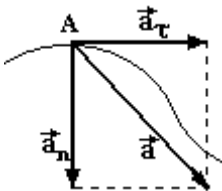
Знайдемо величину нормального прискорення. При досить малому проміжку часу Δt дугу $AB = \Delta S$ можна вважати хордою. Тоді із подібності трикутників $\triangle AOB$ і $\triangle DBC$ (вони обидва рівнобедрені з однаковим кутом α , що лежить проти основ) запишемо відношення відповідних сторін, і знайдемо ΔV_n

$$\frac{CD}{AB} = \frac{BC}{AO}, \text{ або } \frac{\Delta V_n}{\Delta S} = \frac{V_A}{R} \Rightarrow \Delta V_n = \frac{V_A}{R} \cdot \Delta S.$$

Тоді величина нормального прискорення

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_n}{\Delta t} = \frac{V_A}{R} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_A^2}{R}. \quad (2.7)$$

При зменшенні Δt до нуля кут α теж зменшується до нуля, а тому кут $CDE \rightarrow 90^\circ$. Отже нормальне і тангенціальне прискорення взаємно перпендикулярні. Тангенціальне прискорення направлене по дотичній до траєкторії, тому його ще називають дотичним прискоренням, а нормальне перпендикулярне до нього і направлене вздовж радіуса кривизни R до центра, тому його ще називають доцентровим прискоренням. Величина дотичного прискорення



$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \quad (2.8)$$

Рисунок 2.3 і характеризує зміну величини швидкості.

Величина повного прискорення, як видно із рис.2.3, знаходиться за теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}. \quad (2.9)$$

2.6 Класифікація руху в залежності від значень нормального і дотичного прискорень

Так як $a_n = \frac{V^2}{R}$, то при $a_n = 0$ і $V \neq 0$ $R \rightarrow \infty$. Це означає, що траєкторія уявляє собою пряму лінію.

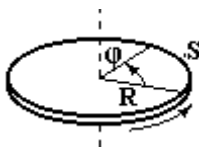
При $a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = 0$ $V = \text{const}$. Рух рівномірний.

Розглянемо декілька варіантів значень a_n і a_{τ} :

- а) $a_n = 0$; $a_{\tau} = 0$ - прямолінійний рівномірний рух;
- б) $a_n = 0$; $a_{\tau} = \pm \text{const}$ - прямолінійний рівнозмінний рух;
- в) $a_n = 0$; $a_{\tau} = f(t)$ - прямолінійний рух із змінним прискоренням;
- г) $a_{\tau} = 0$; $a_n = \text{const}$ - рівномірний рух з постійним радіусом кривизни траєкторії, тобто по колу;
- д) $a_{\tau} = \pm \text{const}$; $R = \text{const}$ - рівнозмінний рух по колу;
- е) $a_{\tau} = \text{const} > 0$; $a_n = \text{const}$ - величина швидкості зростає, так як $a_{\tau} > 0$. Отже повинен зростати і радіус кривизни траєкторії, щоб a_n залишалось незмінним. Маємо рух тіла по спіралі, яка розкручується.

2.7 Рух тіла по колу. Кутова швидкість та кутове прискорення. Аналогія поступального і обертового рухів

При вивченні обертового руху зручніше характеризувати його не лінійними параметрами (шлях, швидкість, лінійне прискорення), а кутовими: кутом повороту, кутовою швидкістю, кутовим



прискоренням. Зручність зумовлена тим, що для різних точок тіла кутові характеристики однакові на відміну від лінійних.

Дамо означення кутовим характеристикам обертального руху.

Кут повороту φ – це кут, на який повертається радіус-вектор будь-якої точки тіла. Вимірюється в радіанах. Довжина дуги (шлях S) зв'язана з кутом повороту (кутовою координатою) через радіус

$$S = \varphi \cdot R. \quad (2.10)$$

Кутова швидкість ω - це границя відношення кута повороту $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt , за який цей поворот здійснений, при умові, що Δt зменшується до нуля, тобто перша похідна від кута повороту за часом

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.11)$$

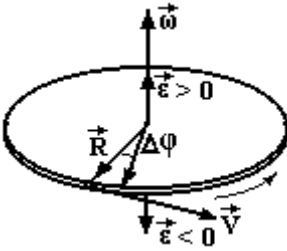


Рисунок 2.4

Не дивлячись, що кут повороту величина скалярна, кутову швидкість прийнято вважати вектором (рис.2.3), направленим вздовж осі обертання у відповідності з правилом правого гвинта: якщо обернути гвинт з правою різьбою разом з тілом, то поступальний рух гвинта вкаже напрямок вектора кутової швидкості. З кінця цього вектора обертання тіла видно проти годинникової стрілки. Вимірюється кутова швидкість в 1/с.

Встановимо зв'язок між кутовою та лінійною швидкостями, скориставшись означеннями швидкостей (2.2), (2.11) і співвідношенням (2.10).

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\varphi \cdot R)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot R = \omega \cdot R \quad (2.12)$$

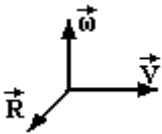


Рисунок 2.5

Вектори \vec{V} , $\vec{\omega}$ і \vec{R} , як видно із рис.2.5, взаємно-перпендикулярні. Тому рівняння (2.12) записують у векторній формі через векторний добуток

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \cdot \vec{R}]. \quad (2.13)$$

Кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ - це границя відношення зміни кутової швидкості $\Delta\vec{\omega}$ до проміжку часу Δt , за який ця зміна

відбулася, при умові, що $\Delta t \rightarrow 0$, тобто це перша похідна від кутової швидкості за часом.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.14)$$

Так як вектор $\vec{\omega}$ направлений по осі обертання, то і вектор $\Delta \vec{\omega}$, а отже і вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ теж направлений вздовж осі обертання (рис.2.4). У випадку прискореного руху він співпадає з напрямком кутової швидкості і протилежний їй при сповільненому русі. Вимірюється кутове прискорення в $1/c^2$.

Встановимо зв'язок між лінійним та кутовим прискореннями, скориставшись (2.5), (2.13), (2.14) і (2.3),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d[\vec{\omega} \cdot \vec{R}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{R} \right] + \left[\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{R}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{V}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

$$\text{Тут} \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{R}], \quad (2.15)$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \cdot \vec{V}] \quad (2.16)$$

відомі нам дотичне і нормальне прискорення.

Приклад. Одержимо рівняння рівнозмінного обертального руху. Для нього $a_\tau = \pm \text{const}$; $R = \text{const}$ (див. п.2.6, випадок 5). Це еквівалентно співвідношенням $\varepsilon = \pm \text{const}$; $R = \text{const}$, тобто

$\frac{d\omega}{dt} = \pm \varepsilon$. Інтегруємо останнє рівняння з початковими умовами: при

$t = 0$ $\omega = \omega_0$, $\varphi = \varphi_0$. Одержимо рівняння руху

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t \quad (2.17)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (2.18)$$

які аналогічні рівняннями прямолінійного рівнозмінного руху

$$V = V_0 \pm a_\tau \cdot t \quad S = S_0 + V_0 \cdot t \pm \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}.$$

Таким чином, між поступальним і обертальним рухами існує аналогія величин $S \rightarrow \varphi$; $V \rightarrow \omega$; $a_\tau \rightarrow \varepsilon$ і формул. Так у

поступальному русі відома формула $V^2 - V_0^2 = \pm 2 \cdot a_\tau \cdot S$.
 Замінивши відповідні величини, одержуємо для рівнозмінного
 обертального руху
 $\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2 \cdot \varepsilon \cdot \varphi$.

3 ДИНАМІКА

Динаміка вивчає причину руху тіл. Вона поділяється на три розділи:

- класична динаміка вивчає рух тіл великої маси (набагато більшої, ніж маса атомів) з малими швидкостями (набагато меншими, ніж швидкість світла $3 \cdot 10^8$ м/с). Вона базується на законах Ньютона;
- релятивістська динаміка вивчає рух тіл із швидкостями, близькими до швидкості світла;
- квантова механіка вивчає рух мікрочастинок.

Ми будемо розглядати спочатку класичну механіку.

3.1 Закони Ньютона. Маса. Сила

1-й закон Ньютона (закон інерції). Всяке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія інших тіл не виведуть його із цього стану. Властивість тіл зберігати набутий стан (спокою, чи руху) називається інертністю. Мірою інертності тіл є маса (m), яка в СІ вимірюється в кг. Маса одиниці об'єму (V) тіла називається густиною ρ

$$\rho = \frac{m}{V}, \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]. \quad (3.1)$$

Є й інша редакція цього закону інерції, а саме: системи відліку, в яких тіла, що не зазнають дії інших тіл, знаходяться у стані відносного спокою, або рівномірного прямолінійного руху, називаються інерціальними. Всі системи відліку, які рухаються відносно інерціальної рівномірно і прямолінійно, або знаходяться у стані спокою, теж являються інерціальними. Всі інші системи неінерціальні. Закони Ньютона справедливі для інерціальних систем.

Сила (F) – це міра дії одного тіла на інше, яка

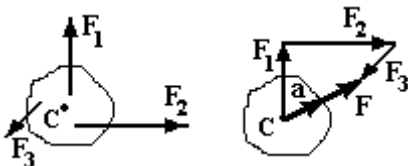


Рисунок 3.1

проявляється у виникненні прискорення тіла, або в його деформації (зміні розмірів і форми).

2-й закон Ньютона. Прискорення (\vec{a}), з яким рухається центр маси тіла С (рис.3.1), прямо пропорційне векторній сумі сил, що діють на нього (рівнодіючій), обернено пропорційне масі тіла, направлене в сторону рівнодіючої і прикладене в центр маси тіла

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.2)$$

Якщо хоч одна сила змінюється з часом, формула (3.2) дає миттєве значення прискорення, тобто в даний момент часу. З цього закону визначається одиниця сили Ньютон $F = m \cdot a \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} \right]$.

3-й закон Ньютона. Два тіла взаємодіють з силами F_1 і F_2 , однаковими за величиною і протилежними за напрямком. Вони не зрівноважують одна іншу, так як прикладені до різних тіл $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.



3.2 Імпульс. Загальне формулювання 2-го закону Ньютона. Закон збереження імпульсу

Враховуючи, що прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, формула (3.2) 2-го закону Ньютона набуде виду

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.3)$$

Тут добуток маси тіла на швидкість його руху називається **імпульсом** $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$. Це векторна фізична величина. Швидкість його зміни з часом дає силу. Змінити ж імпульс тіла можна не тільки за рахунок зміни швидкості, а і за рахунок зміни його маси. Тому формула (3.3)

2-го закону Ньютона є більш загальною. Таке формулювання дає можливість вивчати рух тіл змінної маси, наприклад, рух ракети.

Ізольованою (замкнутою) називається система тіл, на які не діють зовнішні сили, або їхня рівнодіюча дорівнює нулю. Тобто тіла взаємодіють тільки між собою з внутрішніми силами.

$\vec{F} = 0$ формула (3.3) дає $d\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$. Тобто, імпульс ізольованої (замкнутої) системи не змінюється. Вектор імпульсу системи тіл знаходиться як векторна сума імпульсів усіх тіл цієї системи. В цьому полягає суть закону збереження імпульсу. Задасмо запитанням: чи можуть швидкості усіх тіл замкнутої системи одночасно збільшуватись? Можуть, так як це **векторний закон**.

3.3 Другий закон Ньютона і дві задачі динаміки

Динаміка розв'язує дві взаємно-обернені задачі:

- по відомим траєкторії і закону руху знаходять можливі сили, що діють на тіло;
- по заданим силам знаходять траєкторію і закон руху тіла.

Розглянемо першу задачу.

Задано: траєкторія графічно (рис.3.2), або аналітично і закон руху будь-яким способом, наприклад, звичайним $S=S(t)$. Знайти: силу F -?

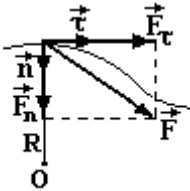


Рисунок 3.2

По траєкторії, знаходять одиничні вектори \vec{n} і $\vec{\tau}$, а також радіус R її кривизни. Тоді за ругим законом Ньютона

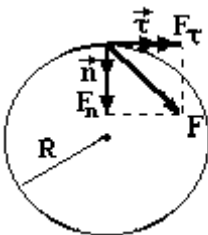


Рисунок 3.3

$$\begin{aligned}\vec{F} = m\vec{a} &= m(\vec{a}_\tau + \vec{a}_n) = m\left(\frac{d^2S}{dt^2} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{R} \cdot \vec{n}\right) = \\ &= m\left(\frac{d^2S}{dt^2} \cdot \vec{\tau} + \frac{1}{R}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \cdot \vec{n}\right) = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n\end{aligned}$$

Якщо рух тіла по колу радіусом R (рис.3.3) заданий кутовою координатою, яка змінюється по закону $\varphi = \varphi(t)$, то сила

$$\begin{aligned} \text{знаходиться так: } \vec{F} &= \vec{F}_\tau + \vec{F}_n = m\vec{a}_\tau + m\vec{a}_n = m\epsilon R\vec{\tau} + m\omega^2 R\vec{n} = \\ &= mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{\tau} + mR \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \vec{n} \end{aligned}$$

Сила \vec{F}_n направлена перпендикулярно до дотичної, тобто до центра кривизни траєкторії. Тому її ще називають доцентровою силою. Як бачимо, перша задача динаміки розв'язується шляхом диференціювання.

Розглянемо другу задачу динаміки.

Задано: закон зміни сили $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{V}, S)$ як функцію часу, швидкості, шляху.

Знайти: закон руху $S = S(t)$.

Вона розв'язується інтегруванням. Окрім сили повинні бути задані і початкові умови, так як під дією однієї і тієї ж сили, але при різних початкових умовах, характер руху тіла різний. Наприклад, рух тіла під дією сили тяжіння з різними початковими умовами може бути:

вільне падіння; рух тіла, кинутого вертикально вгору; рух тіла, кинутого під кутом до горизонту; рух по колу – штучний супутник Землі.

Так як в загальному вигляді ця задача не розв'язується, розглянемо два приклади.

Приклад 1. Тіло масою m рухається під дією сили, яка не змінює напрямку і пропорційна часу $F = k \cdot t$. Початкові умови:

при $t = 0$ $V = V_0$, $S = S_0$.

Так як сила не змінює напрямку, тіло буде рухатись по прямій лінії. Знайдемо закон зміни швидкості і шляху від часу. Запишемо другий закон Ньютона

$$F = m \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = \frac{F}{m} dt \Rightarrow dV = \frac{k}{m} t \cdot dt \Rightarrow V = \int \frac{k}{m} dt \Rightarrow$$

$$V(t) = V_0 + \frac{k}{2m} t^2 \quad \text{За означенням} \quad (2.2) \quad \text{швидкість}$$

$$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = V \cdot dt$$

$$dS = V_0 dt + \frac{k}{2m} t^2 dt \Rightarrow S = \int V_0 dt + \int \frac{k}{2m} t^2 dt \Rightarrow$$

$$S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{k}{6m} t^3.$$

Приклад 2. Тіло масою m рухається прямолінійно під дією сили опору, яка пропорційна швидкості $F = -kV$. Початкові умови: при $t = 0$ $V = V_0$, $S = S_0$.

Знайдемо закон зміни швидкості і шляху від часу. Запишемо другий закон Ньютона

$$F = m \frac{dV}{dt} \Rightarrow -kV = m \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{k}{m} dt \Rightarrow$$

$\ln V = -\frac{k}{m} t + C_1$. Константу інтегрування C_1 знайдемо, підставивши

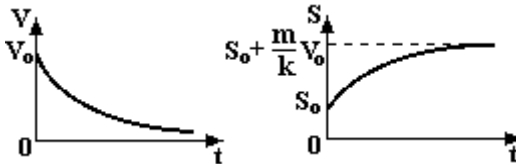
початкові умови. Одержимо, $C_1 = \ln V_0$. Отже, $V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$.

$$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = V \cdot dt \Rightarrow S(t) = \int V_0 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) dt + C_2$$

$S(t) = -\frac{m}{k} V_0 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) + C_2$. Підстановка початкових умов дає

$C_2 = S_0 + \frac{m}{k} V_0$. Отже, $S(t) = -\frac{m}{k} V_0 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) + S_0 + \frac{m}{k} V_0$, або

$S(t) = S_0 + \frac{m}{k} V_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\right)$. Намалюємо графіки $V(t)$ і $S(t)$.



3.4 Принцип відносності Галілея. Правило складання швидкостей в класичній механіці

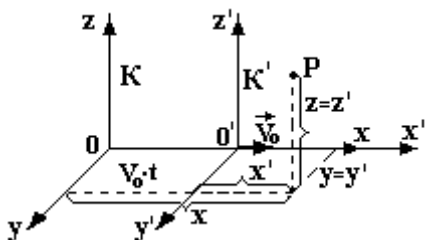


Рисунок 3.4

початковий момент часу співпадають (рис.3.4). Тоді запишемо очевидні із рис.3.4 співвідношення між координатами в якийсь

момент часу $t = t^I$:

$$(3.4) \quad \begin{cases} t = t^I \\ x = x^I + V_0 \cdot t^I \\ y = y^I \\ z = z^I \end{cases} \quad \begin{cases} t^I = t \\ x^I = x - V_0 \cdot t \\ y^I = y \\ z^I = z \end{cases} .$$

Рівняння (3.4) називаються перетвореннями координат Галілея, які справедливі для швидкостей набагато менших від швидкості світла.

Розглянемо наслідки цих перетворень.

а) Візьмемо перші похідні за часом

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx^I}{dt^I} + V_0 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy^I}{dt^I} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz^I}{dt^I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = V_x^I + V_0 \\ V_y = V_y^I \\ V_z = V_z^I \end{cases} , \text{ або } \vec{V} = \vec{V}^I + \vec{V}_0 \quad (3.5)$$

Розглянемо інерціальну систему $K(x, y, z)$ і систему $K^I(x^I, y^I, z^I)$, яка рухається відносно системи K з постійною швидкістю \vec{V}_0 вздовж осі x . Для простоти

будемо вважати, що осі y і z паралельні осям y^I і z^I відповідно.

Нехай начала координат 0 і 0^I в

Одержали правило складання швидкостей в класичній механіці: абсолютна швидкість \vec{V} дорівнює векторній сумі відносної \vec{V}^I і переносної \vec{V}_0 швидкостей.

Наприклад, човен пливе по річці. Швидкість течії ріки – це переносна швидкість, відносна – це швидкість човна відносно води, тобто в стоячій воді, абсолютна – це результуюча швидкість човна відносно берега.

б) Візьмемо ще раз з рівняння (3.5) похідні за часом

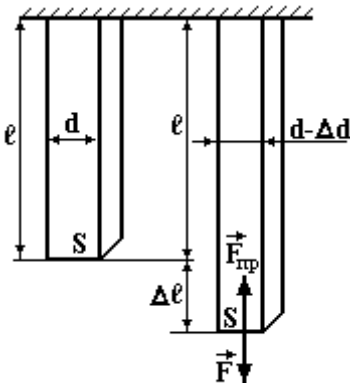
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}^I}{dt^I} + \frac{d\vec{V}_0}{dt}. \text{ Так як } \vec{V}_0 = \text{const}, \frac{d\vec{V}_0}{dt} = 0, \text{ або } \vec{a} = \vec{a}^I.$$

У всіх інерціальних системах прискорення однакоє, або кажуть, що другий закон Ньютона інваріантний (незмінний) в усіх інерціальних системах відліку.

Принцип відносності Галілея: У всіх інерціальних системах відліку одні і ті ж механічні явища протікають однаковим чином і ніякими механічними дослідями, які проводяться всередині інерціальної системи, неможливо встановити – рухається вона чи ні.

3.5 Сили пружності. Закон Гука для деформації розтягування (стискування)

Деформацією називається зміна форми, або розмірів тіла під дією зовнішніх сил. Розрізняють два ідеальних види деформацій: абсолютно пружні і абсолютно пластичні. При абсолютно пружній деформації форма і розміри тіла повністю відтворюються після припинення дії зовнішньої сили. При абсолютно пластичній, навпаки, форма і розмір тіла після припинення дії сили повністю зберігають набутий при деформації стан.



Сили, які виникають при пружних деформаціях, називаються пружними силами. Деформації бувають: розтягування (стискування); згинання; закручування; зсуву. Різні види деформацій можна звести до двох основних: розтягування (стискування) і зсув.

Рисунок 3.5

Розглянемо спочатку деформацію розтягування (стискування). Англійський фізик Р.Гук у 1660 році експериментально встановив закон, який носить його ім'я: **при малих пружних деформаціях сила пружності пропорційна величині деформації**

$$F = -k\Delta\ell, \quad (3.6)$$

k – коефіцієнт жорсткості, $\Delta\ell$ - величина деформації. Знак (-) мінус вказує, що сила пружності направлена в сторону, протилежну деформації, тобто має такий напрямок, щоб зменшити деформацію.

Нехай стержень довжиною ℓ площею перерізу S і поперечним розміром d закріплений за один кінець, а до другого прикладена розтягуюча зовнішня сила \vec{F} (рис.3.5). Внаслідок цього довжина стержня збільшується на величину $\Delta\ell$, а поперечний розмір зменшується на Δd . Виникає пружна сила $\vec{F}_{\text{пр}} = -\vec{F}$. Експерименти показують, що абсолютне видовження $\Delta\ell$ прямо пропорційне силі \vec{F} , довжині стержня ℓ і обернено пропорційне площі перерізу S

$$\Delta\ell = -\frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot \ell}{S}. \quad (3.7)$$

E – модуль пружності, або модуль Юнга, вимірюється в Н/м^2 . Він характеризує пружні властивості матеріалу і являється величиною сталою для кожного матеріалу.

Відношення абсолютної деформації $\Delta\ell$ до початкового розміру називається **відносною деформацією** $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$, величина безрозмірна.

Відношення сили F до площі поперечного перерізу S називається **механічною напругою** $\sigma = \frac{F}{S}$, вимірюється в Н/м^2 .

Рівняння (3.7) закону Гука приймає вид

$$\sigma = -E\varepsilon. \quad (3.8)$$

Механічна напруга пропорційна відношній деформації.

З'ясуємо фізичний зміст модуля Юнга E . При $\varepsilon = 1$, тобто коли $\Delta\ell = \ell$, $E = \sigma$. Отже, модуль Юнга, це така механічна напруга, при якій

довжина стержня подвоїться. Значення модуля Юнга можна знайти в довідникових таблицях.

Відношення зміни поперечного розміру Δd до початкового значення d , тобто відносна зміна поперечного розміру, називається

коефіцієнтом поперечного стискування $\varepsilon_{\Pi} = \frac{\Delta d}{d}$.

Відношення коефіцієнта поперечного стискування ε_{Π} до відносного видовження ε називається **коефіцієнтом Пуассона**

$\mu = \frac{\varepsilon_{\Pi}}{\varepsilon}$. Він також являється величиною сталою для кожного матеріалу і разом з модулем Юнга повністю характеризує пружні властивості речовини.

3.6 Закон Гука для деформації зсуву

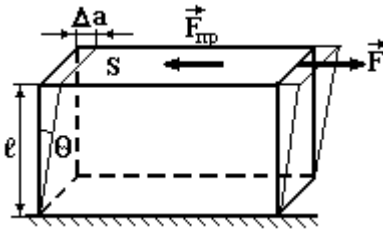


Рисунок 3.6

Деформація зсуву виникає під дією сколюючої зовнішньої сили F , яка паралельна закріпленій площині (рис.3.6). Виникає пружна сила $F_{\text{пр}}$, яка паралельна площинам зсув і протилежна зовнішній силі. Експерименти показують, що абсолютний зсув Δa прямо пропорційний зовнішній силі F , відстані ℓ між площинами ковзання і обернено пропорційний площі S площин ковзання

$$\Delta a = -\frac{1}{G} \cdot \frac{F \cdot \ell}{S}. \quad (3.9)$$

G – модуль зсуву.

Відношення сколюючої сили до площі називається сколюючою механічною напругою $\sigma_{\tau} = \frac{F}{S}$, відношення абсолютного зсуву до відстані між площинами ковзання називається **відносним зсувом**

$\gamma = \frac{\Delta a}{\ell}$. Отже, **закон Гука** для деформації зсуву прийме вид

$$\sigma_{\tau} = -G\gamma. \quad (3.10)$$

Сколююча напруга пропорційна відносному зсуву.

Модуль зсуву G – це така сколююча механічна напруга, при якій відносний зсув дорівнює 1, тобто $\gamma = \frac{\Delta a}{\ell} = \text{tg}\theta = 1$. Це означає, що кут зсуву $\theta = 45^\circ$. Модуль зсуву зв'язаний з модулем Юнга і коефіцієнтом Пуассона співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}. \quad (3.11)$$

3.7 Сили тертя. Сухе тертя. Сили тертя спокою, ковзання, кочення

Сили, що виникають при русі одного тіла по поверхні другого, називаються силами зовнішнього тертя, а сили, які виникають при відносному русі шарів речовини, називаються силами внутрішнього тертя. Будемо спочатку розглядати зовнішнє сухе (без змащування рідиною контактуючих поверхонь) тертя, яке буває трьох видів: тертя спокою; тертя ковзання; тертя кочення.

Сила тертя спокою виникає між контактуючими поверхнями тіл без їх відносного руху. Вона виникає за рахунок сил міжмолекулярної взаємодії і за рахунок зачеплення мікронерів-ностей (рис.3.7) і їх деформації. мікро-нерівності зазнають деформації згинання, виникають пружні сили, які і зрівноважують зовнішню,



Рисунок 3.7

паралельну до поверхонь силу F_τ . Наглядно картину контакту моделюють дві щітки, вставлені ворсом одна в іншу (рис 3.8). У відповідності з першим законом Ньютона тіло не рухається, коли рівнодіюча сил дорівнює нулю. Тому в загальному випадку сила тертя спокою дорівнює зовнішній силі, яка направлена паралельно контактуючим поверхням і протилежна їй за напрямком,

$$\vec{F}_{\text{сп}} = -\vec{F}_\tau. \quad (3.12)$$

Але сила тертя спокою не може зростати до нескінченності при зростанні сили F_τ . В деякий момент тіло прийде в рух. В момент



Рисунок 3.8

перед початком руху сила тертя спокою досягає свого максимального значення

$$F_{\text{сп.макс}} = k_{\text{сп}} \cdot N, \quad (3.13)$$

яке дорівнює добутку коефіцієнта тертя спокою $k_{\text{сп}}$ на силу нормального тиску N . Вести мову про силу тертя спокою втрачає сенс. Виникає сила тертя ковзання.

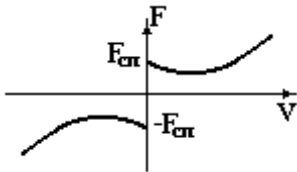


Рисунок 3.9

Сила тертя ковзання має таку ж природу, як і тертя спокою. Але при відносному русі нерівності не встигають глибоко зачепитись між собою, а як би пролітають одна над іншою. Тому сила тертя ковзання менша від сили тертя спокою. Але при великих швидкостях відносного руху нерівності починають руйнуватись, на що необхідно затратити певну енергію. Тому сила тертя ковзання зростає, і може навіть стати більшою, ніж сила тертя спокою (рис.3.9). Сила тертя ковзання завжди дорівнює добуткові коефіцієнта тертя ковзання k і сили нормального тиску N

$$F_{\text{ковз}} = k_{\text{ковз}} \cdot N. \quad (3.14)$$

Сила тертя кочення має іншу природу, ніж дві попередні.

Коли колесо не рухається, картина деформації поверхонь симетрична відносно верти-кального діаметра

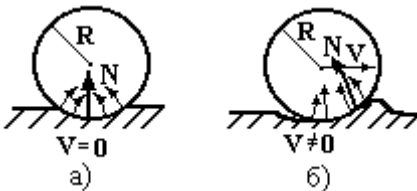


Рисунок 3.10

(рис.3.10,а). Рівнодіюча сила реакції N проходить через центр колеса. Тому її момент дорівнює нулю. При русі колеса попереду виникає деформаційний горб, а за колесом поверхня не встигає відновити свою форму (рис.3.10,б) за рахунок так званого явища пружної післядії (для відтворення

форми після деформації необхідний деякий час). Рівнодіюча сила реакції N проходить попереду центра колеса. Виникає момент цієї сили, який і гальмує рух колеса. Горизонтальна складова сили реакції і є сила тертя кочення, яка обернено пропорційна радіусу колеса

$$F_{\text{коч.}} = k_{\text{коч.}} \cdot \frac{N}{R}. \quad (3.15)$$

3.8 Сила тяжіння. Закон всесвітнього тяжіння. Гравітаційне поле та його напруженість

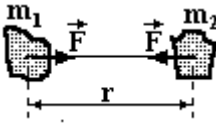


Рисунок 3.11

Одним із фундаментальних видів взаємодії в природі є гравітаційна взаємодія. Закон гравітаційної взаємодії був сформульований І.Ньютоном у 1686 році: сила, з якою притягуються два тіла прямо пропорційна добуткові мас m_1 і m_2 цих тіл, обернено пропорційна квадрату відстані r між їх центрами мас і направлена по лінії, яка з'єднує центри мас тіл

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (3.16)$$

Гравітаційна стала $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, яку вперше виміряв англ. фізик Г.Кавендіш у 1798 році. Така взаємодія тіл відбувається через одну з форм матерії - гравітаційне поле. Кожна маса утворює навколо себе гравітаційне поле, яке потім діє на іншу масу, поміщену в це поле. Кількісною силовою векторною характеристикою гравітаційного поля є його напруженість \vec{G} . Це сила, яка діє з боку поля на тіло одиничної маси m_0

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0} = \gamma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (3.17)$$

Вимірюється напруженість $[G] = \text{Н} / \text{кг} = +(\text{кг} \cdot \text{м}) / (\text{с}^2 \cdot \text{кг}) = \text{м} / \text{с}^2$ в одиницях прискорення. Дійсно, якщо знехтувати добовим обертанням Землі, гравітаційну силу можна прирівняти силі тяжіння mg . Одержуємо

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0} = \frac{m_0 \vec{g}}{m_0} = \vec{g} = \gamma \frac{M_3}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (3.18)$$

Отже, напруженість гравітаційного поля Землі - це прискорення вільного падіння.

3.9 Сили в неінерціальних системах відліку. Сили інерції

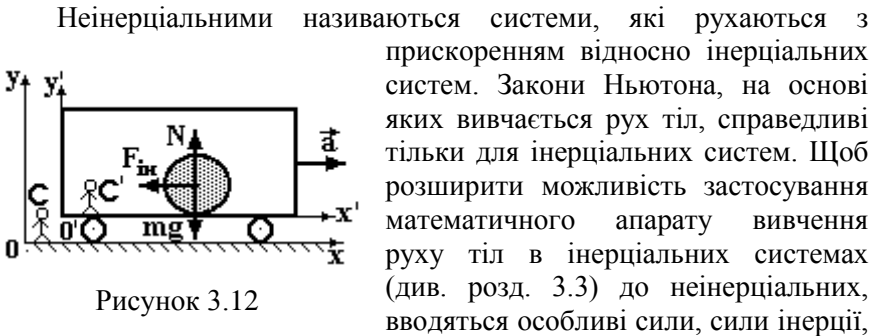


Рисунок 3.12

виникнення яких зумовлене неінерціальним характером систем, а не взаємодією тіл, або полів.

Розрізняють неінерціальні системи, які рухаються відносно інерціальних поступально, і системи, що обертаються, навіть і рівномірно, так як при цьому виникає доцентрове (нормальне) прискорення.

Розглянемо спочатку сили інерції в системах, які рухаються поступально з певним прискоренням \vec{a} . Нехай в інерціальній системі C може поступально з прискоренням рухатись вагон, з яким зв'язана неінерціальна система C^I . на горизонтальній підлозі вагона без тертя лежить куля масою m (рис.3.12). Коли вагон не рухається, обидві системи інерціальні. Спостерігачі C і C^I пояснюють рівновагу кулі першим законом Ньютона, тобто тим, що рівнодіюча сил тяжіння mg і сили N реакції підлоги дорівнює нулю.

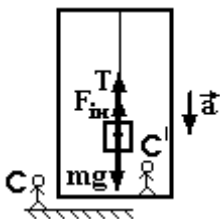
Коли вагон рухається з прискоренням, поведження кулі для спостерігачів різне. Спостерігач C бачить, що вагон рухається, а куля, із-за відсутності тертя залишається в його системі нерухомою знову таки у відповідності з першим законом Ньютона.

Спостерігач C^I бачить, що дія сторонніх сил на кулю не змінилась, але вона почала рухатись на нього з прискоренням $\vec{a}^I = -\vec{a}$. Тоді він робить закономірний висновок, що на кулю почала діяти деяка сила, яка і надає кулі цього прискорення. Причому поява цієї сили викликана не дією на кулю якихось інших тіл, а є результатом неінерціального характеру системи C^I . Ця сила називається силою інерції і дорівнює

$$\vec{F}_{\text{ин}} = m\vec{a}^I = -m\vec{a}. \quad (3.19)$$

Таким чином, в неінерціальних системах на тіла окрім ньютонівських сил діють ще й сили інерції. Тому другий закон Ньютона в цих системах відліку записується так

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{ін}}}{m}. \quad (3.20)$$



Приклад. До стелі ліфта підвішений вантаж масою m . Ліфт опускається вертикально вниз з прискоренням \vec{a} . Знайти силу натягу нитки.

Розв'язок в інерціальній системі спостерігачем С.

Другий закон Ньютона в скалярній формі в проекції на вертикальну вісь має вид

$$a = \frac{mg - T}{m} \Rightarrow T = m(g - a).$$

Розв'язок в неінерціальній системі спостерігачем С'.

В його неінерціальній системі тіло знаходиться у стані спокою.

Умова рівноваги має вид $mg = T + F_{\text{ін}}$. Величина сили інерції $F_{\text{ін}} = ma$, а її напрямок уже врахований в попередньому рівнянні.

Маємо $mg = T + ma \Rightarrow T = m(g - a)$ таку ж відповідь.

В системах, що обертаються, завжди виникає нормальне (доцентрове) прискорення $\vec{a}_n = \frac{V^2}{R} \vec{n} = \omega^2 R \vec{n}$. Тому виникає сила інерції, направлена проти цього прискорення, тобто від центра кривизни. Ця сила інерції називається відцентровою (Фв.ц.) і дорівнює, як і в поступальних системах

$$\vec{F}_{\text{в.ц.}} = -m\vec{a}_n = -m \frac{V^2}{R} \vec{n} = -m\omega^2 R \vec{n}. \quad (3.21)$$

Наряду з цією силою інерції в обертальних системах виникає ще одна сила інерції – коріолісова сила, названа в честь французького фізика Г.Г.Коріоліса (1792-1843), який вперше її одержав теоретично. Вона виникає тоді, коли відносна швидкість тіла відмінна від нуля. З'ясуємо

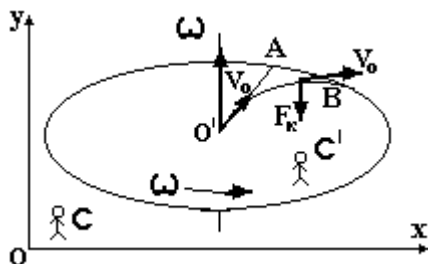


Рисунок 3.13

напрямок цієї сили. Нехай в системі, яка обертається з кутовою швидкістю ω , вздовж радіуса без тертя рухається куля з відносною швидкістю V_o (рис.3.13). В інерціальній системі спостерігач С буде бачити рух кулі по прямій ОА. Диск же обертається, не впливаючи на рух кулі із-за відсутності тертя. Спостерігач C^1 буде бачити рух кулі по дузі ОВ. Тому він робить правомірний висновок, що на кулю діє сила F_k перпендикулярна до швидкості, яка і змінює її напрямок. Це і є сила інерції Коріоліса. Вона перпендикулярна до векторів ω і V_o і дорівнює

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{V}_o \cdot \vec{\omega}]. \quad (3.22)$$

Таким чином, другий закон Ньютона записується в самому загальному випадку неінерціальних систем так:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{ін}} + \vec{F}_{\text{в.ц.}} + \vec{F}_k}{m}. \quad (3.23)$$

4. РОБОТА. ЕНЕРГІЯ. ІМПУЛЬС. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

4.1 Імпульс тіла. Імпульс системи тіл. Центр інерції системи . Закон збереження імпульсу

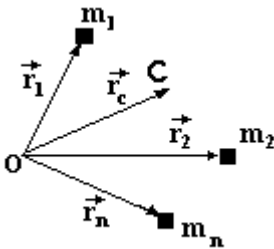


Рисунок 4.1

Імпульсом \vec{P} тіла називається вектор, величина якого дорівнює добутку маси тіла на його швидкість. Напрямок вектора імпульсу співпадає з вектором швидкості

$$\vec{P} = m\vec{V}. \quad (4.1)$$

Імпульс системи тіл (\vec{P}_c) – це векторна сума імпульсів тіл цієї системи

$$\vec{P}_c = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i. \quad (4.2)$$

Імпульс системи тіл можна знайти, ввівши поняття центра мас системи (рис.4.1) Радіус-вектор \vec{r}_c центра мас знаходиться за рівнянням:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{m} \quad (4.3)$$

Взявши похідну за часом, одержимо

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{V}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{P}_i}{m} = \vec{P}_c,$$

звідки маємо, що імпульс системи тіл дорівнює добутку маси системи на швидкість руху її центра мас

$$\vec{P}_c = m\vec{V}_c.$$

Нехай два тіла m_1 і m_2 взаємодіють з силами \vec{f}_1 і \vec{f}_2 . На них діють зовнішні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 (рис.4.2). Позначимо

\vec{V}_{10} і \vec{V}_{20} - швидкості тіл в момент часу

t , \vec{V}_1 і \vec{V}_2 - швидкості в момент часу $t+dt$. Запишемо другий закон Ньютона для кожного тіла

$$\begin{cases} (\vec{F}_1 + \vec{f}_1)dt = m_1 \vec{V}_1 - m_1 \vec{V}_{10} \\ (\vec{F}_2 + \vec{f}_2)dt = m_2 \vec{V}_2 - m_2 \vec{V}_{20} \end{cases}$$

Додаємо ці рівняння

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)dt + (\vec{f}_1 + \vec{f}_2)dt = (m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2) - (m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20}). \quad (4.4)$$

За третім законом Ньютона $(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = 0$ як внутрішні сили.

Якщо векторна сума зовнішніх сил дорівнює нулю $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = 0$, система називається ізольованою, або замкнутою. Для такої системи із (4.4) одержуємо $(m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2) = (m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20}) = \text{const}$, тобто

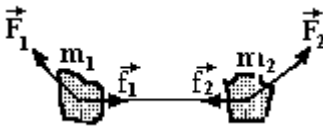


Рисунок 4.2

векторна сума імпульсів замкнутої системи залишається незмінною. Це є закон збереження імпульсу. Якщо ж система не замкнута, то її імпульс змінюється на величину імпульсу зовнішніх сил $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)dt$.

4.2 Принцип реактивного руху. Рівняння І.В.Мешерського і К.Е.Цюлковського

В основі реактивного руху лежить закон збереження імпульсу. Від тіла з певною швидкістю відокремлюється деяка маса. У відповідності із законом збереження імпульсу, швидкість руху тіла теж буде змінюватись, тобто це рух тіла змінної маси. Типовим прикладом реактивного руху є рух ракети. Продукти згорання палива викидаються через сопло ракети, тоді її корпус рухається в протилежному напрямку (рис.4.3).

Знайдемо рівняння, яке описує рух ракети, та швидкість її руху. Введемо позначення:

m – маса ракети в момент часу t ;

\vec{V} - миттєва швидкість корпусу ракети відносно вибраної системи координат x, y, z ;

\vec{U} - швидкість продуктів згорання палива віднос-но цієї ж системи координат x, y, z ;

$d\vec{V}$ - зміна швидкості корпусу ракети;

dm – маса викинутих за час dt продуктів згорання;

\vec{F} - рівнодіюча зовнішніх сил.

Запишемо другий закон Ньютона: імпульс сили $\vec{F}dt$ дорівнює зміні імпульсу системи „ракета-продукти згорання”

$$d\vec{P} = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) - dm\vec{U} - m\vec{V}$$

$$\vec{F}dt = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) - dm\vec{U} - m\vec{V}$$

$$\vec{F}dt = m\vec{V} + md\vec{V} - dm\vec{V} - dmd\vec{V} - dm\vec{U} - m\vec{V}$$

Нехтуючи доданком $dmd\vec{V}$, який набагато менший, ніж інші, так як є добуток двох нескінченно малих величин, одержуємо

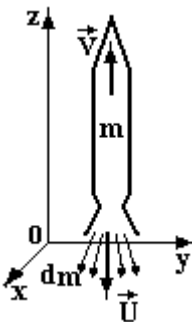


Рисунок 4.3

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + (\vec{V} + \vec{U}) \frac{dm}{dt}. \text{ Векторна сума } \vec{V} + \vec{U} \text{ дає швидкість } \vec{W}$$

витоку газів відносно корпусу ракети. Її величина залишається незмінною, так як вона визначається конструкцією сопла реактивного двигуна. Рівняння

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{W} \frac{dm}{dt} \quad (4.5)$$

називається рівнянням І.В.Мещерського (російський вчений, 1859-1935). Другий доданок в рівнянні (4.5) має розмірність сили і називається реактивною силою, яка виникає за рахунок зміни маси

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \vec{W} \frac{dm}{dt}.$$

К.Е.Ціолковський (російський вчений, 1857-1935) розв'язав рівняння Мещерського (4.5) для випадку відсутності зовнішніх сил $\vec{F} = 0$ з початковими умовами: при $t = 0$ $V = 0$, $m = m_0$ –стартова маса ракети. В скалярній формі рівняння (4.5) в проекції на вертикальну вісь z має вид $dV = -W \frac{dm}{m}$. Інтегрування дає

$$V = W \cdot \ln \frac{m_0}{m}. \quad (4.6)$$

Це рівняння К.Е.Ціолковського. Воно показує, що кінцева швидкість ракети пропорційна відносній швидкості витоку газів і тим більша, чим більше відношення стартової маси m_0 до кінцевої маси m . Щоб збільшити це відношення, Ціолковський запропонував багатоступеневі реактивні двигуни. Конструктивно неможливо виготовити легкий корпус двигуна, заправивши в нього велику масу палива. Модульний же корпус дає можливість збільшити відношення m_0/m , а значить і кінцеву швидкість ракети.

4.3 Механічна робота. Потужність

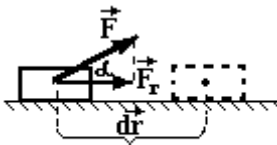


Рисунок 4.4

Поняття механічної роботи пов'язане з переміщенням. Якщо під дією сили \vec{F} тіло

переміщується на відстань $d\vec{r}$ (рис.4.4), то елементарна механічна робота

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_r \cdot dr \quad (4.7)$$

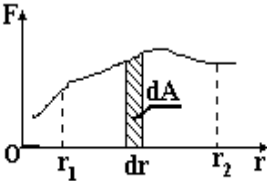


Рисунок 4.5

дорівнює скалярному добутку сили на переміщення. На графіку залежності сили від переміщення (рис.4.5) вона відповідає площі заштрихованої області. Вся робота змінної сили знаходиться як інтеграл

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cos\alpha \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} F_r \cdot dr \quad (4.8)$$

і чисельно дорівнює площі, обмеженій лініями r_1 , r_2 , віссю Ox абсцис і кривою $F(r)$. Вимірюється робота в джоулях $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$.

Потужність – це швидкість виконання роботи, тобто це робота, виконана за одиницю часу

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad (4.9)$$

і дорівнює скалярному добутку сили і швидкості. Потужність вимірюється у ватах $[P] = \text{Дж/с} = \text{вт}$. Позасистемною одиницею потужності є кінська сила $1 \text{к.с.} = 735 \text{вт}$.

4.4 Поняття про енергію. Кінетична та потенціальна енергії

Фізична величина, яка характеризує здатність тіла виконувати роботу, називається **енергією** і вимірюється тією роботою, яку може виконати тіло. До механічної енергії відносяться два види енергії у відповідності з тим, за рахунок чого може бути виконана робота:

- **кінетична** енергія, коли робота виконується за рахунок руху тіла;
- **потенціальна** енергія, коли робота може бути виконана за рахунок положення тіл, або взаємного положення частин тіла (за рахунок деформації). Вимірюється енергія в одиницях роботи, в Дж.

Знайдемо вираз для кінетичної енергії, яка дорівнює роботі тіла за рахунок руху до зупинки. Враховуючи (3,3), одержуємо

$$A = \int_V^0 \vec{F} d\vec{r} = \int_V^0 m \frac{d\vec{V}}{dt} d\vec{r} = \int_V^0 m d\vec{V} = \int_V^0 m \vec{V} d\vec{V} = \int_V^0 m V dV = -\frac{mV^2}{2} \quad (4.10)$$

Знак (-) мінус показує, що кінетична енергія $E_k = \frac{mV^2}{2}$ (4.11)

при виконанні роботи зменшується. Звертає на себе увагу, що кінетична енергія не може бути від'ємною, тобто $E_k \geq 0$.

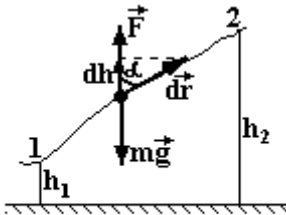


Рисунок 4.6

Потенціальна енергія (енергія положення) вимірюється роботою, яку необхідно виконати зовнішнім силам, щоб перевести систему без зміни її кінетичної енергії із одного стану в інший.

Знайдемо потенціальну енергію тіла масою m в гравітаційному полі тяжіння Землі. Початкове і кінцеве положення тіла будемо задавати його висотами h_1 і h_2 над поверхнею Землі (рис.4.6). Для переміщення тіла без зміни його кінетичної енергії (без зміни швидкості), тобто для рівномірного переміщення із положення 1 в положення 2, до нього, у відповідності з першим законом Ньютона, необхідно прикласти силу $\vec{F} = -m\vec{g}$. Робота цієї сили

$$A = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \cdot \cos\alpha = \int_{h_1}^{h_2} mg \cdot dh = mgh_2 - mgh_1 = E_{п2} - E_{п1}. \quad (4.12)$$

Одержали, що робота дорівнює зміні потенціальної енергії $\Delta E_p = mg\Delta h$, а не самій потенціальній енергії. На відміну від кінетичної, для потенціальної енергії необхідно задати її нульовий рівень, причому цей рівень задається довільно. Якщо потенціальна енергія на поверхні Землі дорівнює нулю, то на висоті h вона буде становити

$$E_p = mgh. \quad (4.13)$$

Потенціальна енергія може, на відміну від кінетичної, бути від'ємною (рис.4.7).

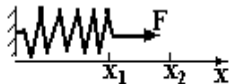


Рис.4.7

Знайдемо роботу по розтягуванню пружини від x_1 до x_2 (рис.4.8). Сила пружності $F = -kx$.

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = E_{п1} - E_{п2} \quad (4.14)$$

Прийнявши за нульовий рівень потенціальної енергії стан недеформованої пружини, одержуємо потенціальну енергію деформації

$$E_{п} = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.15)$$

4.5 Закон збереження механічної енергії

Консервативною називається система, в якій діють сили, робота яких не залежить від форми траєкторії тіла. Такі сили називаються потенціальними. Це системи, в яких не відбувається перетворення механічної енергії (кінетичної чи потенціальної) в немеханічні види, наприклад, в тепло. Це системи, в яких відсутні сили тертя. Прикладом потенціальних (консервативних) сил можуть бути сили гравітації, сили тяжіння, кулонівські сили. Інші системи, в яких механічна енергія перетворюється в немеханічну, називаються дисипативними. В них відбувається дисипація (розсіювання) механічної енергії. Є ще замкнуті (ізольовані) і незамкнуті системи (див. розд. 4.10). Таким чином можливі чотири типи систем:

а) консервативні, замкнуті системи. В таких системах повна механічна енергія залишається незмінною. $E = E_k + E_{п} = \text{const}$, або $\Delta E = 0$;

б) консервативні незамкнуті системи. В них зміна механічної енергії дорівнює роботі зовнішніх сил $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_{п} = A_{\text{зовн.сил}}$;

в) дисипативні замкнуті системи. Зміна механічної енергії дорівнює роботі сил тертя $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_{п} = A_{\text{тертя}}$;

г) дисипативні незамкнуті системи. Зміна механічної енергії дорівнює алгебраїчній сумі роботи зовнішніх сил і сил тертя

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_{п} = A_{\text{тертя}} + A_{\text{зовн.сил}} .$$

4.6 Потенціал гравітаційного поля. Градієнт потенціалу.

Зв'язок між напруженістю і потенціалом

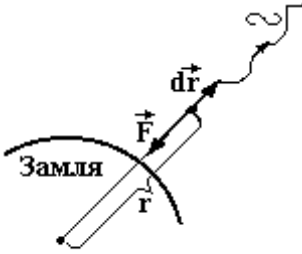


Рисунок 4.9

Силоне поле, в якому робота не залежить від форми шляху, а визначається тільки положенням початкового і кінцевого положення тіла, називається **потенціальним**.

Прикладом потенціального поля є гравітаційне поле, електростатичне поле. Такі поля характеризуються окрім силової векторної характеристики – напруженості ще й

скалярною, енергетичною характеристикою – потенціалом.

Потенціалом гравітаційного поля називається робота, яку виконують гравітаційні сили по переміщенню тіла одиничної маси із даної точки поля в нескінченність, де поле уже відсутнє (рис.4.9).

$$\varphi = \frac{A_{r,\infty}}{m} = \frac{1}{m} \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{m} \int_r^{\infty} \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} dr = -\gamma \frac{M}{r}$$

Одержали, що потенціал гравітаційного поля Землі

$$\varphi = \frac{A_{r,\infty}}{m} = -\gamma \frac{M}{r} \quad (4.16)$$

залежить тільки від положення тіла, тобто радіус-вектора r .

Робота по переміщенню тіла m із точки 1 в точку 2 дорівнює

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} dr = \gamma \frac{M \cdot m}{r_2} - \gamma \frac{M \cdot m}{r_1} = m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4.17)$$

добутку маси на різницю потенціалів. Одиницею вимірювання потенціалу є $[\varphi] = \text{Дж/кг} = (\text{м/с})^2$.

Знайдемо зв'язок між напруженістю і потенціалом. За означенням потенціалу (4.16) і напруженості (див.розд.3.8) маємо

$$\varphi = \frac{A_{r,\infty}}{m} = \frac{1}{m} \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = \int_r^{\infty} \vec{G} \cdot d\vec{r} = -\int_r^{\infty} G_r \cdot dr,$$

де G_r – проекція вектора напруженості \vec{G} на напрямок \vec{r} . Взявши похідну з останнього виразу по радіус-вектору r , одержуємо

$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = -\mathbf{G}_r$, або в декартовій системі координат

$G_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $G_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $G_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$; . Тоді вектор

напруженості запишеться через одиничні вектори (орти)

$$\vec{G} = \vec{i}G_x + \vec{j}G_y + \vec{k}G_z = -\left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\text{grad}\varphi. \quad (4.18)$$

Векторна функція $\left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \text{grad}\varphi$ називається

градієнтом скалярної величини φ і дає швидкість її зміни з координатою. Напрямок вектора градієнта вказує напрямком найбільш швидкого зростання функції φ з координатою.

Помноживши (4.18) на масу m , одержимо зв'язок між силою і потенціальною енергією

$$\vec{G} \cdot m = -\text{grad}(\varphi \cdot m) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\text{grad}E_{\text{п}}. \quad (4.19)$$

4.7 Потенціальні криві. Потенціальний бар'єр. Рух класичної частинки в одномірній потенціальній ямі

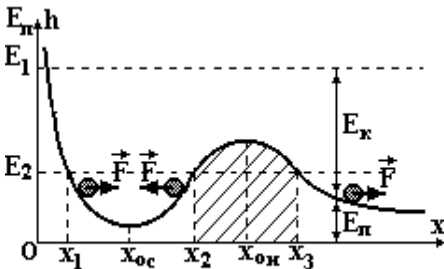


Рисунок 4.10

Нехай по вигнутому, як показано на рис.4.10, жолобу може без тертя скочуватись куля. Положення кулі будемо задавати однією координатою x . Таким чином крива залежності висоти кулі від координати x фактично задає залежність потенціальної енергії від координати. Така крива

називається потенціальною кривою. Її ордината дає значення потенціальної енергії $E_{\text{п}}$, а відстань до лінії повної енергії, наприклад, E_1 , дає значення кінетичної енергії $E_{\text{к}}$. Нехай повна енергія тіла дорівнює E_2 . Заштрихована область з координатами $x_2 \leq x \leq x_3$ називається потенціальним бар'єром, а область з координатами $x_1 \leq x$

$\leq x_2$ потенціальною ямою. З'ясуємо, як буде рухатись куля, коли її енергія E_2 менша висоти потенціального бар'єру?

В межах потенціальної ями про відхиленні частинки від положення $x = x_{oc}$ виникає зворотна сила F , направлена до цього положення x_{oc} , яке називається стійким положенням рівноваги. Дійсно, враховуючи співвідношення (4.19), в нашому одномірному

випадку маємо $\vec{F} = -\vec{i} \frac{dE_{п}}{dx}$. При відхиленні вліво похідна негативна

і тому сила направлена вправо. При відхиленні вправо похідна позитивна і сила направлена проти осі ox . Таким чином кулька буде здійснювати коливальний рух від x_1 до x_2 навколо положення стійкої рівноваги x_{oc} , в якому потенціальна енергія мінімальна. Подолати потенціальний бар'єр класична частинка не може. Квантова ж частинка, якій характерні хвильові властивості, може подолати бар'єр навіть якщо її повна енергія менша за його висоту. Цей ефект називається тунельним ефектом. Якщо повна енергія частинки E_1 більша, ніж висота потенціального бар'єру, вона його завжди долає, зменшуючи над ним свою кінетичну енергію. При відхиленні від положення $x_{он}$ виникає сила, направлена від цього положення рівноваги. Тому воно називається нестійким.

Таким чином, умовою стійкої рівноваги системи є мінімум її потенціальної енергії.

4.8 Застосування законів збереження імпульсу і енергії до центрального удару куль

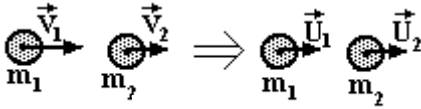
Ударом називається явище кінцевої зміни швидкостей тіл за відносно короткий проміжок часу їх взаємодії між собою. Розрізняють центральні і косі удари. При центральному ударі вектори швидкостей співпадають за напрямком з лінією, що з'єднує центри мас тіл (рис.4.11,а). При косих ударах вектори швидкостей



Рисунок 4.11

утворюють з цією лінією кут, відмінний від нуля (рис.4.11,б). Ми будемо розглядати центральний удар. Які ж процеси відбуваються при ударі? Кінетична енергія тіл в момент удару частково, або повністю перетворюється в потенціальну енергію

деформації, яка потім, в залежності від характеру деформації, повністю, або частково знову перетворюється в кінетичну енергію і в тепло (тіла нагріваються за рахунок деформації).



Розглянемо центральний удар двох куль, які рухаються горизонтально, що дає можливість не враховувати зміну потенціальної енергії в полі

тяжіння Землі. Запишемо закон збереження імпульсу (4.20) і закон збереження енергії (4.21) з врахуванням теплоти Q , яке виділяється при ударі

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2} + Q \end{cases} \quad (4.21)$$

Маємо систему двох рівнянь з трьома невідомими: U_1 , U_2 , Q . В загальному випадку вона не має розв'язку. Тому цю задачу розв'язують для двох ідеальних випадків:

– абсолютно не пружний (пластичний) удар, після якого тіла рухаються як одне ціле. Тому можна записати третє рівняння

$$U_1 = U_2 = U \quad (4.22)$$

– абсолютно пружний удар, при якому теплота не виділяється, тобто

$$Q = 0 \quad (4.23)$$

Абсолютно пластичний удар. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{U} \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2} + Q \end{cases} \quad (4.24)$$

звідки знаходимо

$$\vec{U} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} \quad Q = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2}. \quad (4.25)$$

Розглянемо випадок, коли одне із тіл, наприклад, друге не рухається, тобто $V_2 = 0$. Одержуємо:

$$\bar{U} = \frac{m_1 \bar{V}_1}{m_1 + m_2}$$

$$Q = \frac{m_1 V_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = E_{к1} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Коли $m_2 \gg m_1$, тобто легким тілом m_1 ударають по нерухомому масивному тілу m_2 . $Q = E_{к1}$ – в енергію деформації перетворюється майже вся кінетична енергія тіла, яке ударає, наприклад, ковка деталей.

Коли $m_2 \ll m_1$. Важким тілом m_1 ударають по легкому нерухомому тілу m_2 .

$$Q = E_{к1} \cdot \frac{m_2}{m_1} \ll E_{к1} - \text{в енергію деформації перетворюється}$$

незначна доля енергії тіла, яке ударає, тобто вся енергія перетворюється в кінетичну енергію, наприклад, пори забиванні цвяхів.

Абсолютно пружний удар. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2 = m_1 \bar{U}_1 + m_2 \bar{U}_2 \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_1 U_2^2}{2} \end{cases} \quad (4.26)$$

Знаходимо швидкості тіл U_1 і U_2 після удару. Перепишемо систему так:

$$\begin{cases} m_1(\bar{V}_1 - \bar{U}_1) = m_2(\bar{U}_2 - \bar{V}_2) \\ m_1(\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) = m_2(\bar{U}_2^2 - \bar{V}_2^2) \end{cases}.$$

Розкладемо у другому рівнянні різницю квадратів

$$\begin{cases} m_1(\bar{V}_1 - \bar{U}_1) = m_2(\bar{U}_2 - \bar{V}_2) \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} m_1(\bar{V}_1 - \bar{U}_1)(\bar{V}_1 + \bar{U}_1) = m_2(\bar{U}_2 - \bar{V}_2)(\bar{U}_2 + \bar{V}_2) \end{cases} \quad (4.28)$$

Враховуючи (4.27) після скорочення (4,28) одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 - m_1 \vec{U}_1 = m_2 \vec{U}_2 - m_2 \vec{V}_2 & (4.29) \\ \vec{V}_1 + \vec{U}_1 = \vec{U}_2 + \vec{V}_2 & (4.30) \end{cases}$$

Помноживши (4.30) на m_2 і віднімаючи із (4.29), знаходимо \vec{U}_1 .

Помноживши (4.30) на m_1 і додаючи до (4.29), знаходимо \vec{U}_2

$$\begin{cases} \vec{U}_2 = \frac{2m_1 \vec{V}_1 + (m_2 - m_1) \vec{V}_2}{m_1 + m_2} & (4.31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{U}_1 = \frac{2m_2 \vec{V}_2 + (m_1 - m_2) \vec{V}_1}{m_1 + m_2} & (4.32) \end{cases}$$

Розглянемо два випадки співвідношення мас:

а) $m_1 = m_2 = m$, тобто маси тіл однакові. У цьому випадку маємо

$\vec{U}_1 = \vec{V}_2$; $\vec{U}_2 = \vec{V}_1$, тобто тіла „обмінюються” швидкостями;

б) $m_2 \gg m_1$ – легке тіла m_1 ударяє по масивному m_2 . Одержимо

$\vec{U}_1 = 2\vec{V}_2 - \vec{V}_1$; $\vec{U}_2 = \vec{V}_2$. Швидкість масивного тіла m_2 не

змінюється, а швидкість легкого тіла змінюється на подвоєну початкову швидкість масивного тіла. Якщо легке тіло m_1 наздоганяє масивне m_2 , швидкість легкого тіла зменшується на подвоєну швидкість V_2 масивного. Якщо легке тіло m_1 рухається назустріч масивному m_2 , то швидкість легкого тіла збільшується на подвоєну швидкість V_2 масивного тіла.

Критерієм пружного чи пластичного удару є коефіцієнт відновлення k . Це відношення відносних швидкостей тіл до і після удару

$$k = \frac{|\vec{U}_2 - \vec{U}_1|}{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}. \quad (4.33)$$

Для абсолютно пластичного удару $k = 0$, для абсолютно пружного $k = 1$.

4.9 Перша та друга космічні швидкості

Перша космічна швидкість - це швидкість, яку необхідно надати тілу, щоб воно стало штучним супутником Землі. При його

польоті по круговій орбіті радіусом r (рис. 4.12) сила гравітаційного притягування надає йому доцентрового прискорення.

$$F = \gamma \frac{m \cdot M_3}{r^2} = \frac{m \cdot V_I^2}{r} \Rightarrow V_I = \sqrt{\gamma \frac{M_3}{r^2} r} = \sqrt{g \cdot r}, \quad (4.34)$$

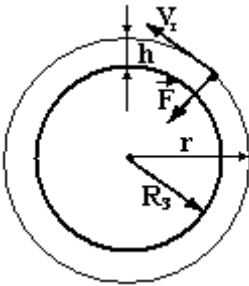


Рисунок 4.12

де $\gamma \frac{M_3}{r^2} = g$ - прискорення вільного падіння на висоті $h = r - R_3$.

Космічні польоти здійснюються на висоті близько сотні кілометрів, а радіус Землі 6300 км. Тому можна вважати, що радіус орбіти штучного супутника дорівнює радіусу Землі. Тоді $r = R_3$, $g = g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$;

$$V_I = \sqrt{R_3 \cdot g_0} \approx 7,8 \text{ км/год.}$$

Друга космічна швидкість – це така швидкість тіла, коли воно за рахунок своєї кінетичної енергії може вийти за межі гравітаційного поля Землі. Знайдемо її за законом збереження енергії: кінетична енергія тіла дорівнює роботі сил гравітаційного поля при переміщенні від поверхні Землі до нескінченності, тобто маємо

$$\frac{m \cdot V_{II}^2}{2} = \int_{R_3}^{\infty} \gamma \frac{m \cdot M_3}{r^2} dr = \gamma \frac{m \cdot M_3}{R_3} \Rightarrow V_{II} = \sqrt{2 \frac{\gamma \cdot M_3}{R_3^2} R_3}.$$

$$V_{II} = \sqrt{2 \cdot R_3 \cdot g_0} \approx 11,2 \text{ км/год}$$

4.10 Обертальний рух твердих тіл. Абсолютно тверде тіло.

Момент сили. Пара сил

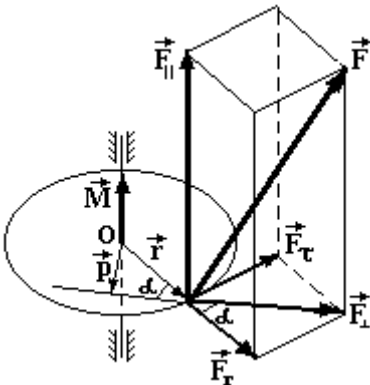


Рисунок 4.13

При вивченні обертального руху тіл зручно ввести таку ідеалізацію, як абсолютно тверде тіло. Це такі тіла, в яких не виникають деформації, які б сили на нього не діяли. Зручність полягає в тому, що радіус обертання для таких тіл не змінюється, а отже і зв'язок між

кутовими і лінійними характеристиками буде однозначним (як відомо з § 2.7, він здійснюється через радіус). Тому для вивчення оберտального руху тіла досить знайти кутові характеристики однієї його точки.

Результат дії мимобіжної з віссю обертання сили F на тіло, яке має нерухому вісь обертання, залежить не тільки від величини сили, а і від точки її прикладання та напрямку дії (рис.4.13). Силк F розкладаємо на три складові: F_{\parallel} , F_{τ} і F_r . Сила F_{\parallel} паралельна осі обертання намагається змістити тіло вздовж осі, а не повернути. Сила F_{τ} , яка перетинає вісь, намагається її зігнути і не приводить тіло в обертальний рух. Ці сили зрівноважуються силами реакції опори осі. Сила ж F_r , яка не проходить через вісь обертання і не паралельна їй приводить тіло в обертальний рух. У цьому випадку мірою дії сили на рух тіла є не сама сила, а її момент.

Моментом \vec{M} сили \vec{F} називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r} точки прикладення сили і сили \vec{F}_{\perp} , проєкції сили \vec{F} на площину, перпендикулярну до осі обертання

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}_{\perp}] \quad (4.35).$$

Цей вектор направлений вздовж осі обертання у відповідності з правилом правого гвинта: при обертанні правого гвинта разом з тілом вектор \vec{M} співпадає з поступальним рухом гвинта, в нашому випадку вгору.

Розкриваючи векторний добуток, і враховуючи, що $F_{\perp} \cdot \sin \alpha = F_{\tau}$, або $r \cdot \sin \alpha = p$, одержуємо

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}_{\perp}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}_{\tau}] = [p \cdot \vec{F}_{\perp}]. \quad (4.36)$$

Тут p – плече сили – це довжина перпендикуляра, опущеного з осі обертання на напрямок дії сили $\vec{F} \perp$.

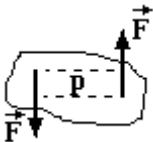


Рисунок 4.14

Парою сил називають дві паралельні протилежно направлені однакові за величиною сили (рис.4.14).

Моментом пари сил називають добуток однієї з сил на плече пари, тобто на відстань p між лініями дії сил. Момент пари сил не залежить від наявності і положення осі обертання. Дійсно, враховуючи, що моменти сил F_1 і F_2 протилежно

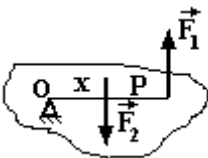


Рисунок 4.15

направлені (рис.4.15) і $F_1 = F_2 = F$, результуючий момент буде дорівнювати

$$M = F_1 \cdot (p + x) - F_2 \cdot x = F \cdot p. \quad (4.37)$$

4.11 Основне рівняння динаміки обертового руху

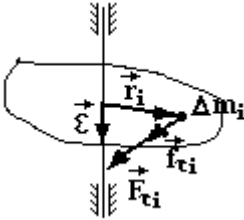


Рисунок 4.16

Нехай деяке тіло може обертатись навколо закріпленої осі. Виділимо елемент Δm_i цього тіла (рис.4.16), положення якого задається радіус-вектором \vec{r}_i . На цей елемент діють зовнішні сили \vec{F}_i і внутрішні сили \vec{f}_i , тангенціальні складові яких \vec{F}_{ti} і \vec{f}_{ti} надають йому дотичного прискорення \vec{a}_{ti} . Запишемо другий закон Ньютона для цього елементу

$$\vec{F}_{ti} + \vec{f}_{ti} = \Delta m_i \cdot \vec{a}_{ti} \quad (4.38)$$

Щоб перейти до моментів сил рівняння (4.38) векторно домножаємо на радіус-вектор \vec{r}_i

$$[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \Delta m_i [\vec{r}_i \cdot \vec{a}_{ti}]. \text{ Так як } \vec{a}_{ti} = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i], \text{ маємо}$$

$$[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \Delta m_i [\vec{r}_i \cdot [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i]]. \quad (4.39)$$

Звернемо увагу, що кутове прискорення не має індексу i так як воно для всіх точок тіла однакове.

Скориставшись математичною формулою подвійного векторного добутку

$$[\vec{a} \cdot [\vec{b} \cdot \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}), \text{ спростимо праву частину (4.39)}$$

$$[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \Delta m_i \cdot \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \Delta m_i \cdot \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon})$$

Тут, $\Delta m_i \cdot \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = \Delta m_i \cdot r_i^2$, $\Delta m_i \cdot \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon}) = 0$ так як радіус-вектор і кутове прискорення взаємно перпендикулярні. Візьмемо суму по всьому об'єму тіла

$\sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ci}] + \sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ci}] = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_V \Delta m_i r_i^2$. Тут перший доданок є векторна сума моментів зовнішніх сил, які діють на тіло $\vec{M} = \sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ci}]$, другий доданок – це векторна сума внутрішніх сил.

Вона дорівнює нулю, так як в протилежному випадку елемент Δm_i рухався б відносно інших елементів. А це означало б можливість деформації тіла, що ми виключили, ввівши поняття абсолютно твердого тіла. Отже $\sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ci}] = 0$.

$$\text{Вираз} \quad \sum_V \Delta m_i r_i^2 = J, \text{ або } \iiint_V r^2 dm = J \quad (4.40)$$

залежить від маси тіла та її розподілу відносно осі обертання і називається моментом інерції тіла. Це міра інертності тіла в обертальному русі, аналог маси в поступальному русі. Вимірюється момент інерції в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Таким чином, основне рівняння динаміки обертального руху набуває виду

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (4.41)$$

Враховуючи, що $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, рівняння (4.41) приймає вид

$$\vec{M} = \frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (4.42)$$

Величина $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$, яка дорівнює добутку моменту інерції на кутову швидкість, називається **моментом імпульсу** (аналог імпульсу $\vec{P} = m\vec{V}$ в поступальному русі).

Якщо система замкнута, тобто сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю, то момент імпульсу системи не змінюється (зберігається). Це є закон збереження моменту імпульсу, який аналогічний закону збереження імпульсу в поступальному русі.

4.12 Аналогія величин і рівнянь поступального і обертального руху. Кінетична енергія обертання тіла

Таблиця 4.1

Поступальний рух	Обертальний рух
------------------	-----------------

S - шлях	φ – кут повороту
a_τ – дотичне прискорення	ε – кутове прискорення
m - маса	J – момент інерції
F - сила	M – момент
$P=mV$ - імпульс	$L=J\omega$ – момент імпульсу
$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ - робота	$A = \int M \cdot d\varphi$ - робота
$N = \vec{F} \cdot \vec{V}$ - потужність	$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ - потужність
$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$ - 2-й 3-н Ньютона	$\vec{M} = \frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt}$ - осн. рівн-ня дин. оберт. руху.
$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2}$ - кінетична енергія поступального руху	$E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертання тіла

Доведемо останню формулу. Кінетична енергія ΔE_{ki} елементу тіла Δm_i дорівнює $\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i \cdot V_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2}$. Ми врахували зв'язок лінійної і кутової швидкостей $V_i = \omega \cdot r_i$. Кінетичну енергію обертання всього тіла знайдемо як суму кінетичних енергій усіх його елементів, врахувавши (4.40), тобто

$$E_k = \sum_V \Delta E_{ki} = \frac{\omega^2}{2} \sum_V \Delta m_i \cdot r_i^2 = \frac{J \cdot \omega^2}{2}. \quad (4.43)$$

Якщо тіло не тільки обертається, а ще і його центр маси рухається поступально з швидкістю V, наприклад, котиться колесо, то кінетична енергія дорівнює сумі поступальної і обертальної складових

$$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}. \quad (4.44)$$

4.13 Розрахунок моментів інерції деяких тіл. Теорема Штейнера

Момент інерції тіла залежить не тільки від маси тіла, а і від її розподілу відносно осі обертання. Тому одне і теж тіло має різні моменти інерції відносно різних осей

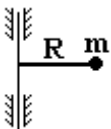


Рисунок 4.17

обертання. Розглянемо ряд прикладів розрахунку моменту інерції, користуючись його означенням (4.40).

а) **момент інерції матеріальної точки**. Задана маса m і радіус обертання R (рис.4.17). Знайти J .

Згідно з означенням (4.40) моменту інерції $J = \iiint_V r^2 dm$. В

нашому випадку $r = R = \text{const.}$

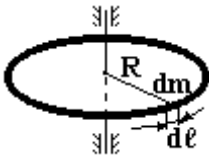


Рисунок 4.18

$$\text{Тому} \quad J = R^2 \iiint_V dm = mR^2. \quad (4.45)$$

б) **момент інерції обруча (труби)** відносно осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна площині обруча. Задана маса m і радіус обруча R (рис.4.18). Знайти J .

$J = \iiint_V r^2 dm$. $r = R = \text{const.}$ Тому

$$J = R^2 \iiint_V dm = mR^2. \quad (4.46)$$

в) **Момент інерції диска (циліндра)** відносно осі, яка співпадає з віссю циліндра. Задана маса диска m і його радіус R (рис.4.19).

Знайти J .

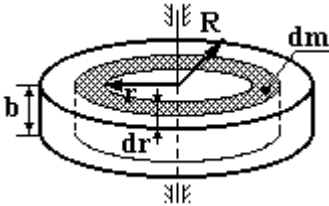


Рисунок 4.19

$J = \iiint_V r^2 dm$. Виберемо елемент dm

у вигляді труби радіусом r з товщиною стінки dr і довжиною b , яка дорівнює товщині диска (висоті циліндра). Маса цієї труби $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot b \cdot 2\pi r \cdot dr$.

Густина $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{b \cdot \pi R^2}$. Тоїму маємо

$$J = \int_V r^2 \rho \cdot dV = \int_V r^2 \frac{m}{b \cdot \pi R^2} \cdot b \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^R \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 \cdot dr = \frac{1}{2} mR^2.$$

Таким чином, момент інерції диска (циліндра) $J = \frac{1}{2} mR^2$. (4.47)

Видно, що порівнюючи з обручем (трубою) маса диска (циліндра) розподілена в цілому ближче до осі обертання. Тому і одержаний момент інерції менший.

г) **момент інерції довгого тонкого стержня** відносно осі, яка перпендикулярна до нього і проходить через середину стержня. Задані маса m стержня і його довжина ℓ (рис.4.20). Знайти J .

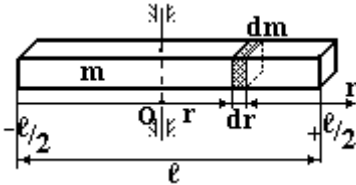


Рисунок 4.20

Виберемо елемент dm у вигляді частини стержня довжиною dr , який віддалений від осі на відстань r .

Його маса dm порційна довжині і дорівнює $dm = \frac{m}{\ell} dr$. Момент інерції стержня

$$J = \iiint_V r^2 dm = \int_{-l/2}^{+l/2} r^2 \frac{m}{\ell} dr = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{\ell} r^3 \Big|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{1}{12} m \ell^2. \quad (4.48)$$

д) **момент інерції кулі відносно діаметра**. Задана маса m і радіус R .

Момент інерції кулі $J = \frac{2}{5} m R^2$. (4.49)

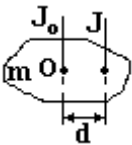


Рисунок 4.21

Для розрахунку моментів інерції тіл відносно осей, які не проходять через центр маси тіл (рис.4.21), застосовується **теорема Штейнера**: момент інерції J тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції J_0 цього тіла відносно осі, яка проходить через центр маси O тіла та паралельна заданій, і добуткові маси m тіла на квадрат відстані d між цими осями

$$J = J_0 + m d^2. \quad (4.50)$$

Впевнімося у справедливості цієї теореми на прикладі

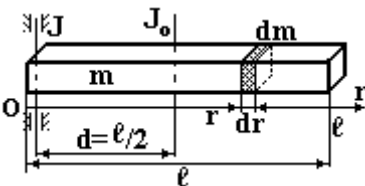


Рисунок 4.22

розрахунку моменту інерції довгого стержня відносно осі, яка перпендикулярна до стержня і проходить через його край (рис.4.22). Безпосереднє інтегрування, як і у прикладі 4) дає

$$J = \int_0^{\ell} r^2 \frac{m}{\ell} dr = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{\ell} r^3 \Big|_0^{\ell} = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

За теоремою Штейнера, враховуючи (4.48), одержуємо

$$J = J_o + m \cdot d^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2 \quad (4.51)$$

такий же результат, як і безпосереднім інтегуванням.

4.14 Гіроскоп. Гіроскопічний ефект

Гіроскоп – це масивне тіло, приведене в обертальний рух. Гіроскопічний ефект заключається в тому, що при спробі повернути

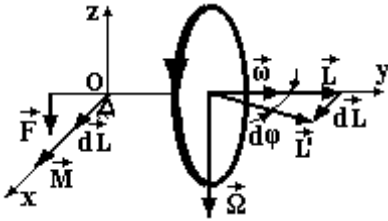


Рисунок 4.23

вісь гіроскопа силою \vec{F} (рис.4.23).в якійсь площині, наприклад, (zoy), вона (вісь) повертається в перпендикулярній площині (xoy). Пояснення цього ефекту основане на векторному характері основного рівняння динаміки обертального руху. Момент \vec{M} сили \vec{F}

направлений по осі ox. За основним рівнянням динаміки обертального руху (4.42) зміна моменту імпульсу $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$. Цей вектор, як і вектор \vec{M} , направлений також вздовж осі ox. Тоді нове значення вектора моменту імпульсу $\vec{L}^I = \vec{L} + d\vec{L}$ повернеться в площині xoy на нас на кут $d\phi$. Таким чином вісь гіроскопа буде обертатись навколо осі oz з деякою кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$. Такий рух гіроскопічної осі називається прецесією. Знайдемо кутову швидкість прецесії Ω . Довжина хорди dL радіус L і центральний кут $d\phi$ (рис.4.23) зв'язані співвідношенням $dL = L \cdot d\phi$. Поділимо це рівняння на dt і врахуємо,

$$\text{що } \frac{dL}{dt} = M, \text{ а } \frac{d\phi}{dt} = \Omega, \text{ одержуємо } \Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{J \cdot \omega}.$$

Таким чином видно, що вісь гіроскопа прагне зайняти таке положення, щоб кут між векторами моменту імпульсу \vec{L} і моменту \vec{M} зовнішньої сили став мінімальним.

5. МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ

5.1 Сили в'язкості. Рух тіл в рідинах і в газах. Формула Стокса

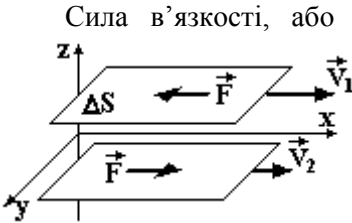


Рисунок 5.1

Сила в'язкості, або сила внутрішнього тертя, виникає в рідинах і в газах при відносному русі шарів і направлена паралельно напрямку руху цих шарів (рис.5.1). В рідинах поява цієї сили зумовлена наявністю міжмолекулярних сил взаємодії. Природу виникнення сил в'язкості в газах встановимо пізніше.

Сила в'язкості гальмує шар, що рухається з більшою швидкістю, і прискорює повільніший шар. Величина цієї сили тим більша, чим більша відносна швидкість шарів і чим менша відстань між ними. Вона знаходиться за формулою Ньютона

$$F = \eta \frac{dV}{dz} \Delta S. \quad (5.1)$$

Тут: η [Па·с] – коефіцієнт в'язкості, для різних речовин різний, але при заданій температурі величина стала; ΔS – площа шарів; $\frac{dV}{dz}$ – градієнт швидкості направлено руху шарів, тобто „швидкість” її зміни з координатою oz , яка перпендикулярна до площини шарів.

При рухові тіла в рідині або в газі приповерхневий молекулярний шар рідини чи газу рухається разом з тілом і втягує в направлений рух більш віддалені від поверхні шари (рис.5.2). Так виникає градієнт швидкості і сила внутрішнього тертя, яка гальмує рух тіла. Ясно що вона залежить від форми тіла. Для кулі цю силу вперше розрахував англійський фізик Д.П.Стокс (1818-1903)

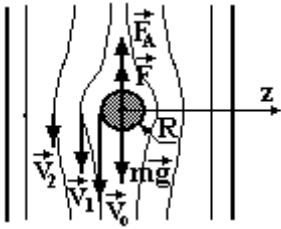


Рисунок 5.2

$$F = 6\pi\eta RV_0, \quad (5.2)$$

де: R – радіус кулі, V_0 – швидкість кулі.

Розглянемо визначення в'язкості рідини за методом Стокса, оснований на формулі (5.2). В посудину з досліджуваною рідиною кидається кулька радіусом R . Під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ і виштовхуючої сили

Архімеда \vec{F}_A вона спочатку рухається з прискоренням. Ясно, що густина тіла ρ_t повинна бути більшою за густину рідини ρ_p . По мірі зростання швидкості зростає і сила в'язкості \vec{F} , внаслідок чого величина прискорення зменшується, і в кінці кінців рух кульки стає рівномірним, коли рівнодіюча цих трьох сил стане дорівнювати нулю, тобто $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_A = 0$, або в скалярній формі

$$mg = F + F_A. \quad (5.3).$$

Підставимо в (5.3) силу Стокса (5.2), масу тіла і силу Архімеда:

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_t \quad F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p. \text{ Після спрощень, одержуємо}$$

$$\eta = \frac{2(\rho_t - \rho_p)gR^2}{9V_0}. \quad (5.4)$$

Таким чином, знаючи густини ρ_t , ρ_p , прискорення вільного падіння g , вимірюючи радіус R і швидкість рівномірного руху V_0 , можна розрахувати коефіцієнт в'язкості.

5.2 Елементи гідроаеродинаміки. Рівняння Д. Бернуллі

Будемо вивчати рух рідин і газів. Введемо декілька понять.

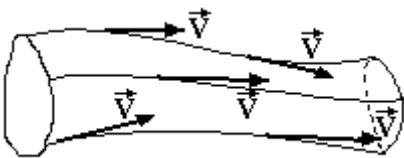


Рисунок 5.3

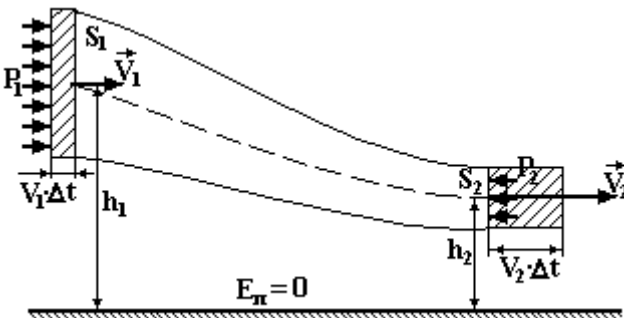
Лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають з вектором швидкості \vec{V} рис.(5.3), називаються **лініями току**. Поверхня, утворена лініями току,

які проходять через будь-яку замкнуту лінію, називається **трубною току**.

Стационарним називається такий потік рідини або газу, при якому картина ліній току не змінюються з часом.

Розглянемо рух рідини, або газу по трубці току (рис.5.4) при таких припущеннях: 1) густина рідини вздовж трубки току однакова; 2) будемо нехтувати нагріванням рідини, або газу за рахунок сил внутрішнього тертя, тобто вважатимемо систему консервативною; 3) рух стационарний.

Позначимо: S_1, S_2 – площі перерізу трубки на вході і виході



відповідно; P_1, P_2 – тиск на об'єм рідини в трубці току з боку

рідини, яка знаходиться за межами трубки току; V_1, V_2 – середні по перерізу швидкості течії; h_1, h_2 – висоти

Рисунок 5.4

положення

середніх ліній трубки від нульового рівня потенціальної енергії $E_{\text{п}}$.

Знайдемо масу рідини Δm_1 , яка втікає в трубку току за час Δt , і масу Δm_2 , яка витікає з неї за цей же час. На рис.5.4 це маси заштрихованих об'ємів, які мають форму циліндрів. Тому

$$\Delta m_1 = \rho S_1 V_1 \Delta t \quad \Delta m_2 = \rho S_2 V_2 \Delta t$$

При стационарному режимі течії ці маси однакові. Таким чином маємо умову нерозривності стационарної течії:

$$S_1 V_1 = S_2 V_2, \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad (5.5)$$

Швидкість течії більша в місці з меншою площею поперечного перерізу труби.

Застосуємо до рідини, яка знаходиться в трубці току, закон збереження механічної енергії. Система консервативна (див. припущення 2) і незамкнута. Сили тиску $P_1 S_1$ і $P_2 S_2$ являються зовнішніми силами для вибраної системи. Робота цих сил за час Δt

дорівнює добутку сил на відповідний шлях $V_1\Delta t$ та $V_2\Delta t$ і йде на зміну кінетичної і потенціальної енергії рідини масою Δm

$$P_1 S_1 V_1 \Delta t - P_2 S_2 V_2 \Delta t = \frac{\Delta m V_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m V_1^2}{2} - \Delta m g h_1.$$

Поділивши це рівняння на об'єм рідини, яка втікає і витікає з труби за час Δt , тобто на вираз $S_1 V_1 \Delta t = S_2 V_2 \Delta t$, і врахувавши, що відношення маси до об'єму дає густину, одержуємо рівняння Д. Бернуллі

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 = \text{const.} \quad (5.6)$$

Сума статичного тиску P , динамічного $\frac{\rho V^2}{2}$ і гідравлічного $\rho g h$ напорів для будь-якого перерізу труби є величиною сталою.

Така закономірність течії лежить в основі дії пульверизатора, карбюратора, водоструменевого насоса, витратомірів і т.д.

5.3 Вимірювання коефіцієнта в'язкості методом Пуазейля

Даний метод базується на вимірюванні витрати рідини (газу) при протіканні їх по круглій трубі. Витрата - це маса речовини, яка протікає через трубу за одиницю часу. Для її розрахунку знайдемо спочатку закон розподілу швидкості руху речовини по перерізові труби, так як вона в різних точках перерізу різна. Дійсно, біля стінок швидкість дорівнює нулю і зростає до центру перерізу.

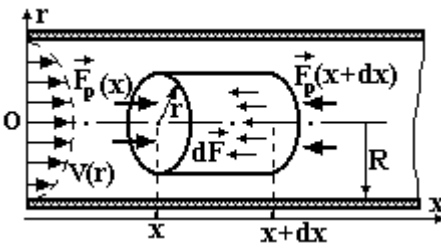


Рисунок 5.5

Розглянемо в потоці рідини (газу) елементарний об'єм у формі циліндра радіусом r і довжиною dx , вісь якого співпадає з віссю труби (рис.5.5). Він рухається під дією сил тиску, що діють на основі

$$F_p(x) = \pi \cdot r^2 \cdot P(x) \quad \text{і}$$

$$F_p(x + dx) = \pi \cdot r^2 \cdot P(x + dx), \quad \text{а}$$

також сили внутрішнього тертя, яка діє по бічній поверхні і за

формулою (5.1) Ньютона дорівнює $dF = \eta \frac{dV}{dr} S_6 = \eta \frac{dV}{dr} 2\pi r \cdot dx$.

Стационарним рух цього елементу буде при умові $dF_p(x) = dF + dF_p(x + dx)$, тобто

$$\eta \frac{dV}{dr} 2\pi r \cdot dx = \pi \cdot r^2 [P(x + dx) - P(x)], \text{ або } 2\eta \frac{dV}{dr} = r \frac{dP}{dx}. \quad (5.7)$$

При стаціонарному режимі течії падіння тиску на одиниці довжини

$$\text{труби } \ell \text{ є величиною сталою і дорівнює } \frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{\ell},$$

де P_1 і P_2 – тиск на вході і на виході труби відповідно, ℓ - довжина труби. Рівняння (5.7) набає виду

$$dV = \frac{P_2 - P_1}{2\eta \ell} r \cdot dr. \text{ Інтегрування дає } V = \frac{P_2 - P_1}{4\eta \ell} r^2 + C. \text{ Константу}$$

інтегрування C знайдемо із граничної умови: при $r = R$ $V = 0$.

Одержуємо $C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta \ell} R^2$. Тоді розподіл швидкості по перерізу

труби як функція радіуса r набуваєм виду

$$V(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta \ell} (R^2 - r^2) \quad (5.8)$$

квадратної параболи (див. рис.5.5, пунктиром показана епюра швидкості).

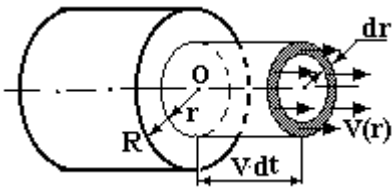


Рисунок 5.6

Знайдемо витрату рідини.

Виберемо в перерізі труби кільце радіусом r і шириною dr (рис.5.6, заштриховано). Вісь труби співпадає з центром цього кільця. Тому швидкість руху рідини по всій площі кільця однакова і задається виразом (5.8). Об'єм рідини, який пройде через площу цього кільця за час dt ,

буде мати форму трубки довжиною $V \cdot dt$ радіусом r і товщиною стінки dr . Маса цього об'єму знаходимо через густину

$$dm = \rho \cdot V \cdot dt \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Тоді витрата рідини через вибране кільце буде дорівнювати $dM = \frac{dm}{dt} = 2\pi\rho \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} r(R^2 - r^2) \cdot dr$. Через увесь переріз витрата знаходиться шляхом інтегрування по радіусу в межах від 0 до R

$$M = 2\pi\rho \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} \int_0^R r(R^2 - r^2) \cdot dr = \frac{\pi\rho(P_1 - P_2)R^4}{8\eta\ell}. \quad (5.9)$$

Звернемо увагу на досить сильну залежність витрати від радіуса труби $M \sim R^4$.

Таким чином, знаючи густину рідини і виміривши експериментально витрату M, тиски P_1 , P_2 та геометричні розміри труби R і ℓ , знаходять коефіцієнт в'язкості

$$\eta = \frac{\pi\rho(P_1 - P_2)R^4}{8M\ell}. \quad (5.10)$$

5.4 Ламінарний та турбулентний режими течії рідин (газів)

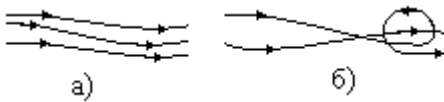


Рисунок 5.7

Розрізняють два режими течії рідини (газу): ламінарний та турбулентний. При ламінарному режимі лінії току на перетинаються (рис.5.7,а) і шари рідини (газу) не перемішуються. При турбулентному режимі шари перемішуються, а лінії току перетинаються як між собою, так і самі себе (рис.5.7,б).

Англійський фізик О. Рейнольдс ввів безрозмірний критерій режиму течії (число Рейнольдса)

$$R_e = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{\rho V\ell}{\eta}, \quad (5.11)$$

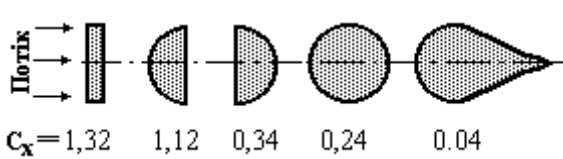
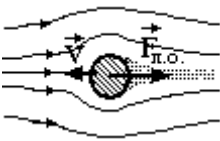
де V – швидкість течії, ℓ – характерний поперечний розмір труби (діаметр для круглих труб, діагональ для прямокутних), ν – кінематична в'язкість - $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, η – коефіцієнт в'язкості, ρ – густина.

При $R_e < 1$ режим ламінарний, при $R_e > 1$ – турбулентний. Слід зауважити, що це не строгий критерій, наприклад, значення $R_e = 1,1$

ще не означає, що режим течії турбулентний. Потрібні додаткові дослідження. Але при значенні $Re = 2$ можна бути впевненим, що режим течії турбулентний.

При русі тіл в рідинах і в газах на них діють дві сили: 1) сила лобового опору $F_{л.о.}$ направлена проти швидкості; 2) підймальна сила перпендикулярна до швидкості руху.

При малих швидкостях сила лобового опору зумовлена в основному силами в'язкості. При великих швидкостях (точніше при великих числах Рейнольдса) переважну роль грає різниця тисків. Попереду тіла тиск більший, ніж позаду (утворюється розрідження) (рис.5.8). Різниця сил тиску направлена проти швидкості. Сила лобового опору



$$F_{л.о.} = \frac{1}{2} C_x S \rho V^2, \quad (5.12)$$

де S – максимальна площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до

Рисунок 5.9

вектора швидкості \vec{V} , C_x – коефіцієнт лобового опору, величина стала і залежить від форми тіла і напрямку руху. На рис. 5.9 приведені значення цього коефіцієнта для ряду випадків.

З'ясуємо природу виникнення підймальної сили крила літака. Профіль крила роблять асиметричним. Тому швидкість потоку повітря над крилом більша, ніж під ним. Крім того за крилом виникає



Рисунок 5.10

завихрення повітря з напрямком обертання проти годинникової стрілки (рис.5.10). Ці вихрі відносять певний момент імпульсу. У відповідності з законом збереження моменту імпульсу, навколо крила утворюється

циркуляційний потік протилежного напрямку обертання (за годинниковою стрілкою). Він утворюється із-за наявності сил в'язкості повітря. Цей циркуляційний потік накладається на основний.

Тому швидкість потоку над крилом зростає, а під ним – зменшується. Згідно з рівнянням Бернуллі (5.6) тиск P_V над крилом буде менший, ніж тиск P_H під ним. Різниця тисків і призводить до виникнення підйімальної сили, направленої вгору (точніше в сторону, де швидкість потоку більша).

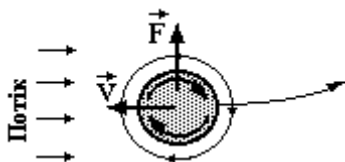


Рисунок 5.11

Аналогічно пояснюється і ефект Магнуса (рис.5.11), який заключається у відхиленні від прямолінійного руху тіла приведенного в обертання. Тіло відхиляється в сторону де основний і циркуляційний потоки співпадають за напрямком.

6. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

6.1 Положення молекулярно-кінетичної теорії та її задача

Молекулярна фізика – це розділ, який вивчає фізичні властивості і агрегатні стани речовин в залежності від їх молекулярної будови і сил взаємодії між молекулами. Вона базується на трьох основних положеннях:

- всі тіла складаються з молекул і атомів;
- молекули і атоми хаотично рухаються;
- між молекулами і атомами існують сили взаємодії.

Молекулярно-кінетична теорія пояснює властивості тіл виходячи с характеру руху молекул і сил взаємодії між ними. Враховуючи, що кількість молекул дуже велика (в 1см^3 газу при нормальних умовах міститься $2,69 \cdot 10^{19}$ молекул), вивчення систем такої великої кількості частинок не можна звести до вивчення руху кожної молекули. Для цього необхідно було б записати другий закон

Ньютона для кожної молекули, а потім її розв'язати. Ясно, що систему величезної кількості диференціальних рівнянь розв'язати неможливо, та і безкорисно. В таких системах проявляються специфічні статистичні закономірності. Наприклад, швидкості молекул можуть бути самими різними і знати всі їх значення неможливо, та і безкорисно, тим більше, що вони весь час змінюються при зіткненнях. А ось середнє значення швидкості залишається сталим і характеризує стан системи.

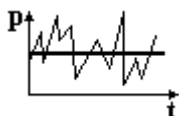


Рисунок 6.1

Наприклад, тиск газу, який зумовлений ударами молекул об стінки посудини, зазнає флуктуацій з часом (рис.6.1), але його середнє значення не змінюється і його можна виміряти експериментально. Таким чином, задача молекулярно-кінетичної теорії – це знаходження середніх значень фізичних величин, які

характеризують системи великої кількості частинок і які можна виміряти експериментально. Для цього використовується статистичні методи, в основі яких лежить теорія ймовірності.

Системи великої кількості частинок вивчає ще один розділ фізики – термодинаміка. Це вчення про зв'язок і взаємні перетворення енергії, теплоти і роботи. Термодинаміка наука феноменологічна (описова). Вона не дає пояснення тих чи інших явищ, властивостей на молекулярному рівні, а встановлює зв'язок між параметрами системи, наприклад, тиском, об'ємом, температурою, кількістю теплоти, роботою, ентропією, вільною енергією і т.д.

Обидва розділи доповнюють один одного.

6.2 Ідеальний газ та його закони

Ідеальний – це газ, в якому нехтують власним об'ємом молекул і силами взаємодії між ними.

Стан газу характеризується такими величинами: m – маса, P – тиск, V – об'єм, T – абсолютна температура. Закони ідеального газу встановлюють зв'язок між цими параметрами.

Ізотермічний закон (закон Бойля-Маріотта) $m = \text{const}$, $T = \text{const}$: при незмінній масі і температурі добуток тиску на об'єм залишається незмінним

$$P \cdot V = \text{const}. \quad (6.1)$$

Графіки цього закону зображені на рис.6.2 в різних координатах.

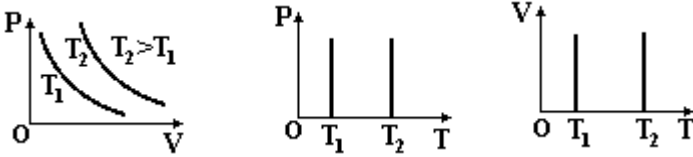


Рисунок 6.2

Изобарний закон (закон Гей-Люсака) $m = \text{const}$, $P = \text{const}$: при незмінній масі і тискові об'єм газу прямо пропорційний температурі

$$V_t = V_o(1 + \alpha \cdot t^{\circ}). \quad (6.2)$$

Тут V_o – об'єм газу при температурі 0°C , $\alpha = \frac{V_t - V_o}{V_o \cdot t^{\circ}}$ -

температурний коефіцієнт об'ємного розширення. Він показує відносну зміну об'єму при зміні температури на 1° . Вимірюється в 1/град, і для всіх ідеальних газів величина однакова і дорівнює $\alpha = 1/273$ (1/град). Вираз (6.2) набуває виду

$$V_t = V_o(1 + \frac{1}{273} \cdot t^{\circ}) = V_o \frac{1}{273}(273 + t^{\circ}) = V_o \alpha T, \quad (6.3)$$

де $T = 273 + t^{\circ}$ – температура по абсолютній шкалі (шкала Кельвіна).

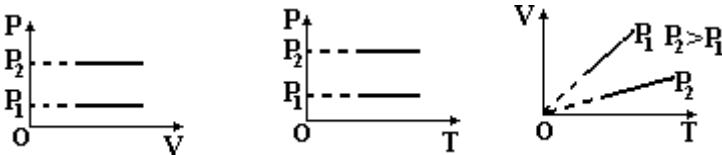


Рисунок 6.3

Графіки цього закону зображені на рис.6.3.

Изохорний процес (закон Шарля) $m = \text{const}$, $V = \text{const}$: при незмінній масі і об'ємові тиск газу прямо пропорційний температурі

$$P_t = P_o(1 + \beta \cdot t^{\circ}). \quad (6.4)$$

Тут P_o – тиск газу при температурі 0°C , $\beta = \frac{P_t - P_o}{P_o \cdot t^{\circ}}$ - температурний

коефіцієнт тиску. Він показує відносну зміну тиску при зміні температури на 1° . Вимірюється в 1/град, і для всіх ідеальних газів

величина однакова і дорівнює $\beta = 1/273$ (1/град). Вираз (6.4) набуває виду

$$P_t = P_o \left(1 + \frac{1}{273} \cdot t^\circ\right) = P_o \frac{1}{273} (273 + t^\circ) = P_o \beta T. \quad (6.5)$$

Графіки цього закону зображені на рис.6.4.

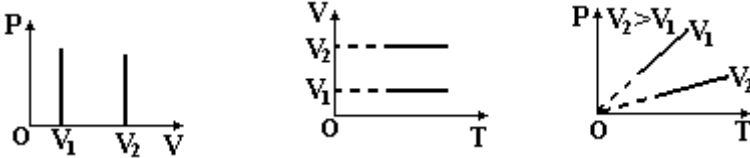


Рисунок 6.4

Зв'язок між усіма чотирма параметрами дає рівняння стану ідеального газу – рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$P \cdot V = \frac{m}{\mu} R \cdot T. \quad (6.6)$$

Тут μ – молярна маса газу, $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – газова стала.

6.3 Закон Дальтона. Рівняння стану для суміші газів

Англійський фізик Дж. Дальтон (1766-1844) у 1801-1803 р. експериментально встановив закон, який носить його ім'я (**закон Дальтона**): загальний тиск суміші хімічно не взаємодіючих газів дорівнює сумі парціальних тисків. **Парціальний тиск** – це тиск кожного газу, який встановлюється, коли в посудині знаходиться тільки цей газ, а інші відкачані.

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_i^n P_i. \quad (6.7)$$

Одержимо рівняння стану для суміші n газів. Знайдемо із рівняння Клапейрона-Менделєєва (6.6) парціальні тиски:

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V}, \quad P_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}, \dots, \quad P_n = \frac{m_n}{\mu_n} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Загальний тиск знайдемо за законом (6.7) Дальтона

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n} \right) \cdot \frac{RT}{V} = \frac{m_c}{\mu_c} \cdot \frac{RT}{V}, \quad (6.8)$$

$$\text{де молярна маса суміші газів } \mu_c = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n}}$$

(6.9)

Таким чином рівняння стану для суміші має такий же вид, як і (6.6) для одного газу, якщо замінити масу і молярну масу значеннями для суміші

$$P \cdot V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n} \right) R \cdot T = \frac{m_c}{\mu_c} R \cdot T. \quad (6.10)$$

6.4 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії називається рівняння, яке відображає зв'язок між тиском газу і енергією поступального руху молекул. Знайдемо це рівняння за таких припущень:

- всі молекули рухаються з однаковими швидкостями;
- так як рух молекул хаотичний, то всі напрямки руху рівно ймовірні, тобто можна вважати, що вздовж будь-якого напрямку рухється однакова кількість молекул. Тому припустимо, що молекули рухаються тільки вздовж координатних осей x , y , z . Тоді можна вважати, що вздовж кожної осі рухається $1/3$ частина всіх молекул.

Тиск газу пояснюється зміною імпульсу молекул при зіткненні і відбиванні їх із стінкою посудини. За другим законом Ньютона на молекулу з боку стінки діє сила, а згідно з третім законом Ньютона, на стінку з боку молекули буде діяти така ж за величиною сила.

Відношення сили до площі і є тиск.

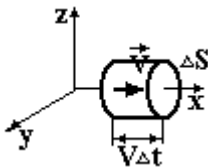


Рисунок 6.5

Виберемо на поверхні посудини малу плоску площадку ΔS . Вісь ox направимо перпендикулярно до цієї площадки, осі oy і oz паралельні їй (рис.6.5). Знайдемо кількість молекул ΔN , які за час Δt зіткнуться з цією площадкою. Це будуть молекули, які рухаються до площадки, а це половина тих молекул, які рухаються вздовж осі ox , і віддалені від неї на відстань, не більшу ніж $V \cdot \Delta t$. Отже, це буде одна шоста частина від усіх молекул, які

знаходяться в показаному на рис. 6.5 циліндрі, тобто

$$\Delta N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot n \cdot V \cdot \Delta t \cdot \Delta S$$

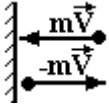


Рисунок 6.6

При пружному ударі імпульс молекули змінюється на $\Delta(mv) = mV - (-mV) = 2mV$ (рис.6.6).

Якщо удар не пружний, тобто молекула прилипає до поверхні, то імпульс зміниться на mV . Але після встановлення динамічної рівноваги, кількості молекул, які прилипають до стінки і які її покидають її стають однаковими. Молекула, покидаючи стінку, передає їй імпульс mV . Таким чином і в цьому випадку загальна зміна імпульсу теж буде дорівнювати $2mV$, тобто немає різниці, та ж молекула покинула стінку, чи інша. Запишемо другий закон Ньютона через імпульс і знайдемо тиск

$$F \cdot \Delta t = \Delta N \cdot 2mV \Rightarrow P \cdot \Delta S \cdot \Delta t = \frac{1}{6} n \cdot V \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot 2mV \Rightarrow \quad (6.11)$$

$$P = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{mV^2}{2} = \frac{2}{3} n E_{\text{пост.}}$$

Тепер зніmemo допущення про однаковість швидкостей усіх молекул, адже реально швидкості молекул різні. Розіб'ємо всі молекули на групи з однаковими швидкостями, ітбудемо розглядати його як суміш газів. В кожній групі швидкості молекул однакові. Запишемо парціальний тиск кожної групи молекулза формулою (6.11), а загальний тиск – за законом Дальтона (6.7).

$$P = \frac{2}{3} \left(n_1 \cdot \frac{mV_1^2}{2} + n_2 \cdot \frac{mV_2^2}{2} + \dots + n_k \cdot \frac{mV_k^2}{2} \right) \quad (6.12).$$

Тут k – кількість груп молекул. Таким чином, у дужках записана сума добутків кінетичної енергії поступального руху однієї молекули на їх кількість, тобто загальна енергія поступального руху всіх молекул. Її можна знайти ще як добуток загальної концентрації молекул n на середню енергію поступального руху

$$E_{\text{пост}} = \frac{m \overline{V^2}}{2} = \frac{mV_{\text{ср.кв}}^2}{2}, \text{ де } V_{\text{ср.кв}} - \text{середня квадратична швидкість}$$

– це корінь квадратний із середнього значення квадратів швидкостей усіх N молекул (риска зверху означає середнє значення)

$$V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_N^2}{N}}. \quad (6.13)$$

Таким чином, основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії має вид

$$P = \frac{2}{3} n \bar{E}_{\text{пост.}} = \frac{2}{3} n \frac{m V_{\text{ср.кв}}^2}{2} = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot V_{\text{ср.кв}}^2. \quad (6.14)$$

6.5 Середня енергія поступального руху молекул. Молекулярно-кінетичне тлумачення температури

Підставимо тиск (6.14) в рівняння (6.6) Клапейрона-Менделєєва

$$\frac{2}{3} n V \bar{E}_{\text{пост.}} = \frac{m}{\mu} RT. \text{ Знаходимо середню енергію поступального руху}$$

$$\bar{E}_{\text{пост.}} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{N} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{\frac{m}{\mu} N_A} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT. \quad (6.15)$$

Тут: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро,

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} - \text{ стала Больцмана.}$$

Вираз (6.15) показує, що середня енергія поступального руху молекул залежить тільки від абсолютної температури і не залежить від типу молекул. Тому абсолютну температуру тлумачать як міру кінетичної енергії поступального теплового руху молекул. Так як кінетична енергія не може бути від'ємною, то і абсолютна температура T завжди позитивна.

Підстановка (6.15) в (6.14) дає такий вираз основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$P = nkT. \quad (6.16)$$

Видно, що тиск газу не залежить від маси (типу) молекул, а визначається тільки їх концентрацією і температурою. Тому очевидним стає закон Дальтона $P = (n_1 + n_2 + \dots)kT = nkT$.

6.6 Поняття про функцію розподілу. Функція розподілу Максвелла

Для вирішення задачі молекулярно-кінетичної теорії, знаходження середніх значень фізичних величин, введемо поняття функції розподілу.

Будемо цікавитись, наприклад, швидкостями теплового руху молекул. Ясно, що вони за величиною будуть самими різними - від нуля до нескінченності. Але кількість молекул з дуже малими і дуже великими швидкостями буде невеликою. Дійсно, ймовірність того, що якась молекула при зіткненні з другими молекулами буде або тільки віддавати частину свого імпульсу (зменшувати швидкість), або тільки одержувати (збільшувати швидкість), при хаотичному русі мала. Деяке значення швидкості буде зустрічатись найчастіше, тобто її

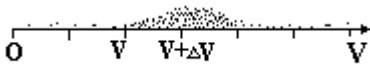


Рисунок 6.7

мають більшість молекул. Уявимо, що в певний момент часу ми змогли виміряти значення швидкостей усіх молекул. Відмітимо ці значення на числовій осі швидкостей (рис.6.7). В якомусь діапазоні густина точок буде максимальною і зменшуватись як при малих, так і при великих значеннях швидкості. Маємо нерівномірний розподіл кількості точок по числовій осі. Очевидно, що при незмінній температурі цей розподіл не буде змінюватись з часом, так як при пружних зіткненнях швидкість однієї молекули може збільшитись, а іншої зменшитись. А це буде означати перестановку відмічених нами точок місцями. Характер же розподілу не зміниться.

Розіб'ємо числову вісь на однакові довільні інтервали швидкості ΔV і підрахуємо кількість точок ΔN , які потрапили в кожний інтервал. Очевидно, що ΔN залежить від ширини інтервалу ΔV , його положення на числовій осі, тобто від V і загальної кількості молекул N , тобто $\Delta N = \Delta N(\Delta V, V, N)$ є функцією трьох аргументів. Для того, щоб виключити залежність від суб'єктивно вибраних параметрів

ΔV і N , поділимо ΔN на N і ΔV . Відношення $\frac{\Delta N}{N}$ дає долю молекул,

або ймовірність того, що значення швидкості потрапляє в інтервал від V до $V+\Delta V$, і не залежить від загальної кількості молекул N .

$$\text{Відношення} \quad \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta V} = f(V) \text{ , або } \frac{dN}{N \cdot dV} = f(V) \quad (6.17)$$

уже не залежить і від ширини інтервалу, а являється тільки функцією швидкості. Це і є функція розподілу молекул, у даному випадку по швидкостям. Вона показує ймовірність того, що значення швидкості потрапляє в інтервал від V до $V+1$, тобто в одиничний інтервал швидкостей. Тому її називають густиною ймовірності. Функція

$$dN(V) = N \cdot f(V) \cdot dV \quad (6.18)$$

називається повною статистичною функцією розподілу. Вона дає можливість знайти кількість молекул, які мають значення швидкості в певному інтервалі від V_1 до V_2 шляхом інтегрування

$$N_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} N \cdot f(V) \cdot dV. \quad (6.19)$$

Ясно, що інтеграл (6.19) у всьому можливому діапазоні швидкостей дає загальну кількість молекул N , тобто

$$\int_0^{\infty} N \cdot f(V) \cdot dV = N, \text{ або } \int_0^{\infty} f(V) \cdot dV = 1. \quad (6.20)$$

Це умова нормування функції розподілу. Останній вираз означає, що ймовірність виявити будь-яке значення швидкості, тобто в інтервалі від 0 до ∞ , дорівнює 1. Це достовірна подія.

Максвеллівська функція розподілу молекул по швидкостям має вид (її вивід див.,наприклад, у кн. Р.В.Телеснин. Молекулярная физика)

$$f(V) = A \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}}. \quad (6.21)$$

Тут: A – коефіцієнт, який знайдемо із умови (6.20) нормування функції розподілу, m – маса однієї молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Знайдемо нормуючий коефіцієнт A . Із (6.20) та (6.21) маємо

$$\int_0^{\infty} A \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \cdot dV = 1 \quad . \quad \text{Виконаємо заміну аргументу}$$

інтегрування. Позначимо $\frac{mV^2}{2kT} = x$. Тоді

$$V = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \sqrt{x}, \quad dV = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad . \quad \text{Одержуємо}$$

$$\int_0^{\infty} A \cdot \frac{2kT}{m} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} \cdot dx = 1$$

$$\frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} \cdot dx = 1 \quad . \quad \text{Тут інтеграл} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \epsilon$$

табличним. Таким чином маємо

$$A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad (6.22)$$

а нормована функція

$$f(V) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \quad . \quad (6.23)$$

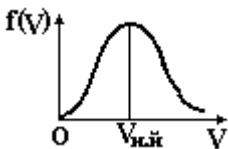


Рисунок 6.8

Графік цієї функції показаний на рис.6.8. Це функція з екстремумом, який відповідає значенню швидкості, яку мають більшість молекул. Ця швидкість $V_{н.й}$ називається найбільш ймовірною швидкістю.

6.7 Швидкості молекул. Правило статистичного усереднення

Хаотичний тепловий рух молекул характеризується трьома швидкостями: найбільш ймовірною, середньою арифметичною і середньою квадратичною.

Найбільш ймовірну швидкість $V_{н.й}$, як уже відмічалось, мають більшість молекул. Ймовірність виявити це значення найбільша. Звідси і назва. Найбільш ймовірна швидкість дорівнює значенню аргумента, яке відповідає максимуму функції розподілу по швидкостям (6.21). Знайдемо її, дослідивши функцію Максвелла (6.21) на екстремум. Беремо похідну за швидкістю і прівніємо її нулю

$$\frac{df(V)}{dV} = 0. \quad \frac{d}{dV} \left(A \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \right) = 0.$$

$$A \cdot 2V \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} - A \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \cdot \frac{m}{2kT} \cdot 2V = 0. \quad \text{Після спрощень}$$

$$\text{маємо} \quad V_{н.й} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (6.24)$$

Тут враховано що $k \cdot N_A = R$, $m \cdot N_A = \mu$.

Знайдемо **середню арифметичну швидкість** $V_{ср. ар.}$ з таких міркувань: швидкість V_1 мають $\Delta N(V_1)$ молекул; швидкість V_2 мають $\Delta N(V_2)$ молекул; --- швидкість V_k мають $\Delta N(V_k)$ молекул. За означенням середнього арифметичного для знаходження середньої арифметичної швидкості потрібно поділити на кількість молекул.

$$V_{ср. ар.} = \frac{\text{сума швидкостей усіх молекул}}{\text{загальна кількість молекул}} = \frac{\sum_{i=1}^k V_i \cdot \Delta N(V_i)}{N}.$$

Тут суму швидкостей усіх молекул знайшли як суму добутків числового значення швидкості на кількість молекул, що мають цю швидкість. Із врахуванням (6.18) маємо

$$V_{ср. ар.} = \frac{\int_0^{\infty} V \cdot dN(V)}{N} = \frac{\int_0^{\infty} V \cdot N \cdot f(V) \cdot dV}{N} = \int_0^{\infty} V \cdot f(V) \cdot dV. \quad (6.25)$$

Одержане співвідношення називається правилом статистичного усереднення. За ним знаходять середні значення фізичних величин при відомій функції розподілу по цій фізичній величині. Наприклад, середня енергія може бути знайдена за виразом

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E \cdot f(E) \cdot dE. \quad (6.26)$$

Розрахуємо середню арифметичну швидкість, скориставшись (6.25) і (6.23).

$$V_{\text{ср.ар.}} = \int_0^{\infty} V \cdot f(V) \cdot dV = \int_0^{\infty} V \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \cdot dV.$$

Виконаємо заміну аргументу інтегрування таку ж, як і в розділі 6.6, а саме $\frac{mV^2}{2kT} = x$. Після спрощень маємо

$$V_{\text{ср.ар.}} = 4 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \cdot \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx. \text{ Інтегрування по частинам дає}$$

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0 + e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1. \text{ Одержуємо}$$

$$V_{\text{ср.ар.}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (6.27)$$

Знайдемо **середню квадратичну швидкість** $V_{\text{ср.кв}}$ – це квадратний корінь із середнього значення квадратів швидкостей. За правилом (6.25)

$$V_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\int_0^{\infty} V^2 \cdot f(V) \cdot dV} = \sqrt{\int_0^{\infty} V^2 \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \cdot dV}.$$

Аналогічно попередньому, інтегрування по частинам, дає

$$V_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (6.28)$$

Можна середню квадратичну швидкість знайти простіше, знаючи середню енергію поступального руху молекул (6.15) і означення (6.13) середньої квадратичної швидкості.

$$\frac{m\overline{V^2}}{2} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow V_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Одержані вирази(6.24), (6.27) і (6.28), для швидкостей показують, що всі вони відрізняються тільки числовими коефіцієнтами і із збільшенням температури зростають пропорційно \sqrt{T} .

6.8 Експериментальна перевірка розподілу Максвелла молекул по швидкостям (дослід Штерна)

Перша експериментальна перевірка розподілу Максвелла молекул по швидкостям була здійснена німецьким фізиком О.Штерном (1888-1969) у 1920 р. Схема досліду показана на рис 6.9. Вздовж осі двох коаксіальних циліндрів була натягнута платинова нитка, покрита сріблом.

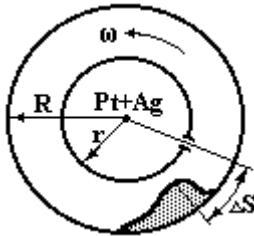


Рисунок 6.9

Внутрішній циліндр мав вузьку щілину. Вся система була поміщена у вакуум. При нагріванні нитки срібло випаровувалось. Щілиною формувався пучок атомів срібла, які осідали на внутрішній поверхні більшого циліндра напроти щілини. Коли циліндри приводились в обертання (~ 2700 об/хв), срібна пляма зміщувалась і розмивалась так як за час прольоту атомів між циліндрами $\tau = \frac{R-r}{V}$ вони встигали повернутися на певний кут.

Зміщення $\Delta S = \omega R \tau$. Тоді швидкість атомів $V = \frac{\omega R(R-r)}{\Delta S}$. По

зміщенню максимуму плями була знайдена найбільш ймовірна швидкість (~ 600 м/с), яка добре узгоджувалась з розрахованою за (6.24). Вимірювання товщини плівки срібла з різним зміщеннями дали можливість впевнитись у справедливості формули (6.21), так як молекули з різними швидкостями зазнавали різного зміщення: повільні молекули – більшого, швидкі – меншого.

6.9 Барометрична формула. Больцманівський розподіл молекул в силовому полі

Барометричною формулою називається залежність тиску P атмосфери Землі від висоти h над її поверхнею. Знайдемо цю залежність. Виділимо нескінченно малий циліндр повітря висотою dh і площею основи dS (рис.6.10). Позначимо тиск на нижню основу $P(h)$, на верхню $P(h+dh)$. Маса повітря в цьому циліндрі

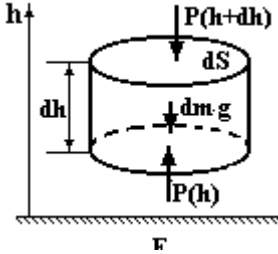


Рисунок 6.10

$dm = \rho \cdot g \cdot dh \cdot dS$. Густина знайдемо із (6.6) рівняння Клапейрона-Менделєєва $\rho = \frac{P\mu}{RT}$.

Запишемо умову рівноваги циліндра. Горизонтальні сили тиску, які діють на бічну поверхню взаємно компенсуються. Залишаються вертикальні сили

$$P(h + dh) \cdot dS + dm \cdot g = P(h) \cdot dS$$

$$[P(h + dh) - P(h)] \cdot dS = -\frac{P\mu}{RT} g \cdot dh \cdot dS$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} \cdot dh. \text{ Інтегруємо це рівняння з граничними умовами:}$$

$$\text{при } h = 0 \quad P = P_0. \quad \int \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} \cdot \int dh \Rightarrow \ln P = -\frac{\mu g h}{RT} + \ln P_0$$

Одержали барометричну формулу

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = P_0 \cdot e^{-\frac{m g h}{kT}} = P_0 \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}}, \quad (6.29)$$

де m – маса однієї молекули, E_p – потенціальна енергія молекули в гравітаційному полі Землі. Формула (6.29) показує, що по мірі збільшення висоти тиск зменшується за експоненціальним законом.

Враховуючи основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії (6.16) $P = nkT$, $P_0 = n_0 kT$, формула (6.29) переходить у формулу

Больцманівського розподілу молекул по потенціальним енергіям

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = n_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 \cdot e^{-\frac{E_{п}}{kT}}. \quad (6.30)$$

Вираз (6.30) показує, що на більш високому енергетичному рівні знаходиться менше частинок (рис.6.11). При $E_{п2} > E_{п1}$ $n_2 < n_1$. Такий розподіл частинок називається нормальним. Якщо ж на більш високому енергетичному рівні знаходиться більше частинок, тобто при $E_{п2} > E_{п1}$ $n_2 > n_1$, такий розподіл називається інверсною заселеністю енергетичних рівнів. Це термодинамічно нерівноважний стан системи. Саме таке заповнення рівнів необхідне для роботи лазерів.

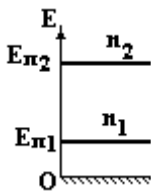


Рисунок 6.11

Із виразу (6.30) випливає, що з пониженням температури концентрація молекул на висотах, відмінних від нуля зменшується, і при $T = 0\text{K}$ стає рівною нулю. Це означає, що при $T = 0\text{K}$ всі молекули знаходяться на поверхні Землі, тобто при $h = 0$. Отже силове поле намагається розмістити частинки в положення з мінімальною потенціальною енергією. Тепловий же рух навпаки намагається розподілити молекули рівномірно. Внаслідок цих протилежних факторів і встановлюється експоненціальний розподіл концентрації молекул з висотою.

6.10 Ефективний діаметр молекул. Частота зіткнень та середня довжина вільного пробігу молекул

Найменша відстань, на які зближуються центри двох молекул, називається **ефективним діаметром** молекул (рис.6.12). Це не діаметр простору, який займає молекула, а зіткнення молекул не означає їх механічний контакт. При зближенні молекул зростають сили відштовхування і на певній відстані вони відштовхують молекули одну від другої. Ясно, що із зростанням швидкості, тобто температури, ефективний діаметр зменшується

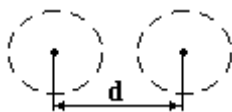


Рисунок 6.122

$$d = d_{\infty} \sqrt{1 + \frac{C}{T}}. \quad (6.31)$$

Це формула Сьозерленда. C – константа Сьозерленда, для кожного газу різна. Наприклад, для кисню $C = 398\text{K}$ (125°C).

Знайдемо частоту ν зіткнень молекули з іншими молекулами. Припустимо, що рухається лише одна молекула, а інші зупинились.

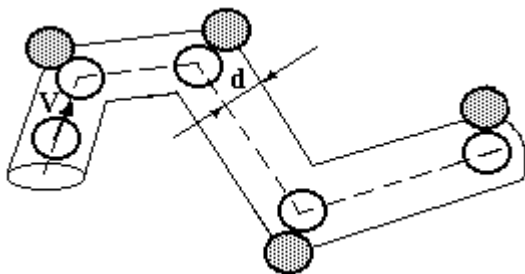


Рисунок 6.13

Траєкторія її руху буде уявляти собою ламану лінію, а рух молекули можна розглядати як рух всередині ламаного циліндра, радіус основи якого дорівнює ефективному діаметрові d (рис.6.13). За час dt молекула проходить відстань $V_{\text{ср.ар.}} \cdot dt$ і зазнає

зіткнення з тими молекулами, центри яких потрапляють всередину цього колінчатого циліндра $v_o \cdot dt = n \cdot \pi \cdot d^2 \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot dt$. З врахуванням того, що рухаються усі молекули, а не одна, частота зіткнень збільшується в $\sqrt{2}$ раз

$$\nu = \sqrt{2} \cdot \nu_o = \sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot d^2 \cdot V_{\text{ср.ар.}} = \sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma \cdot V_{\text{ср.ар.}} \quad (6.32)$$

Тут $\sigma = \pi \cdot d^2$ називається ефективним перерізом молекули.

Знайдемо середню довжину вільного пробігу λ молекули, тобто середню відстань між зіткненнями. За одиницю часу молекула проходить відстань, яка дорівнює $V_{\text{ср.ар.}}$ і зазнає ν зіткнень. Тоді з врахуванням (6,32)

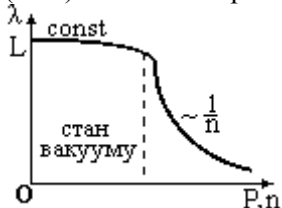
$$\lambda = \frac{V_{\text{ср.ар.}}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot n} \quad (6.33)$$

Підставимо (6.31) в (6.303). Одержимо температурну залежність λ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d_\infty^2 \cdot \left(1 + \frac{C}{T}\right) \cdot n} = \lambda_\infty \frac{T}{T + C} \quad (6.34)$$

Зі збільшенням температури довжина вільного пробігу зменшується. При $T = C$ вона в два рази менша, ніж при дуже високій температурі λ_{∞} .

Проаналізуємо залежність довжини вільного пробігу молекул від концентрації, або, що те ж саме, від тиску, так як $P = nkT$. Із зменшенням тиску (концентрації) λ зростає за гіперболічним законом (6.33). Але її зростання обмежене розміром посудини, в якій



знаходиться газ (рис.6.14). Настає такий стан, коли молекули стикаються тільки із стінками посудини, а не між собою. Такий стан газу називається вакуумом. Як бачимо, це поняття відносне. Стан вакууму настає тоді, коли теоретичне значення довжини вільного пробігу, знайдене за формулою (6.33), стає більшим, ніж характерний (найбільший)

розмір посудини. Довжина вільного пробігу перестає залежати від тиску (концентрації) і виходить на насичення.

Рисунок 6.14

6.11 Явища переносу в газах. Внутрішнє тертя

При хаотичному русі молекул вони переходять із одного шару в інший і переносять імпульс, енергію і власну масу. До явищ переносу відносяться: 1) внутрішнє тертя (виникнення сили в'язкості) – перенос імпульсу направленого руху молекул; 2) теплопровідність – перенос енергії теплового руху; 3) дифузія – перенос маси.

Розглянемо спочатку явище внутрішнього тертя. Сила внутрішнього тертя виникає тоді, коли швидкість U направленого руху шарів газу різна, тобто існує градієнт швидкості направленого руху. Механізм її виникнення в газах такий. Молекула одночасно

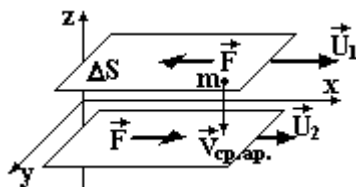


Рисунок 6.15

приймає участь у хаотичному русі з тепловою швидкістю $V_{\text{ср.ар.}}$ і в направленому русі із швидкістю U , характерною для кожного шару (рис.6.15). За рахунок хаотичного теплового руху молекула переходить із одного шару в інший і переносить в новий шар імпульс направленого

руху, характерний тому шару, де вона зазнала останнього зіткнення. При переході молекули в повільніший шар вона, при зіткненні з новими сусідніми молекулами, віддає їм частину свого імпульсу направлено руху, тим самим прискорюючи його. І навпаки, потрапляючи у більш швидкий шар, молекула забирає частину імпульсу направлено руху його молекул, тобто виникає гальмівна сила в'язкості.

Знайдемо величину цієї сили. Етюра швидкості направлено руху, тобто її зміна з координатою z , перпендикулярною до напрямку руху, зображена на рис.6.16. Виберемо площадку ΔS паралельну швидкості направлено руху. Порахуємо кількість молекул ΔN_1 і ΔN_2 , які переходять через цю площадку після останнього свого зіткнення. Очевидно, що останнє зіткнення молекула зазнає на відстані від площадки, не більшій ніж довжина

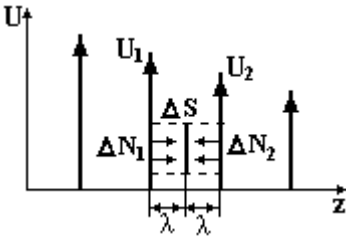


Рисунок 6.16

вільного пробігу λ , де швидкості направлено руху дорівнюють U_1 і U_2 . Через площадку перейде $1/6$ частина молекул (див. розд. 6.4), які знаходяться в циліндрі з площею основи ΔS і висотою λ

$$\Delta N_1 = \Delta N_2 = \Delta N = \frac{1}{6} n \cdot \lambda \cdot \Delta S. \quad (6.35)$$

Кожна молекула має відповідний імпульс направлено руху $m \cdot U_1$ і $m \cdot U_2$. Запишемо другий закон Ньютона в редакції імпульс сили дорівнює зміні імпульсу системи, врахувавши, що час переходу

молекул $\Delta t = \frac{\lambda}{v_{\text{ср.ар.}}}$ визначається тепловою швидкістю

$$F \cdot \Delta t = P_2 - P_1 \Rightarrow F \cdot \Delta t = \Delta N \cdot (mU_2 - mU_1)$$

$$F \cdot \frac{\lambda}{v_{\text{ср.ар.}}} = \frac{1}{6} n \cdot \lambda \cdot \Delta S \cdot (mU_2 - mU_1). \text{ Перепишемо цей вираз так}$$

$$F = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda \cdot \frac{U_2 - U_1}{2\lambda} \Delta S \quad . \quad \text{Тут} \quad \frac{U_2 - U_1}{2\lambda} = \frac{dU}{dz} \quad .$$

градієнт швидкості направленого руху, $n \cdot m = \rho$ - густина,

$$\text{коефіцієнт в'язкості} \quad \eta = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda = \frac{1}{3} \rho \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda .$$

(6.36)

Таким чином, сила в'язкості $F = \eta \frac{dU}{dz} \Delta S$. Одержана формула є не що інше, як формула Ньютона (5.1).

6.12 Теплопровідність газів

Явище теплопровідності полягає в перенесенні теплоти від холодних частин системи до більш гарячих. Отже необхідною умовою існування цього явища є наявність градієнта температури. Фізичний механізм теплопровідності заключається в перенесенні молекулами енергії теплового руху з областей, де температура вища, в області з меншою температурою. Переходи молекул зумовлені їх хаотичним тепловим рухом. Молекула, покидаючи шар, де вона зазнала останнього зіткнення, має теплову енергію, яка відповідає температурі цього шару. Потрапляючи в шар з іншою температурою, вона або віддає, або забирає в результаті зіткнення з новими сусідніми молекулами частину енергії теплового руху. Внаслідок цього навий шар нагрівається, якщо молекула потрапила в нього із більш гарячого шару, або охолоджується, якщо молекула перейшла із шару з меншою температурою. Ясно, що молекула несе теплову енергію, характерну температурі того шару, де вона зазнала останнього зіткнення.

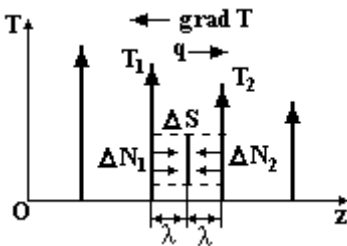


Рисунок 6.17

Знайдемо теплову потужність, яку переносять молекули. Залежність температури від координати показана на рис.6.17. Через площадку ΔS , перпендикулярну до градієнта температури переходить

$\Delta N = \Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{1}{6} n \cdot \lambda \cdot \Delta S$ молекул після останнього зіткнення

за час вільного пробігу $\Delta t = \frac{\lambda}{V_{\text{ср.ар.}}}$. Теплова енергія, що

відповідає шару, де молекула зазнала останнього зіткнення, дорівнює відповідно $E_1 = \frac{3}{2} k T_1$ і $E_2 = \frac{3}{2} k T_2$.

Таким чином, потік теплової потужності через площадку ΔS

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\frac{3}{2} k (T_2 - T_1) \cdot \Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{3} n m V_{\text{ср.ар.}} \lambda \frac{T_2 - T_1}{2\lambda} \cdot \frac{3}{2} \frac{k \cdot N_A}{m \cdot N_A} \Delta S.$$

Тут: $\frac{3}{2} \frac{k \cdot N_A}{m \cdot N_A} = \frac{3R}{2\mu} = c_v$ - питома теплоємність газу при сталому

тискові; $\frac{T_2 - T_1}{2\lambda} = -\frac{dT}{dz}$ - gradT - градієнт температури. Знак (-)

означає, що вектор градієнта направлений в сторону зростання температури, а потік теплової потужності q має протилежний напрямок. Отже одержуємо рівняння теплопровідності

$$q = -\frac{1}{3} n m V_{\text{ср.ар.}} \lambda c_v \frac{dT}{dz} \Delta S \Rightarrow q = -\chi \frac{dT}{dz} \Delta S. \quad (6.37)$$

$$\text{Коефіцієнт теплопровідності } \chi = \frac{1}{3} \rho \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda \cdot c_v. \quad (6.38)$$

6.13 Дифузія

Дифузія – це перехід молекул із місць з більшою концентрацією в місця з меншою концентрацією. Отже, необхідною умовою дифузії є наявність градієнта концентрації (густини). Молекули переходять за рахунок хаотичного теплового руху із шарів з більшою концентрацією молекул в шари з меншою концентрацією. При цьому вони

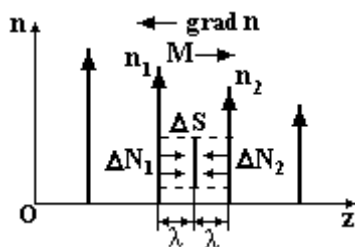


Рисунок 6.18

переносять власну масу. Знайдемо потік маси M , тобто масу, яка переноситься через площадку ΔS за одиницю часу (рис.6.18). Кількість молекул, які переходять через площадку ΔS після останнього зіткнення, тобто на відстані λ від площадки, зліва направо і навпаки дорівнюють:

$$\Delta N_1 = \frac{1}{6} n_1 \cdot \lambda \cdot \Delta S, \quad \Delta N_2 = \frac{1}{6} n_2 \cdot \lambda \cdot \Delta S.$$

Тоді за час Δt вільного пробігу перенос маси буде дорівнювати $\Delta m = m \cdot (\Delta N_2 - \Delta N_1)$. Потік маси

$$M = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{3} m \lambda V_{\text{ср.ар.}} \cdot \frac{n_2 - n_1}{2\lambda} \Delta S = -\frac{1}{3} V_{\text{ср.ар.}} \lambda \frac{d\rho}{dz} \Delta S = -D \frac{d\rho}{dz} \Delta S \quad (6.39)$$

Рівняння (6.35) називається рівнянням дифузії, або першим законом Фіка. Коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3} V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda$. (6.40)

6.14 Зв'язок між коефіцієнтами переносу. Властивість газу при низькому тиску

Запишемо коефіцієнти переносу:

$$\text{коефіцієнт в'язкості (6.36)} \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda,$$

$$\text{коефіцієнт теплопровідності (6.38)} \quad \chi = \frac{1}{3} \rho \cdot V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda \cdot c_v,$$

$$\text{коефіцієнт дифузії (6.40)} \quad D = \frac{1}{3} V_{\text{ср.ар.}} \cdot \lambda.$$

Ці коефіцієнти зв'язані між собою очевидним співвідношенням

$$\chi = \eta \cdot c_v = D \cdot \rho \cdot c_v. \quad (6.41)$$

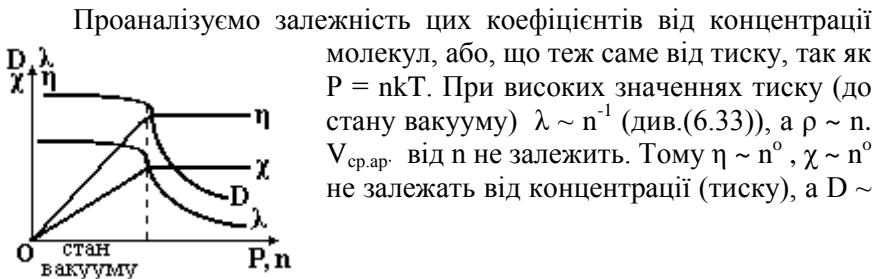


Рисунок 6.19

$\lambda \sim n^{-1}$ (рис. 6.19). В стані вакууму $\lambda \sim n^0$ не залежить від концентрації (див. розділ 6.10). Тому $\eta \sim n$, $\chi \sim n$ пропорційні концентрації, а $D \sim n^0$ не залежить від неї. Зменшення коефіцієнта теплопровідності газу в стані вакууму використовується при створенні тепло ізольованих

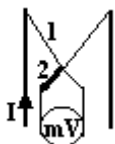


Рисунок 6.130

посудин – термосів, посудин Дюара (термоси для зберігання зріджених газів), а також в манометричних перетворювачах Пірані (рис.6.20), які використовуються для вимірювання тиску газу. Платинова нитка 1 нагрівається електричним струмом, а її температура вимірюється термопарою 2. При зміні тиску змінюється теплопровідність газу і температура нитки. По термоелектрорушійній силі термопари (mV) вимірюють тиск газу.

6.15 Внутрішня енергія системи. Кількість теплоти. Перше начало термодинаміки

Внутрішня енергія – це сума кінетичної енергії атомів і молекул, потенціальної енергії їх взаємодії, атомна, ядерна енергія і т.д. за винятком кінетичної і потенціальної енергії системи як цілого. Внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що певному стану системи відповідає єдине значення внутрішньої енергії незалежно від того, як вона потрапила в цей стан. Внутрішню енергію можна змінити трьома процесами:

- за рахунок виконання системою чи над нею роботи. Наприклад, при стискуванні газу в циліндрі від рухомого поршня молекули будуть відбиватись з швидкістю більшою на подвоєну швидкість поршня, ніж падають (див. розділ 4.8). А це означає збільшення кінетичної енергії хаотичного руху молекул, тобто внутрішньої енергії газу, при виконанні над ним роботи по його стисканню. Аналогічно при розширенні газу, тобто при виконанні ним роботи, молекули будуть відбиватись від поршні з меншою швидкістю, ніж падати. Отже, якщо система виконує роботу, її внутрішня енергія зменшується. Якщо над системою виконується робота, її внутрішня енергія зростає;
- за рахунок теплообміну, тобто передачі або відбиранні теплової енергії без виконання механічної роботи. Цю енергію називають

теплотою. Якщо тепло передається системі, її внутрішня енергія зростає, якщо ж забирається – зменшується;

в) за рахунок зміни кількості частинок системи. Цей процес поки що розглядати не будемо, тобто будемо вивчати системи незмінної кількості частинок.

Таким чином механічна робота і теплота являються мірою зміни внутрішньої енергії. Тому ці три фізичні величини мають однакову розмірність – джоуль (Дж). Є і позасистемна одиниця теплоти являється – калорія. Це кількість теплоти, необхідна для нагрівання 1 г води від 19,5°C до 20,5°C. Еквівалентність теплоти і роботи експериментально встановив Джоуль по нагріванню ртуті при її перемішуванні лопатками, які приводились в рух падаючою гирею. Він встановив механічний еквівалент теплоти $1 \text{ кал} = 4,19 \text{ Дж}$.

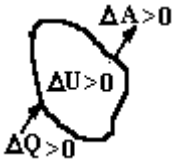


Рисунок 6.21

Таким чином із врахуванням знаків роботи, кількості теплоти і зміни внутрішньої енергії (рис.6.21), можна сформулювати закон збереження енергії (**перше начало термодинаміки**):

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A \quad (6.42)$$

Тепло ΔQ , передане системі, іде на зміну ΔU її внутрішньої енергії і на виконання системою роботи ΔA .

6.16 Степені вільності молекул. Розподіл енергії по степеням вільності. Внутрішня енергія ідеального газу

Числом степеней вільності називається мінімальна кількість незалежних величин, якими можна однозначно задати положення системи у просторі.

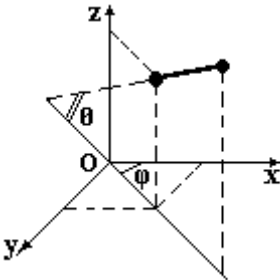


Рисунок 6.22

Для матеріальної точки (молекула одноатомного газу) у просторі достатньо задати три координати x, y, z . Ці координатні степені вільності називаються поступальними. Для двоатомної жорсткої молекули можна задати 6 координат її атомів. Але вимога мінімальності приводить до того, що положення такої молекули задають трьома координатами одного із атомів і два кути (рис.6.22): меридіальний θ і

азимутальний φ . Ці кутові степені вільності називаються обертальними. Всього одержали

$n = n_{\text{пост.}} + n_{\text{об.}} = 3 + 2 = 5$, а не 6 поступальних. Для двохатомної нежорсткої молекули, тобто коли відстань між атомами може змінюватись, що має місце при досить високих температурах, тобто атоми коливаються, потрібно задати ще одну ступінь вільності – відстань між атомами в молекулі. Ця ступінь вільності називається коливальною. Одержуємо

$$n = n_{\text{пост.}} + n_{\text{об.}} + n_{\text{кол.}} = 3 + 2 + 1 = 6.$$

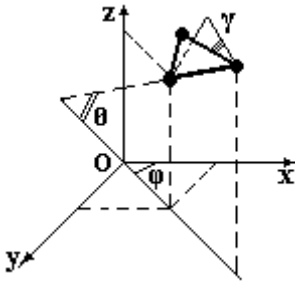


Рисунок 6.214

Для трьохатомної жорсткої молекули необхідно задати, як і для двохатомної жорсткої молекули, три координати одного атома і три кути (рис.6.23). Третій кут γ задає орієнтацію площини молекули. Одержуємо

$$n = n_{\text{пост.}} + n_{\text{об.}} = 3 + 3 = 6.$$

У випадку нежорсткої трьохатомної молекули необхідно задати ще 3 відстані між атомами – 3 коливальні степені вільності. Всього буде 9. Із збільшенням кількості атомів буде зростати кількість коливальних степенів вільності, а поступальних і обертальних буде по 3. Таким чином, система із N частинок має

$$n = 3_{\text{пост.}} + 3_{\text{об.}} + (3N - 6)_{\text{кол.}} = 3N \text{ степеней вільності.}$$

Теплова енергія по степеням вільності розподіляється рівномірно, тобто на кожен поступальну і обертальну ступінь

припадає енергія $\frac{1}{2}kT$, а на коливальну kT ($\frac{1}{2}kT$ на кінетичну

енергію коливань атомів в молекулі, $\frac{1}{2}kT$ на потенціальну енергію їх

взаємодії). Кількість половинок kT теплової енергії молекули позначимо буквою i . Тоді

$$i = n_{\text{пост.}} + n_{\text{об.}} + 2n_{\text{кол.}}. \quad (6.43)$$

Досить часто мають справу з невисокими температурами, коли коливальні степені ще не збуджуються. Тоді число i дорівнює числу n кількості степеней вільності. Тому досить часто число i називають кількістю степеней вільності.

Середня теплова енергія молекули, яку розглядають не як матеріальну точку, включає не тільки поступальну енергію, а і обертальну та коливальну. Тому

$$\bar{E} = \frac{i}{2} kT. \quad (6.44)$$

Внутрішня енергія ідеального газу складається тільки із теплової енергії молекул, потенціальна енергія дорівнює нулю, так як молекули не взаємодіють між собою. Отже,

$$U = N \cdot \bar{E} = \frac{m}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT, \quad (6.45)$$

де: N_A – число Авогадро, m – маса газу, μ – молярна маса, k – стала Больцмана, R – газова стала, T – абсолютна температура.

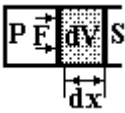
Вираз (6.45) показує, що внутрішня енергія даної кількості газу залежить тільки від температури.

6.17 Робота газу в ізопроцесах

Нехай газ, який знаходиться в циліндрі під поршнем площею S , розширюючись, переміщує його на відстань dx (рис.6.24). Тиск газу P . За означенням елементарна механічна робота дорівнює

$$dA = F \cdot dx = P \cdot S \cdot dx = P \cdot dV, \quad (6.46)$$

Рисунок 6.24



а загальна робота
$$A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV. \quad (6.47)$$

Графічно в координатах P - V робота газу дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена графіком процесу, віссю об'єму V і лініями $V_1 = \text{const}$, $V_2 = \text{const}$ (рис.6.25). Знайдемо роботу газу в різних ізопроцесах:

Ізохорний. Так як $V = \text{const}$, $dV = 0$. Тому $dA_V = 0$ і

$$A_V = 0 \quad (6.48)$$

Ізобарний. $P = \text{const}$. Взявши до уваги рівняння (6.6) Клапейрона-Менделєєва, одержуємо

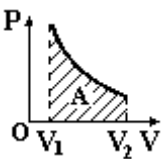


Рисунок 6.25

$$A_P = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P \int_{V_1}^{V_2} dV = PV_2 - PV_1 = P\Delta V = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) \quad (6.49)$$

Ізотермічний. $T = \text{const.}$

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (6.50)$$

6.18 Молекулярно-кінетична теорія теплосмності газів

Питомою теплосмністю називається кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання на 1 градус 1 кг речовини

$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]. \quad (6.51)$$

Молярною теплосмністю називається кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання на 1 градус 1 моля речовини

$$C = \frac{\Delta Q}{\frac{m}{\mu} \cdot \Delta T} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]. \quad (6.52)$$

Ці теплосмності зв'язані між собою співвідношенням $C = c \cdot \mu$.

Розглянемо два режими нагрівання газу: ізохорний і ізобарний.

Ізохорне нагрівання. Враховуючи (6.42), (6.45) і (6.48) кількість теплоти, необхідна для нагрівання $\frac{m}{\mu}$ молей газу на ΔT градусів

$$\text{дорівнює } \Delta Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T. \quad \text{Підставляємо в (6.52).}$$

Одержуємо

$$C_V = \frac{\frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T}{\frac{m}{\mu} \cdot \Delta T} = \frac{i}{2} R \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]. \quad (6.53)$$

Ізобарне нагрівання. Враховуючи (6.42), (6.45) і (6.49) кількість теплоти, необхідна для нагрівання $\frac{m}{\mu}$ молей газу на ΔT градусів дорівнює

$$\Delta Q = \Delta U + P \cdot \Delta V = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T + \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \Delta T = \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \Delta T.$$

Підставляємо в (6.52). Одержуємо

$$C_P = \frac{\frac{m}{\mu} \cdot \frac{i+2}{2} R \cdot \Delta T}{\frac{m}{\mu} \cdot \Delta T} = \frac{i+2}{2} R \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]. \quad (6.54)$$

Бачимо, що $C_P = C_V + R$. (6.55)

Це співвідношення Майєра. Теплоємність $C_P > C_V$ тому, що при ізобарному процесі підведене тепло іде не тільки на зміну внутрішньої енергії (як при ізохорному процесі), а і на виконання роботи. Ясно, що в цьому випадку потрібно підвести більше теплоти.

Характерним для кожного газу є відношення теплоємностей

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (6.56)$$

Одержані вирази для теплоємностей газу показують, що вони не залежать від температури. Але експеримент дає ступінчасту залежність (рис.6.26) для газів багатоатомних молекул. Таку залежність неможливо пояснити в рамках класичної фізики. Вона пояснюється в рамках квантових уявлень, а саме дискретним характером зміни фізичних величин, в нашому випадку обертальної та коливальної енергії молекул. При низьких температурах теплової енергії не вистачає для збудження обертального руху молекул і коливального руху атомів

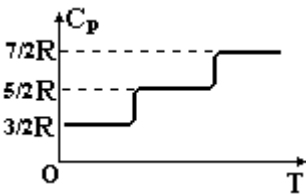


Рисунок 6.26

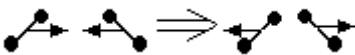


Рисунок 6.27

молекул. При низьких температурах теплової енергії не вистачає для збудження обертального руху молекул і коливального руху атомів

в них. Тобто, обертальні і коливальні степені вільності не збуджуються. Вони послідовно починають збуджуватись при підвищенні температури. Наприклад, двохатомні молекули при зіткненні, як показано на рис.6.27, не приходять в обертальний рух. В той час як по класичним уявлення при такому зіткненні молекули повинні прийти в обертання. Отже, залежність (рис.6.26) зумовлена ступінчатою зміною кількості степеней вільності (числа i).

6.19 Адіабатний процес

Адіабатним називається процес, який протікає без обміну теплою з оточуючим середовищем, тобто в теплоізолюваній системі.

Перше начало термодинаміки (6.38) набуває виду

$$0 = \Delta U + \Delta A \Rightarrow \Delta A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_v \cdot \Delta T, \quad (6.57)$$

тобто робота при в теплоізолюваній системі може бути виконана за рахунок зменшення, що показує знак (-) мінус, внутрішньої енергії. Отже, робота газу при адіабатному процесі

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_v \cdot (T_1 - T_2). \quad (6.58)$$

Знайдемо зв'язок між тиском P , об'ємом V і температурою T при адіабатному процесі. Для нескінченно малих змін

$$dU + dA = 0; \quad dU = \frac{m}{\mu} C_v \cdot dT; \quad dA = P \cdot dV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}.$$

Одержуємо диференціальне рівняння $\frac{m}{\mu} C_v \cdot dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = 0$.

Інтегруємо його $\int \frac{m}{\mu} C_v \frac{dT}{T} + \int \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = 0$. Одержуємо

$$C_v \ln T + R \ln V = \text{const}_1 \Rightarrow \frac{i}{2} \ln T + \ln V = \frac{\text{const}_1}{R} = \text{const}_2 \Rightarrow$$

$$T^{\frac{i}{2}} \cdot V = \text{const}_2.$$

Із (6.56) виразимо i через γ $i + 2 = i\gamma \Rightarrow i = \frac{2}{\gamma - 1}$.

Отже, $T^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V = \text{const}_2$, або $TV^{\gamma-1} = \text{const}_2^{\gamma-1} = \text{const}$. (6.59)

Одержали рівняння адіабатичного процесу, яке зв'язує температуру і об'єм. Можна знайти зв'язок між тиском і об'ємом, а також між температурою і тиском, послідовно виключаючи відповідний параметр за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва (6.6). Одержуємо

$$P \cdot V^\gamma = \text{const}, \quad (6.60)$$

$$T \cdot P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}. \quad (6.61)$$

Графік адіабатного процесу в координатах $P - V$ має вид (рис.6.28) гіперболи більш крутої, ніж ізотерма (див. рис.6.2). Дійсно, перша похідна тиску від об'єму для ізотерми менша, ніж для адіабати

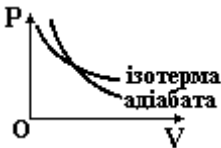


Рисунок 6.28

$$\left(\frac{dP}{dV} \right)_T = -\frac{P}{V}, \quad \left(\frac{dP}{dV} \right)_Q = -\gamma \frac{P}{V}. \quad \text{Так як } \gamma > 1,$$

$$\left| \left(\frac{dP}{dV} \right)_T \right| < \left| \left(\frac{dP}{dV} \right)_Q \right|, \quad \text{отже адіабата іде крутіше}$$

ізотерми.

6.20 Оборотні і необоротні процеси. Цикли

Процес - це перехід системи із одного стану в інший. Є рівноважні і нерівноважні, оборотні і необоротні процеси.

При **рівноважному** процесі зміни параметрів системи (тиску, температури і т.ін.) встигають за змінами зовнішніх умов. Це означає,

що в момент припинення зміни зовнішніх умов зміна параметрів системи теж відразу припиняється. Це нескінченно повільні процеси.

При **нерівноважному** процесі після стабілізації зовнішніх умов параметри системи ще деякий час продовжують змінюватись. Це швидко текучі процеси. Наприклад, при швидкому стискуванні газу поршнем поблизу нього температура газу вища (молекули відбиваються від нього з більшою швидкістю на подвоєну швидкість поршня, ніж падають (див. наслідок у розділі 4.8), ніж в об'ємі. Тому після зупинки поршня температура продовжує змінюватись (вирівнюватись).

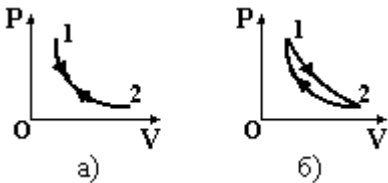


Рисунок 6.29

Оборотний – це такий процес, який можна провести в зворотному напрямку через ту ж саму сукупність станів системи, що і в прямому (рис.6.29,а). Якщо ж цього здійснити неможливо, процес називається **необоротним** (рис.6.29,б). Наприклад, при швидкому стискуванні газу, коли його температура поблизу поршня більша, ніж в об'ємі, зворотній процес розширення газу, із температурою поблизу поршня вищою, ніж в об'ємі, неможливий. Дійсно, в цьому випадку молекула буде мати швидкість відбивання меншу на подвоєну швидкість поршня (див. наслідок у розділі 4.8), ніж швидкість падіння на нього. А це означає меншу температуру газу поблизу поршня, ніж в об'ємі. А це вже інший шлях зворотного процесу ніж прямого.

Цикл – це замкнутий процес, тобто коли система після ряду змін повертається в свій початковий стан. Якщо всі процеси циклу оборотні, цикл теж оборотний. Якщо ж хоч один процес циклу необоротний, цикл теж необоротний.

Робота газу за цикл чисельно дорівнює площі, обмеженій циклом в координатах P-V.

6.21 Принцип дії теплової і холодильної машин та їх коефіцієнт корисної дії (ККД). Холодильний коефіцієнт. Друге начало термодинаміки

Теплова машина уявляє собою пристрій, який багатократно здійснює деякий цикл, результатом якого є перетворення теплової

енергії в механічну роботу. Причому ця робота повинна бути позитивною. Тоді її можна використати і машина буде корисною.

Всяка теплова машина складається із трьох невід'ємних частин (рис.6.30): 1) нагрівника з температурою T_1 , як джерела теплової енергії; 2) робочого тіла, як носія енергії і посередника між тепловою і механічною енергіями; 3) холодильника.

Необхідність перших двох частин не викликає сумніву, а третьою, холодильника, потребує обґрунтування.

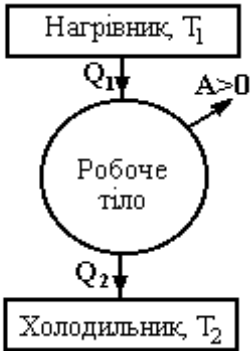


Рисунок 6.30

Доведемо необхідність холодильника, тобто необхідність викидання певної кількості теплоти в холодильник, як правило оточуюче середовище. При розширенні газу він виконує певну позитивну роботу. Щоб машина працювала відносно довго, робоче тіло необхідно повернути в початковий стан, затративши на це меншу роботу. Тільки тоді $A > 0$ і машина буде корисною. Отже зворотний процес стискування робочого тіла, якщо його відображати в координатах $P - V$, повинен пройти нижче, ніж прямий (рис.6.29,б), а значить при нижчій, ніж

прямий, температурі (див. рис.6.2). При стискуванні газ нагрівається. Щоб знизити його температуру, необхідно відбирати частину тепла і викидати в холодильник.

Таким чином, ми впевнились, що неможлива теплова машина, яка б повністю перетворювала всю теплоту в роботу. Така машина називається вічним двигуном другого роду і він нгеможливий. В цьому полягає суть другого начала термодинаміки.

Слід зауважити, що процес, при якому все тепло перетворюється в роботу ϵ – це ізотермічний процес. Але ж для роботи теплової машини необхідно проводити замкнутий процес, тобто цикл.

Знайдемо вираз для коефіцієнта корисної дії (ККД) (η) теплової машини. Зс законом збереження енергії робота

$$A = Q_1 - Q_2, \quad (6.62)$$

а затрачена енергія дорівнює Q_1 . За означенням ККД – це відношення корисної роботи до затраченої енергії

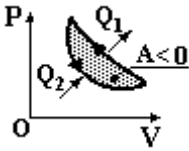


Рисунок 6.31

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1. \quad (6.63)$$

Звернемо увагу, що ККД завжди менший одиниці.

Холодильна машина, це пристрій, призначенням якого є відбирання тепла від холодного тіла і передача його більш гарячому, тобто охолодження холоднішого тіла. Ця машина працює по оберненому циклу теплової машини (рис.6.31). Корисним результатом роботи холодильної машини є відібране тепло Q_2 , на що витрачається робота $A = Q_1 - Q_2$. Ефективність роботи холодильної машини характеризує відношення забраної кількості теплоти Q_2 до роботи A , тобто холодильний коефіцієнт

$$\eta_x = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (6.64)$$

Звернемо увагу, що холодильний коефіцієнт $\eta_x \neq \eta$. Він може приймати будь-яке значення, як менше так і більше одиниці. Чим більший холодильний коефіцієнт, тим ефективніша холодильна машина. Але ККД циклу холодильної машини знаходиться за виразом (6.63), як і теплової машини.

6.22 Ідеальна тепла машина Карно та її ККД

У 1824 році французький інженер С.Карно (1796-1832) запропонував цикл теплової машини, який складається із двох ізотерм $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$, та двох адіабат $2 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1$ (рис.6.32). Для знаходження ККД запишемо перше начало термодинаміки для усіх чотирьох процесів:

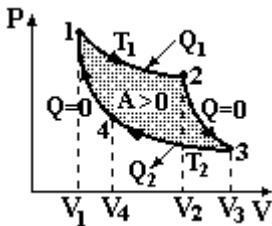


Рисунок 6.32

$$1 \rightarrow 2 \quad Q_1 = A_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$2 \rightarrow 3 \quad A_{2 \rightarrow 3} = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2);$$

$$3 \rightarrow 4 \quad -Q_2 = A_{3 \rightarrow 4} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3};$$

$$4 \rightarrow 1 \quad A_{4 \rightarrow 1} = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1).$$

Склавши всі рівняння, знайдемо роботу за цикл та його ККД

$$A = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3} + A_{3 \rightarrow 4} + A_{4 \rightarrow 1} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 + \frac{T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (6.65)$$

Запишемо рівняння адіабат (див.6.59)

$$2 \rightarrow 3 \quad T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$1 \rightarrow 4 \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Поділимо ці рівняння одне на друге і спростимо. Одержуємо

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \text{ Отже, } \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{V_3}{V_4}, \text{ або } \ln \frac{V_2}{V_1} = -\ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Тоді формула (6.65) для ККД ідеальної машини Карно набуде виду

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.66)$$

6.23 Поняття про ентропію. Властивості ентропії

Вище були одержані вирази для ККД реальної (6.64) і ідеальної (6.66) теплових машин. Ясно, що ККД реальної машини не більший, ніж ідеальної, тобто маємо нерівність

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}, \text{ або } -\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}, \text{ або } \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (6.67)$$

Відношення кількості теплоти Q до абсолютної температури T джерела теплоти називається **приведеною кількістю теплоти**.

Враховуючи, що тепло Q_2 віддається, тобто $Q_2 < 0$, в лівій частині нерівності (6.67) стоїть алгебраїчна сума приведених кількостей теплот циклу, яка, як видно із (6.67), не може бути позитивною. Вираз (6.67) можна переписати в інтегральній формі

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \quad (6.68)$$

Це співвідношення називається нерівністю Клаузіуса і являється математичним записом другого начала термодинаміки.

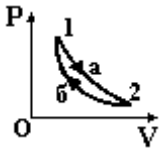


Рисунок 6.33

Розглянемо деякий оборотний цикл (рис.6.33), який складається із двох процесів: $1a2$ і 261 . Для оборотного циклу у виразі (6.68) буде знак рівності. Одержимо

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{1a}^{2a} \frac{dQ}{T} + \int_{26}^{16} \frac{dQ}{T} = \int_{1a}^{2a} \frac{dQ}{T} - \int_{16}^{26} \frac{dQ}{T} = 0. \quad (6.69)$$

Тут враховано оборотність процесу 261 , тобто $\int_{26}^{16} \frac{dQ}{T} = - \int_{16}^{26} \frac{dQ}{T}$.

Рівняння (6.69) показує, що приведена кількість теплоти, одержана системою, не залежить від шляху переходу, а визначається тільки параметрами початкового (1) і кінцевого (2) станів. Цей факт дає можливість ввести певну функцію стану системи, ентропію S , зміна якої

дорівнює алгебраїчній сумі приведених кількостей теплот, тобто

$$\int_{1a}^{2a} \frac{dQ}{T} = \int_{16}^{26} \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1 = \Delta S. \quad (6.70)$$

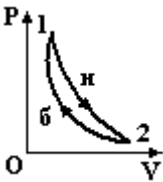


Рисунок 6.34

Якщо в циклі є необоротний процес $1n2$ (рис.6.34), із (6.68) маємо

$$\int_{1n}^{2n} \frac{dQ}{T} + \int_{26}^{16} \frac{dQ}{T} < 0.$$

Так як для оборотного процесу (261)

$$\int_{16}^{26} \frac{dQ}{T} = S_1 - S_2, \text{ одержуємо } S_2 - S_1 > \int_{1n}^{2n} \frac{dQ}{T}, \text{ або в}$$

загальному випадку

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (6.71)$$

Знак (=) береться для оборотного процесу, а знак (>) для необоротного. Для нескінченно малих величин для зміни ентропії маємо

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \left[\frac{Дж}{К} \right]. \quad (6.72)$$

Розглянемо властивості ентропії та який її фізичний зміст.

- Ентропія функція стану системи;
- Ентропія величина адитивна. Це означає, що зміна ентропії системи дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропії частин системи. Або загальна зміна ентропії в якомусь складному процесі дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропії в простих процесах, із яких складається даний процес.
- Для теплоізолюваної системи, тобто при адіабатних процесах, коли $dQ = 0$, із (6.68) випливає, що $dS \geq 0$. Ентропія ізолюваних систем не може зменшуватись, тобто процеси в таких системах ідуть тільки в напрямку збільшення ентропії. Це дає можливість теоретично прогнозувати протікання різних процесів. Якщо ентропія кінцевого стану більша, ніж початкового, процес може іти без зовнішнього втручання, наприклад, перехід тепла від гарячих до холодних частин системи. Не слід вважати, що ентропія взагалі не може зменшитись. Може, але для цього необхідно виконати певну роботу, тобто система вже буде незамкнутою.
- Нульовий рівень ентропії задається **теоремою Нернста** (німецький фізик і хімік), який у 1906 р встановив закон, який називають третім началом термодинаміки

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (6.73)$$

Ентропія системи при зменшенні її абсолютної температури до нуля теж зменшується до нуля.

- З'ясуємо фізичний зміст ентропії. З першого начала термодинаміки $dQ = dU + dA \Rightarrow dA = dQ - dU$. Нехай маємо ізотермічний оборотний процес. Тоді $dQ = T \cdot dS = d(TS)$, робота

$$dA = d(TS) - dU = d(TS - U) = -d(U - TS) = -dF. \quad (6.74)$$

Тут $F = U - TS$ називається вільною енергією – це та частина внутрішньої енергії, за рахунок зменшення якої (знак мінус в 6.74) система може виконати роботу. Тоді добуток TS дає ту частину внутрішньої енергії, яка не може перетворитись в роботу, тобто зв'язану енергію. Дійсно, якби в роботу можна було перетворити всю внутрішню енергію, це означало б зникнення системи.

6.24 Зміна ентропії ідеального газу. Ізоентропійний (адіабатний) процес

Враховуючи співвідношення (6.71), (6.42), (6.45), (6.53), (6.46) і (6.6), одержуємо зміну ентропії ідеального газу

$$\begin{aligned} \Delta S = S_2 - S_1 &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T} = \int_1^2 \frac{\frac{m}{\mu} C_v \cdot dT}{T} + \int_1^2 \frac{\frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V} \cdot dV}{T} \\ \Delta S = S_2 - S_1 &= \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Знайдемо зміну ентропії при адіабатному процесі. Для цього в (6.75) відношення температур заміняємо із рівняння адіабати (6.59) Відношенням об'ємів

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}. \text{ Одержуємо}$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R \left[\frac{i}{2} (\gamma - 1) \ln \frac{V_1}{V_2} - \ln \frac{V_1}{V_2} \right]. \quad (6.76)$$

$\frac{i}{2} (\gamma - 1) = \frac{i}{2} \left(\frac{i+2}{i} - 1 \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{i+2-i}{i} \right) = 1.$ Тому у (6.76) вираз у квадратній дужці дорівнює нулю.

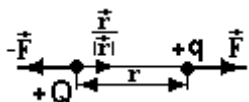
Отже, $\Delta S = 0$. А це означає, що ентропія при адіабатному процесі не змінюється (залишається сталою). Тому адіабатний процес називається ще **ізоентропійним**.

7 ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

7.1 Поняття про заряд. Закон збереження заряду. Взаємодія зарядів. Закон Кулона. Силі характеристики поля

Дослідами по взаємодії тіл встановлено, що деякі тіла взаємодіють з силами, набагато більшими (приблизно в 10^{39} разів), ніж сила гравітаційної взаємодії. Таким тілам приписали властивість мати заряд. Всі заряди умовно поділені на позитивні і негативні у відповідності з двозначним характером їх взаємодії: однойменні заряди відштовхуються, різнойменні притягуються. Сучасній науці відомо, що носіями заряду являються електрони та іони. Елементарним (найменшим) зарядом є заряд електрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Кл (кулон) це одиниця заряду в системі одиниць СІ. У всіх електричних явищах має місце **закон збереження заряду** - алгебраїчна сума зарядів замкнутої (ізолюваної) системи не змінюється.

В основі електростатики, тобто вчення про взаємодію нерухомих зарядів, лежить **закон Кулона** (1785р.) для точкових зарядів:



$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (7.1)$$

Сила \vec{F} , з якою взаємодіють два точкових заряди Q і q прямо пропорційна добуткові цих зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані r між ними і направлена по лінії, що з'єднує ці заряди

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ - діелектрична стала, яка не має фізичного змісту,

а введена для узгодження одиниць вимірювання в системі СІ; ϵ - відносна діелектрична проникність середовища, яка показує у скільки разів сила взаємодії у вакуумі F_0 більша, ніж сила взаємодії F у даному середовищі. Для повітря і вакууму $\epsilon = 1$.

По сучасним поглядам, взаємодія зарядів відбувається через одну із форм матерії – електричне поле. Кожний заряд утворює у навколишньому середовищі електричне поле, яке і діє на внесений у нього інший заряд.

Силовою характеристикою електростатичного поля є **напруженість**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \right] \quad (7.2)$$

Ця векторна величина дорівнює силі, яка діє з боку поля на одиничний позитивний пробний заряд. Напруженість поля, створеного точковим зарядом Q дорівнює

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (7.3)$$

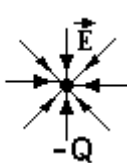
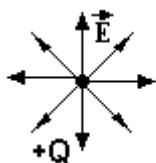


Рисунок 7.1

Вектор \vec{E} направлений по радіальним лініям від заряду Q , якщо він позитивний, і до нього, якщо він негативний. Вектор

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (7.4)$$

називається вектором **індукції** електростатичного поля. Це теж силова, векторна характеристика поля, але на відміну від напруженості, вона не залежить від властивостей середовища. Дійсно, для точкового заряду, враховуючи (7.3), маємо

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (7.5)$$

Діелектричні властивості середовища (ϵ і ϵ_0) в цій формулі відсутні.

Графічно електростатичне поле зображається **силовими лініями**. Це лінії, дотична до яких в кожній точці співпадає з вектором напруженості \vec{E} (індукції \vec{D}) (рис.6.2). Силкові лінії починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах.

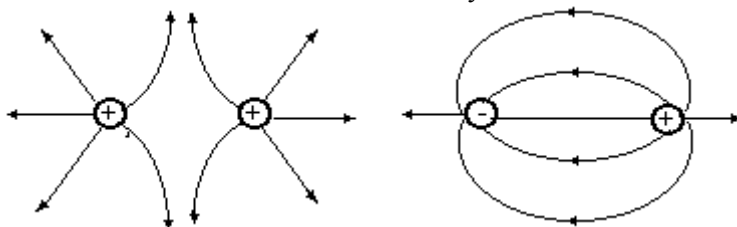


Рисунок 7.2

Вони не перетинаються, так як вектори напруженості і індукції однозначні. У точці ж перетину напрямок цих векторів не визначений.

По густині силових ліній можна судити про величину \vec{E} , або \vec{D} . Вони більші там, де густина ліній більша.

7.2 Принцип суперпозиції та його застосування до розрахунку електростатичного поля

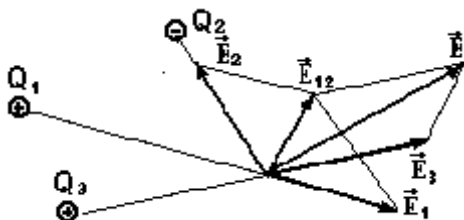


Рисунок 7.3

Якщо поле утворене декількома зарядами, то вектор напруженості результуючого поля знаходиться за **принципом суперпозиції**, як векторна сума напруженостей, утворених в даній точці кожним зарядом незалежно від інших зарядів (рис.7.3).

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \dots + \vec{D}_n = \sum_{i=1}^n \vec{D}_i. \quad (7.6)$$

Ступінь зарядженості тіл, які не можна вважати точковими, характеризуються такими величинами:

лінійна густина заряду – заряд одиниці довжини

$$\tau = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right]; \quad (7.7)$$

поверхнева густина заряду – заряд одиниці площі

$$\sigma = \frac{q}{s} = \frac{dq}{dV}, \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]; \quad (7.8)$$

об'ємна густина заряду – заряд одиниці об'єму

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV}, \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right]. \quad (7.9)$$

Характеристики полів, утворених неточковими зарядами, напруженість розраховується також за принципом суперпозиції, але формули (7.6) переходить у відповідні інтеграли (криволінійний, поверхневий чи об'ємний), наприклад, для напруженостей

$$\vec{E} = \int_{\ell} d\vec{E}, \quad \vec{E} = \iint_S d\vec{E}, \quad \vec{E} = \iiint_V d\vec{E}, \quad (7.10)$$

де $d\vec{E}$ - напруженість поля, створеного нескінченно малим елементом тіла $d\ell$, dS чи dV .

Розглянемо декілька прикладів застосування принципу суперпозиції для розрахунку поля заряджених тіл.

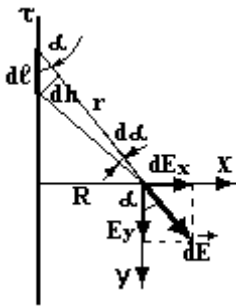


Рисунок 7.4

Приклад 1. Розрахувати напруженість поля нескінченної зарядженої осі в точці, яка знаходиться на відстані R від неї. Лінійна густина заряду осі дорівнює τ (рис.7.4).

Нескінченно малий елемент $d\ell$ (точковий заряд) створює напруженість

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad \text{Заряд цього елемента}$$

дорівнює

$$dq = \tau \cdot d\ell = \tau \frac{dh}{\sin \alpha} = \tau \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \tau \frac{R \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Відстань $r = \frac{R}{\sin \alpha}$. Одержуємо $dE = \frac{\tau \cdot R \cdot d\alpha \cdot \sin^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\tau \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}$.

Знаходимо проєкції цього вектора на осі координат: $dE_x = dE \cdot \sin \alpha$, $dE_y = dE \cdot \cos \alpha$. Інтегрування по всій осі зводиться до інтегрування по куту α в межах від 0 до π .

$$E_x = \int_0^\pi \frac{\tau \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon R}. \quad (7.11)$$

$$E_y = \int_0^{\pi} \frac{\tau \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \sin \alpha \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Так як $E_y = 0$, результуючий вектор напруженості $E = E_x \mathbf{i}$ і направлений вздовж осі ox , тобто перпендикулярно до зарядженої осі.

Приклад 2. Розрахувати напруженість поля нескінченної зарядженої площини з поверхневою густиною заряду σ (рис.7.5).

Положення нескінченно малого елемента dS , заряд якого $dq = \sigma \cdot dS$, задамо полярними координатами ρ і α (рис.7.5). У цих координатах $dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha$. Знайдемо напруженість dE_z , яка перпендикулярна до площини.

$$dE_z = dE \cdot \cos\varphi = dE \frac{h}{r} = \frac{\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{h}{r^3} = \frac{\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{h}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

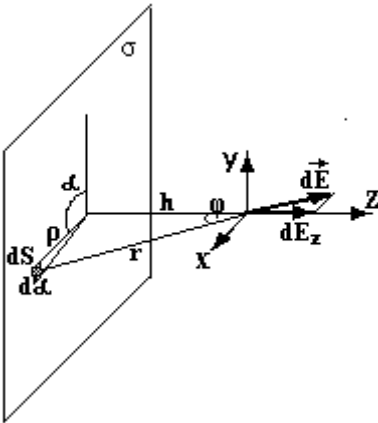


Рисунок 7.5

Щоб охопити всю площину, кут α повинен змінюватись від 0 до 2π , а радіус ρ – від 0 до ∞ . Беремо подвійний інтеграл в цих межах

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{\rho \cdot d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{d(\rho^2 + h^2)}{2(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{\sigma h}{2\epsilon_0\epsilon} (\rho^2 + h^2)^{-1/2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \end{aligned}$$

Проекція вектора напруженості на площину, перпендикулярну до осі OZ дорівнює нулю. В цьому можна

впевнитись математично, замінивши $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$, а можна і такими міркуваннями: на нескінченній площині завжди можна знайти елемент dS_2 , симетричний dS_1 відносно перпендикуляра h до площини (рис.7.6). Ці елементи створюють однакові вектори напруженості dE_1 і dE_2 , z -ві проекції яких співпадають, а перпендикулярні проекції взаємно

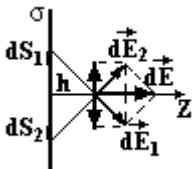


Рисунок 7.6

протилежні і тому компенсують одна одну. Отже вектор напруженості поля нескінченної зарядженої площини

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \quad (7.12)$$

перпендикулярний до неї і не залежить від положення точки, тобто однакове в усіх точках простору. Такі поля називаються **однорідними**.

7.3 Теорема Остроградського-Гауса та її застосування до розрахунку електростатичного поля заряджених тіл

Для спрощення розрахунку полів симетричних заряджених тіл застосовується теорема **Остроградського – Гауса**. Введемо поняття

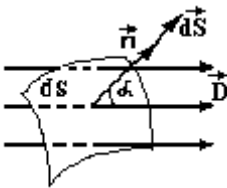


Рисунок 7.7

потoku вектора. **Потоком $d\Phi$ вектора \vec{D}** через елементарну площадку dS називається добуток вектора \vec{D} на величину площадки dS і на косинус кута α між вектором \vec{D} і нормальним до площадки dS одиничним вектором \vec{n} (рис.7.7).

$$d\Phi = D \cdot dS \cdot \cos \alpha = \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (7.14)$$

Площадку dS прийнято вважати вектором, який за напрямком співпадає з вектором \vec{n} . Потік через всю поверхню знаходиться шляхом інтегрування по поверхні S



Рисунок 7.8

$$\Phi = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n}. \quad (7.15)$$

Теорема **Остроградського – Гауса** стверджує, що потік вектора електростатичної індукції через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, охоплених цією поверхнею.

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = \sum_V q_i. \quad (7.16)$$

Якщо заряд, наприклад, q_1 знаходиться за межами замкнутої поверхні (рис.7.8), потік дорівнює нулю. Дійсно, скільки силових ліній входить в об'єм, обмежений поверхнею, стільки ж і виходить. Силові ж лінії від заряду q_2 , який знаходиться всередині поверхні, тільки виходять з неї.

Розглянемо приклади застосування цієї теореми для розрахунку індукції чи напруженості електростатичного поля.

Приклад 1. Розрахувати індукцію і напруженість електричного поля утвореного зарядженою по об'єму до заряду q кулі радіусом R (рис.7.9).

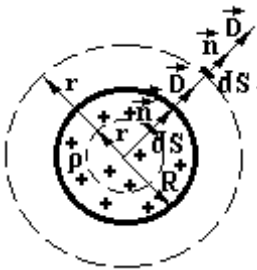


Рисунок 7.9

Увесь простір поділимо на дві області: за межами кулі і всередині кулі. Розглянемо ці області окремо.

а) За межами кулі $r > R$. Оскільки форма поверхні S в теоремі Остроградського-Гауса може бути довільною, але обов'язково замкнутою, вибираємо її у вигляді сфери радіусом r , центр якої співпадає з центром кулі (рис.7.9). За теоремою Гауса маємо

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_S D \cdot dS \cos 0^\circ = D \iint_S dS = D \cdot 4\pi \cdot r^2 = q$$

Для різних точок сфери вектор D однаковий за величиною, так як всі вони однаково розміщені по відношенню до заряду q . Тому його винесли за знак інтегралу, а $\iint_S dS = 4\pi r^2$ дає площу поверхні сфери.

Одержуємо

$$D = \frac{q}{4\pi \cdot r^2} = \sigma \quad \text{і} \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon \cdot r^2}. \quad (7.17)$$

Ці вирази співпадають з (7.3) та (7.5) для поля точкового заряду. Отже, поле зарядженої кулі за її межами таке ж, як і поле точкового заряду, якщо увесь заряд кулі зосередити в її центрі. Виразимо індукцію і напруженість через об'ємну густину заряду, яка

за означенням (7.9) дорівнює $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Вирази (7.17)

приймуть вид

$$D = \frac{R^3 \rho}{3r^2}; \quad \text{і} \quad E = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 \epsilon r^2}; \quad (7.18)$$

б) Всередині кулі $r < R$, тому в правій частині виразу (7.16) необхідно ставити заряд, який вирізається сферою радіусом r (рис.7.9).

Одержуємо $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = D \cdot 4\pi \cdot r^2 = \rho \cdot V_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

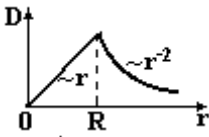


Рисунок 7.10

$$D = \frac{1}{3}\rho r \quad \text{і} \quad E = \frac{1}{3\epsilon_0 \epsilon} \rho r \quad (7.19)$$

Графік залежності індукції D від радіуса r показана на рис.7.10. При $r = R$ вирази (7.18) і (7.19) дають однакові величини D і E . Отже на поверхні кулі індукція і напруженість не зазнають розриву.

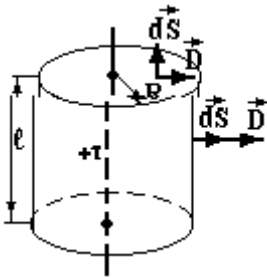


Рисунок 7.11

Приклад 2. Розрахувати індукцію і напруженість електричного поля, утвореного нескінченно довгою зарядженою віссю (циліндром) з лінійною густиною заряду τ (рис.7.11).

Поверхню S виберемо у вигляді циліндра, вісь якого співпадає з зарядженою віссю. На основах цього циліндра кут між \vec{D} і $d\vec{S}$ дорівнює 90° . Тому потік через основи дорівнює нулю.

Для елементів $d\vec{S}$ бічної поверхні цей кут дорівнює 0° . Отже за теоремою Остроградського-Гауса можна записати

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{D} d\vec{S} + \iint_{S_{\text{бічн}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D 2\pi R l = q = \tau l. \quad \text{Одержуємо}$$

$$D = \frac{\tau}{2\pi R}; \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R}; \quad (7.20).$$

Результат співпадає з (7.11), одержаний безпосереднім інтегруванням, але значно простіше.

Приклад 3. Розрахувати індукцію і напруженість електростатичного поля, утвореного нескінченною зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду σ (рис.7.12).

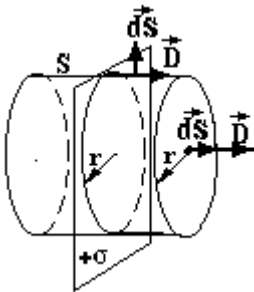


Рисунок 7.12

Поверхню S вибираємо у вигляді циліндра, основи якого радіусом r паралельні площині. Для бічної поверхні кут між \vec{D} і $d\vec{S}$ дорівнює 90° . Тому потік через бічну поверхню дорівнює нулю. Для елементів $d\vec{S}$ основ цей кут дорівнює 0° . Отже можна записати

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{бічн}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2D \cdot \pi r^2 = \sigma \cdot \pi \cdot r^2$$

Одержуємо

$$D = \frac{\sigma}{2}; \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}; \quad (7.21).$$

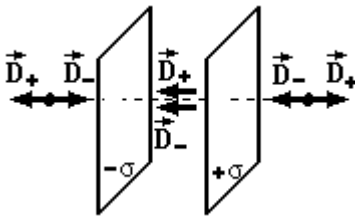


Рисунок 7.13

Приклад 4. Розрахувати індукцію і напруженість електростатичного поля, утвореного двома паралельними нескінченними площинами, різнойменно зарядженими до поверхневого заряду густиною σ ($+\sigma$ і $-\sigma$). На рис.7.13 показані вектори індукції від позитивної пластини \vec{D}_+ і

від негативної \vec{D}_- . Вони взаємно протилежні за межами пластин і однаково направлені між пластинами. За принципом суперпозиції при однакових за величиною густинах заряду і врахувавши (7.21) одержуємо між пластинами

$$\vec{D} = \vec{D}_+ + \vec{D}_- = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2} = \sigma; \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (7.22)$$

За межами пластин $\vec{D} = \vec{D}_+ + \vec{D}_- = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2} = 0$ і $E = 0$, тобто поле відсутнє.

7.4 Робота в електростатичному полі. Різниця потенціалів. Потенціал. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

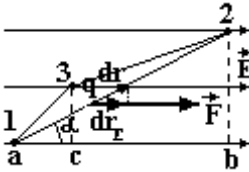


Рисунок 7.14

Нехай у деякому електростатичному полі переміщується заряд q із точки 1 в точку 2 (рис.7.14). На заряд діє сила $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Тоді за означенням (4.7) елементарна механічна робота

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \cdot E \cdot \cos \alpha \cdot dr = q \cdot E \cdot dr_E$$

Тут α – кут між вектором \vec{E} і напрямком переміщення $d\vec{r}$; $dr_E = dr \cdot \cos \alpha$ проекція вектора переміщення dr на напрямок напруженості електричного поля. Загальна робота знаходиться шляхом інтегрування

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 E \cdot \cos \alpha \cdot dr = q \int_1^2 E \cdot dr_E, \quad (7.23)$$

Покажемо, що робота в електричному полі не залежить від форми шляху, а визначається тільки зарядом q і положеннями початкової і кінцевої точок та напруженістю електричного поля \vec{E} .

Спочатку розглянемо для однорідного електричного поля, для якого $\vec{E} = \text{const}$. Тоді у виразі (7.23) E виноситься за інтеграл, а

інтеграл $\int_1^2 dr_E = \ell_{ab}$ дає сумарну проекцію траєкторії заряду (відрізка

1-2) на напрямок напруженості електричного поля. При переміщенні

заряду із точки 1 в точку 2 через якусь проміжну точку 3 не змінить вище вказаного інтегралу. Дійсно

$$\int_1^2 dr_E = \int_1^3 dr_E + \int_3^2 dr_E = l_{ac} + l_{cb} = l_{ab}.$$

Отже, робота в однорідному електричному полі не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок. У випадку неоднорідного поля це твердження залишається справедливим. Дійсно, неоднорідне поле можна розбити на ділянки однорідності, для кожного із яких твердження про незалежність роботи від форми шляху справедливе. А оскільки загальна робота дорівнює сумі робіт на окремих ділянках, то і вона не буде залежати від форми шляху.

Якщо (7.23) поділити на заряд q , то в правій частині одержуємо вираз, який не залежить від величини заряду, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок та напруженістю поля. Це дає можливість ввести нову енергетичну характеристику поля: потенціал і різницю потенціалів. Із (7.23) одержуємо

$$\frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 E \cos \alpha \cdot dr = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (7.24).$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ - **різниця потенціалів**, дорівнює роботі, яку виконують сили електростатичного поля при переміщенні одиночного позитивного заряду із точки 1 в точку 2.

Отже робота в електростатичному полі дорівнює добуткові заряду на різницю потенціалів вихідної і кінцевої точок

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.25)$$

Щоб задати потенціал необхідно, так же як і для потенціальної енергії, задати його початок відліку, тобто його нульовий рівень. Логічно вважати потенціал рівним нулю в тій точці, де поле відсутнє, тобто на нескінченно віддаленій від заряду точці. Якщо точку 2 віддалити в нескінченність, одержуємо потенціал

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{A_{r,\infty}}{q} \quad (7.26).$$

Потенціал – це робота сил електричного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду із даної точки поля r в нескінченність, де потенціал поля прийнятий за нуль. Потенціал і його різниця, як і робота, є величинами скалярними. Вимірюються у вольтах (В). $1\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$.

Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ в математиці називається циркуляцією вектора напруженості. Враховуючи (7.24), ясно, що такий інтеграл дорівнює нулю (початкова і кінцева точки переміщення заряду співпадають $\varphi_1 = \varphi_2$). Отже умова $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ є необхідною і достатньою умовою потенціального характеру поля.

Знайдемо потенціал поля точкового заряду. За означенням

$$(7.26) \quad \varphi = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_r^{\infty} E \cos \alpha dr. \quad \text{Будемо}$$

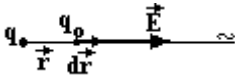


Рисунок 7.155

переміщувати пробний заряд q_0 по радіальній лінії (рис.7.15). Тоді кут $\alpha = 0^\circ$ і з врахуванням (7.3) одержуємо

$$(7.27) \quad \varphi = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Для потенціалу, як і для напруженості (розділ 7.2), справедливий **принцип суперпозиції**:

$$(7.28) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Потенціал поля, створеного декількома зарядами, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених у цій точці кожним зарядом. Якщо тіло не точкове, то сума (7.28) переходить в інтеграл.

7.5 Еквіпотенціальні поверхні. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля

Геометричне місце точок однакового потенціалу називається **еквіпотенціальною поверхнею**. Встановимо зв'язок між напруженістю і потенціалом. Нехай маємо дві еквіпотенціальні поверхні з потенціалами φ і $\varphi + d\varphi$ (рис.7.16). Перемістимо заряд q із однієї поверхню на другу. Робота для такого переміщення дорівнює:

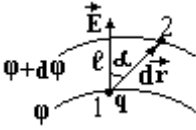


Рисунок 7.16

$dA = q[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q \cdot d\varphi$, або через напруженість $dA = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \cdot \cos \alpha = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$

Прирівнюємо праві частини цих рівнянь $q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \cdot d\varphi$, або

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -\text{grad}\varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \quad (7.29)$$

Із курсу математики відомо, що взяття похідної із скалярної функції (потенціалу) за напрямком дає векторну функцію (7.29), яка називається градієнтом скалярної величини φ і дає швидкість її зміни з координатою. Напрямок вектора градієнта вказує напрямком найбільш швидкого зростання функції φ з координатою. Отже, напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціалу з протилежним знаком.

Для однорідного поля напруженість дорівнює відношенню різниці потенціалів між двома точками до проекції відстані між ними на напрямок поля

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}. \quad (7.30)$$

Еквіпотенціальні і силові лінії взаємно перпендикулярні. Дійсно, при переміщенні заряду по еквіпотенціальній поверхні робота дорівнює нулю ($\Delta\varphi = 0$). Але на заряд діє сила, і щоб її робота $dA = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \cdot \cos \alpha$ дорівнювала нулю, необхідно щоб кут між силою і переміщенням становив 90° ($\cos 90^\circ = 0$).

7.6 Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів

Досліди показують, що при зарядженні провідників змінюється і їхній потенціал, причому між ними має місце лінійна залежність

$$q = C\varphi. \quad (7.31)$$

Коефіцієнт пропорційності
$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi} = \frac{dq}{d\varphi}, \quad (7.32)$$

тобто відношення заряду провідника до його потенціалу називається **електроємністю** провідника. Одиницею вимірювання електроємності в системі СІ є фарада (Ф). Це електроємність такого провідника, при зміні заряду якого на 1 Кл його потенціал змінюється на 1В. Менші одиниці електроємності: 1мкФ = 10⁻⁶Ф, 1нФ = 10⁻⁹Ф, 1пФ = 10⁻¹²Ф.

Для системи провідників (конденсаторів) їхня взаємна електроємність

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

(7.33)

де $\varphi_1 - \varphi_2$ різниця потенціалів між тілами, q – заряд одного із тіл.

Приклад. Знайти електроємність плоского конденсатора.

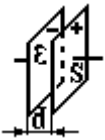


Рисунок 7.17

Плоский конденсатор (рис. 7.17) уявляє собою дві паралельні пластини площею S . Простір між пластинами заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю ϵ . Як правило відстань між пластинами d набагато менша від розмірів пластин. Тому крайовими ефектами можна знехтувати і вважати поле між пластинами

однорідним. Із (7.30) з врахуванням (7.21) одержуємо
$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \cdot d = \frac{qd}{S \epsilon \epsilon_0};$$
 Тоді електроємність плоского

конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (7.34)$$

Висновок. Вираз (7.34) показує, що електроємність не залежить від заряду, а визначається геометричними розмірами конденсаторів та властивостями діелектрика.

При з'єднанні конденсаторів у батареї загальна електроємність знаходиться так:

$$\text{при паралельному з'єднанні} \quad C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (7.35)$$

як сума електроємностей конденсаторів;

$$\text{при послідовному з'єднанні} \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (7.36)$$

Обернена електроємність батареї дорівнює сумі обернених електроємностей конденсаторів.

7.7 Енергія та густина енергії електростатичного поля

Для того, щоб зарядити тіло необхідно виконати роботу $dA = \varphi \cdot dq$ по перенесенню порції заряду dq проти сил відштовхування від раніше перенесеного однойменного заряду q . Ця робота перетворюється в потенціальну енергію зарядженого тіла (в енергію електричного поля). Підставивши φ із (7.31), одержимо

$$dA = \frac{q}{C} \cdot dq. \text{ Інтегруємо по зарядові в інтервалі від } 0 \text{ до } q.$$

$$W = A = \int_0^q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (7.37)$$

Останні два вирази записані із врахуванням співвідношення (7.31).

Об'ємна густина енергії електростатичного поля це енергія, яка зосереджена в одиниці об'єму простору, де це поле утворене

$$w = \frac{W}{V} = \frac{dW}{dV} \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right] \quad (7.38)$$

Знайдемо її на прикладі плоского конденсатора. Об'єм $V = S \cdot d$. Із (7.37), (7.38), (7.34) і враховуючи (7.22), одержуємо

$$w = \frac{W}{V} = \frac{q^2}{2C \cdot Sd} = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S^2} = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{DE}{2}.$$

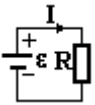
Прийнявши до уваги (7.4) остаточно одержимо три вирази для об'ємної густини енергії електричного поля

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} \quad (7.39)$$

8 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ ТА ЙОГО ЗАКОНИ

8.1 Сила струму. Електрорушійна сила (е.р.с.). Напряга. Густина струму

Електричним струмом називається всякий направлений рух зарядів. За напрямком струму прийнятий напрямок руху позитивних зарядів (рис.8.1). Для його існування необхідні дві умови:



– наявність рухомих зарядів;

– наявність сили, яка приводить ці заряди в направлений рух.

Наприклад, заряджене тіло переміщуємо у просторі мускульною силою руки. Це струм? Так. Є заряд і є сила, яка його переміщує.

Рисунок 8.16

Найчастіше силою, яка переміщує заряд, виступає сила електричного поля. Робота цього поля витрачається на переміщення зарядів, і тому його енергія зменшується. Щоб струм протікав відносно довго, потрібно поповнювати енергію поля, що відбувається в джерелах струму, або джерелах електрорушійної сили (е.р.с.). В них відбувається перетворення в електричну енергію різних видів енергії:

механічної, оптичної, теплової, хімічної і т. ін., окрім електричної. Ці сили називаються сторонніми. Дійсно, в джерелах е.р.с. позитивні заряди рухаються проти електричного поля (рис.8.1), на що і витрачається робота сторонніх сил.

Робота по переміщенню заряду по дільниці кола, в якій є е.р.с., виконується силами електричного поля і сторонніми силами

$$A_{12} = q \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор.}}) \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} + q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{r} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon.$$

Тут **е.р.с.** $\varepsilon = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{r} = \frac{A_{\text{стор.}}}{q}$ - це робота, яку виконують

сторонні сили по переміщенню одиничного позитивного заряду в середині джерела. Величина

$$\frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon = U \quad (8.1)$$

називається **напругою**. Це робота, яку виконують сили електричного поля і сторонні сили по переміщенню одиничного позитивного заряду із точки 1 в точку 2.

Силою струму I називається швидкість направлено перенесення заряду

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А} \right]. \quad (8.2)$$

Вимірюється струм у системі СІ в Амперах (А). Це основна одиниця в цій системі і буде визначена по взаємодії провідників із струмом у розділі “електромагнетизм”.

Для характеристики розподілу перенесення заряду по поперечному перерізу провідника введена **густина струму j** – це струм, який протікає через одиницю поперечного перерізу

$$j = \frac{I}{S} = \frac{dI}{dS} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right]. \quad (8.3)$$

Не дивлячись, що струм величина скалярна, густина струму – це вектор, напрямок якого співпадає з напрямком швидкості направлено руху позитивних зарядів, тобто

$$\vec{j} = j \cdot \frac{\vec{V}_+}{|\vec{V}_+|}. \quad (8.4)$$

Струм, через густину струму знаходять шляхом інтегрування по площі перерізу провідника

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (8.5)$$

8.2 Основні положення класичної теорії електропровідності металів. Експериментальне підтвердження електронної природи струму в металах

Після відкриття у 1897 р. Дж. Томсоном електрона німецький фізик П. Друде у 1900 році заклав основи класичної теорії електропровідності металів, яка знайшла розвиток в роботах нідерландського фізика Х. Лорентца. Розглянемо положення цієї електронної теорії Друде-Лорентца.

- а) Електронний газ в металах має властивості одноатомного молекулярного ідеального газу. Рухаючись хаотично, електрони зазнають зіткнень тільки з атомами кристалічної ґратки, а не між собою, так як розміри електронів набагато менші, ніж атомів. Тому вважається, що середня довжина вільного пробігу електронів дорівнює міжатомній відстані і складає декілька ангстрем: $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$.
- б) Так як теплові швидкості (середня арифметична, середня квадратична, найбільш ймовірна) із-за малої маси електронів дуже великі ($\sim 100 \text{ км/с}$), вважається що всі вони однакові. Тепловий хаотичний рух не приводить до направленого руху електронів, тобто струм не виникає.
- в) Під дією зовнішнього електричного поля виникає направлений рух електронів проти напруженості поля із швидкістю V . Знайдемо силу струму і його густину (рис.8.2). За час dt через перпендикулярний до вектора швидкості \vec{V} переріз dS провідника перейдуть тільки ті носії, які знаходяться від нього на відстані не більшій, ніж $V \cdot dt$ і перенесуть свій заряд через цей переріз. Носії, які знаходяться далі не встигнуть за цей час дійти до

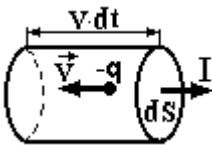


Рисунок 8.17

переріз. Носії, які знаходяться далі не встигнуть за цей час дійти до

перерізу dS і внести вклад в електричний струм. Сумарний перенесений заряд дорівнює заряду носіїв, що знаходяться в зображеному циліндрі. $dQ = q \cdot n \cdot V \cdot dt \cdot dS$. (n - концентрація вільних носіїв заряду). Враховуючи (8.2) і (8.3), одержуємо струм $I = q \cdot n \cdot V \cdot dS$ та густину струму

$$j = qnV. \quad (8.6)$$

Оцінка значення швидкості направленого руху V із формули (8.6) дає $\sim 0,8$ мм/с, що набагато менше, ніж теплова швидкість. Не дивлячись на це, струм у провіднику виникає практично миттєво, так як у направлений рух після вмикання електричного поля приходять усі електрони.

г) Від зіткнення до зіткнення з атомами електрон рухається з середньою тепловою швидкістю. Зіткнення електрона з атомами носять абсолютно пружний характер, причому вважається, що електрон при цьому повністю втрачає набуту швидкість направленого руху. Отже направлений рух електрона між зіткненнями рівноприскорений без початкової швидкості направленого руху.

Розглянемо досліди, які підтверджують електронну природу струму в металах:

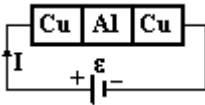


Рисунок 8.18

а) Через послідовно з'єднані мідь-алюміній-мідь (рис.8.3) протягом приблизно року пропускався електричний струм, після чого досліджувались контакти на предмет взаємного проникнення металів. Не дивлячись на те, що в одному контакті струм протікав від міді до алюмінію, а в другому від алюмінію до міді, взаємне проникнення металів в обох контактах було однаковим. Стимульованої струмом дифузії виявлено не було. Це означає, що протікання струму в металах не супроводжується переносом речовини, а носіями струму являються загальні для всіх металів частинки – електрони.

б) Металевий стержень, замкнутий чутливим гальванометром (рис.8.4), рухався, а потім різко зупинявся. Гальванометр фіксував імпульс струму, зумовлений тим, що в момент зупинки кристалічної ґратки металу електрони ще продовжують рухатись за інерцією в напрямку направленого руху.

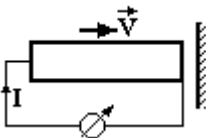


Рисунок 8.19

в) У 1913 році російські фізики Л.І.Мандельштам і М.Д.Папалексі вдосконалили вище розглянутий дослід. Вони замінили масивний провідник котушкою (довжина дроту ~ 500 м), яку привели в обертальні коливання (рис.8.5). В момент зміни напрямку руху котушки в ній виникав електричний струм, наявність якого фіксувалася телефоном, увімкнутим до кінців котушки (виникав характерний тріск). Тепер фіксувались уже не однократні імпульси струму.

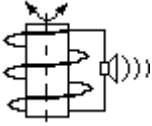


Рисунок 8.20

г) У 1916 році шотландський фізик Ч.Стюарт і американський Т.Толмен в досліді Л.І.Мандельштама і М.Д.Папалексі телефон замінили чутливим гальванометром. Це дало можливість провести кількісні вимірювання, а саме визначити відношення заряду носіїв струму до їх маси (питомий заряд). Виявилось, що це відношення дорівнює питомому заряду електрона.

Отже струм у металах зумовлений направленим рухом електронів.

8.3 Закон Ома за класичною теорією електропровідності металів. Електричний опір провідників

Запишемо другий закон Ньютона для направленої руху електрона $m \frac{dV}{dt} = qE \Rightarrow dV = \frac{qE}{m} dt$. Інтегруємо це рівняння в межах: швидкості від 0 до $V_{\text{макс}}$, в межах часу від 0 до τ – час вільного пробігу електрона $\tau = \frac{\lambda}{V_{\text{с.ар.}}}$. Одержуємо

$$\int_0^{V_{\text{макс}}} dV = \int_0^{\tau} \frac{qE}{m} dt$$

$$V_{\text{макс}} = \frac{qE}{m} \tau = \frac{qE\lambda}{mV_{\text{с.ар.}}}. \quad (8.7)$$

Середня швидкість направленої руху V дорівнює півсумі початкової ($V_0 = 0$, див положення 4) і кінцевої $V_{\text{макс}}$. Враховуючи

$$(8.6), \text{ густина струму } j = qnV = \frac{q^2 n \lambda}{2m V_{\text{с.ар.}}} E = \sigma E, \text{ або}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (8.8)$$

Це і є закон Ома в диференціальній формі. Тут питома електропровідність

$$\sigma = \frac{q^2 n \lambda}{2m V_{\text{с.ар.}}}. \quad (8.9)$$

Величина обернена питомій електропровідності називається **питомим опором** ρ

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m V_{\text{с.ар.}}}{q^2 n \lambda} [\text{Ом} \cdot \text{м}]. \quad (8.10)$$

Це опір суцільного куба з ребром l м при протіканні струму між протилежними гранями.

Одержимо закон Ома в інтегральній формі. Для цього рівняння (8.8) домножаємо скалярно на вектор $d\vec{r}$ переміщення вздовж провідника в напрямку протікання струму і інтегруємо в

межах двох точок провідника $\int_1^2 \vec{j} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \sigma \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Врахуємо (7.24),

(8.1) і що кут між векторами \vec{j} і $d\vec{r}$ дорівнює нулю, одержуємо

$$\int_1^2 j \cdot \rho \cdot dr = \phi_1 - \phi_2 = U.$$

$$j = \frac{I}{S}, \quad U = I \int_1^2 \frac{\rho \cdot dr}{S} = I \cdot R. \quad (8.11)$$

Тут U – напруга, R – опір провідника

$$R = \int_1^2 \frac{\rho \cdot dr}{S}, \text{ або для однорідного провідника } R = \frac{\rho \cdot \ell}{S} \quad (8.12)$$

залежить від матеріалу і геометричних розмірів: площі перерізу S та довжини ℓ .

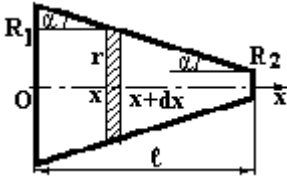


Рисунок 8.21

Приклад. Знайти опір R однорідного провідника у формі зрізаного конуса при протіканні струму між його основами (рис.8.6). Задані геометричні розміри R_1 , R_2 і питомий опір ρ .

Елемент dx довжини провідника має переріз

$$r = R_1 - x \cdot \operatorname{tg}\alpha = R_1 - x \frac{R_1 - R_2}{\ell} . \quad \text{Тоді}$$

його опір за формулою (8.12)

$$dR = \frac{\rho}{\pi r^2} dx = \frac{\rho \cdot dx}{\pi \left(R_1 - x \frac{R_1 - R_2}{\ell} \right)^2} .$$

$$\text{Загальний опір } R = \int_0^{\ell} dR = \int_0^{\ell} \frac{\rho dx}{\pi \left(R_1 - x \frac{R_1 - R_2}{\ell} \right)^2} = \frac{\rho \ell}{\pi R_1 R_2} .$$

При з'єднанні резисторів загальний опір знаходиться так:

$$\text{при послідовному з'єднанні} \quad R = \sum_{i=1}^n R_i , \quad (8.13)$$

як сума опорів;

$$\text{при паралельному} \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} . \quad (8.14)$$

обернений опір дорівнює сумі обернених опорів.

8.4 Закон Джоуля-Ленца по класичній теорії електропровідності металів

Закон Джоуля –Ленца – це закон про теплову дію електричного струму: якщо електричний струм не виконує механічної

роботи, то вся його енергія перетворюється в тепло. Який механізм нагрівання провідників електричним струмом? Електрон прискорюється електричним полем. Швидкість і кінетична енергія його поступального руху зростають за рахунок енергії електричного поля. При зіткненні з вузлом кристалічної ґратки він повністю втрачає набуту швидкість, а значить і кінетичну енергію направлено руху (див. положення 4, розділ 8.2). Ця енергія передається атому кристалічної ґратки, внаслідок чого він починає коливатись більш інтенсивно. А це і означає нагрівання кристалу.

Знайдемо питому потужність w , тобто енергію, яка виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу

$$w = \frac{dW}{dV_{об} \cdot dt} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]. \quad (8.15)$$

За час dt кожний електрон зазнає $dZ = \frac{V_{с.ар.}}{\lambda} dt$ зіткнень, при

кожному з яких кристалу буде передана енергія $\frac{mV_{макс}^2}{2}$. В об'ємі $dV_{об}$ знаходиться $dN = n \cdot dV_{об}$ електронів. Тоді

$dW = \frac{mV_{макс}^2}{2} \cdot dZ \cdot dN = \frac{mV_{макс}^2}{2} \cdot \frac{V_{с.ар.}}{\lambda} dt \cdot n \cdot dV_{об}$. Підставляємо в (8.15). З врахуванням (8.7) і (8.9), після спрощень, одержуємо

$w = \frac{q^2 n \lambda}{2mV_{с.ар}} E^2 = \sigma E^2$. Якщо скористатися законом Ома (8.8),

закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі запишеться так:

$$w = \sigma E^2 = \mathbf{jE} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (8.16)$$

В інтегральній формі цей закон має вид

$$Q = I^2 R t = I U t = \frac{U^2}{R} t. \quad (8.17)$$

Для потужності електричного струму маємо

$$P = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R} \quad (8.18)$$

8.5 Закон Відемана-Франца по класичній теорії електропровідності металів

Дослідами встановлено, що метали наряду з високою електропровідністю мають і хорошу теплопровідність, які значно перевищують електропровідність і теплопровідність діелектриків. Логічно припустити, що ця різниця властивостей зумовлена наявністю електронного газу в металах і його відсутністю в діелектриках.

У 1853 році два німецьких фізики: Г. Відеман і Р. Франц експериментально встановили закон, який носить їхнє ім'я: для всіх металів при одній і тій же температурі відношення коефіцієнта теплопровідності χ до питомої електропровідності σ однакове і пропорційне абсолютній температурі T

$$\frac{\chi}{\sigma} = C \cdot T. \quad (8.19)$$

C – константа, встановлена емпірично.

Розглянемо пояснення цього закону в рамках класичної теорії електропровідності. Коефіцієнт теплопровідності електронного газу, як одноатомного молекулярного газу (6.39) з рахуванням (6.53), дорівнює

$$\chi = \frac{1}{3} \rho V_{c.ap.} \lambda c_v = \frac{1}{3} mn V_{c.ap.} \lambda \frac{3}{2} \frac{k}{m} = \frac{1}{2} nk V_{c.ap.} \lambda$$

Враховуючи (8.9) і (6.28), а також положення про рівність усіх теплових швидкостей електрона (положення 2 розд.8.2), знаходимо відношення

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{nk V_{c.ap.} \lambda 2m V_{c.ap.}}{2nq^2 \lambda} = 3 \left(\frac{k}{q} \right)^2 \cdot T = C \cdot T. \quad (8.20)$$

Одержали закон (8.19) Відемана- Франца.

8.6 Протиріччя класичної теорії електропровідності металів

Досягненням класичної теорії електропровідності металів є те, що вона пояснила такі експериментальні закони: 1) закон Ома; 2) закон Джоуля-Ленца; 3) закон Відемана-Франца. Але ряд експериментальних фактів пояснити не вдалося. Розглянемо ці протиріччя теорії і експерименту.

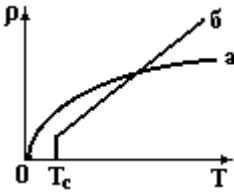


Рисунок 8.22

а) Температурна залежність опору металів. По теорії ця залежність визначається аналізуючи формулу (8.10) температурною залежністю середньої арифметичної швидкості електронів (6.28), так як ні концентрація n , ні довжина вільного пробігу λ (див. положення 1, розділ 8.2), а тим більше заряд m і маса електрона, не залежать від температури. Таким чином, за теорією $\rho(T) \sim V_{с.ар.}(T) \sim \sqrt{T}$ (рис.8.7, а).

Експеримент же дає лінійну залежність (рис.8.7, б)

$$\rho_t = \rho_o(1 + \alpha \cdot t^o) \sim t^o \sim T. \quad (8.21)$$

$$\rho_o - \text{питомий опір при } 0^{\circ}\text{C}; \quad \alpha = \frac{\rho_t - \rho_o}{\rho_o t^o} = \frac{d\rho}{\rho \cdot dT} \quad [\text{K}^{-1}] \quad (8.22)$$

температурний коефіцієнт опору. Він показує відносну зміну опору при зміні температури на 1 градус.

Більш того, при наднизьких температурах в декілька Кельвінів має місце перехід у надпровідний стан (опір різко падає до нуля). Класична теорія ніяк не може пояснити це явище.

б) Якщо за експериментально виміряними значеннями питомого опору за формулою (8.10) порахувати довжину вільного пробігу електрона λ , одержується значення $\sim 10^{-8}\text{м}$, що на два порядки більше, ніж у положенні 1 розділу 8.2 $\sim 10^{-10}\text{м}$. Теорія не може пояснити таке дивне поведіння електрона в густо упакованій кристалічній ґратці, щоб він пролітав сотню міжатомних відстаней, не стикаючись з атомами.

в) Неузгодження з теплоємностями. За класичною теорією теплоємність металів повинна бути більшою, ніж діелектриків, на величину теплоємності електронного газу. Для одного моля ця різниця повинна складати $3/2 \cdot R$ (див. (6.53)).

Експеримент же дає, що молярна теплоємність при не дуже низьких температурах для всіх твердих тіл (і металів і діелектриків) однакова і дорівнює $3R$. Цей закон встановили французькі фізики П.

Дюлонг і А. Пті у 1819 році. Пізніше було встановлено, що при низьких і наднизьких температурах теплоємність твердих тіл зменшується до нуля $\sim T^3$ (закон П. Дебая, 1912 р.). Класична теорія не може пояснити ці експериментальні факти. Все це спонукало розробку більш досконалої, квантової теорії електропровідності.

8.7 Закони Кірхгофа для розгалужених електричних кіл

Дамо визначення декільком поняттям:

Вузол електричної схеми – це точка, в якій сходяться більше двох провідників.

Вітка – ділянка схеми між двома сусідніми вузлами.

Контур – довільна замкнута дільниця схеми.

Лінійно незалежні контури – це такі, які відрізняються по крайній мірі однією віткою.

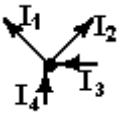


Рисунок 23.8

Одним із методів розрахунку розгалужених електричних кіл є метод законів Г.Кірхгофа (нім. фізик), сформульованих ним у 1847 р.

Перший закон: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (8.23)$$

Струми, які направлені до вузла і від нього беруться з протилежними знаками (рис.8.8).

$$I_4 + I_3 - I_2 - I_1 = 0$$

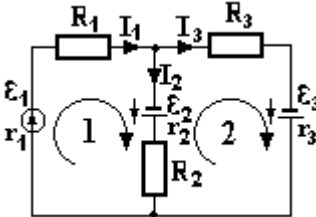


Рисунок 8.24

Другий закон: Алгебраїчна сума падінь напруг вздовж будь-якого контуру дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с., які увімкнені в цей же контур.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \quad (8.24)$$

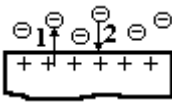
У цих сумах знак (+) береться тоді, коли з довільно вибраним напрямком обходу контуру співпадає довільно вибраний напрямок струму у вітці, чи напрямок дії е.р.с. В противному випадку береться (-).

Для зображеної схеми (рис.8.9) рівняння 2-го закону Кірхгофа мають вид:

$$\begin{aligned} \text{для контуру 1} \quad & I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \text{для контуру 2} \quad & I_3(R_3 + r_3) - I_2(R_2 + r_2) = \varepsilon_3 - \varepsilon_2. \end{aligned}$$

8.8 Робота виходу електронів із металу. Контактна різниця потенціалів (КРП). Закони Вольта

Електрони в провіднику знаходяться в безперервному хаотичному русі з різними тепловими швидкостями. Деякі із них можуть покинути метал і перейти в оточуюче середовище над його поверхнею. Для такого переходу необхідно виконати роботу проти двох сил: **а)** проти сил відштовхування електронів, які вилетіли раніше і знаходяться в електронній приповерхневій хмарі (рис.8.10);



б) проти сил протягування не скомпенсованого позитивного заряду поверхневого шару металу, який утворився внаслідок виходу з нього частини електронів.

Рисунок 8.25

Частина електронів покидає метал (перехід 1), а частина повертається (перехід 2). Встановлюється динамічна рівновага між електронною хмарою і металом, коли кількість електронів, які вилітають, дорівнює кількості електронів, що повертаються в метал. При підвищенні температури металу спочатку зросте кількість переходів 1. Але досить швидко зростає і кількість переходів 2. Знову встановиться динамічна рівновага, але вже при більшій густині електронної хмари.

Робота виходу – це робота, яку необхідно затратити для переходу електрона із металу за межі електронної хмари. Вона різна для різних металів (див табл. 8.1) і лежить в межах 1÷7 eV ($1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Таблиця 8.1

Метал	Cs	Ba	Zn	Ta	Mo	Cu	W	Ni	Pt
$A_{\text{вих}}, \text{eV}$	1.81	2.11	3.74	4.12	4.15	4.47	4.5	5.03	6.27

Поверхню металу з електронною хмарою, як правило, моделюють плоским конденсатором: позитивна пластина – це поверхня металу, негативна – електронна хмара. Для переводу

електрона із позитивної пластини цього конденсатора на негативну необхідна робота $A_{\text{вих}} = q \cdot \Delta\phi$. Величина

$$\Delta\phi = \frac{A_{\text{вих}}}{q} \quad (8.25)$$

називається поверхневим стрибком потенціалу між металом і оточуючим середовищем (вакуумом), або контактною різницею потенціалів (КРП).

Різницю потенціалів на контактї двох різнорідних металів вперше виявив італійський фізик А. Вольта в 1799 році. Результати своїх експериментів він узагальнив двома законами:

1-й закон Вольта: при з'єднанні двох різнорідних металів між ними виникає КРП, яка залежить від типу металів і температури контакту;

2-й закон Вольта: КРП на кінцях послідовно з'єднаних різнорідних металів, контакти яких мають однакову температуру, не залежить від проміжних металів і дорівнює КРП при безпосередньому з'єднанні крайніх провідників.

Знайдемо в рамках класичної теорії електропровідності величину КРП між двома металами і перевіримо, чи пояснює вона закони Вольта.

По класичним уявленням КРП зумовлена двома факторами:

- а) різною роботою виходу електронів із різних металів. Це зовнішня складова КРП $\Delta\phi^I$;
- б) різною об'ємною концентрацією електронів у різних металів. Це внутрішня складова КРП $\Delta\phi^{II}$.

З'ясуємо фізичну природу виникнення кожної із цих складових КРП та знайдемо їх величини.

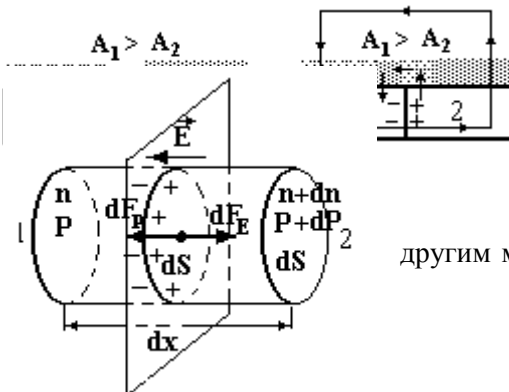


Рисунок 8.26

Нехай маємо два метали з різною роботою виходу електронів, наприклад, $A_1 > A_2$ (рис.8.11). У цьому випадку при однаковій температурі густина електронної хмари над другим металом буде більшою. Тому

після приведення металів у контакт електрони із електронної хмари другого металу будуть переходити в електронну хмару першого металу. Внаслідок таких переходів порушуються динамічні рівноваги електронних хмар над обома металами. Густина електронної хмари над першим металом зростає. Тому зростає кількість електронів, які повертаються в метал 1. Над другим металом густина хмари стала меншою. Для відтворення динамічної рівноваги із металу виходить тепер більше електронів, і він заряджається позитивно. Знайдемо величину $\Delta\varphi^I$. Для цього запишемо роботу по переміщенню електрона вздовж зображеного на рис.8.11 контуру, враховуючи, що робота по переміщенню заряду за межами контактного поля дорівнює 0, а також, що і загальна робота теж дорівнює 0 (див. розділ 7.4). $A_{12} - A_2 + 0 + A_1 = 0$. Одержуємо

$$\Delta\varphi_{12}^I = \frac{A_{12}}{q} = \frac{A_2 - A_1}{q}. \quad (8.26)$$

Внутрішня КРП виникає за рахунок переходу електронів із одного металу в інший внаслідок їх дифузії із областей з більшою концентрацією, наприклад, n_2 , в метал з меншою концентрацією n_1 (рис.8.12). Виділимо в граничному шарі контакту нескінченно малий циліндр довжиною dx і площею основи dS . Позначимо концентрацію і „тиск” електронного газу на лівій основі відповідно n і P , а на правій $n+dn$ і $P+dP$. Зміна електронного „тиску”, у відповідності з основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії (6.14), дорівнює $dP = kT \cdot dn$, а сила тиску $dF_p = dP \cdot dS = kT \cdot dn \cdot dS$. Контактне електричне поле E буде перешкоджати переходу електронів із 2-го металу в 1-й, тобто на електрони, які знаходяться у вибраному циліндрі, діє електростатична сила $dF_E = qEn \cdot dS \cdot dx$. При досягненні рівноваги $dF_p = -dF_E$. Одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{kT}{q} \cdot \frac{dn}{n} = -E \cdot dx. \text{ Інтегруємо } \frac{kT}{q} \cdot \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{n} = - \int_1^2 E \cdot dx. \text{ Права частина}$$

у відповідності з (7.24) дає різницю потенціалів

$$\Delta\varphi_{12}^{\text{II}} = \varphi_2^{\text{II}} - \varphi_1^{\text{II}} = \frac{kT}{q} \ln \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.27)$$

Таким чином, загальна КРП дорівнює

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{12}^I + \Delta\varphi_{12}^{II} = \frac{A_2 - A_1}{q} + \frac{kT}{q} \ln \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.28)$$

Одержаний вираз показує, що КРП дійсно залежить тільки від характеристик контактуючих металів (робот виходу та концентрацій електронів) і температури. Це 1-й закон Вольта.

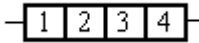


Рисунок 8.28

Перевіримо 2-й закон. Для цього знайдемо КРП послідовно з'єднаних, наприклад, чотирьох металів (рис.8.13).

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{1234} &= \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} + \Delta\varphi_{34} = \\ &= \frac{(A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + (A_4 - A_3)}{q} + \\ &+ \frac{kT}{q} \ln \frac{n_2 \cdot n_3 \cdot n_4}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} = \frac{(A_4 - A_1)}{q} + \frac{kT}{q} \ln \frac{n_4}{n_1} \Delta\varphi_{14} \end{aligned}$$

Одержали значення КРП при безпосередньому контакті металів 1 і 4. Отже класична теорія дає і 2-й закон Вольта.

8.9 Термоелектричні явища. Ефекти Зеебека і Пельтьє

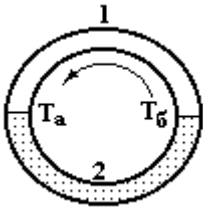


Рисунок 8.29

Розглянемо замкнуте коло із двох металів 1 і 2 (рис.8.14). У ньому є два контакти: а і б. Нехай температури цих контактів T_a і T_b різні. В такому контурі виникає електрорушійна сила, яка називається термо-е.р.с., і протікає електричний струм. Знайдемо термо-е.р.с. ε . Очевидно, що вона буде дорівнювати, у відповідності із 2-м законом Кірхгофа, сумі КРП на контактах. Використаємо (8.28)

$$\varepsilon = (\varphi_{1a} - \varphi_{2a}) + (\varphi_{2b} - \varphi_{1b}) = \frac{A_1 - A_2}{q} + \frac{kT_a}{q} \ln \frac{n_1}{n_2} + \frac{A_2 - A_1}{q} + \frac{kT_b}{q} \ln \frac{n_2}{n_1}$$

Після спрощень, маємо

$$\varepsilon = \frac{k}{q} \ln \frac{n_2}{n_1} (T_6 - T_a) = \alpha (T_6 - T_a). \quad (8.29)$$

Одержали, що термо-е.р.с. пропорційна різниці температур контактів. Це явище прямого перетворення теплової енергію в електричну називається термоелектричним явищем. Воно було вперше відкрите німецьким фізиком Т.Зеебеком у 1821 р. на контакті мідь-вісмут. Воно лежить в основі вимірювання температури за допомогою термопар. Першу термопару запропонував і виготовив теж Зеебек. Вона уявляє собою два різних провідники, спаяних одними кінцями, а до інших вмикається гальванометр, яким і вимірюють термо-е.р.с (рис.8.15). Термопару попередньо градуують по відомій різниці температур для знаходження коефіцієнта α термо-е.р.с. За (8.29) знаходять різницю температур, і, знаючи температуру T_a в місці знаходження гальванометра, можна знайти температуру T_6 другого контакту.

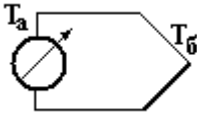


Рисунок 8.30

У 1834 р. французький годинникар Ж. Пельтьє виявив протилежний ефект, який був названий його ім'ям. Ефект Пельтьє полягає в тому, що при проходженні струму через контакт різних провідників у контактах крім джоулевого тепла, в залежності від напрямку струму, виділяється чи поглинається додаткове тепло, назване теплом Пельтьє. На відміну від тепла Джоуля-Ленца, яке пропорційне квадрату струму, тепло Пельтьє пропорційне першій степені струму і змінює знак при зміні напрямку струму. Пояснимо

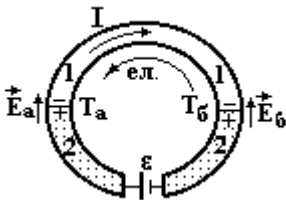


Рисунок 8.31

механізм виділення цього тепла. Нехай через контакти двох металів від зовнішнього джерела ε пропускається струм I (рис.8.16). Нехай КРП має таку полярність, що метал 1 заряджається відносно металу 2 негативно. Електрони рухаються в контакті **а** проти контактного поля E_a і тому ним прискорюються. Ця додаткова кінетичне енергія черпається за рахунок зменшення теплової енергії контакту, і тому він охолоджується. В контакті **б** електрон гальмується контактним полем E_6 і віддає йому частину кінетичної енергії направлено го руху.

Контакт **б** додатково нагрівається. Отже $T_b > T_a$. Таким чином електрон виконує роль переносника енергії від одного контакту до іншого, а саме від холодного (**а**) до гарячого (**б**). А це вже є не що інше, як холодильна машина. Саме так на контакті вісмут-сурьма Е.Ленц у 1838 році заморозив краплю води.

9 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

9.1 Магнітне поле рухомих зарядів. Індукція магнітного поля. Закон Ампера

У 1820 році датський фізик Г.Ерстед виявив, що поблизу провідників із струмом магнітна стрілка зазнає орієнтуючої дії, тобто струм утворює магнітне поле. Так як струм – це направлений рух зарядів, постали питання: чи всякий рухомий заряд утворює магнітне поле, чи тільки вільні заряди? Яка роль іонів кристалічної ґратки?

На перше питання відповів російський радянський фізик А.А.Ейхенвальд (1964-1944). Він у 1901 році провів дослід по виявленню магнітного поля поблизу конвекційного струму (рис.9.1). Заряджений диск приводився в обертання. Виявилось, що незалежно від знаку заряду, а також від того, металевий (рис.9.1, а) чи діелектричний (9.1, б) диск, магнітна стрілка поблизу них орієнтувалась певним чином. Причому, коли диски не обертались, орієнтуючий ефект був відсутній. Але роль кристалічної ґратки цими дослідями не була виявлена.



Рисунок 9.1



Рисунок 9.2

ґратці, а у вакуумі.

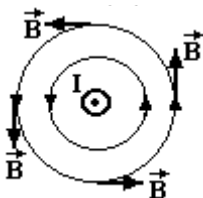


Рисунок 9.3

Отже, всякий рухомий заряд утворює магнітне поле.

Орієнтація магнітної стрілки у магнітному полі певним чином свідчить про те,

що магнітному полю властивий напрямок, а силові його характеристики - величини векторні. Прийнято, що напрямок магнітного поля і його силових характеристик (індукції \vec{B} і напруженості \vec{H}) вказує північний полюс магнітної стрілки. Графічно магнітне поле зображається **лініями індукції**, це лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають з вектором індукції (рис.9.3). На рис.9.3 струм тече на нас. Досліди показали, що лінії індукції завжди замкнуті. Для прямолінійного провідника зі струмом напрямок силових ліній можна визначити за **правилом правого гвинта**: коли поступальний рух правого гвинта співпадає зі струмом, напрямок його обертання вказує напрямок ліній індукції.

Взаємодію магнітного поля і провідників із струмом детально вивчав французький фізик А.Ампер. Він у 1820 році встановив, що сила, яка діє на провідник із струмом прямо пропорційна величині струму, довжині провідника і синусу кута між струмом і напрямком магнітного поля (рис.9.4) і направлена перпендикулярно до провідника і магнітного поля

$$dF = B \cdot I \cdot d\ell \cdot \sin \alpha. \quad (9.1)$$

Сила максимальна, коли $\alpha = 90^\circ$, тобто коли провідник із струмом перпендикулярний до магнітного поля. Тоді **індукція**

$$B = \frac{dF_{\text{макс}}}{I \cdot d\ell} \left[\frac{H}{A \cdot m} = Tл \right] \quad (9.2)$$

чисельно дорівнює максимальній силі, що діє на 1м прямолінійного провідника із струмом в 1А, який перпендикулярний до магнітного поля. Вимірюється індукція в системі СІ в теслах (Тл).

Якщо довжину провідника розглядати як вектор, напрямком якого співпадає із напрямком струму, то закон Ампера (9.1) можна записати у векторній формі

$$d\vec{F} = I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]. \quad (9.3)$$

Напрямок сили Ампера можна визначити за **правилом лівої руки**: якщо ліву руку розмістити так, щоб силові лінії входили в долоню, чотири витягнутих пальці направити по струмові, то відігнутий великий палець вкаже напрямок сили.

9.2 Закон Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиції для магнітного поля

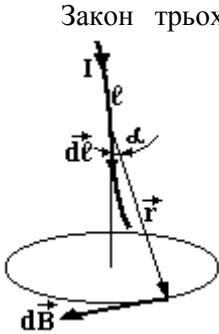


Рисунок 9.5

Закон трьох французьких вчених Біо (1774-1862), Савара (1791-1841) і Лапласа (1749-1827) – це експериментальний закон, який

визначає індукцію $d\vec{B}$ магнітного поля, створеного елементом провідника довжиною $d\vec{\ell}$ із струмом I в точці, віддаленій від цього елемента на відстань \vec{r} (рис.9.5)

$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}], \quad (9.4)$$

або в скалярній формі

$$dB = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \sin \alpha \cdot d\ell. \quad (9.5)$$

Тут: μ – відносна магнітна проникність середовища, показує у скільки разів індукція магнітного поля в середовищі більша, ніж у вакуумі. Це безрозмірна величина; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала, введена в системі СІ для узгодження одиниць вимірювання. В електростатиці аналогічною є діелектрична стала ϵ_0 .

Крім індукції, аналогічно електростатичному полю, в магнетизмі вводиться ще одна силова характеристика магнітного поля – напруженість

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \cdot \mu_0}. \quad (9.6)$$

Закон Біо-Савара-Лапласа для напруженості має вид

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}], \text{ або } dH = \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha \cdot d\ell. \quad (9.7)$$

Вираз (9.7) показує, що напруженість не залежить від магнітних властивостей середовища. Вимірюється напруженість в А/м.

Закон Біо-Савара-Лапласа в магнетизмі аналогічний закону Кулона в електростатиці. Він використовується для розрахунку магнітних полів, утворених провідниками зі струмом різних за формою.

За принципом суперпозиції: індукція (напруженість) магнітного поля будь-якого провідника зі струмом дорівнює **векторній** сумі індукцій (напруженостей), створених у даній точці кожним елементом $d\vec{\ell}$ провідника. Для цього необхідно розрахувати криволінійні інтеграли

$$\vec{B} = \int_{\ell} d\vec{B}, \quad \vec{H} = \int_{\ell} d\vec{H}. \quad (9.8)$$

9.3 Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля на осі колового струму

Знайдемо напруженість магнітного поля на осі колового провідника радіусом R , по якому тече струм I . Положення точки задамо висотою h від центра кола (рис.9.6). Спочатку визначимо напрямок вектора \vec{H} .

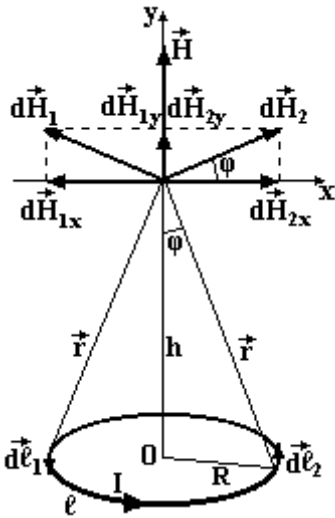


Рисунок 9.6

Для цього виберемо два однакових діаметрально протилежних елементи провідника $d\vec{\ell}_1$ і $d\vec{\ell}_2$. Вони створюють у даній точці вектори напруженості $d\vec{H}_1$ і $d\vec{H}_2$, які перпендикулярні до відповідних радіус-векторів і однакові за величиною. Спроектуємо ці вектори напруженостей на осі x і y . З рисунка видно, що $d\vec{H}_{1x} = -d\vec{H}_{2x}$, тобто попарно компенсуються. Проекції на вісь y направлені паралельно, тому будемо додавати їх алгебраїчно. Таким

чином результуючий вектор направлений вздовж осі кільця у відповідності з **правилом правого гвинта**: якщо обертати гвинт в напрямку струму, його поступальний рух вздовж осі вказує напрямок вектора напруженості.

За принципом суперпозиції (9.8), враховуючи (9.7), маємо

$$H = \int_{\ell} dH_y = \int_{\ell} dH \cdot \sin \varphi = \int_{\ell} \frac{I}{4\pi r^2} d\ell \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Кут α між вектором \vec{r} та $d\vec{\ell}$ дорівнює 90° ; $\sin \varphi = \frac{R}{r}$;

$$r = \sqrt{R^2 + h^2} .$$

$H = \frac{I \cdot R}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \int_{\ell} d\ell$. Так як $\int_{\ell} d\ell = \ell = 2\pi R$ є довжина кола,

одержуємо

$$H = \frac{I \cdot R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} ; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} . \quad (9.9)$$

В центрі колового струму при $h = 0$ маємо

$$H = \frac{I}{2R} ; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R} . \quad (9.10)$$

9.4 Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника із струмом

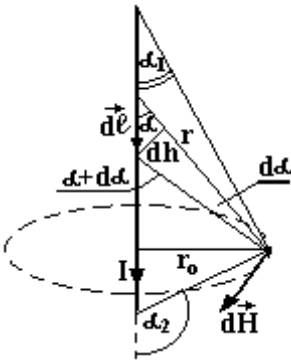


Рисунок 9.7

Положення точки відносно прямолінійного провідника задамо перпендикуляром r_0 до нього (рис.9.7). Очевидно, що вектори $d\vec{H}$ від усіх елементів $d\vec{\ell}$ провідника однаково направлені. Всі вони перпендикулярні до площини, в якій лежать провідник ℓ і перпендикуляр r_0 . Тому вектори $d\vec{H}$ будемо додавати алгебраїчно. Із (9.7) та (9.8) маємо

$$H = \int_{\ell} dH = \int_{\ell} \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha \cdot d\ell . \quad (9.11)$$

Із рисунка (8.7) видно, що $r = \frac{r_0}{\sin \alpha}$;

$$d\ell = \frac{dh}{\sin \alpha} = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{r_0 \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}. \text{ Підстановка в (9.11) після скорочень}$$

дає

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Тут α_1 і α_2 – кути, під якими видно провідник із точки, в якій розраховується напруженість. Таким чином, для прямолінійного провідника зі струмом маємо

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad B = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (9.12)$$

Для прямолінійного нескінченного провідника $\alpha_1 = 0^\circ$; $\alpha_2 = 180^\circ$. Одержуємо

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}; \quad B = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (9.13)$$

9.5 Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Закон повного струму та його застосування для розрахунку магнітного поля

Криволінійний інтеграл виду $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ називається

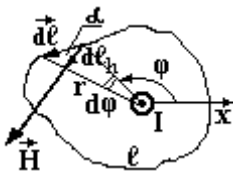


Рисунок 9.8

циркуляцією вектора напруженості магнітного поля. Знайдемо її значення на прикладі магнітного поля, створеного прямолінійним нескінченим провідником із струмом I . Виберемо довільний замкнутий контур ℓ , який охоплює провідник (рис.9.8). Нехай струм тече на нас. За правилом правого гвинта (див розділ

9.1) визначаємо напрямок вектора напруженості. Будемо обходити контур проти годинникової стрілки. Враховуючи (9.13), а також те, що $d\ell_h = r \cdot d\varphi$, одержуємо

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \cdot \cos \alpha = \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}_h = \oint_{\ell} \frac{I}{2\pi r} r \cdot d\varphi = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi = I$$

В загальному випадку
$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^n I_i \quad (9.14)$$

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплює цей контур. Це співвідношення називають ще **законом повного струму**. В (9.14) струми, напрямком яких співпадає з поступальним рухом правого гвинта, який обертається в напрямку обходу контуру, беруться зі знаком (+), а протилежні - зі знаком (-). Слід зауважити, що форма контуру ℓ може бути довільною.

Той факт, що циркуляція вектора напруженості магнітного поля відмінна від нуля, свідчить про те, що магнітне поле не потенціальне, а вихрове. Нагадаємо, що для електричного поля циркуляція вектора його напруженості дорівнювала нулю (див. розділ 7.4).

Застосуємо закон повного струму (9.14) для розрахунку магнітного поля довгого соленоїда та тороїда.

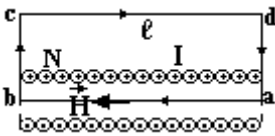


Рисунок 9.9

Приклад 1. Знайти напруженість і індукцію магнітного поля соленоїда. (рис.9.9). Виберемо контур ℓ у формі прямокутника. Будемо нехтувати крайовими ефектами, тобто будемо вважати, що магнітне поле зосереджене всередині котушки, а за її межами напруженість дорівнює нулю.

Інтеграл по контуру в (9.14) розіб'ємо на чотири інтеграли по чотирьом відрізкам вибраного контуру. Одержуємо для лівої частини (9.14)

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + 0 + 0 + 0 = \\ &= \int_0^{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \int_0^{\ell} d\ell = H \cdot \ell \end{aligned}$$

У правій частині (9.14) сума струмів дорівнює $\sum_{i=1}^N I_i = I \cdot N$.

Прирівнюючи, одержуємо $H \cdot \ell = I \cdot N$. Отже напруженість і індукція всередині соленоїда

$$H = \frac{I \cdot N}{\ell} = I \cdot n, \quad B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot N}{\ell} = \mu\mu_0 I \cdot n \quad (9.15)$$

Приклад 2. Знайти напруженість і індукцію магнітного поля тороїда.

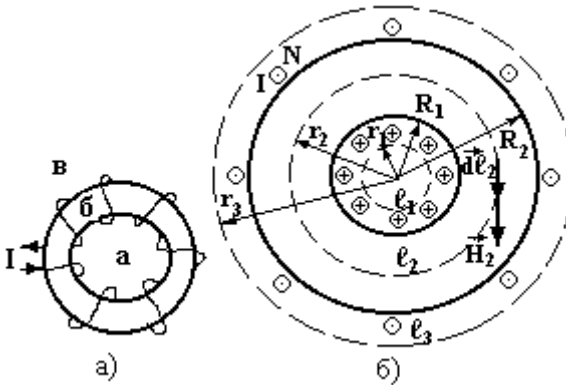


Рисунок 9.10

Тороїд – це котушка, намотана на тороїдальний сердечник (бублик) (рис.9.10). Розрахуємо напруженість магнітного поля для трьох областей, показаних на рис. 9.10, а): а) всередині осердя; б) в осерді; в) зовні за межами осердя.

Виберемо в кожній області кільцевий контур ℓ радіусом r і запишемо для кожного із них закон повного струму (9.14).

а) $r < R_1$. $\oint_{\ell_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = \sum_{i=1}^n I_i = 0$, так як в контур не потрапляє ні один

виток зі струмом. Отже $H_1 = 0$.

$$\text{б) } R_1 < r_2 < R_2. \quad \oint_{\ell_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = \sum_{i=1}^n I_i = I \cdot N \quad H_2 \cdot 2\pi \cdot r_2 = I \cdot N ;$$

$$H_2 = \frac{I \cdot N}{2\pi \cdot r_2} .$$

в) $r_3 > R_2$.

$$\oint_{\ell_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{\ell}_3 = \sum_{i=1}^n I_i = 0, \text{ так як контур } \ell_3 \text{ охоплює однакову кількість}$$

витків з протилежно направленими струмами.

Таким чином, за межами осердя поле відсутнє, а всередині осердя

$$H = \frac{I \cdot N}{2\pi \cdot r} . \quad (9.16)$$

Звертає на себе увагу, що поле тороїда, на відміну від довгого соленоїда, неоднорідне, не дивлячись на те, що тороїд можна одержати із довгого соленоїда, зігнувши його у бублик.

9.6 Дія магнітного поля на рухомий заряд (сила Лоренца).

Рух заряду в магнітному полі

Сила Лоренца \vec{F} – це сила, яка діє на один рухомий заряд q у

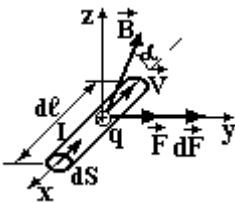


Рисунок 9.11

магнітному полі індукцією \vec{B} . Знайдемо її. Силу Ампера (9.3) можна розглядати як рівнодіючу сил Лоренца, що діють на всі носії струму провідника, які мають певну швидкість \vec{V} направлено руху (рис.9.11).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{F}}{dN} ; \quad d\vec{F} = I [d\vec{\ell} \cdot \vec{B}] . \text{ Струм } I \text{ знайдемо з}$$

таких міркувань. За час dt через переріз провідника dS (рис.9.12) пройдуть ті носії заряду, які віддалені від цього перерізу на відстань, не більшу ніж $\vec{v} \cdot dt$. Їх кількість дорівнює добутку концентрації n на

об'єм циліндра довжиною $\vec{v} \cdot dt$ і площею основи dS
 $dN = n \cdot dS \cdot d\ell$. Одержуємо

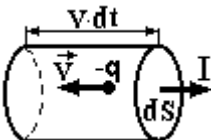


Рисунок 9.12

$$\vec{F} = \frac{d\vec{F}}{dN} = \frac{I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]}{n \cdot dS \cdot d\ell} = \frac{qnV \cdot dS[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]}{n \cdot dS \cdot d\ell} = \frac{qn \cdot d\ell \cdot dS[\vec{V} \cdot \vec{B}]}{n \cdot dS \cdot d\ell}$$

$\vec{F} = q[\vec{V} \cdot \vec{B}]$, або у скалярній формі

$$F = qVB \cdot \sin \alpha. \quad (9.17)$$

При $\alpha = 0^\circ$ сила $F = 0$. На заряд, що летить вздовж магнітного поля воно не діє. При відхиленні від цього напрямку виникає сила Лоренца, яка повертає заряд на траєкторію вздовж магнітного поля. Така дія магнітного поля на рухомий заряд використовується в магнітних лінзах, а також для утримування плазми при досліджуванні термоядерної реакції.

Напрямок сили Лоренца визначається, як і сила Ампера, за правилом лівої руки. Слід звернути увагу, що чотири пальці потрібно направляти по напрямку струму, а не по швидкості заряду. Якщо заряд негативний, то чотири пальці направляють проти швидкості.

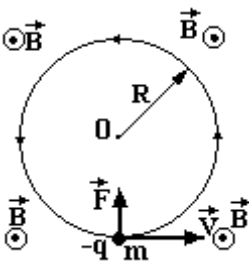


Рисунок 9.13

Вияснимо, як буде рухатись заряд у магнітному полі? Нехай від'ємний заряд q масою m влітає зі швидкістю V у магнітне поле індукцією B перпендикулярно до силових ліній (рис.9.13). Силові лінії зобразимо перпендикулярно до площини рисунка

направленими на нас. Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості, а тому змінює тільки її напрямок і не змінює величину. Отже рух буде рівномірним. Тоді траєкторія буде зображатись у площині рисунка і буде уявляти собою коло радіусом R . Сила Лоренца надає тілу нормального (доцентрового) прискорення. За другим

законом Ньютона маємо $a_n = \frac{F}{m} = \frac{qVB}{m}$. Відомо (2.7), що

$a_n = \frac{V^2}{R}$. Прирівнюємо праві частини і знаходимо радіус обертання

$$R = \frac{mV}{qB}. \quad (9.18)$$

Знайдемо період T обертання, тобто час одного оберту,

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (9.19)$$

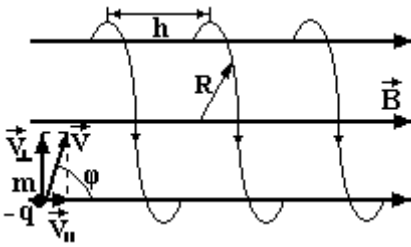


Рисунок 9.14

Вираз (9.19) показує, що період не залежить від швидкості руху.

Нехай заряд влітає під кутом φ до напрямку магнітного поля (рис.9.14). Розкладемо швидкість на дві складові: $V_{\perp} = V \cdot \sin \varphi$ - перпендикулярну до індукції і $V_{\parallel} = V \cdot \cos \varphi$ - паралельну їй.

Частинка буде одночасно приймати участь у двох рухах: 1) по колу в перпендикулярній до магнітного поля площині; 2) прямолінійному рівномірному вздовж поля. Отже частинка буде рухатись по гвинтовій лінії радіусом

$$R = \frac{mV_{\perp}}{qB} = \frac{mV \cdot \sin \varphi}{qB} \quad (9.20)$$

з періодом

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{qB} \quad (9.21)$$

і шагом

$$h = V_{\parallel} \cdot T = \frac{2\pi mV \cos \varphi}{qB}. \quad (9.22)$$

9.7 Магнітний потік. Механічна робота в магнітному полі

В теорії магнетизму, так же, як і в електростатиці (див. розділ 7.3), вводиться поняття потоку вектора індукції (рис. 9.15)

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cos \alpha \cdot dS = B_n \cdot dS. \quad (9.23)$$

B_n - проекція вектора індукції на перпендикуляр до площадки.

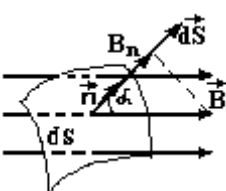


Рисунок 9.15

$$[\Phi] = T_{\text{л}} \cdot M^2 = \frac{H}{A \cdot M} M^2 = \frac{Дж}{A} = \frac{A \cdot B \cdot c}{A} = B \cdot c = \text{вб}$$

На відміну від потоку вектора електростатичної індукції через замкнуту поверхню, який, як відомо (7.16), дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (9.24)$$

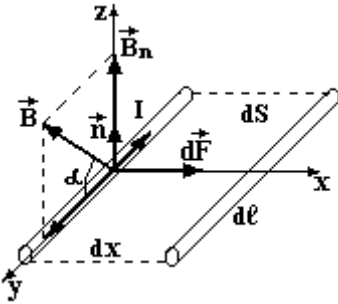


Рисунок 9.16

Це є теорема Остроградського Гауса для магнітного поля. Рівність нулю означає, що лінії індукції магнітного поля замкнуті і в природі не існує уособлених джерел північного, або південного полюсів магніту

Знайдемо роботу dA по переміщенню елемента провідника довжиною $d\ell$ із струмом I у магнітному полі індукцією B . Сила Ампера $dF = I \cdot B \cdot d\ell \cdot \sin \alpha$ переміщує

провідник на відстань dx (рис.9.16). Враховуючи (9.23), знайдемо роботу

$$dA = dF \cdot dx \cdot \cos 0^\circ = I \cdot B \sin \alpha \cdot d\ell \cdot dx = I \cdot B_n \cdot dS = I \cdot d\Phi$$

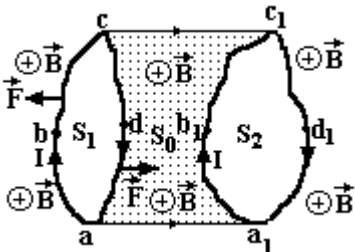
Одержуємо

$$dA = I \cdot d\Phi, \text{ або } A = I \cdot \Delta\Phi, \quad (9.24)$$

що робота по переміщенню провідника із струмом у магнітному полі дорівнює добуткові струму на магнітний потік через площу, яку описує провідник при своєму рухові. Перевіримо розмірність

$$[A] = [I] \cdot [\Phi] = A \cdot \text{вб} = A \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = A \cdot \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Знайдемо роботу по переміщенню замкнутого контуру зі струмом. Розіб'ємо контур на дві частини (рис.9.17): ліву abc і праву ca .



Нехай контур перемістився в положення $a_1b_1c_1d_1$. Позначимо початкову площу контуру S_1 , кінцеву S_2 , а фігури $cc_1b_1a_1ad$ – S_0 . Роботу по переміщенню контуру знайдемо як алгебраїчну суму робіт по

Рисунок 9.17

переміщенню його частин, скориставшись формулою (9.24). Врахуємо, що при вибраному напрямку струму і магнітного поля сили Ампера, які діють на частину abc утворюють з напрямком переміщення тупі кути. Тому ця робота буде від'ємною. Робота по переміщенню частини cda позитивна. Одержуємо

$$dA = dA_{abc} + dA_{cda} = -I \cdot B(S_1 + S_o) + I \cdot B(S_2 + S_o) = I \cdot B(S_2 - S_1).$$

Робота $dA = I \cdot d\Phi$, або $A = \int I \cdot d\Phi = I \cdot \Delta\Phi$ (9.25)

дорівнює добуткові струму на зміну магнітного потоку через площу контуру.

Якщо маємо не один виток, а котушку з N витками, то робота буде в N разів більшою.

$$dA = I \cdot d(N\Phi) = I \cdot d\psi \quad A = \int I \cdot d(N\Phi) = I \cdot \Delta\psi \quad (9.26)$$

Добуток магнітного потоку Φ на кількість витків N називається **потокозчепленням** $\psi = N \cdot \Phi$. (9.27)

9.8 Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца

Явище електромагнітної індукції було відкрите англійським фізиком М.Фарадеєм у 1821 році і полягає у виникненні електрорушійної сили (е.р.с.) і індукційного струму в замкнутому контурі при зміні магнітного потоку через площу, обмежену цим контуром. Величина е.р.с. дорівнює швидкості зміни магнітного потоку – це закон Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ а якщо } N \text{ витків } \varepsilon_i = -\frac{d(N \cdot \Phi)}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (9.28)$$

Знак (-) відображає **правило (закон) Ленца** про напрямок індукційного струму. Індукційний струм має такий напрямок, щоб своїм магнітним полем протидіяти зміні основного магнітного поля. Це зовсім не означає, що магнітне поле індукційного струму протилежне основному. Якщо потік зовнішнього поля зростає, поле індукційного струму протилежне йому, якщо ж потік зовнішнього поля зменшується, то магнітне поле індукційного струму співпадає з ним.

9.9 Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність соленоїда

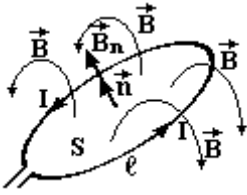


Рисунок 9.18

При протіканні струму по будь-якому контуру створюється магнітне поле, лінії індукції якого пронизують площу S цього ж самого контуру (рис.9.18). Магнітний потік у цьому випадку називається потоком самоіндукції

$$\Phi_c = \int_S \vec{B}_n dS. \quad (9.29)$$

Проекцію вектора індукції на нормаль до поверхні \vec{n} запишемо за законом Біо-Савара-Лапаласа (9.4) та принципом суперпозиції (9.8)

$$\vec{B}_n = \oint_{\ell} d\vec{B}_n = \oint_{\ell} \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}]_n. \quad (9.30)$$

Тоді потік самоіндукції

$$\Phi_c = \oint_{\ell} d\vec{B}_n dS = I \cdot \int_S dS \oint_{\ell} \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}]_n = I \cdot L. \quad (9.31)$$

Тут

$$L = \int_S dS \oint_{\ell} \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}]_n \quad (9.32)$$

залежить тільки від геометричних розмірів контуру (S , ℓ , r) і магнітних властивостей середовища (μ , μ_0) і називається **індуктивністю** контуру. Це коефіцієнт пропорційності між потоком самоіндукції і струмом (див.9.31). Одиницею вимірювання індуктивності є Генрі (Гн). $1\text{Гн} = \frac{\text{вб}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Ом} \cdot \text{с}$.

Якщо маємо не один виток, а N , то індуктивність буде в N разів більшою, тобто будемо мати справу з потікозчепленням самоіндукції

$$\psi_c = I \cdot L. \quad (9.33)$$

Зважаючи на складність розрахунку поверхневого і криволінійного інтегралів за формулою (9.32), індуктивність розраховують простіше із застосуванням теореми Остроградського-Гауса і закону повного струму.

Приклад. Розрахуємо індуктивність довгого соленоїда (див.рис.9.9). Знайдемо потокозчеплення самоіндукції, врахувавши (9.15), (9.23), (9.27) і (9.33)

$$\psi_c = N \cdot B \cdot S = N \cdot S \frac{\mu\mu_0 I \cdot N}{\ell} = I \cdot L.$$

Звідки індуктивність
$$L = \frac{\mu\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{\ell}. \quad (9.34)$$

Явище самоіндукції полягає у виникненні е.р.с. і індукційного струму в тому ж самому контурі, який є джерелом змінного магнітного поля. За законом Фарадея (9.28) е.р.с. самоіндукції

$$\varepsilon_c = -\frac{d\psi_c}{dt} = -\frac{d(L \cdot I)}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.35)$$

прямо пропорційна індуктивності і швидкості зміни струму.

9.10 Зміна струму в котушці при його вмиканні і вимиканні. Фізичний зміст індуктивності

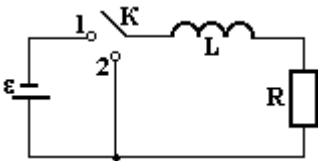


Рисунок 9.19

Знайдемо закон зміни струму при підключенні котушки до джерела е.р.с. і її відключенні (рис.9.19). При розімкненому ключі К струм у колі відсутній. Після замикання ключа в положення 1 в котушці струм наростає. Виникає змінне магнітне поле і е.р.с. самоіндукції. Закон Ома

запишеться так $I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_c}{R}$, а враховуючи (9.35), маємо

$$I = \frac{\varepsilon - L \frac{dI}{dt}}{R} \Rightarrow I \cdot R = \varepsilon - L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{\varepsilon - I \cdot R} = \frac{dt}{L}. \quad \text{Інтегрування з}$$

початковими умовами: при $t = 0$ струм $I = 0$, дає

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (9.36)$$

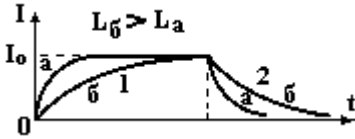


Рисунок 9.20

експоненціальне зростання струму (рис.9.20, крива 1). При $t \rightarrow \infty$ струм досягає стаціонарного значення $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$. Після досягнення

стаціонарного струму перемикання ключа в положення 2 утворює контур, в якому діє тільки е.р.с. самоіндукції. Закон Ома має вид $I = \frac{\varepsilon_c}{R}$, або

$$I = -\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt. \text{ Інтегрування з початковими умовами:}$$

при $t = 0 \quad I = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, дає

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9.37)$$

експоненціальний спад струму (рис.9.20, крива 2).

Відношення $\frac{L}{R} = \tau$ називається **часом релаксації**. Це час, за який струм змінюється в $e = 2,718$ раз (e - основа натурального логарифму).

Вирази (9.36) і (9.37) показують, що із збільшенням індуктивності зміна струму у контурі відбувається повільніше (рис.9.2, а і б). Таким чином, індуктивність є міра інертності котушки до зміни в ній електричного струму.

9.11 Енергія та густина енергії магнітного поля

Для збільшення струму в котушці необхідно виконати роботу проти е.р.с. самоіндукції $dA = I \cdot \varepsilon_c \cdot dt = -I \cdot L \frac{dI}{dt} dt = -I \cdot L \cdot dt$.

Ця робота перетворюється в енергію магнітного поля $dW = -dA = I \cdot L \cdot dt$. Інтегрування в межах від 0 до I дає

$$W = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (8.38)$$

Густина енергії w – це енергія, зосереджена в одиниці об'єму простору, де створене магнітне поле

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{W}{V} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]. \quad (8.39)$$

Знайдемо її на прикладі магнітного поля довгого соленоїда (рис.9.9). Якщо нехтувати крайовими ефектами, то це поле зосереджене всередині котушки, а отже відомий об'єм $V = S \cdot \ell$. Енергію знаходимо за (8.38), індуктивність за (9.34). Одержуємо

$$w = \frac{W}{V} = \frac{L \cdot I^2}{2V} = \frac{\mu\mu_0 N^2 S I^2}{2S\ell}. \quad \text{Враховуючи (9.15) та (9.6),}$$

одержуємо три вирази для густини енергії магнітного поля

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (9.40)$$

ЧАСТИНА 2.