

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ПРАКТИКУМ
З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
(додатки до конспекту лекцій)
для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку»
усіх форм навчання

2016

Практикум з лінійної алгебри та аналітичної геометрії (додатки до конспекту лекцій) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко, Н.М.Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – 50 с.

Укладачі: В.М.Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н. М. Антоненко, ст. викл., к. ф.-м.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П. П'янков, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри вищої та
загальної математики ЗНТУ
Протокол № 8
від 23.03.2016

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	5
2 Векторна алгебра	14
3 Аналітична геометрія на площині.	21
4 Аналітична геометрія в просторі.	32
5 Лінійні оператори.	41
Література	50

ВСТУП

Як відомо, видами самостійної роботи студентів є робота з лекційним матеріалом, розв'язування практичних задач, виконання на протязі семестру типових розрахункових завдань та контрольних робіт. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропонований практикум відповідає курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», який читається для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку».

Даний практикум є частиною конспекту лекцій, він охоплює практично всі основні розділи курсу; тут містяться задачі з усіх тем курсу, методика розв'язування, необхідні теоретичні відомості та зразки розв'язку задач. Крім того, наведений список рекомендованої літератури, як основної, так і додаткової.

Оскільки практикум є частиною конспекту лекцій, то він може бути використаний при систематичному вивченні курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження. Зразки розв'язку задач можуть бути використані при виконанні типових розрахунково-графічних робіт.

1 МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Завдання 1.1. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & -x & -1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язок. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$-1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -x \\ x & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(-x+5) - 7(3+x) + 2(15+x^2) = 0,$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Відповідь: $x \in \{1; 2\}$.

Завдання 1.2. Обчислити визначники 4-го порядку, розклавши по елементах будь-якого рядка чи стовпця, або використавши властивості визначників.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Додамо перший стовпець, попередньо помножений на 4, до кожного наступного стовпця:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 + (-1) \cdot 4 & 4 + (-1) \cdot 4 & 4 + (-1) \cdot 4 \\ -4 & 0 + (-4) \cdot 4 & 5 + (-4) \cdot 4 & 4 + (-4) \cdot 4 \\ -2 & -2 + (-2) \cdot 4 & 3 + (-2) \cdot 4 & 2 + (-2) \cdot 4 \\ -4 & -4 + (-4) \cdot 4 & 1 + (-4) \cdot 4 & 6 + (-4) \cdot 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -16 & -11 & -12 \\ -2 & -10 & -5 & -6 \\ -4 & -20 & -15 & -10 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого рядка:

$$D = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -16 & -11 & -12 \\ -10 & -5 & -6 \\ -20 & -15 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -11 & -12 \\ -10 & -5 & -6 \\ -20 & -15 & -10 \end{vmatrix}.$$

Внесемо знак «мінус» співмножником до першого рядка:

$$D = \begin{vmatrix} 16 & 11 & 12 \\ -10 & -5 & -6 \\ -20 & -15 & -10 \end{vmatrix}.$$

З метою зменшення абсолютних значень матричних елементів віднімаємо третій стовпець від першого і другого:

$$D = \begin{vmatrix} 16-12 & 11-12 & 12 \\ -10-(-6) & -5-(-6) & -6 \\ -20-(-10) & -15-(-10) & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 12 \\ -4 & 1 & -6 \\ -10 & -5 & -10 \end{vmatrix}.$$

До другого рядка додамо перший:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 12 \\ -4+4 & 1+(-1) & -6+12 \\ -10 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \\ -10 & -5 & -10 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами другого рядка:

$$D = 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-20 - 10) = 180.$$

Відповідь: 180.

Завдання 1.3. Розв'язати систему одним із методів: за правилом Крамера, матричним способом або методом Гауса.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язок. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right).$$

Для зручності поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right).$$

Застосуємо алгоритм Жордана-Гауса, послідовно виключаючи невідомі. Виключимо невідому x_1 з двох останніх рівнянь. Для цього перший рядок помножимо на (-4) і додамо до другого, а також перший рядок помножимо на (-3) і додамо до третього:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 4+1 \cdot (-4) & 3+2 \cdot (-4) & -2+1 \cdot (-4) & 4+8 \cdot (-4) \\ 3+1 \cdot (-3) & 2+2 \cdot (-3) & 1+1 \cdot (-3) & 10+8 \cdot (-3) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -6 & -28 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{array} \right).$$

Помножимо другий рядок на (-4) , а третій – на 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 20 & 24 & 112 \\ 0 & -20 & -10 & -70 \end{array} \right).$$

Виключимо невідому x_2 з останнього рівняння. Для цього другий рядок додамо до третього:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 20 & 24 & 112 \\ 0 & 0 & 14 & 42 \end{array} \right).$$

Тепер останнє рівняння має вигляд $14x_3 = 42$, звідки $x_3 = 3$. Тоді з другого рівняння

$$20x_2 + 24x_3 = 112, \quad x_2 = \frac{112 - 24x_3}{20} = \frac{112 - 24 \cdot 3}{20} = 2.$$

Тоді з першого рівняння

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 8 - 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Завдання 1.4. Знайти розв'язки однорідних систем лінійних рівнянь.

$$1) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. 1) Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right).$$

З першого рядка віднімемо другий:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-2 & -2-(-3) & 1-2 & 0-0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right).$$

З другого рядка відніmemo перший, попередньо помножений на 2. З третього рядка відніmemo перший, попередньо помножений на 4:

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2-1\cdot 2 & -3-1\cdot 2 & 2-(-1)\cdot 2 & 0-0\cdot 2 \\ 4-1\cdot 4 & 1-1\cdot 4 & -4-(-1)\cdot 4 & 0-0\cdot 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

З третього рівняння маємо: $-3x_2 = 0$, звідки $x_2 = 0$. Тоді з другого рівняння

$$-5x_2 + 4x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{5}x_3 = 0.$$

Тоді з першого рівняння

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 = x_3 - x_2 = 0 - 0 = 0.$$

Отже, отриманий нами тривіальний розв'язок є єдиним.

2) Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Для зручності поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

З другого рядка відніmemo перший, попередньо помножений на 2. З третього рядка відніmemo перший, попередньо помножений на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2-1\cdot 2 & 4-(-3)\cdot 2 & -3-2\cdot 2 & 0-0\cdot 2 \\ 3-1\cdot 3 & 1-(-3)\cdot 3 & -1-2\cdot 3 & 0-0\cdot 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 \end{array} \right).$$

З третього рядка відніmemo другий:

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 \\ 0-0 & 10-10 & -7-(-7) & 0-0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тепер останній рядок можна відкинути як такий, що не містить протиріччя:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 \end{array} \right).$$

Очевидно, з двох лінійно незалежних рівнянь можна знайти лише дві невідомі. Нехай це будуть x_1 і x_2 . З останнього рівняння:

$$10x_2 - 7x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{10}x_3. \quad \text{З першого рівняння: } x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$x_1 = 3x_2 - 2x_3 = 3 \cdot \frac{7}{10}x_3 - 2x_3 = \frac{1}{10}x_3. \quad \text{Тоді загальний розв'язок}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}x_3 \\ \frac{7}{10}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Тут позначено $C = \frac{1}{10}x_3$. Позначимо також $X_0 = (1 \ 7 \ 10)^T$ – фундаментальний розв'язок однорідної системи. Тоді загальний розв'язок $X = CX_0$, де C – довільна стала.

Відповідь: 1) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

2) $X = CX_0$, де $X_0 = (1 \ 7 \ 10)^T$, C – довільна стала.

Завдання 1.5. Виконати дії над матрицями: $A \cdot B + 2N^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Маємо:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (4-10-4+0) & (0+15+1+4) & (-4+5-0+8) \\ (-2-0+12+0) & (0+0-3+0) & (2+0+0+0) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -10 & 20 & 9 \\ 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 A \cdot B + 2N^T &= \begin{pmatrix} -10 & 20 & 9 \\ 10 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^T = \\
 &= \begin{pmatrix} -10 & 20 & 9 \\ 10 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -10 & 20 & 9 \\ 10 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -10+2 & 20+0 & 9-2 \\ 10+6 & -3+4 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 20 & 7 \\ 16 & 1 & 10 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -8 & 20 & 7 \\ 16 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.6. Дослідити систему на сумісність за теоремою Кронекера-Капеллі, знайти всі розв'язки системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_4 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Складемо розширену матрицю системи. За відсутності певної змінної в черговому рівнянні вважаємо, що відповідний матричний елемент дорівнює нулю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Обчислимо ранги матриці системи і розширеної матриці системи і порівняємо їх. Це можна робити паралельно з приведенням розширеної матриці системи до нижньотрикутного вигляду шляхом лінійної комбінації рядків у відповідності до алгоритму методу Жордана-Гауса.

Для зручності поміняємо рядки місцями:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right).$$

До другого рядка додамо перший. До третього рядка додамо перший, попередньо помножений на (-3) . До четвертого рядка додамо перший, попередньо помножений на (-2) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right).$$

До третього рядка додамо другий, до четвертого рядка додамо другий:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Як бачимо, ранг матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює 2 (як кількість лінійно незалежних рядків). Отже за теоремою Кронекера-Капеллі система рівнянь є сумісною.

Очевидно, з двох лінійно незалежних рівнянь можна знайти лише дві невідомі. Нехай це будуть x_1 і x_2 . З другого рівняння:

$$2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \quad x_2 = 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 1.$$

З першого рівняння:

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \left(2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 1\right) + 2x_3 - 2x_4 = 4x_3 - \frac{5}{2}x_4 + 1.$$

Тоді загальний розв'язок

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4x_3 - \frac{5}{2}x_4 + 1 \\ 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_4 \\ -\frac{1}{2}x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тут позначено $C_1 = x_3$, $C_2 = \frac{1}{2}x_4$ – довільні сталі.

$$\text{Відповідь: сумісна, } X = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

C_1, C_2 – довільні сталі.

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Завдання 2.1. Дано вектори: $\vec{a} = a \vec{m} + b \vec{n}$ та

$\vec{b} = g \vec{m} + d \frac{\vec{n}}{2}$, де $|\vec{m}| = k$, $|\vec{n}| = l$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = f$. Знайти:

а) $(l \vec{a} + m \vec{b}) \cdot (n \vec{a} + t \vec{b})$;

б) $\text{Пр}_{\vec{b}}(n \vec{a} + t \vec{b})$;

в) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

Обчислення провести при $a = 4$, $b = -3$, $g = -2$, $d = 6$, $k = 4$, $l = 7$, $f = \frac{\pi}{3}$, $l = 2$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 3$, $t = 2$.

Розв'язок. а) Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$.
Маємо:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) = k \cdot l \cdot \cos f.$$

Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a \vec{m} + b \vec{n}) \cdot (g \vec{m} + \frac{d}{2} \vec{n}) = \\ &= ag \vec{m} \cdot \vec{m} + \frac{ad}{2} \vec{m} \cdot \vec{n} + bg \vec{n} \cdot \vec{m} + \frac{bd}{2} \vec{n} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Тут $\vec{m} \cdot \vec{m} = |\vec{m}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos(\vec{m} \wedge \vec{m}) = k \cdot k \cdot \cos 0 = k^2$. Аналогічно

отримуємо $\vec{n} \cdot \vec{n} = |\vec{n}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\vec{n} \wedge \vec{n}) = l \cdot l \cdot \cos 0 = l^2$. Враховуючи,

що $\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= ag \vec{m} \cdot \vec{m} + \left(\frac{ad}{2} + bg\right) \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{bd}{2} \vec{n} \cdot \vec{n} = \\ &= agk^2 + \left(\frac{ad}{2} + bg\right) kl \cos f + \frac{bd}{2} l^2 = \\ &= 4 \cdot (-2) \cdot 4^2 + \left(\frac{4 \cdot 6}{2} - 3 \cdot (-2)\right) \cdot 4 \cdot 7 \cos \frac{\pi}{3} - \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot 7^2 = \end{aligned}$$

$$= -128 + (12 + 6) \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot 7^2 = -128 + 252 - 441 = -317.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= (a \vec{m} + b \vec{n}) \cdot (a \vec{m} + b \vec{n}) = \\ &= a^2 \vec{m} \cdot \vec{m} + ab \vec{m} \cdot \vec{n} + ba \vec{n} \cdot \vec{m} + b^2 \vec{n} \cdot \vec{n} = \\ &= a^2 k^2 + 2abkl \cos f + b^2 l^2 = \\ &= 4^2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + (-3)^2 \cdot 7^2 = \\ &= 256 - 336 + 441 = 361, \\ \vec{b} \cdot \vec{b} &= (g \vec{m} + \frac{d}{2} \vec{n}) \cdot (g \vec{m} + \frac{d}{2} \vec{n}) = \\ &= g^2 \vec{m} \cdot \vec{m} + gd \vec{m} \cdot \vec{n} + (\frac{d}{2})^2 \vec{n} \cdot \vec{n} = \\ &= g^2 k^2 + g d k l \cos f + (\frac{d}{2})^2 l^2 = \\ &= (-2)^2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{6}{2})^2 \cdot 7^2 = \\ &= 64 - 168 + 441 = 337. \end{aligned}$$

Нарешті одержуємо:

$$\begin{aligned} &(l \vec{a} + m \vec{b}) \cdot (n \vec{a} + t \vec{b}) = \\ &= l n \vec{a} \cdot \vec{a} + l t \vec{a} \cdot \vec{b} + m n \vec{b} \cdot \vec{a} + m t \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= l n \vec{a} \cdot \vec{a} + (l t + m n) \vec{a} \cdot \vec{b} + m t \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 361 + (2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3) \cdot (-317) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 337 = \\ &= 2166 - \frac{5}{2} \cdot 317 - 337 = 1036,5. \end{aligned}$$

б) Позначимо $\vec{x} = (n \vec{a} + t \vec{b})$. За означенням скалярного добутку

$$\vec{b} \cdot \vec{x} = |\vec{b}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\vec{b} \wedge \vec{x}).$$

Очевидно, добуток $|\vec{x}| \cdot \cos(\vec{b} \wedge \vec{x})$ і є шуканою проекцією. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \text{Пр } \vec{b} \left(n \vec{a} + t \vec{b} \right) &= \text{Пр } \vec{b} \vec{x} = |\vec{x}| \cdot \cos(\vec{b} \wedge \vec{x}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{x}}{|\vec{b}|} = \\ &= \frac{\vec{b} \cdot (n \vec{a} + t \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{n \vec{b} \cdot \vec{a} + t \vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}. \end{aligned}$$

З використанням результатів попереднього пункту маємо:

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{b} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{b} \wedge \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0 = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}|^2, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{|\vec{b}|^2} = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{337}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \text{Пр } \vec{b} \left(n \vec{a} + t \vec{b} \right) &= \frac{n \vec{a} \cdot \vec{b} + t \vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \\ &= \frac{3 \cdot (-317) + 2 \cdot 337}{\sqrt{337}} = \frac{-951 + 674}{\sqrt{337}} = -\frac{277}{\sqrt{337}} \end{aligned}$$

в) За означенням скалярного добутку

$$\vec{a} \cdot (t \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |t \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge t \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |t| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge t \vec{b}).$$

Звідси маємо:

$$\cos(\vec{a} \wedge t \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot (t \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |t| \cdot |\vec{b}|} = \frac{t}{|t|} \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Оскільки в нашому прикладі $t = 2 > 0$, то $|t| = t$, і тоді

$$\cos(\vec{a} \wedge t \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

З використанням результатів першого пункту маємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{361} = 19.$$

Тоді

$$\cos(\vec{a} \wedge t \vec{b}) = \frac{-317}{19 \cdot \sqrt{337}}$$

Відповідь: а) 1036,5;

б) $-\frac{277}{\sqrt{337}}$;

в) $-\frac{317}{19\sqrt{337}}$.

Завдання 2.2. Знайти координати вектора $\vec{c}$, колінеарного вектору $\vec{a} = (-1, -2, 4)$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox , а модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = 2\sqrt{21}$.

Розв'язок. За умовою колінеарності існує число l таке, що $\vec{c} = l\vec{a}$. Тоді вектор $\vec{c}$ має координати $\vec{c} = l(-1, -2, 4) = (-l, -2l, 4l)$. Маємо:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = \sqrt{(-l)^2 + (-2l)^2 + (4l)^2} = \sqrt{21l^2} = |l| \cdot \sqrt{21}.$$

За умовою $|l| \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$, звідки $|l| = 2$, $l_1 = -2$ або $l_2 = 2$. Відповідно $\vec{c}_1 = (2, 4, -8)$ або $\vec{c}_2 = (-2, -4, 8)$.

Обчислимо косинус кута між знайденим вектором і ортом $\vec{i}$ осі Ox :

$$\cos a_1 = \frac{\vec{c}_1 \cdot \vec{i}}{|\vec{c}_1| \cdot |\vec{i}|} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-8) \cdot 0}{2\sqrt{21} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{21}} > 0.$$

Отже, кут a_1 є гострим, і тому вектор $\vec{c}_1$ задовольняє умову задачі. Аналогічно встановлюємо, що $\cos a_2 < 0$, тобто кут a_2 є тупим, і вектор $\vec{c}_2$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $\vec{c} = (2, 4, -8)$.

Завдання 2.3. Обчислити площу паралелограму, побудованого на векторах $\vec{m}$ та $\vec{n}$, якщо $\vec{m} = 7\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = \frac{3}{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{3p}{4}$.

Розв'язок. Обчислимо векторний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$:

$$\begin{aligned}\vec{m} \times \vec{n} &= (7\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = \\ &= 7\vec{a} \times \vec{a} - 21\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b}.\end{aligned}$$

За властивостями векторного добутку $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Тоді

$$\vec{m} \times \vec{n} = 7 \cdot \vec{0} - 21\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} - 3 \cdot \vec{0} = -22\vec{a} \times \vec{b}.$$

За геометричним змістом векторного добутку шукана площа

$$\begin{aligned}S &= |\vec{m} \times \vec{n}| = |-22\vec{a} \times \vec{b}| = 22 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \\ &= 22 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{3p}{4} = 33\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 33.\end{aligned}$$

Відповідь: 33.

Завдання 2.4. Знайти момент сили $\vec{P}$ відносно точки C , якщо сила прикладена до точки A . Відомо, що $\vec{P} = (0, -4, -8)$, $A(-1, 2, 4)$, $C(3, 0, -1)$.

Розв'язок. За визначенням моменту сили відносно полюсу маємо:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{CA} \times \vec{P} = (\vec{OA} - \vec{OC}) \times \vec{P} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1-3 & 2-0 & 4+1 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 32\vec{j} + 16\vec{k},\end{aligned}$$

або $\overrightarrow{M} = (4, -32, 16)$.

$$\text{Відповідь: } \overrightarrow{M} = 4\vec{i} - 32\vec{j} + 16\vec{k} = (4, -32, 16).$$

Завдання 2.5. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами у точках A , B , C , D та його висоту, опущену з вершини D на грань ABC .

$$A(3, -7, 11), B(5, -9, 8), C(7, -7, 17), D(8, -5, 7).$$

Розв'язок. Маємо:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5, -9, 8) - (3, -7, 11) =$$

$$= (5 - 3, -9 - (-7), 8 - 11) = (2, -2, -3);$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (7, -7, 17) - (3, -7, 11) =$$

$$= (7 - 3, -7 - (-7), 17 - 11) = (4, 0, 6);$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (8, -5, 7) - (3, -7, 11) =$$

$$= (8 - 3, -5 - (-7), 7 - 11) = (5, 2, -4).$$

Векторний добуток:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k},$$

або $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, -24, 8)$. Тоді площа грані ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 6^2 + 4^2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{49} = 14.$$

Мішаний добуток:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -12 \cdot 5 - 24 \cdot 2 + 8 \cdot (-4) = -60 - 48 - 32 = -140.$$

Тоді об'єм тетраедра

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-140| = \frac{70}{3}.$$

Нехай H – висота тетраедра, проведена з вершини D . Тоді

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H,$$

$$H = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{70}{3}}{14} = \frac{70}{14} = 5.$$

Відповідь: $V = \frac{70}{3}$, $H = 5$.

3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Завдання 3.1. Трикутник ABC задано координатами його вершин: $A(3;-2)$, $B(5;4)$, $C(-3;1)$. Зробити креслення і знайти:

- 1) довжину і рівняння сторони AB ;
- 2) точку перетину медіан, що проведені з вершин B і C ;
- 3) довжину і рівняння висоти, що проведена із вершини C на сторону AB ;
- 4) рівняння прямої, що походить через точку A паралельно стороні BC ;
- 5) рівняння бісектриси, яку проведено із вершини B ;
- 6) кут α при вершині A з точністю до 0,001 град.

Розв'язок. Побудуємо трикутник за координатами його вершин (рис. 3.1).

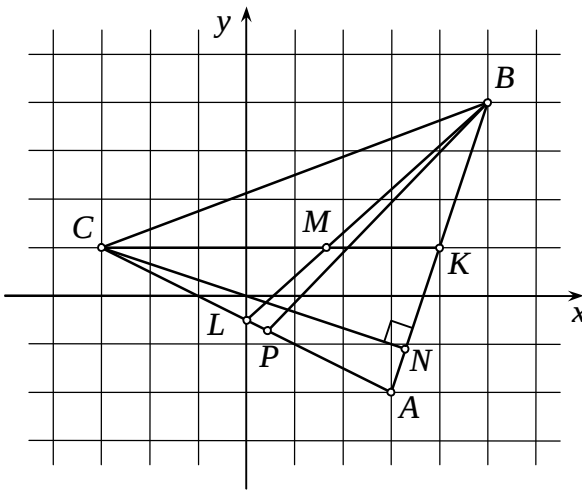


Рисунок 3.1

- 1) Довжина сторони AB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(5-3)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Рівняння сторони AB побудуємо як рівняння прямої, проведеної через дві точки:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_A}{x_B - x_A} &= \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \\ \frac{x - 3}{5 - 3} &= \frac{y - (-2)}{4 - (-2)}, \quad y = 3x - 11. \end{aligned}$$

2) Нехай K – середина сторони AB . Тоді:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4, \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1.$$

Отже, $K(4, 1)$. Тоді рівняння медіани CK :

$$\begin{aligned} \frac{x - x_C}{x_K - x_C} &= \frac{y - y_C}{y_K - y_C}, \\ \frac{x - (-3)}{4 - (-3)} &= \frac{y - 1}{1 - 1}, \quad y = 1. \end{aligned}$$

Аналогічно, нехай L – середина сторони AC . Тоді:

$$x_L = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0, \quad y_L = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $L(0, -\frac{1}{2})$. Тоді рівняння медіани BL :

$$\begin{aligned} \frac{x - x_L}{x_B - x_L} &= \frac{y - y_L}{y_B - y_L}, \\ \frac{x - 0}{5 - 0} &= \frac{y - (-\frac{1}{2})}{4 - (-\frac{1}{2})}, \quad y = \frac{9}{10}x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для знаходження точки перетину медіан, що проведені з вершин B і C , треба розв'язати систему рівнянь прямих, які містять ці медіани:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{9}{10}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини, знаходимо $1 = \frac{9}{10}x - \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{3}$. Отже, точка перетину медіан CK і BL є $M\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

3) 3 п. 1): кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $k_1 = 3$. Тоді кутовий коефіцієнт перпендикуляру до цієї прямої $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$. Рівняння прямої з таким кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку C : $y = y_C + k_1(x - x_C)$, $y = 1 - \frac{1}{3}(x + 3) = -\frac{1}{3}x$. Знайдемо точку N перетину висоти CN і основи AB , розв'язавши систему рівнянь відповідних прямих:

$$\begin{cases} y = 3x - 11 \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{10} \\ y = -\frac{11}{10} \end{cases}$$

Отже, точка N має координати $N\left(\frac{33}{10}, -\frac{11}{10}\right)$. Тоді довжина висоти

$$CN = \sqrt{(x_N - x_C)^2 + (y_N - y_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{33}{10} + 3\right)^2 + \left(-\frac{11}{10} - 1\right)^2} = \frac{21}{\sqrt{10}}.$$

4) Рівняння BC : $\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C},$

$y = y_C + \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \cdot (x - x_C).$ Тоді кутовий коефіцієнт:

$k = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4 - 1}{5 - (-3)} = \frac{3}{8}$. Оскільки шукана пряма паралельна даній, то має такий самий кутовий коефіцієнт. Тоді її рівняння

$$y = y_A + k(x - x_A) = -2 + \frac{3}{8}(x - 3) = \frac{3}{8}x - \frac{25}{8}.$$

5) 3 п. 1): $BA = 2\sqrt{10}$. Аналогічно

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \\ &= \sqrt{(5 - (-3))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}. \end{aligned}$$

Нехай P – основа бісектриси BP , $P \in AC$. За властивістю бісектриси $\frac{CB}{CP} = \frac{AB}{AP}$, $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CB} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{73}}$. Позначимо $m = 2\sqrt{10}$,

$n = \sqrt{73}$. Розіб'ємо відрізок AC точкою P у відношенні $m : n$:

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{n}{m+n} \cdot x_A + \frac{m}{m+n} \cdot x_C = \\ &= \frac{\sqrt{73}}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}} \cdot 3 + \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}} \cdot (-3) = \frac{3(\sqrt{73}-2\sqrt{10})}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}} \approx 0,45. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{n}{m+n} \cdot y_A + \frac{m}{m+n} \cdot y_C = \\ &= \frac{\sqrt{73}}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}} \cdot (-2) + \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}} \cdot 1 = \frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{73})}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}} \approx -0,72. \end{aligned}$$

Кутовий коефіцієнт шуканої бісектриси

$$\begin{aligned} k_{BP} &= \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \frac{4 - \frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{73})}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}}}{5 - \frac{3(\sqrt{73}-2\sqrt{10})}{2\sqrt{10}+\sqrt{73}}} = \\ &= \frac{4(2\sqrt{10}+\sqrt{73}) - 2(\sqrt{10}-\sqrt{73})}{5(2\sqrt{10}+\sqrt{73}) - 3(\sqrt{73}-2\sqrt{10})} = \frac{6(\sqrt{10}+\sqrt{73})}{17\sqrt{10}+2\sqrt{73}}. \end{aligned}$$

Шукане рівняння

$$y = y_B + k_{BP}(x - x_B) = 4 + \frac{6(\sqrt{10}+\sqrt{73})}{17\sqrt{10}+2\sqrt{73}}(x - 5).$$

6) Маємо:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \\ &= \sqrt{(3 - (-3))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

За теоремою косинусів $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos a$,

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(2\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{73})^2}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = \\ &= \frac{40 + 45 - 73}{60\sqrt{2}} = \frac{12}{60\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 0,141421, \end{aligned}$$

$$\alpha \approx \arccos 0,141421 \approx 81,870^\circ.$$

Відповідь: 1) $AB = 2\sqrt{10}$, $y = 3x - 11$;

2) $M\left(\frac{5}{3}, 1\right)$;

3) $CN = \frac{21}{\sqrt{10}}$, $y = -\frac{1}{3}x$;

4) $y = \frac{3}{8}x - \frac{25}{8}$;

5) $y = 4 + \frac{6(\sqrt{10} + \sqrt{73})}{17\sqrt{10} + 2\sqrt{73}}(x - 5)$;

6) $\alpha \approx 81,870^\circ$.

Завдання 3.2. Задано рівняння двох сусідніх сторін паралелограма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(3; -1)$. Знайти рівняння двох інших сторін.

Розв'язок. Зобразимо паралелограм (рис. 3.2).

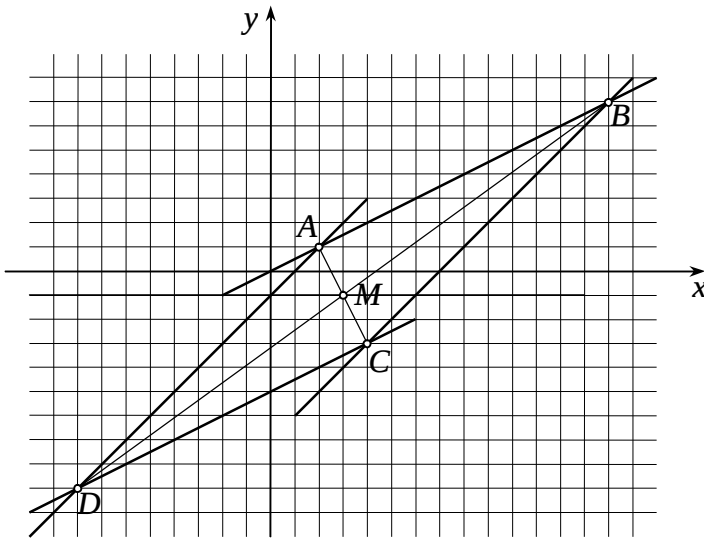


Рисунок 3.2

Першу вершину паралелограму знайдемо як перетин заданих прямих:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Отже, $A(2,1)$. Оскільки точка перетину діагоналей є центром симетрії паралелограму, то $\frac{x_A + x_C}{2} = x_M$, $x_C = 2x_M - x_A = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Аналогічно $y_C = 2y_M - y_A = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$. Отже, $C(4, -3)$.

Кутові коефіцієнти заданих прямих дорівнюють $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$.

Рівняння інших сторін і є рівняння прямих, які проходять через точку C і мають вище вказані кутові коефіцієнти: $y = y_C + k_{1,2}(x - x_C)$.

Тому рівняння сторони BC : $y = -3 + 1 \cdot (x - 4) = x - 7$, рівняння

сторони DC : $y = -3 + \frac{1}{2} \cdot (x - 4) = \frac{1}{2}x - 5$.

Відповідь: $y = x - 7$, $y = \frac{1}{2}x - 5$.

Завдання 3.3. Задано рівняння кривих другого порядку

$a_i x^2 + b_i y^2 + c_i x + d_i y + k_i = 0$, $i = 1, 2$. Встановити їх вид, знайти центр, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис, а для гіперболи – рівняння асимптот. Зробити креслення. Дані наведені в таблиці.

a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	k_1	k_2
25	4	4	-25	200	16	-16	50	316	-109

Розв'язок. 1) За умовою $25x^2 + 4y^2 + 200x - 16y + 316 = 0$.

Виділимо повні квадрати:

$$\begin{aligned} 25(x^2 + 8x) + 4(y^2 - 4y) + 316 &= 0, \\ 25((x + 4)^2 - 16) + 4((y - 2)^2 - 4) + 316 &= 0, \\ 25(x + 4)^2 + 4(y - 2)^2 &= 100, \end{aligned}$$

$$\frac{(x+4)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння еліпсу $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ з півсями $a = 2$, $b = 5$. Центр кривої – точка $x_0 = -4$, $y_0 = 2$, тобто $M(-4, 2)$. В канонічній системі координат $u = x - x_0$, $v = y - y_0$

рівняння має вигляд $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$. Ексцентриситет

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{5^2 - 2^2}}{5} = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Рівняння директрис $v_{1,2} = \pm \frac{b}{e}$,

тобто $v = \frac{25}{\sqrt{21}}$ і $v = -\frac{25}{\sqrt{21}}$. Використовуючи формули переходу

$u = x + 4$, $v = y - 2$, одержимо рівняння директрис в початковій системі координат: $y = 2 + \frac{25}{\sqrt{21}}$ і $y = 2 - \frac{25}{\sqrt{21}}$.

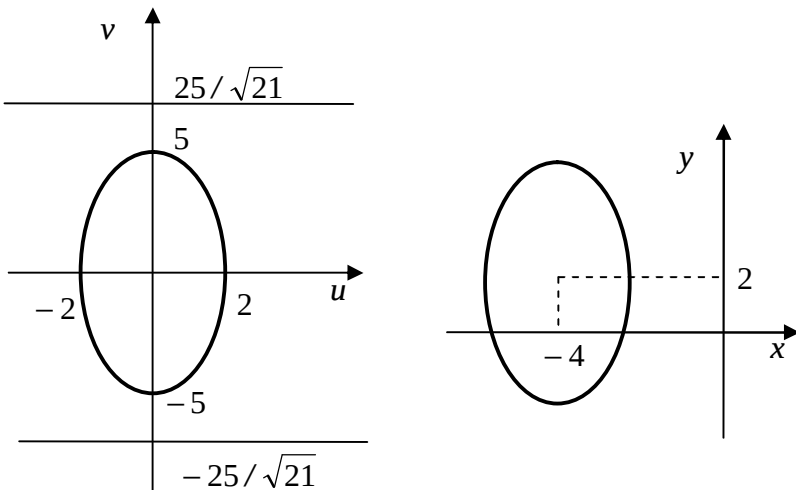


Рисунок 3.3

Еліпс зображений в канонічній та початковій системах координат (рис. 3.3)

2) За умовою $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$. Виділимо повні квадрати:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 &= 0, \\ 4(x^2 + 4x) - 25(y^2 - 2y) &= 109, \\ 4((x+2)^2 - 4) - 25((y-1)^2 - 1) &= 109, \\ 4(x+2)^2 - 25(y-1)^2 &= 100, \\ \frac{(x+2)^2}{5^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} &= 1. \end{aligned}$$

Отримали канонічне рівняння гіперболи $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ з півосями $a = 5$, $b = 2$. Центр кривої – точка $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, тобто $M(-2,1)$. В канонічній системі координат $u = x - x_0$, $v = y - y_0$

рівняння має вигляд $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$. Ексцентриситет

$$e = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a} = \frac{\sqrt{5^2 + 2^2}}{5} = \frac{\sqrt{29}}{5}. \text{ Рівняння директрис } u_{1,2} = \pm \frac{a}{e},$$

тобто $u = \frac{25}{\sqrt{29}}$ і $u = -\frac{25}{\sqrt{29}}$. Рівняння асимптот $v = \pm \frac{b}{a}u$, тобто

$v = \pm \frac{2}{5}u$. Використовуючи формули переходу $u = x + 2$, $v = y - 1$,

одержимо рівняння директрис та асимптот в початковій системі координат: $x = \frac{25}{\sqrt{29}} - 2$ і $x = -\frac{25}{\sqrt{29}} - 2$, а також $y = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ і

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}.$$

Гіпербола зображена в канонічній та початковій системах координат (рис. 3.4).

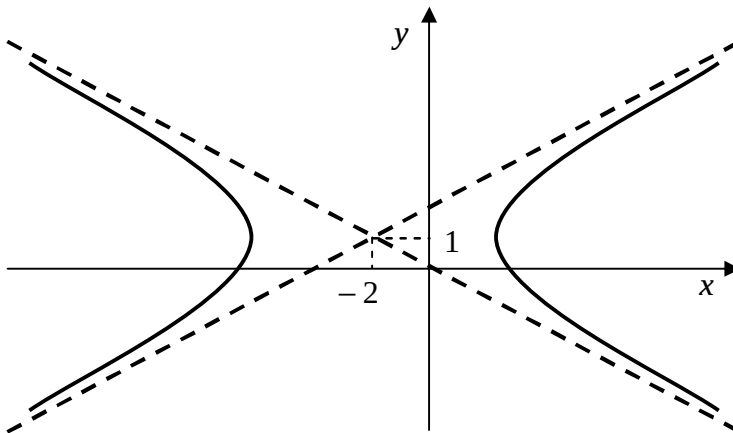
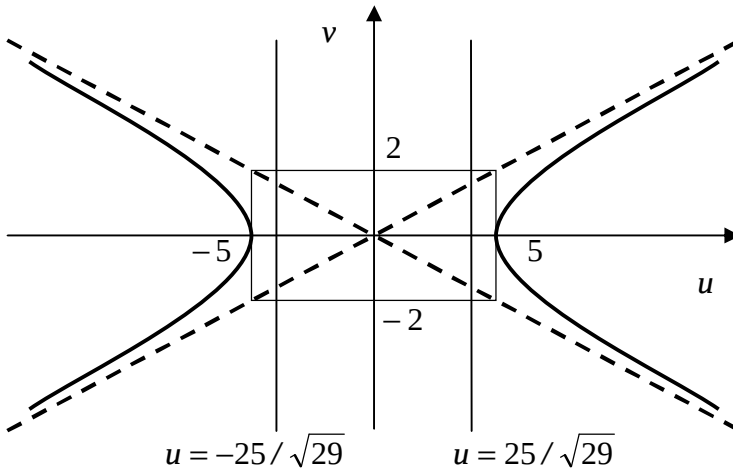


Рисунок 3.4

Відповідь: 1) еліпс $\frac{(x+4)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$;

центр $M(-4, 2)$; $a = 2$, $b = 5$; $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

директриси $y = 2 + \frac{25}{\sqrt{21}}$ і $y = 2 - \frac{25}{\sqrt{21}}$; рис. 3.3;

2) гіпербола $\frac{(x+2)^2}{5^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1;$

центр $M(-2, 1); a = 5, b = 2; e = \frac{\sqrt{29}}{5};$

директриси $x = \frac{25}{\sqrt{29}} - 2$ і $x = -\frac{25}{\sqrt{29}} - 2;$

асимптоти $y = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ і $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5};$ рис. 3.4.

Завдання 3.4. Встановити, що рівняння $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ визначає параболу. Знайти координати її вершини, рівняння осі симетрії, значення параметра. Зробити креслення. Дані наведено в таблиці.

a	b	c	d	k
2	0	10	-1	11

Розв'язок. За умовою $2x^2 + 10x - y + 11 = 0$. Виділимо повний квадрат:

$$2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) - y - \frac{3}{2} = 0,$$

$$2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = y + \frac{3}{2},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right).$$

Отримали канонічне рівняння параболи $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Вершина кривої – точка $x_0 = -\frac{5}{2}$, $y_0 = -\frac{3}{2}$, тобто $M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. В

канонічній системі координат $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ рівняння має вигляд $u^2 = 2pv$. Параметр $p = \frac{1}{4}$. Вісь параболи $u = 0$.

Використовуючи формули переходу $u = x + \frac{5}{2}$, $v = y + \frac{3}{2}$, одержимо рівняння осі параболи в початковій системі координат: $x = -\frac{5}{2}$.

Парабола зображена в канонічній та початковій системах координат (рис. 3.5).

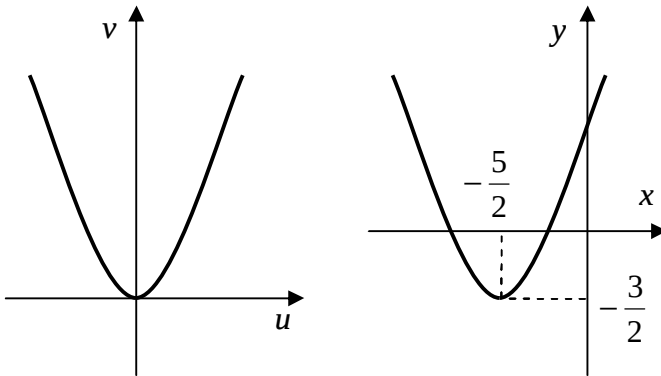


Рисунок 3.5

Відповідь: парабола $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right)$;

вершина $M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $p = \frac{1}{4}$;

вісь $x = -\frac{5}{2}$, рис. 3.5.

4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРИ

Завдання 4.1. Задано точки $A(-2;1;5)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;3)$, $D(-2;0;-2)$. Знайти:

- 1) рівняння площини ABC ;
- 2) рівняння прямої, яка проходить через точку C та паралельна прямій AB ;
- 3) рівняння площини, що проходить через точку D паралельно площині ABC ;
- 4) відстань від точки D до площини ABC ;
- 5) проекцію точки D на площину ABC ;
- 6) точку, симетричну точці D відносно площини ABC ;
- 7) точку, симетричну точці C відносно прямої AB ;
- 8) кут між прямими AB та CD ;
- 9) кут між прямою CD та площиною ABC ;
- 10) відстань між прямими AB та CD .

Розв'язок.

1) Маємо:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1;1;-1) - (-2;1;5) = \\ &= (1 - (-2); 1 - 1; -1 - 5) = (3;0;-6), \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2;-2;3) - (-2;1;5) = \\ &= (2 - (-2); -2 - 1; 3 - 5) = (4;-3;-2).\end{aligned}$$

Нормаль до шуканої площини:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_0} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -6 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 18\vec{j} - 9\vec{k}.\end{aligned}$$

Для спрощення можна обрати іншу нормаль, колінеарну до знайденої:

$$\vec{n}(n_x; n_y; n_z) = -\frac{1}{9} \vec{n}_0 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (2; 2; 1).$$

Побудуємо рівняння площини, яка проходить через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до нормалі $\vec{n}(n_x; n_y; n_z)$:

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0,$$

$$2(x + 2) + 2(y - 1) + 1 \cdot (z - 5) = 0,$$

$$2x + 2y + z - 3 = 0.$$

2) Використаємо вектор $\vec{AB}$ в якості напрямного. Канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $C(x_0; y_0; z_0)$ вздовж напрямного вектору $\vec{l}(p; q; r)$, має вигляд: $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$.

Маємо:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-6}, \text{ тобто } \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}.$$

3) За умовою шукана площина має таку саму нормаль, як і в п.1), тобто $\vec{n}(n_x; n_y; n_z) = (2; 2; 1)$. Тоді рівняння

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

набуває вигляду

$$2(x + 2) + 2(y - 0) + 1 \cdot (z + 2) = 0, \quad 2x + 2y + z + 6 = 0.$$

4) Відстань від точки до площини обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Маємо:

$$d = \frac{|2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-4 - 2 - 3|}{\sqrt{9}} = 3.$$

5) Через точку $D(-2; 0; -2)$ проведемо пряму в напрямку нормалі $\vec{n}(2; 2; 1)$ до площини ABC :

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+2}{1} = l.$$

Розв'яжемо це рівняння сумісно з рівнянням площини ABC :

$$\begin{cases} x = 2l - 2 \\ y = 2l \\ z = l - 2 \\ 2x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ l = 1 \end{cases}$$

Отже, шукана точка $D_1(0; 2; -1)$.

6) Нехай шукана точка $D_2(x_2; y_2; z_2)$. За умовою точка D_1 , знайдена в попередньому пункті, є серединою відрізка DD_2 . Тоді

$$\frac{x_D + x_{D_2}}{2} = x_{D_1}, \quad x_{D_2} = 2x_{D_1} - x_D = 2 \cdot 0 - (-2) = 2,$$

$$y_{D_2} = 2y_{D_1} - y_D = 2 \cdot 2 - 0 = 4,$$

$$z_{D_2} = 2z_{D_1} - z_D = 2 \cdot (-1) - (-2) = 0.$$

Отже, $D_2(2; 4; 0)$.

7) Побудуємо параметричне рівняння прямої AB , яка проходить через точку A , застосовуючи напрямний вектор $\overrightarrow{AB}(3; 0; -6)$, знайдений в п. 1):

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-5}{-6} = \frac{l}{3},$$

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-5}{-2} = l.$$

Через точку $C(2; -2; 3)$ проведемо площину, застосовуючи вектор $\overrightarrow{AB}(3; 0; -6)$ як нормаль:

$$3(x-2) + 0 \cdot (y+2) - 6(z-3) = 0, \quad x - 2z + 4 = 0.$$

Знайдемо перетин побудованих прямої і площини:

$$\begin{cases} x = l - 2 \\ y = 1 \\ z = -2l + 5 \\ x - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = 1 \\ z = \frac{9}{5} \\ l = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Отже, $C_1\left(-\frac{2}{5}; 1; \frac{9}{5}\right)$ – проекція точки C на пряму AB .

Нехай C_2 – шукана точка. Тоді C_1 – середина відрізка CC_2 . Тоді

$$\frac{x_C + x_{C_2}}{2} = x_{C_1}, \quad x_{C_2} = 2x_{C_1} - x_C = 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 2 = -\frac{14}{5},$$

$$y_{C_2} = 2y_{C_1} - y_C = 2 \cdot 1 - (-2) = 4,$$

$$z_{C_2} = 2z_{C_1} - z_C = 2 \cdot \frac{9}{5} - 3 = \frac{3}{5}.$$

Отже, $C_2\left(-\frac{14}{5}; 4; \frac{3}{5}\right)$.

8) Кут між прямими є кут між їх напрямними векторами.

Маємо:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (-2; 0; -2) - (2; -2; 3) = \\ &= (-2 - 2; 0 - (-2); -2 - 3) = (-4; 2; -5). \end{aligned}$$

Оскільки з п.1) $\overrightarrow{AB}(3; 0; -6)$, то

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \\ &= \frac{3 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-5)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{-12 + 30}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}} = \frac{2}{5}, \\ (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}) &= \arccos \frac{2}{5} \approx 66,4^\circ. \end{aligned}$$

9) З п. 1) оберемо нормаль $\vec{n}(2; 2; 1)$, а з п. 8) – вектор $\overrightarrow{CD}(-4; 2; -5)$. Маємо:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{n} \wedge \overrightarrow{CD}) &= \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \\ &= \frac{2 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-5)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{45}}, \\ (\vec{n} \wedge \overrightarrow{CD}) &= \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{45}}\right) = 180^\circ - \arccos\frac{3}{\sqrt{45}} \approx 116,6^\circ.\end{aligned}$$

Тоді шуканий кут $116,6^\circ - 90^\circ = 26,6^\circ$.

10) Побудуємо рівняння площини, яка містить пряму CD і є паралельною до прямої AB . Нормаль цієї площини

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 39\vec{j} + 6\vec{k}.\end{aligned}$$

Для зручності можна обрати нормаль

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{3}\vec{n} = 4\vec{i} + 13\vec{j} + 2\vec{k} = (4; 13; 2).$$

Проведемо площину через точку C :

$$4(x-2) + 13(y+2) + 2(z-3) = 0, \quad 4x + 13y + 2z + 12 = 0.$$

Шуканою є відстань від будь-якої точки прямої AB до знайденої площини, наприклад, від точки A :

$$\begin{aligned}d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ d &= \frac{|4 \cdot (-2) + 13 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 12|}{\sqrt{4^2 + 13^2 + 2^2}} = \frac{27}{\sqrt{189}} = 3\sqrt{\frac{3}{7}}.\end{aligned}$$

Відповідь: 1) $2x + 2y + z - 3 = 0$;

$$2) \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2};$$

$$3) 2x + 2y + z + 6 = 0;$$

$$4) 3;$$

$$5) D_1(0; 2; -1);$$

$$6) D_2(2; 4; 0);$$

$$7) C_2\left(-\frac{14}{5}; 4; \frac{3}{5}\right);$$

$$8) (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}) = \arccos \frac{2}{5} \approx 66,4^\circ;$$

$$9) 26,6^\circ;$$

$$10) 3\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Завдання 4.2. Звести рівняння до канонічного вигляду, визначити тип поверхні та зробити схематичне креслення.

$$1) 16x^2 + 9z^2 + 32x - 144y - 36z + 196 = 0;$$

$$2) x^2 + 2y^2 + 8y = 0;$$

$$3) x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 8z + 22 = 0.$$

Розв'язок. 1) Виділимо повні квадрати:

$$16(x^2 + 2x) + 9(z^2 - 4z) = 144y - 196,$$

$$16((x+1)^2 - 1) + 9((z-2)^2 - 4) = 144y - 196,$$

$$16(x+1)^2 + 9(z-2)^2 = 144y - 144,$$

$$\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(z-2)^2}{4^2} = y - 1,$$

Одержали канонічне рівняння еліптичного параболоїда

$\frac{u^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 2pv$ з вершиною в точці $M(-1; 1; 2)$. Поверхня

зображена в канонічній системі координат на рис. 4.1.

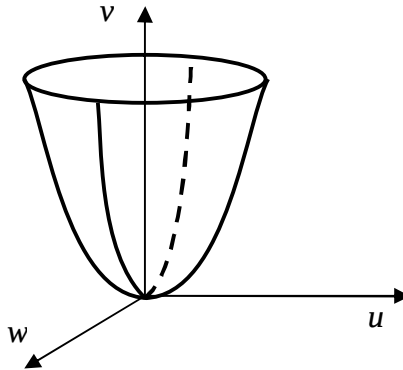


Рисунок 4.1

2) Виділимо повні квадрати:

$$\begin{aligned}x^2 + 2(y^2 + 4y) &= 0, \\x^2 + 2((y + 2)^2 - 4) &= 0, \\x^2 + 2(y + 2)^2 &= 8, \\ \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y + 2)^2}{2^2} &= 1,\end{aligned}$$

Одержали канонічне рівняння еліптичного циліндра $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$.

Поверхня зображена в канонічній системі координат на рис. 4.2.

3) Виділимо повні квадрати:

$$\begin{aligned}(x^2 + 6x + 9 - 9) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + (z^2 - 8z + 16 - 16) + 22 &= 0, \\((x + 3)^2 - 9) + ((y - 1)^2 - 1) + ((z - 4)^2 - 16) + 22 &= 0, \\(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 &= 4, \\ \frac{(x + 3)^2}{2^2} + \frac{(y - 1)^2}{2^2} + \frac{(z - 4)^2}{2^2} &= 1.\end{aligned}$$

Одержали канонічне рівняння сфери $\frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2} + \frac{w^2}{R^2} = 1$ з центром $M(-3;1;4)$ та радіусом $R = 2$. Поверхня зображена в канонічній системі координат на рис. 4.3.

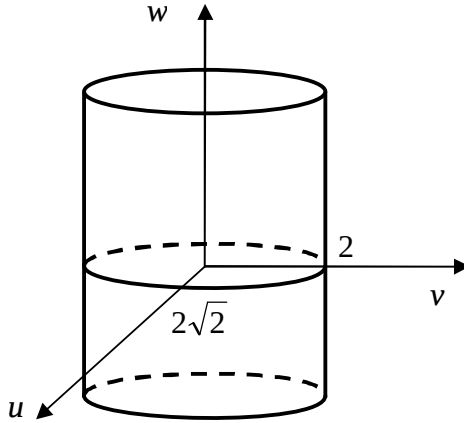


Рисунок. 4.2

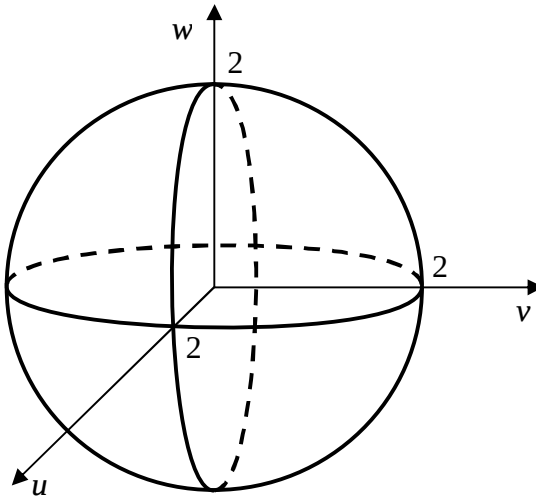


Рисунок 4.3

Відповідь: 1) еліптичний параболоїд $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(z-2)^2}{4^2} = y-1$,
рис. 4.1;

2) еліптичний циліндр $\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$, рис. 4.2;

3) сфера $\frac{(x+3)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} + \frac{(z-4)^2}{2^2} = 1$, рис. 4.3.

5 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Завдання 5.1. Нехай $\vec{a}(x; y; z)$. Чи будуть лінійними наступні перетворення:

1) $A\vec{a} = (x + 2z, 3x + 4z, 6x - 7y + z),$

2) $B\vec{a} = (x + 2, 3x + 4y, 6x - 7y + z),$

3) $C\vec{a} = (x^2, 4z, 6x - 7y + z).$

Розв'язок. Перевіримо дві властивості лінійності:

$$A(\vec{m} + \vec{n}) = A\vec{m} + A\vec{n} \quad \text{і} \quad A(l\vec{m}) = lA\vec{m}.$$

1) Для перевірки першої властивості покладемо

$$\begin{aligned} \vec{a}(x; y; z) &= \vec{m}(x_1; y_1; z_1) + \vec{n}(x_2; y_2; z_2) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 6x_1 - 7y_1 + z_1 + 6x_2 - 7y_2 + z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} A(\vec{m} + \vec{n}) &= A\vec{a} = \\ &= \vec{i}(x + 2z) + \vec{j}(3x + 4z) + \vec{k}(6x - 7y + z) = \\ &= \vec{i}((x_1 + x_2) + 2(z_1 + z_2)) + \\ &\quad + \vec{j}(3(x_1 + x_2) + 4(z_1 + z_2)) + \\ &\quad + \vec{k}(6(x_1 + x_2) - 7(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) = \\ &= \vec{i}(x_1 + 2z_1) + \vec{i}(x_2 + 2z_2) + \\ &\quad + \vec{j}(3x_1 + 4z_1) + \vec{j}(3x_2 + 4z_2) + \\ &\quad + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1) + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2) = \\ &= \vec{i}(x_1 + 2z_1) + \vec{j}(3x_1 + 4z_1) + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1) + \\ &\quad + \vec{i}(x_2 + 2z_2) + \vec{j}(3x_2 + 4z_2) + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2) = \\ &= A\vec{m} + A\vec{n}. \end{aligned}$$

Для перевірки другої властивості покладемо

$$\vec{a}(x; y; z) = l \vec{m}(x_1; y_1; z_1) = \begin{pmatrix} l x_1 & l y_1 & l z_1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} A(l \vec{m}) &= A \vec{a} = \\ &= \vec{i}(x + 2z) + \vec{j}(3x + 4z) + \vec{k}(6x - 7y + z) = \\ &= \vec{i}(lx_1 + 2lz_1) + \vec{j}(3lx_1 + 4lz_1) + \vec{k}(6lx_1 - 7ly_1 + lz_1) = \\ &= l(\vec{i}(x_1 + 2z_1) + \vec{j}(3x_1 + 4z_1) + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1)) = lA\vec{m}. \end{aligned}$$

Отже, перетворення A є лінійним згідно з визначенням.

2) Для перевірки першої властивості покладемо

$$\begin{aligned} \vec{a}(x; y; z) &= \vec{m}(x_1; y_1; z_1) + \vec{n}(x_2; y_2; z_2) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ x & y & z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} B(\vec{m} + \vec{n}) &= B \vec{a} = \\ &= \vec{i}(x + 2) + \vec{j}(3x + 4y) + \vec{k}(6x - 7y + z) = \\ &= \vec{i}((x_1 + x_2) + 2) + \\ &\quad + \vec{j}(3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2)) + \\ &\quad + \vec{k}(6(x_1 + x_2) - 7(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) = \\ &= 2\vec{i} + \vec{i}x_1 + \vec{i}x_2 + \\ &\quad + \vec{j}(3x_1 + 4y_1) + \vec{j}(3x_2 + 4y_2) + \\ &\quad + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1) + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2) = \\ &= 2\vec{i} + (\vec{i}x_1 + \vec{j}(3x_1 + 4y_1) + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1)) + \\ &\quad + (\vec{i}x_2 + \vec{j}(3x_2 + 4y_2) + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2)) = \\ &= 2\vec{i} + (\vec{i}(x_1 + 2) + \vec{j}(3x_1 + 4y_1) + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1)) - 2\vec{i} + \end{aligned}$$

$$+ (\vec{i}(x_2 + 2) + \vec{j}(3x_2 + 4y_2) + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2)) - 2\vec{i} = \\ = B\vec{m} + B\vec{n} - 2\vec{i} \neq B\vec{m} + B\vec{n}.$$

Перша властивість не виконується, і тому перетворення B не є лінійним. Перевіряти другу властивість сенсу немає.

3) Для перевірки першої властивості покладемо

$$\vec{a}(x; y; z) = \vec{m}(x_1; y_1; z_1) + \vec{n}(x_2; y_2; z_2) = \\ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$C(\vec{m} + \vec{n}) = C\vec{a} = \\ = \vec{i}x^2 + 4\vec{j}z + \vec{k}(6x - 7y + z) = \\ = \vec{i}(x_1 + x_2)^2 + 4\vec{j}(z_1 + z_2) + \\ + \vec{k}(6(x_1 + x_2) - 7(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) = \\ = \vec{i}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) + 4\vec{j}z_1 + 4\vec{j}z_2 + \\ + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1) + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2) = \\ = (\vec{i}x_1^2 + 4\vec{j}z_1 + \vec{k}(6x_1 - 7y_1 + z_1)) + \\ = (\vec{i}x_2^2 + 4\vec{j}z_2 + \vec{k}(6x_2 - 7y_2 + z_2)) + 2\vec{i}x_1x_2 = \\ = C\vec{m} + C\vec{n} + 2\vec{i}x_1x_2 \neq C\vec{m} + C\vec{n},$$

якщо x_1, x_2 – довільні. Отже, перетворення C не є лінійним.

Перевіряти другу властивість сенсу немає.

Відповідь: 1) буде лінійним;
2) не буде лінійним;
3) не буде лінійним.

Завдання 5.2. Знайти матрицю в базисі $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, яка в базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

якщо $\bar{e}_1 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{e}_2 = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{e}_3 = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

Розв'язок. З координат нових базисних векторів складемо матрицю переходу, розташувавши ці координати по стовпцях

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$\begin{aligned} (T | E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim (E | T^{-1}). \end{aligned}$$

Тоді $D_{\bar{e}} = T^{-1}DT$,

$$D_{\bar{e}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:
$$\begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Завдання 5.3. Знайти власні значення та власні вектори матриці G :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння: $|G - lE| = 0$,

$$\begin{vmatrix} 2-l & 1 & -1 \\ 1 & 2-l & -1 \\ 0 & 0 & 1-l \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за елементами третього рядка:

$$(-1)^{3+3}(1-l)((2-l)^2 - 1) = 0,$$

$$l_{1,2} = 1, \quad l_3 = 3.$$

Знайдемо власні вектори. При $l = 1$ маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ця система містить лише одне лінійно незалежне рівняння: $x + y - z = 0$, $x = z - y$. Отже, власні вектори

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тут позначено $C_1 = y$, $C_2 = z$. Отже, для власного числа $l = 1$ отримали два власних вектори:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $l = 3$ маємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Додамо перше рівняння до другого:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

З другого (або третього) рівняння маємо $z = 0$, тоді з першого: $y = x$.

Отже, власний вектор

$$X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тут позначено $C_3 = x$.

$$\textbf{Відповідь: } l_{1,2} = 1, \quad X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad l_3 = 3, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Завдання 5.4. Звести квадратичну форму

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

до канонічного вигляду.

Розв'язок. Складемо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння: $|A - lE| = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1-l & 1 & 1 \\ 1 & 1-l & 1 \\ 1 & 1 & 3-l \end{vmatrix} = 0,$$

Обчислюючи визначник, отримуємо

$$-l^3 + 5l^2 - 4l = 0.$$

Власні числа $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $l_3 = 4$.

В канонічному базисі квадратична форма має вигляд

$$F(u, v, w) = l_1 u^2 + l_2 v^2 + l_3 w^2 = v^2 + 4w^2.$$

$$\textbf{Відповідь: } F(u, v, w) = v^2 + 4w^2.$$

Завдання 5.5. Дослідити криву другого порядку $\Phi(x, y) = 0$ та побудувати її.

$$\Phi(x, y) = -x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1.$$

Розв'язок. Перш за все треба позбавитись перехресного доданку $2xy$. Для цього приведемо квадратичну форму

$F(x, y) = -x^2 - y^2 + 2xy$ до канонічного вигляду. Матриця квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння: $|A - lE| = 0$,

$$\begin{vmatrix} -1-l & 1 \\ 1 & -1-l \end{vmatrix} = 0, \quad (-1-l)^2 - 1 = 0.$$

Власні числа $l_1 = -2$, $l_2 = 0$. Їм відповідають власні вектори

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Норми цих векторів

$$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \|X_2\| = \sqrt{2}.$$

Нормовані власні вектори

$$X_{01} = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad X_{02} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Формуємо матрицю переходу, розташовуючи знайдені координати по стовпцях:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В канонічному базисі з власних векторів квадратична форма має вигляд $F(u, v) = -2u^2$. Формули переходу до канонічних координат задаються за допомогою матриці P :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v$$

Підставляючи ці вирази в рівняння кривої, одержуємо після спрощень:

$$-2u^2 + 2\sqrt{2}u + 1 = 0,$$

$$u^2 - \sqrt{2}u - \frac{1}{2} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, одержуємо $u = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ або $u = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Дані рівняння описують пару паралельних прямих (вироджений випадок). В канонічній системі координат прямі зображені на рис. 5.1.

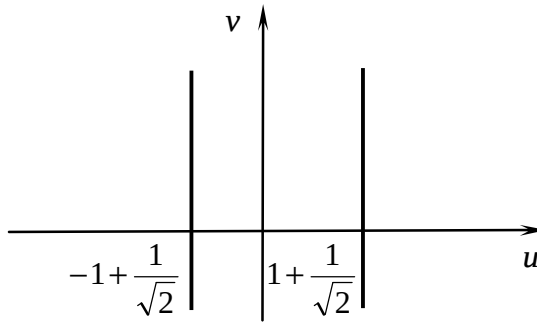


Рисунок 5.1

Відповідь: пара паралельних прямих $u = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$,
рис. 5.1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бутузов В.Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах / Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. – М. : Физматлит, 2002. – 247 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 1986. – 304 с.
3. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1999. – 297 с.
4. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1999. – 224 с.
5. Онуфрієнко В.М. Розрахунково-графічні завдання з лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів спеціальностей "Радіотехніка" та "Інформаційні мережі зв'язку" усіх форм навчання / В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 50 с.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М. : БИНОМ, 2005. – 383 с.
7. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – М. : Наука, 1972. – 304 с.