

УДК 517.9

Онуфрієнко В.М.¹, Засовенко А.В.², Слюсарова Т.І.³

¹ д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

³ канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

³ асист. НУ «Запорізька політехніка»

ДИФЕРЕНТЕГРАЛЬНІ СТОКО-ДЖЕРЕЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ У РІВНЯННЯХ ЧЕПМЕНА-КОЛМОГОРОВА

Останніми роками поняття дробового інтеграла та похідної активно застосовуються у багатьох областях фізики, механіки, математичної біології, моделюванні стохастичних процесів.

Для опису фрактальних розподілів імовірностей і формулювання рівняння Чепмена-Колмогорова застосовуємо диферентеграли зі змінним

порядком $d^{\alpha(t)}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{dt}{(t-t')^{1-\alpha(t)}}$, що пов'язані зв'язком з дробовою похідною $d^{\alpha(t)}L(t) = {}_aD_t^{\alpha(t)}L(t)d^{\alpha(t)}t$, де дробова похідна ${}_aD_t^{\alpha(t)}L(t)$ використовується у формі Рімана-Ліувілля [1]

$${}_aD_t^{\alpha(t)}L(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{L(t')}{(t-t')^{\alpha(t)}} dt'. \quad (1)$$

Визначаємо диферінтегральні характеристики [2] (швидкості зміни) імовірності

$$D^{\alpha(t)}P_{i,j}(t) = D^{\alpha(t)}P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}, \quad (2)$$

того, що марковський процес $\{X(t); j \mid t \geq 0\}$ знаходиться в j -стані такий час, що $X(0) = i$.

Для стану на час s маємо

$$\begin{aligned} D^{\alpha(t)}P_{i,j}(t) &= \sum D^{\alpha(t)}P\{X(t) = j, X(s) = k \mid X(0) = i\} = \\ &= \sum D^{\alpha(t)}P\{X(s) = k \mid X(0) = i\} D^{\alpha(t)}P\{X(t) = j \mid X(s) = k\}. \end{aligned} \quad (3)$$

З урахуванням того, що залишковий час до наступного переходу є експоненціальним зі швидкістю ν_k , а процес з початком в s в стані k статистично ідентичний тому, що починається з часу 0 в стані k , для будь-якого $0 \leq s \leq t$ виконується

$$D^{\alpha(t)}P\{X(t) = j \mid X(s) = k\} = D^{\alpha(t)}P_{kj}(t-s). \quad (4)$$

Таким чином, маємо рівняння Чепмана-Колмогорова для α -характеристик імовірностей марковського процесу

$$D^{\alpha(t)}P_{ij}(t) = \sum_k D^{\alpha(t)}P_{ik}(s) D^{\alpha(t)}P_{kj}(t-s). \quad (5)$$

Диференціальні рівняння Колмогорова в α -характеристиках отримуємо з урахуванням того, що за малих $t-s$ можливий вираз $P_{kj}(t-s)$ через $(t-s)q_{kj} + o(t-s)$, $k \neq j$; так само для $P_{jj}(t-s)$ є зв'язок $1 - (t-s)\nu_j + o(s)$. Отже,

$$D^{\alpha(t)}P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} [D^{\alpha(t)}P_{ik}(s)(t-s)q_{kj}] + D^{\alpha(t)}P_{ij}(s)[1 - (t-s)\nu_j + \frac{o(s)}{s}]. \quad (6)$$

Після віднімання в (6) з обох сторін $P_{ij}(s)$, ділення на $(t-s)$ у границі при $(s \rightarrow t)$ маємо рівняння Колмогорова

$$\frac{d}{dt} D^{\alpha(t)} P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} (D^{\alpha(t)} P_{ik}(t) q_{kj}) - D^{\alpha(t)} P_{ij}(t) v_j. \quad (7)$$

В одержаному диференціальному рівнянні у правій частині записано різницю α – характеристик (швидкостей) переходів в j – стан за t та переходів за станом j ; ця різниця є швидкістю, з якою $D^{\alpha(t)} P_{ij}(t)$ змінюється у часі.

У фрактальних процесах, що у багатьох випадках є моделями для опису аномальних процесів (немарковських, пам'яттєвих, суб- та супердифузії у фактально конфігурованому середовищі), алгоритм може бути заснованим на інтегральному варіанті рівнянь Чепмена-Колмогорова із введенням пам'яттєвим ядром та диференціалом (порів. з [3]) зі змінним порядком $\alpha(t)$

$$P(x, t | x_0, 0) = \int_0^t d\tau \int P(x, t | x', \tau) P(x', \tau | x_0, 0) d^\alpha x'. \quad (8)$$

Завдяки створенню математичних моделей підвищеної інформаційної складності і розмірності відкривається можливість для формування і накопичення нових знань, зокрема, про кібератаки і особливості кібертероризму. На базі наведеного методу можна створити нові методи інтелектуальної оцінки кіберстійкості інформаційної інфраструктури, засоби інтелектуального розпізнавання кіберзагроз в умовах наростаючої динаміки числа впливів, а також розробити нові технології керування явищами безпеки для успішної протидії кібератакам, кібертероризму та забезпечення потрібного рівня кібербезпеки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006. 523 p.
2. Onufriyenko V.M. Physical and Geometric Interpretation of α - Characteristics. Telecommunication and Radio Engineering. 1991. Vol.53, No. 4-5. P. 136-139.
3. Онуфрієнко В., Килимник І., Слюсарова Т., Зіненко І. Диференціальна модель фрактального хвильового трансформатора. Grail of Science. 2024. №36. С. 282-286.
4. Tarasov V.E. Fractional Chapman-Kolmogorov equation. Modern Physics Letters B. 2007. Vol.21, No4. P.163-174.