МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
ректор ЗНТУ
проф. _________ С. Б. Бєліков
«____»______________ 2018 р.

КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

«Дослідження операцій в транспортних системах»

для студентів денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

Частина II. Методичні вказівки до виконання практичних занять
Розділ 2. *Транспортна задача лінійного програмування.*
Динамічне програмування.

Факультет: Транспортний
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина II, розділ 2)/ Склали: доц. Кузькін О.Ф., доц. Лащених О.А.. — Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. — 33 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук Кузькін О. Ф.
доц., канд. техн. наук Лащених О. А.

Рецензент: проф., д-р техн. наук Турпак С. М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні
Вченої ради Транспортного
факультету ЗНТУ
Протокол № ___ від «___» _________ 2018 р.

П Р А К Т И Ч Н Е З А Н Я Т Т Я № 6

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА КРИТЕРІЄМ ВАРТОСТІ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Мета заняття: вивчення методу рішення транспортної задачі лінійного програмування за критерієм вартості перевезень методом потенціалів.

Стисла теоретична довідка

Транспортна задача — це задача вибору оптимального варіанту доставки продукції від пунктів виробництва до пунктів споживання з врахуванням всіх реальних можливостей з її постачання і споживання. Найпростіша класична постановка транспортної задачі за критерієм вартості полягає у наступному.

Нехай є m пунктів зосередження вантажу (або пунктів виробництва) $A_1, A_2, ..., A_m$, в яких розміщено однорідний вантаж у кількості $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць. Цей вантаж повинен бути доставлений у n пунктів споживання $B_1, B_2, ..., B_n$ з обсягом попиту відповідно $b_1, b_2, ..., b_n$. Передбачається, що можливе транспортування з кожного пункту постачання до кожного пункту споживання. Задані транспортні витрати C_{ij}, пов'язані з доставкою одиниці вантажу з пунктів A_i до пунктів B_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у складанні такого плану перевезень, який забезпечує виконання наступних умов:

1) запаси кожного постачальника повинні бути повністю вивезені;

2) попит всіх пунктів споживання повинен бути задоволений за рахунок розподілу всього запасу вантажів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

3) забезпечити мінімальні транспортні витрати.

Умови транспортної задачі подають у формі таблиці, яка має вигляд табл. 6.1.

Таблиця 6.1 — Умови транспортної задачі

Постачальники	Споживачі						Наявність вантажу
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	....	C_{2n}	a_2
...	...	...	...	.....	...	...	...
A_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
....	...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
Потреба в вантажах	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Позначимо через x_{ij} кількість вантажу, який перевозиться з пункту постачання A_i до пункту споживання B_j. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях:

– по обсягах постачань

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad (i = \overline{1,m}) \ ;$$

– по обсягах споживання

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad (j = \overline{1,n}) \ ;$$

– на невід’ємність змінних задачі

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n}).$$

Умови необхідні і достатні для розв'язання задачі визначаються балансом наявності вантажу та попиту на нього

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

Транспортна задача, для якої виконується умова балансу, називається *закритою* моделлю. На відміну від неї, незбалансована транспортна задача називається *відкритою* моделлю.

Так, як транспортна задача є задачею лінійного програмування, її можна розв'язувати симплекс-методом, але він не є ефективним. Для розв'язування транспортної задачі розроблені більш ефективні методи, зокрема, *метод потенціалів*.

Розв'язування транспортної задачі методом потенціалів включає такі етапи:

1) складання базисного опорного плану перевезень;
2) перевірка отриманого плану на оптимальність;
3) поліпшення плану у випадку, коли він не є оптимальним, до отримання оптимального рішення.

Складання базисного опорного плану перевезень.

Для складання базисного опорного плану перевезень використовують декілька методів, зокрема: *північно-західного кута*, *мінімальної вартості*, *абсолютної подвійної переваги*.

Метод північно-західного кута. Згідно з цим методом розподіл вантажу споживачам виконується за порядком розташування їх у таблиці, яку починають з *лівого верхнього* (північно-західного) кута і закінчують правим нижнім її кутом.

Спочатку планується поставка від першого постачальника до першого споживача у кількості $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$. За такої побудові початкового плану перевезень можливі три випадки:

1) якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$;
2) якщо $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$;
3) якщо $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1$.

У першому випадку всі інші поставки першого *стовпчика* припускаються рівними нулю: $x_{i1}=0$ ($i=2$ … m). У другому — всі інші поставки першого *рядка* вважаються рівними нулю: $x_{1j}=0$ ($j=2$ … n). У третьому випадку, якщо заповнюється наступна клітинка стовпчика нулем, то всі інші поставки першого рядка прирівнюються нулю, і, навпаки, якщо наступна клітинка рядка заповнюється нулем, то всі інші поставки першого стовпчика прирівнюються нулю. Наступну поставку заповнюємо у першому рядку, поклавши $x_{12}=\min\{a_1-x_{11}; b_2\}$, якщо $a_1>b_1$, а в другому рядку $x_{21}=\min\{a_2; b_2-x_{11}\}$, якщо $a_1<b_1$. Для менш імовірного випадку $a_1=b_1$ заповнюємо наступну клітинку стовпчика або рядка нулем ($x_{21}=0$ або $x_{12}=0$). Така процедура продовжується доти, доки не будуть розподілені всі запаси постачальників споживачам. Загальна кількість N поставок (кількість заповнених клітинок) у опорному плані має дорівнювати $N=m+n-1$. Якщо $N<m+n-1$ (опорний план є *виродженим*), необхідно ввести нульові поставки таким чином, щоб заповнені клітинки утворювали східчасту структуру.

Метод мінімальної вартості. Алгоритм методу складається з таких операцій.

1. Пошук мінімального елемента у матриці транспортних витрат.

2. Визначення мінімального числа серед обсягів постачань і споживання $x_{ij}=\min\{a_i; b_j\}$ для клітинки таблиці з мінімальним елементом C_{ij}.

3. Виключення з розгляду рядка або стовпчика:

i-го рядка, якщо $a_i<b_j$ $(x_{ij}=a_i)$;
j-го стовпчика, якщо $a_i>b_j$ $(x_{ij}=b_j)$.

Крім того, з подальшого розгляду виключається мінімальний елемент матриці C_{ij}, за яким визначено обсяг поставки x_{ij}.

4. З запасів i-го постачальника та потреб j-го споживача знімається визначений обсяг поставки.

Пункти 1–4 виконуються доти, доки не будуть отримані $m+n-1$ поставки.

Метод абсолютної подвійної переваги. Спочатку проглядаємо всі рядки матриці і в кожному з них відзначаємо елемент з мінімальним значенням транспортних витрат. Далі проглядаємо стовпчики матриці і також відзначаємо в них елементи з мінімальним значенням транспортних витрат. Клітинки, які мають подвійні позначки ($**$), заповнюються в першу чергу максимально можливими обсягами перевезень за правилами, розглянутим раніше. Після кожного призначення поставки x_{ij} виключаються з подальшого розгляду відповідні рядок або стовпчик. Далі заповнюються клітинки, що відзначені однією позначкою ($*$) і також після кожного призначення поставки виключається з подальшого розгляду відповідний рядок або стовпчик. Серед клітинок, що залишились без позначок, обсяги перевезень розподіляються за способом найменшого значення елементу C_{ij}.

Перевірка отриманого плану на оптимальність.

Перевірка отриманого плану перевезень на оптимальність полягає в тому, що для кожного рядка та стовпчика матриці розраховуються спеціальні числа, що називаються *потенціалами*.

Позначимо потенціали рядків через U_i ($i = 1 \ldots m$), а потенціали стовпчиків через V_j ($j = 1 \ldots n$). Припустимий план при рішенні задачі *на мінімум транспортних витрат* буде оптимальним в тому і тільки в тому разі, якщо виконуються умови

$$\begin{cases} U_i + V_j = C_{ij} & \text{для } x_{ij} > 0 \quad \text{(заповнені клітинки)}; \\ U_i + V_j \leqslant C_{ij} & \text{для } x_{ij} = 0 \quad \text{(вільні клітинки)}. \end{cases}$$

Таким чином, для *заповнених* клітинок матриці складаються рівняння виду $U_i + V_j = C_{ij}$. Так як кількість заповнених клітинок дорівнює $m + n - 1$, то отримана система з $m + n$ невідомими потенціалами має $m + n - 1$ рівнянь. Оскільки кількість невідомих перевищує на одиницю кількість рівнянь, то потенціалу будь-якого рядка U_i або стовпчика V_j *можна надати будь-якого значення* (наприклад, нульового), інші потенціали однозначно визначаються через нього.

Після обчислення потенціалів для вільних клітинок матриці обчислюються оцінки

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j).$$

Якщо серед оцінок Δ_{ij} *немає від'ємних* (всі $\Delta_{ij} \geqslant 0$), то при розв'язуванні задачі на *мінімум* транспортних витрат план буде *оптимальним*. Наявність хоча б одного від'ємного значення Δ_{ij} свідчить про те, що план не є оптимальним і його можна покращити, призначаючи поставку у клітинку з $\Delta_{ij} < 0$.

Покращення плану перевезень.

Для покращення плану перевезень у випадку його не оптимальності необхідно виконати наступні дії:

1) знайти вільну клітинку з найменшим від'ємним значенням Δ_{ij} (якщо таких клітинок декілька, то можна взяти будь-яку з них). Ця клітинка називається *перспективною* та у наступному опорному плані перевезень до неї буде призначена поставка;

2) побудувати *цикл* перерахунку поставок. *Циклом* в таблиці транспортної задачі називається замкнена ламана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітинках таблиці, а відрізки лінії — вздовж рядків і стовпчиків, причому один відрізок лінії кожної вершини знаходиться в рядку, а інший цієї ж вершини — в стовпчику. За першу клітинку циклу береться *перспективна клітинка*. Інші вершини циклу повинні знаходитися у *заповнених клітинках*. На рис. 6.1 показані деякі з можливих варіантів циклів транспортної задачі;

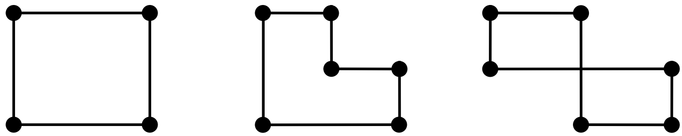

Рисунок 6.1 – Можливі варіанти циклів транспортної задачі

3) виконати перехід до нового опорного плану перевезень за наступними правилами:

а) всі вершини циклу по черзі позначаються знаками «–» і «+», починаючи з перспективної клітинки, яка позначається знаком «+»;

б) в клітинках зі знаком «–» відшукується найменше значення поставки. Це значення поставки додається до поставок у клітинках, позначених знаком «+» і віднімається від поставок клітинок, позначених знаком «–».

Отриманий план знову перевіряється на оптимальність і так далі до отримання оптимального рішення задачі.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Скласти оптимальний план перевезень піску з кар'єрів (А1—А5) до промислових підприємств (B_1—B_5), що забезпечує мінімальну транспортну роботу. Наявні запаси піску у кар'єрах та потреба у піску підприємств по варіантах задані в таблицях 6.2—6.3. Варіанти матриці відстаней між кар'єрами та підприємствами наведені у таблицях 6.4—6.7.

Таблиця 6.2 — Запаси піску на складах кар'єрів

Вар.	Варіант матриці відстаней	Запаси піску на складах, *т*				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1	200	150	150	–	–
2	2	120	95	180	150	100
3	3	300	280	220	–	–
4	4	180	250	105	150	95
5	1	250	200	150	–	–
6	2	140	185	125	130	20
7	3	185	125	130	135	135
8	4	400	250	350	–	–
9	1	45	135	285	35	–

Продовження таблиці 6.2.

Вар.	Варіант матриці відстаней	Запаси піску на складах, *т*				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
10	2	145	165	135	200	175
11	3	150	200	150	–	–
12	4	60	125	185	275	–
13	1	140	115	60	125	185
14	2	280	300	220	–	–
15	3	195	240	175	150	–
16	4	85	75	125	65	170
17	1	150	250	200	–	–
18	2	120	185	175	115	–
19	3	180	75	290	140	125
20	4	250	400	350	–	–
21	1	90	140	125	220	–
22	2	55	170	145	150	125
23	3	280	220	300	–	–
24	4	100	280	185	125	–
25	1	120	110	135	165	290
26	2	145	305	450	–	–
27	3	360	25	230	335	–
28	4	95	135	140	145	190
29	1	420	800	605	–	–
30	2	65	105	330	350	–

Таблиця 6.3 — Потреба у піску промислових підприємств

Варіант	Потреба у піску підприємств, *т*				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	90	100	70	130	110
2	160	200	100	185	-
3	180	140	190	120	170
4	200	100	145	185	150
5	180	120	90	105	105

Продовження таблиці 6.3.

Варіант	Потреба у піску підприємств, *т*				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
6	120	180	135	165	–
7	110	135	165	190	110
8	200	170	230	225	175
9	60	170	135	135	–
10	130	85	185	160	260
11	160	70	90	80	100
12	180	95	250	65	55
13	150	105	180	95	95
14	170	120	190	140	180
15	105	135	250	270	–
16	105	105	95	130	85
17	180	120	90	105	105
18	150	105	80	260	–
19	130	150	110	90	330
20	300	160	200	180	160
21	110	90	165	210	–
22	85	130	155	160	115
23	190	140	180	120	170
24	105	95	155	335	–
25	145	130	175	90	280
26	200	200	200	200	100
27	150	225	190	385	–
28	125	105	75	300	100
29	205	600	540	80	400
30	315	135	75	105	220

Таблиця 6.4 — Матриця відстаней, км (варіант 1)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	15	21	14	17
A_2	14	8	15	11	21
A_3	19	16	26	12	20
A_4	15	11	16	19	18
A_5	13	10	12	20	16

Таблиця 6.5 — Матриця відстаней, км (варіант 2)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	13	9	5	11	17
A_2	14	5	12	14	22
A_3	20	17	13	18	21
A_4	13	15	11	13	21
A_5	12	21	9	10	16

Таблиця 6.6 – Матриця відстаней, км (варіант 3)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	18	12	7	18	7
A_2	35	14	12	15	13
A_3	30	16	11	25	15
A_4	19	15	35	20	7
A_5	15	35	12	11	6

Таблиця 6.7 — Матриця відстаней, км (варіант 4)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	16	21	19	32
A_2	4	4	9	5	24
A_3	3	8	14	10	26
A_4	24	33	36	34	49
A_5	9	25	30	20	31

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за вихідних даних, заданих у таблиці

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запас
A_1	4	3	3	1	8
A_2	3	2	4	8	11
A_3	6	4	6	3	6
A_4	3	5	2	4	10
Потреба	4	9	9	13	

Розв'язок.

Побудуємо початковий опорний план перевезень *методом мінімальної вартості*. Відшукуємо у матриці клітинку з мінімальним значенням транспортних витрат (таблиця 6.8). Це клітинка A_1B_4. Призначаємо у ній поставку $x_{14} = \min\{8;13\} = 8$ *т*. Зменшуємо запас постачальника A_1 та потребу споживача B_4 на 8 *т*.

Наступні клітинки з мінімальним значенням транспортних витрат — A_2B_2 та A_4B_3. Призначаємо у клітинку A_2B_2 поставку $x_{22} = \min\{11;9\} = 9$ *т*, зменшуємо запас постачальника A_2 та потребу споживача B_2 на 9 *т*; призначаємо у клітинку A_4B_3 поставку $x_{43} = \min\{10;9\} = 9$ *т*, зменшуємо запас постачальника A_4 та потребу споживача B_3 на 9 *т*.

Тепер мінімальні значення транспортних витрат мають клітинки A_1B_2 , A_1B_3 , A_2B_1 , A_3B_4 , A_4B_1. У перші дві з них не можуть бути призначені поставки, оскільки запас постачальника A_1 та потреби споживачів B_2 та B_3 вже вичерпані. Призначаємо у клітинку A_2B_1 поставку $x_{21} = \min\{2;4\} = 2$ *т* та зменшуємо запас постачальника A_2 та потребу споживача B_1 на 2 *т*. Призначаємо у клітинку A_3B_4 поставку $x_{34} = \min\{6;5\} = 5$ *т* та зменшуємо запас постачальника A_3 та потребу споживача B_4 на 5 *т*. Призначаємо у клітинку A_4B_1 поставку $x_{41} = \min\{2;1\} = 1$ *т* та зменшуємо запас постачальника A_4 та потребу споживача B_1 на 1 *т*.

Останньою призначаємо поставку у клітинку A_3B_1.

Таблиця 6.8 — Початковий опорний план перевезень

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	3	3	8 1	8; 0
A_2	+ 2 3	− 9 2	4	8	11; 2; 0
A_3	− 1 6	+ 4	6	5 3	6; 1; 0
A_4	1 3	5	9 2	4	10; 1; 0
Потреби	4; 2; 1; 0	9; 0	9; 0	13; 5; 0	

Кількість заповнених клітинок таблиці дорівнює $7 = 4 + 4 - 1$, отже план є не виродженим. Транспортні витрати за цим планом перевезень складають

$$Z = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 74 \ \textit{ткм}.$$

Для перевірки початкового опорного плану перевезень на оптимальність складемо рівняння для *заповнених* клітинок:

$$\begin{array}{llll} U_1 + V_4 = 1; & U_2 + V_1 = 3; & U_2 + V_2 = 2; & U_3 + V_1 = 6; \\ U_3 + V_4 = 3; & U_4 + V_1 = 3; & U_4 + V_3 = 2. & \end{array}$$

Покладемо, наприклад, $U_1 = 0$, тоді з системи рівнянь однозначно можна знайти значення всіх потенціалів:

$$U_2 = -1; \ U_3 = 2; \ U_4 = -1; \ V_1 = 4; \ V_2 = 3; \ V_3 = 3; \ V_4 = 1.$$

Для кожної *вільної* клітинки розраховуємо оцінки Δ_{ij}:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= C_{11} - (U_1 + V_1) = 4 - (0 + 4) = 0; \\ \Delta_{12} &= C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + 3) = 0; \\ \Delta_{13} &= C_{13} - (U_1 + V_3) = 3 - (0 + 3) = 0; \\ \Delta_{23} &= C_{23} - (U_2 + V_3) = 4 - (-1 + 3) = 2; \end{aligned}$$

$$\Delta_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 8 - (-1 + 1) = 8;$$
$$\Delta_{32} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 4 - (2 + 3) = -1 \quad < 0;$$
$$\Delta_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 6 - (2 + 3) = 1;$$
$$\Delta_{42} = C_{42} - (U_4 + V_2) = 5 - (-1 + 3) = 3;$$
$$\Delta_{44} = C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (-1 + 1) = 4$$

Таким чином, план не є оптимальним, оскільки є клітинка A_3B_2 з від'ємним значенням $\Delta_{32} = -1$. Для перспективної клітинки A_3B_2 будуємо цикл перерахунку A_3B_2 — A_3B_1 — A_2B_1 — A_2B_2 (показаний пунктиром у табл. 6.8). Починаючи з перспективної клітинки A_3B_2 у вершинах контуру проставляємо по черзі знаки «+» та «–». Переглядаємо клітинки, позначені знаком «–». Найменша поставка записана у клітинку A_3B_1 і дорівнює 1. Додаємо $x_{31} = 1$ до поставок у клітинках, позначених знаком «+» та віднімаємо 1 від поставок у клітинках, позначених знаком «–». В результаті отримаємо новий опорний план (таблиця 6.9).

Таблиця 6.9 – Оптимальний план перевезень

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	3	3	8 1	8
A_2	3 3	8 2	4	8	11
A_3	6	1 4	6	5 3	6
A_4	1 3	5	9 2	4	10
Потреби	4	9	9	13	

Перевіряємо цей план на оптимальність, для чого розраховуємо потенціали U_i, V_j та оцінки Δ_{ij}.

$$U_1 + V_4 = 1; \; U_2 + V_1 = 3; \; U_2 + V_2 = 2; \; U_3 + V_2 = 4;$$
$$U_3 + V_4 = 3; \; U_4 + V_1 = 3; \; U_4 + V_3 = 2;$$

$$U_1 = 0;\ U_2 = 0;\ U_3 = 2;\ U_4 = 0;\ V_1 = 3;\ V_2 = 2;\ V_3 = 2;\ V_4 = 1.$$

$$\begin{array}{ll} \Delta_{11} = 4 - (0+3) = 1; & \Delta_{12} = 3 - (0+2) = 1; \\ \Delta_{13} = 3 - (0+2) = 1; & \Delta_{23} = 4 - (0+2) = 2; \\ \Delta_{24} = 8 - (0+1) = 7; & \Delta_{31} = 6 - (2+3) = 1; \\ \Delta_{33} = 6 - (2+2) = 2; & \Delta_{42} = 5 - (0+2) = 3; \\ \Delta_{44} = 4 - (0+1) = 3. & \end{array}$$

Таким чином, план є *оптимальним*. Транспортні витрати за цим планом складають

$$Z = 8 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 73\ \textit{ткм}.$$

Контрольні запитання

1. Дайте формулювання транспортної задачі у загальному вигляді.
2. Запишіть математичну постановку транспортної задачі лінійного програмування.
3. У якому випадку модель транспортної задачі називається відкритою?
4. Назвіть методи складання базисного опорного плану транспортної задачі та поясніть їх сутність.
5. Сформулюйте признак оптимальності опорного плану транспортної задачі.
6. Як розраховуються потенціали рядків та стовпчиків матриці транспортної задачі?
7. Як побудувати цикл перерахунку для покращення плану транспортної задачі та який вигляд він може мати ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

ДИСКРЕТНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Мета заняття: вивчення методу динамічного програмування та його використання для розв'язування дискретної задачі оптимального розподілу ресурсів.

Стисла теоретична довідка

Метод динамічного програмування розроблений американським вченим Р. Беллманом для оптимізації багатокрокових процесів прийняття рішень та побудований на, так званому, *принципі оптимальності*: *оптимальній поведінці властиво те, що яким би не був початковий стан та рішення у початковий момент, наступні рішення повинні складати оптимальну поведінку відносно стану, що одержаний в результаті першого рішення.*

Загальну задачу оптимізації можна описати моделлю динамічного програмування при виконанні наступних умов:

1) задача може інтерпретуватись як n-кроковий процес управління, а загальний показник ефективності може бути поданий як сума показників ефективності на кожному кроці;

2) структура задачі повинна бути визначена для будь-якої кількості кроків n і не залежати від цієї кількості.

3. На кожному кроці стан системи визначається скінченою кількістю m параметрів стану та управляється скінченою кількістю r змінних, причому m та r не залежать від кількості кроків n.

4. Вибір управління на k-му кроці не має впливу на попередні кроки, а стан на початку цього кроку є функція тільки попереднього кроку та обраного на ньому управління.

Побудова моделі для задачі, що вирішується методом динамічного програмування, виконується у такій послідовності:

1) вибирають спосіб поділу процесу на кроки;

2) вводять параметри стану $S_k = \{S_k^{(1)}; S_k^{(2)}; \ldots; S_k^{(m)}\}$ та змінні управління $U_k = \{U_k^{(1)}; U_k^{(2)}; \ldots; U_k^{(m)}\}$ на кожному кроці процесу;

3) записують рівняння стану для кожного кроку

$$S_k = F(S_{k-1}; U_k),$$

де S_{k-1} — стан процесу на попередньому $(k-1)$-му кроці;

U_k — управління на даному, k-му кроці;

4) вводять показники ефективності на k-му кроці $f_k(S_{k-1}; U_k)$ та сумарний показник — цільову функцію в одній із форм в залежності від умов задачі:

а) в *адитивній* формі у вигляді суми показників ефективності $f_k(U_k)$ на окремих кроках

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}; U_k);$$

б) в *мультиплікативній* формі у вигляді добутку показників ефективності $f_k(U_k)$ на окремих кроках

$$Z = \prod_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}; U_k);$$

5) вводять у розгляд *умовні максимуми* (*мінімуми*) $Z_k^*(S_{k-1})$ показника ефективності від k-го кроку (включно) до кінця процесу та умовні оптимальні управління на k-му кроці $U_k^*(S_{k-1})$;

6) із обмежень задачі визначають для кожного кроку множини D_k допустимих управлінь на цьому кроці;

7) записують основні для обчислювальної схеми функціональні рівняння Беллмана:

а) для *адитивної* цільової функції

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{U_k \in D_k}(\min)\left\{f_k(S_{k-1}; U_k) + Z_k^*(S_k)\right\},$$

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{U_n \in D_n}(\min)\left\{f_n(S_{n-1}; U_n)\right\};$$

б) для *мультиплікативної* цільової функції

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{U_k \in D_k}(\min)\left\{f_k(S_{k-1};U_k) \times Z_k^*(S_k)\right\},$$

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{U_n \in D_n}(\min)\left\{f_n(S_{n-1};U_n)\right\};$$

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

До автотранспортного підприємства (АТП) надійшли замовлення від чотирьох (n=4) підприємств $П_1$ — $П_4$ на перевезення вантажів. Наявний парк автомобілів АТП складає 20 одиниць. Для виконання перевезень АТП виділяє автомобілі у кількості, що кратна 4 одиницям. Функція загального прибутку АТП від перевезень на підприємствах в залежності від кількості автомобілів, що виділяються на їх адресу, задана у вигляді таблиці 7.1. Використовуючи метод динамічного програмування, визначити оптимальний варіант розподілу автомобілів між підприємствами з метою максимізації прибутку АТП від надання послуг з перевезення вантажів.

Таблиця 7.1 — Функція прибутку від перевезень

Кількість автомобілів	Прибуток від виконання перевезень на підприємствах в залежності від кількості виділених автомобілів, *тис. грн.*			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
4	$f_1(4)$	$f_2(4)$	$f_3(4)$	$f_4(4)$
8	$f_1(8)$	$f_2(8)$	$f_3(8)$	$f_4(8)$
12	$f_1(12)$	$f_2(12)$	$f_3(12)$	$f_4(12)$
16	$f_1(16)$	$f_2(16)$	$f_3(16)$	$f_4(16)$
20	$f_1(20)$	$f_2(20)$	$f_3(20)$	$f_4(20)$

Вихідні дані задачі у вигляді матриці функції прибутку по варіантах наведені на рис. 7.1.

1. $\begin{bmatrix} 0,9 & 1,0 & 1,2 & 1.2 \\ 1,1 & 1,2 & 1,5 & 1,4 \\ 1,3 & 1.3 & 1,6 & 1,7 \\ 1,6 & 1,5 & 1,8 & 1,9 \\ 1,7 & 1,8 & 1,9 & 2,0 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 2,2 & 2,0 & 1,8 & 1,9 \\ 2,5 & 2,3 & 2,1 & 2,0 \\ 2,7 & 2,6 & 2,4 & 2,5 \\ 2,8 & 2,8 & 2,7 & 3,0 \\ 3,0 & 2,9 & 2,8 & 3,2 \end{bmatrix}$; 3. $\begin{bmatrix} 2,1 & 2,2 & 1,8 & 1,9 \\ 2,5 & 2,4 & 2,2 & 2,3 \\ 2,9 & 2,8 & 2,7 & 2,6 \\ 3,2 & 3,0 & 3,1 & 2,9 \\ 3,5 & 3,4 & 3,3 & 3,2 \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} 3,1 & 3,8 & 4,0 & 2,9 \\ 3,3 & 3,9 & 4,3 & 3,0 \\ 3,9 & 4,5 & 4,7 & 4,9 \\ 5,0 & 4,6 & 5,1 & 5,7 \\ 5,3 & 5,2 & 5,3 & 6,5 \end{bmatrix}$; 5. $\begin{bmatrix} 2,6 & 2,4 & 4,1 & 3,9 \\ 3,8 & 4,0 & 5,5 & 5,6 \\ 5,2 & 6,2 & 6,7 & 8,0 \\ 6,7 & 6,5 & 7,3 & 9,2 \\ 8,1 & 11,0 & 7,4 & 10,0 \end{bmatrix}$; 6. $\begin{bmatrix} 2,0 & 2,1 & 2,1 & 6,4 \\ 3,0 & 2,9 & 5,2 & 8,2 \\ 4,0 & 3,8 & 8,3 & 8,3 \\ 7,5 & 5,2 & 8,5 & 8,8 \\ 8,1 & 5,6 & 9,1 & 9,9 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} 1,0 & 2,7 & 3,5 & 3,7 \\ 1,2 & 2,8 & 4,0 & 4,1 \\ 1,6 & 3,3 & 4,2 & 5,3 \\ 1,9 & 4,0 & 4,8 & 5,7 \\ 1,9 & 5,1 & 4,9 & 6,2 \end{bmatrix}$; 8. $\begin{bmatrix} 0,8 & 1,2 & 2,7 & 2,1 \\ 1,1 & 2,3 & 2,8 & 2,2 \\ 2,3 & 3,0 & 2,9 & 2,5 \\ 3,4 & 4,5 & 3,1 & 2,8 \\ 4,9 & 5,1 & 3,6 & 3,9 \end{bmatrix}$; 9. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 15 & 13 \end{bmatrix}$;

10. $\begin{bmatrix} 12 & 13 & 8 & 9 \\ 14 & 19 & 14 & 14 \\ 18 & 25 & 21 & 23 \\ 24 & 27 & 26 & 27 \\ 28 & 30 & 32 & 34 \end{bmatrix}$; 11. $\begin{bmatrix} 24 & 6 & 7 & 8 \\ 35 & 9 & 15 & 16 \\ 47 & 10 & 20 & 19 \\ 48 & 16 & 22 & 26 \\ 59 & 20 & 22 & 28 \end{bmatrix}$; 12. $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 5 \\ 20 & 14 & 12 & 18 \\ 25 & 15 & 13 & 26 \\ 28 & 18 & 14 & 34 \\ 30 & 21 & 18 & 40 \end{bmatrix}$;

13. $\begin{bmatrix} 3,5 & 0,8 & 1,4 & 4,1 \\ 5,7 & 0,9 & 1,7 & 4,3 \\ 6,5 & 1,0 & 2,2 & 5,2 \\ 8,9 & 1,1 & 2,8 & 5,3 \\ 10 & 2,5 & 3,6 & 5,5 \end{bmatrix}$; 14. $\begin{bmatrix} 2,2 & 2,5 & 2,3 & 2,6 \\ 3,4 & 2,6 & 2,4 & 2,7 \\ 3,5 & 3,3 & 3,0 & 3,7 \\ 3,8 & 3,9 & 3,4 & 3,8 \\ 4,1 & 4,3 & 3,9 & 4,2 \end{bmatrix}$; 15. $\begin{bmatrix} 7 & 12 & 9 & 11 \\ 11 & 13 & 12 & 15 \\ 15 & 16 & 13 & 16 \\ 18 & 18 & 14 & 20 \\ 24 & 21 & 16 & 21 \end{bmatrix}$;

16. $\begin{bmatrix} 15 & 21 & 25 & 19 \\ 27 & 40 & 45 & 39 \\ 39 & 42 & 47 & 52 \\ 60 & 54 & 60 & 82 \\ 71 & 69 & 80 & 90 \end{bmatrix}$; 17. $\begin{bmatrix} 15 & 8 & 10 & 16 \\ 20 & 12 & 25 & 19 \\ 30 & 15 & 35 & 21 \\ 45 & 22 & 42 & 28 \\ 50 & 30 & 45 & 35 \end{bmatrix}$; 18. $\begin{bmatrix} 4,5 & 3,1 & 4,3 & 3,5 \\ 4,8 & 4,0 & 4,9 & 3,8 \\ 5,1 & 5,5 & 5,4 & 5,7 \\ 6,0 & 6,4 & 6,2 & 5,8 \\ 6,2 & 6,8 & 6,7 & 6,3 \end{bmatrix}$;

19. $\begin{bmatrix} 20 & 17 & 19 & 12 \\ 31 & 27 & 32 & 30 \\ 46 & 48 & 45 & 35 \\ 54 & 55 & 50 & 58 \\ 60 & 64 & 58 & 69 \end{bmatrix}$; 20. $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 1,0 & 0,5 & 1,1 & 0,6 \\ 1,4 & 1,2 & 1,2 & 1,3 \\ 2,0 & 1,8 & 1,4 & 1,4 \\ 2,5 & 2,5 & 1,6 & 1,5 \end{bmatrix}$; 21. $\begin{bmatrix} 2,9 & 1,6 & 6,5 & 3,0 \\ 5,8 & 4,2 & 7,6 & 4,4 \\ 11,3 & 8,3 & 8,2 & 9,7 \\ 18,1 & 20,2 & 16,1 & 13,9 \\ 23,5 & 26,4 & 22,1 & 16,2 \end{bmatrix}$;

$$22.\begin{bmatrix}16 & 18 & 19 & 20\\ 28 & 24 & 28 & 25\\ 45 & 40 & 32 & 48\\ 54 & 57 & 43 & 59\\ 57 & 60 & 54 & 65\end{bmatrix};\quad 23.\begin{bmatrix}13 & 16 & 15 & 14\\ 18 & 25 & 24 & 20\\ 30 & 27 & 28 & 29\\ 50 & 42 & 46 & 35\\ 56 & 50 & 52 & 45\end{bmatrix};\quad 24.\begin{bmatrix}3{,}5 & 2{,}7 & 3{,}0 & 3{,}2\\ 5{,}4 & 3{,}6 & 4{,}0 & 3{,}8\\ 6{,}0 & 5{,}3 & 5{,}7 & 4{,}3\\ 6{,}2 & 6{,}5 & 6{,}2 & 5{,}7\\ 6{,}5 & 7{,}5 & 7{,}0 & 6{,}6\end{bmatrix};$$

$$25.\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}9\\ 2{,}4 & 1{,}1 & 1{,}0 & 1{,}8\\ 3{,}6 & 2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}4\\ 3{,}7 & 3{,}7 & 2{,}0 & 3{,}0\\ 3{,}7 & 3{,}9 & 2{,}8 & 3{,}5\end{bmatrix};\quad 26.\begin{bmatrix}1{,}9 & 1{,}5 & 0{,}9 & 1{,}1\\ 2{,}6 & 2{,}3 & 1{,}7 & 1{,}2\\ 2{,}7 & 2{,}8 & 2{,}2 & 2{,}5\\ 2{,}8 & 2{,}9 & 3{,}1 & 2{,}9\\ 2{,}8 & 3{,}2 & 3{,}6 & 3{,}3\end{bmatrix};\quad 27.\begin{bmatrix}15 & 10 & 12 & 14\\ 24 & 18 & 19 & 18\\ 32 & 25 & 30 & 31\\ 35 & 30 & 40 & 42\\ 37 & 42 & 55 & 60\end{bmatrix};$$

$$28.\begin{bmatrix}20 & 18 & 21 & 25\\ 32 & 30 & 35 & 27\\ 40 & 44 & 42 & 36\\ 48 & 47 & 45 & 40\\ 52 & 50 & 48 & 50\end{bmatrix};\quad 29.\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\\ 1{,}0 & 1{,}1 & 1{,}2 & 0{,}9\\ 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}6 & 1{,}7\\ 1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}8 & 2{,}1\end{bmatrix};\quad 30.\begin{bmatrix}21 & 15 & 18 & 17\\ 23 & 16 & 20 & 18\\ 28 & 25 & 26 & 20\\ 34 & 36 & 32 & 25\\ 39 & 42 & 33 & 35\end{bmatrix};$$

Рисунок 7.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 7

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для таких вихідних даних.

Кількість автомобілів	Прибуток від виконання перевезень на підприємствах в залежності від кількості виділених автомобілів, *тис. грн.*			
	1	2	3	4
4	0,8	0,6	0,3	0,4
8	1,0	0,9	0,4	0,6
12	1,1	1,1	0,7	0,8
16	1,2	1,3	1,1	1,3
20	1,8	1,5	1,8	1,6

Розв'язок.

Для опису задачі у вигляді моделі динамічного програмування будемо розглядати процес виділення автомобілів підприємствам як n-кроковий процес. За номер k-го кроку приймаємо номер підприємства, якому виділяються автомобілі. Ця задача є одномірною, тому що на кожному кроці маємо лише одну змінну управління і один параметр стану.

Система характеризується чотирма управляючими змінними x_1, x_2, x_3, x_4 (за кількістю кроків) та п'ятьма параметрами стану S_0, S_1, S_2, S_3, S_4.

Рівняння стану системи на кожному кроці виражають *залишок автомобілів* S_k після k-го кроку і можуть бути записані у вигляді

$$S_1 = S_0 - x_1; \quad S_2 = S_1 - x_2; \quad S_3 = S_2 - x_3; \quad S_4 = S_3 - x_4.$$

Показник ефективності процесу — загальний прибуток підприємства від виконання перевезень

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k).$$

Спочатку виконуємо перший етап розрахунків — *умовну оптимізацію* процесу. Для цього складемо рівняння Беллмана для кожного кроку процесу, *починаючи з останнього*:

$$\text{крок 4:} \quad Z_4^*(S_3) = \max_{0 \leqslant x_4 \leqslant S_3} \{f_4(x_4)\};$$

$$\text{крок 3:} \quad Z_3^*(S_2) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant S_2} \left\{f_3(x_3) + Z_4^*(S_3)\right\};$$

$$\text{крок 2:} \quad Z_2^*(S_1) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant S_1} \left\{f_2(x_2) + Z_3^*(S_2)\right\};$$

$$\text{крок 1:} \quad Z_1^*(S_0) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant S_0} \left\{f_1(x_1) + Z_2^*(S_1)\right\}.$$

Розрахунок показників умовної оптимізації 4–1-го кроків згідно з наведеними рівняннями подано в таблиці 7.2.

Побудову таблиці та відповідні розрахунки виконують у такій послідовності.

1. У першому стовпчику таблиці перелічуються можливі стани системи (кількість невиділених автомобілів S_k) на початку k-го кроку; у другому — управління (всі можливі кількості виділених автомобілів x_k від їх наявного залишку) на k-му кроці; у третьому — стан системи (залишок автомобілів S_k після їх виділення) наприкінці k-го кроку.

2. Виконується умовна оптимізація на 4-му кроці (стовпчик 4) за максимальним прибутком $Z_4(S_3)$ від виділення автомобілів x_4 підприємству $П_4$. Значення виграшів чисельно дорівнюють значенням $f_4(x_4)$ таблиці вихідних даних.

3. Виконується умовна оптимізація на третьому кроці (k=3). Спочатку розраховуємо умовні виграші в залежності від стану системи S_k, S_{k-1} та змінних управління x_k за формулою

$$Z_3(S_2; x_3) = \left\{f_3(x_3) + Z_4^*(S_3)\right\}.$$

Значення $f_3(x_3)$ беремо з таблиці вихідних даних (стовпчик $f_3(x_3)$, значення $Z_4(S_3)$ — зі стовпчика 4 розрахункової таблиці і заносимо відповідно в стовпчики 5 та 6. Із одержаних значень умовних виграшів $Z_3(S_2; x_3)$ (стовпчик 7) вибираємо оптимальний на даному кроці

$$Z_3^*(S_2) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant S_2} Z_3(S_2; x_3).$$

Для цього порівнюємо величини $Z_3(S_2; x_3)$ при одному і тому ж значенні S_2 , та вибираємо найбільше число, яке і буде дорівнювати $Z_3^*(S_2)$. В таблиці 7.2 ці значення позначені зірочкою.

4. Аналогічним чином виконуємо умовну оптимізацію 2-го та 1-го кроків, після чого переходимо до другого етапу розрахунків — *безумовної оптимізації*. Для зручності розрахунків перенесемо по всіх кроках з таблиці 7.2 в основну таблицю (таблиця 7.3) підсумки умовної оптимізації, тобто послідовність значень функцій $Z_{k-1}^*(S_{k-1})$ та відповідні їм оптимальні значення параметрів управління $x_k^*(S_{k-1})$.

Таблиця 7.2 — Умовна оптимізація процесу

k= 4, 3, 2, 1			$k=4$ $Z^*_4(S_3)$	$k=3$; $Z^*_3(S_2)$			$k=2$; $Z^*_2(S_1)$			$k=1$; $Z^*_1(S_0)$		
S_{k-1}	x_k	$S_k=S_{k-1}-x_k$	$f_4(x_4)$	$f_3(x_3)$	$Z^*_4(S_3)$	$Z^*_3=f_3(x_3)+Z^*_4(S_3)$	$f_2(x_2)$	$Z^*_3(S_2)$	$Z^*_2=f_2(x_2)+Z^*_3(S_2)$	$f_1(x_1)$	$Z^*_2(S_1)$	$Z^*_1=f_1(x_1)+Z^*_2(S_1)$
20	0	20	1,6	0	1,6	0+1,6=1,6	0	1,8	0+1,8=1,8	0	1,9	0+1,9=1,9
	4	16		0,3	1,3	0,3+1,3=1,6	0,6	1,3	0,6+1,3=1,9*	0,8	1,6	0,8+1,6=2,4*
	8	12		0,4	0,8	0,4+0,8=1,2	0,9	0,9	0,9+0,9=1,8	1,0	1,3	1,0+1,3=2,3
	12	8		0,7	0,6	0,7+0,6=1,3	1,1	0,7	1,1+0,7=1,8	1,1	1,0	1,1+1,0=2,1
	16	4		1,1	0,4	1,1+0,4=1,5	1,3	0,4	1,3+0,4=1,7	1,2	0,6	1,2+0,6=1,8
	20	0		1,8	0	1,8+0=1,8*	1,5	0	1,5+0=1,5	1,8	0	1,8+0=1,8
16	0	16	1,3	0	1,3	0+1,3=1,3*	0	1,3	0+1,3=1,3	0	1,6	0+1,6=1,6
	4	12		0,3	0,8	0,3+0,8=1,1	0,6	0,9	0,6+0,9=1,5	0,8	1,3	0,8+1,3=2,1*
	8	8		0,4	0,6	0,4+0,6=1,0	0,9	0,7	0,9+0,7=1,6*	1,0	1,0	1,0+1,0=2,0
	12	4		0,7	0,4	0,7+0,4=1,1	1,1	0,4	1,1+0,4=1,5	1,1	0,6	1,1+0,6=1,7
	16	0		1,1	0	1,1+0=1,1	1,3	0	1,3+0=1,3	1,2	0	1,2+0=1,2
12	0	12	0,8	0	0,8	0+0,8=0,8	0	0,9	0+0,9=0,9	0	1,3	0+1,3=1,3
	4	8		0,3	0,6	0,3+0,6=0,9*	0,6	0,7	0,6+0,7=1,3*	0,8	1,0	0,8+1,0=1,8*
	8	4		0,4	0,4	0,4+0,4=0,8	0,9	0,4	0,4+0,9=1,3	1,0	0,6	1,0+0,6=1,6
	12	0		0,7	0	0,7+0=0,7	1,1	0	1,1+0=1,1	1,1	0	1,1+0=1,1
8	0	8	0,6	0	0,6	0+0,6=0,6	0	0,7	0+0,7=0,7	0	1,0	0+1,0=1,0
	4	4		0,3	0,4	0,3+0,4=0,7*	0,6	0,4	0,6+0,4=1,0*	0,8	0,6	0,8+0,6=1,4*
	8	0		0,4	0	0,4+0=0,4	0,9	0	0,9+0=0,9	1,0	0	1,0+0=1,0
4	0	4	0,4	0	0,4	0+0,4=0,4*	0	0,4	0+0,4=0,4	0	0,6	0+0,6=0,6
	4	0		0,3	0	0,3+0=0,3	0,6	0	0,6+0=0,6*	0,8	0	0,8+0=0,8*

Таблиця 7.3 — Підсумки умовної оптимізації

S_k	4-й крок (k=4)		3-й крок (k=3)		2-й крок (k=2)		1-й крок (k=1)	
	$Z^*_4(S_3)$	$x^*_4(S_3)$	$Z^*_4(S_3)$	$x^*_3(S_2)$	$Z^*_2(S_1)$	$x^*_2(S_1)$	$Z^*_1(S_0)$	$x^*_1(S_0)$
4	0,4	4*	0,4	0	0,6	4	0,8	4
8	0,6	8	0,7	4*	1,0	4	1,4	4
12	0,8	12	0,9	4	1,3	8(4)	1,8	4
16	1,3	16	1,3	0	1,6	8*	2,1	4
20	1,6	20	1,8	20	1,9	4	2,4*	4*

Визначення оптимального варіанту виділення автомобілів (*безумовну оптимізацію*) провадимо у такому порядку.

1. Визначаємо максимальний прибуток, котрий може бути досягнутий при виділенні початкових S_0=20 автомобілів. Цей прибуток дорівнює 2,4 *тис. грн.* (стовпчик 8). За стовпчиком 9 визначаємо кількість виділених автомобілів першому підприємству ($П_1$)

$$x_1^*(20) = x_1^* = 4 \text{ автомобіля.}$$

2. Знаходимо залишок автомобілів перед виділенням другому підприємству ($П_2$)

$$S_1^* = S_0 - x_1^* = 20 - 4 = 16 \text{ автомобілів.}$$

У стовпчику 7 для $S_1^* = 16$ одержуємо $x_2^* = x_2^*(16) = 8$ автомобілів.

3. Знаходимо залишок автомобілів перед виділенням третьому підприємству ($П_3$)

$$S_2^* = S_1 - x_2^* = 16 - 8 = 8 \text{ автомобілів.}$$

У стовпчику 5 таблиці 7.3 одержуємо $x_3^* = x_3^*(8) = 4$ автомобіля.

5. Знаходимо залишок автомобілів перед виділенням четвертому підприємству ($П_4$)

$$S_3^* = S_2 - x_3^* = 8 - 4 = 4 \text{ автомобіля.}$$

Із стовпчика 3 таблиці 7.3 одержуємо $x_4^* = x_4^*(4) = 4$ автомобіля.

Отже, максимальний прибуток автотранспортного підприємства, який дорівнює 2,4 *тис. грн.*, буде отриманий, якщо розподілити автомобілі між підприємствами таким чином: $П_1 = 4$ автомобіля ; $П_2 = 8$ автомобілів; $П_3 = 4$ автомобіля ; $П_4 = 4$ автомобіля.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.
2. За яких умов задачу можна представити у вигляді моделі динамічного програмування?
3. Дайте визначення адитивної та мультиплікативної цільової функції.
4. Дайте визначення параметру стану, змінної управління, умовно оптимальному рішенню в динамічному програмуванні.
5. У чому полягає умовна та безумовна оптимізація процесу?

П Р А К Т И Ч Н Е З А Н Я Т Т Я № 8

ЗАДАЧА ПРО ЗАВАНТАЖЕННЯ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ

Мета заняття: вивчення застосування методу динамічного програмування для розв'язування задачі про оптимальне завантаження транспортного засобу.

Стисла теоретична довідка

Задача оптимального завантаження транспортного засобу є різновидом класичної задачі «про ранець» та полягає у виборі такого варіанту завантаження транспортного засобу обмеженої вантажопідйомності різноманітними видами вантажів, який забезпечує максимальний прибуток (мінімальні витрати) від їх перевезення. Задача ефективно вирішується методом динамічного програмування.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Знайти варіант завантаження автомобіля номінальної вантажопідйомності $W = 9$ *тонн* трьома видами вантажів, який забезпечує максимальний прибуток від їх перевезення. Маса вантажів відповідно складає $q_1 = 1\,m$, $q_2 = 2\,m$, $q_3 = 3\,m$. Прибуток від перевезення x_k одиниць k-го вантажу задається функцією $f_k(x_k)$ *грн.*, яка представлена у таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 — Прибуток від перевезення вантажів

Кількість завантажених одиниць x_k	Прибуток від перевезення вантажів за видами в залежності від їх завантаженої кількості, *грн.*		
	$q_1 = 1\,m$	$q_2 = 2\,m$	$q_3 = 3\,m$
1	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$
2	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$
3	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$
4	$f_1(4)$	$f_2(4)$	–
5	$f_1(5)$	–	–
6	$f_1(6)$	–	–
7	$f_1(7)$	–	–
8	$f_1(8)$	–	–
9	$f_1(9)$		

Вихідні дані для розв'язування задачі по варіантах у вигляді матриці, що представляє функцію прибутку, наведені на рис. 8.1.

$$1.\begin{bmatrix}50&180&220\\90&250&350\\120&300&450\\160&400&\\200&&\\220&&\\250&&\\350&&\\400&&\end{bmatrix};\ 2.\begin{bmatrix}40&250&280\\110&350&400\\130&400&440\\180&450&\\210&&\\240&&\\320&&\\360&&\\410&&\end{bmatrix};\ 3.\begin{bmatrix}70&300&350\\110&400&420\\150&500&550\\220&600&\\280&&\\350&&\\410&&\\550&&\\600&&\end{bmatrix};\ 4.\begin{bmatrix}60&170&220\\120&250&350\\160&300&420\\210&450&\\230&&\\290&&\\330&&\\420&&\\500&&\end{bmatrix};$$

$$5.\begin{bmatrix}90&200&310\\140&230&480\\200&280&600\\230&350&\\280&&\\340&&\\410&&\\430&&\\480&&\end{bmatrix};\ 6.\begin{bmatrix}65&210&300\\125&300&400\\190&420&600\\220&530&\\260&&\\310&&\\380&&\\410&&\\440&&\end{bmatrix};\ 7.\begin{bmatrix}80&230&440\\150&370&520\\180&490&610\\240&550&\\300&&\\400&&\\510&&\\550&&\\600&&\end{bmatrix};\ 8.\begin{bmatrix}40&220&350\\90&320&480\\140&400&550\\190&515&\\210&&\\280&&\\320&&\\440&&\\550&&\end{bmatrix};$$

$$9.\begin{bmatrix}70&180&350\\100&350&600\\180&430&700\\250&600&\\350&&\\440&&\\510&&\\590&&\\620&&\end{bmatrix};\ 10.\begin{bmatrix}85&250&315\\115&410&490\\195&530&670\\280&580&\\340&&\\400&&\\430&&\\510&&\\550&&\end{bmatrix};\ 11.\begin{bmatrix}75&230&500\\105&310&570\\170&420&650\\230&580&\\340&&\\350&&\\390&&\\440&&\\560&&\end{bmatrix};\ 12.\begin{bmatrix}35&140&315\\90&220&440\\100&350&580\\160&430&\\230&&\\320&&\\350&&\\440&&\\490&&\end{bmatrix};$$

$$13.\begin{bmatrix}30&210&300\\70&335&400\\90&440&600\\140&500&\\180&&\\260&&\\370&&\\400&&\\450&&\end{bmatrix};\ 14.\begin{bmatrix}75&190&280\\115&250&410\\160&330&590\\250&500&\\350&&\\380&&\\410&&\\440&&\\490&&\end{bmatrix};\ 15.\begin{bmatrix}45&150&350\\75&310&415\\125&480&570\\200&550&\\230&&\\280&&\\350&&\\415&&\\470&&\end{bmatrix};\ 16.\begin{bmatrix}50&215&360\\100&360&470\\160&410&600\\210&530&\\250&&\\280&&\\350&&\\420&&\\500&&\end{bmatrix}$$

$$17.\begin{bmatrix}65&200&305\\135&315&480\\160&420&610\\220&560&\\280&&\\330&&\\400&&\\490&&\\530&&\end{bmatrix};\ 18.\begin{bmatrix}80&240&340\\150&310&480\\190&430&620\\230&550&\\250&&\\350&&\\370&&\\420&&\\480&&\end{bmatrix};\ 19.\begin{bmatrix}70&190&340\\130&260&450\\160&380&550\\220&500&\\250&&\\310&&\\340&&\\430&&\\480&&\end{bmatrix};\ 20.\begin{bmatrix}100&280&400\\130&400&650\\200&600&850\\350&800&\\440&&\\490&&\\530&&\\615&&\\700&&\end{bmatrix}$$

$$21.\begin{bmatrix} 40 & 205 & 300 \\ 100 & 335 & 470 \\ 180 & 420 & 610 \\ 230 & 550 & \\ 280 & & \\ 310 & & \\ 375 & & \\ 440 & & \\ 470 & & \end{bmatrix};\ 22.\begin{bmatrix} 55 & 275 & 330 \\ 105 & 390 & 515 \\ 160 & 515 & 700 \\ 260 & 680 & \\ 315 & & \\ 380 & & \\ 440 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 23.\begin{bmatrix} 65 & 200 & 350 \\ 150 & 400 & 500 \\ 200 & 600 & 850 \\ 240 & 800 & \\ 310 & & \\ 480 & & \\ 515 & & \\ 590 & & \\ 630 & & \end{bmatrix};\ 24.\begin{bmatrix} 90 & 205 & 330 \\ 160 & 275 & 500 \\ 210 & 380 & 670 \\ 240 & 500 & \\ 270 & & \\ 305 & & \\ 330 & & \\ 380 & & \\ 400 & & \end{bmatrix}$$

$$25.\begin{bmatrix} 45 & 200 & 350 \\ 120 & 315 & 520 \\ 200 & 480 & 715 \\ 250 & 600 & \\ 315 & & \\ 380 & & \\ 440 & & \\ 500 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};\ 26.\begin{bmatrix} 50 & 275 & 335 \\ 105 & 390 & 525 \\ 180 & 515 & 710 \\ 230 & 670 & \\ 290 & & \\ 390 & & \\ 410 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 27.\begin{bmatrix} 85 & 225 & 305 \\ 140 & 360 & 520 \\ 200 & 480 & 700 \\ 250 & 650 & \\ 295 & & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 480 & & \\ 570 & & \end{bmatrix};\ 28.\begin{bmatrix} 55 & 250 & 300 \\ 110 & 375 & 550 \\ 160 & 490 & 700 \\ 230 & 610 & \\ 300 & & \\ 340 & & \\ 400 & & \\ 450 & & \\ 500 & & \end{bmatrix}$$

$$29.\begin{bmatrix} 75 & 225 & 345 \\ 150 & 360 & 515 \\ 200 & 475 & 625 \\ 280 & 575 & \\ 340 & & \\ 375 & & \\ 405 & & \\ 470 & & \\ 520 & & \end{bmatrix};\qquad 30.\begin{bmatrix} 50 & 220 & 300 \\ 120 & 330 & 450 \\ 170 & 440 & 630 \\ 230 & 550 & \\ 300 & & \\ 340 & & \\ 390 & & \\ 420 & & \\ 495 & & \end{bmatrix}.$$

Рисунок 8.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 8

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за функції прибутку від перевезення вантажів, поданої в табл. 8.2.

Математична модель задачі виглядає таким чином:

максимізувати

$$Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 9; \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 9; \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 4; \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant 3.$$

Таблиця 8.2 — Вихідні дані

Кількість завантажених одиниць x_k	Прибуток від перевезення вантажів за видами в залежності від їх завантаженої кількості, *грн*.		
	$q_1 = 1\ m$	$q_2 = 2\ m$	$q_3 = 3\ m$
1	60	220	350
2	110	230	500
3	140	400	700
4	170	540	–
5	210	–	–
6	250	–	–
7	300	–	–
8	400	–	–
9	500	–	–

Процес завантаження автомобіля містить *три* кроки (кількість кроків задачі відповідає кількості видів вантажів). Стан S_{k-1} на початку k-го кроку визначає *недовантаження* автомобіля до повної вантажопідйомності. Управління U_k — кількість завантажених одиниць вантажу x_k k-го виду.

Основні функціональні рівняння матимуть вигляд:

крок 3: $Z_3^*(S_2) = \max\limits_{0 \leqslant x_3 \leqslant [S_2/3]} f_3(x_3);$

крок 2: $Z_2^*(S_1) = \max\limits_{0 \leqslant x_2 \leqslant [S_1/2]} \left\{ f_2(x_2) + Z_3^*(S_1 - 2x_2) \right\};$

крок 1: $Z_1^*(S_0) = \max\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant S_0} \left\{ f_1(x_1) + Z_2^*(S_0 - x_1) \right\}.$

Через $[S_i/q_i]$ позначена ціла частина відношення S_i/q_i.

Умовна оптимізація процесу наведена у таблиці 8.3.

Таблиця 8.3 – Умовна оптимізація процесу

S_{k-1}	$k = 3$, $Z^*{}_3(S_2)$		$k = 2$; $Z^*{}_2(S_1)$			$k = 1$; $Z^*{}_1(S_0)$		
	x_3	$f_3(x_3)$	x_2	$S_2=S_1-2x_2$	$f_2(x_2)+Z^*{}_3(S_2)$	x_1	$S_1=S_0-x_1$	$f_1(x_1)+Z^*{}_2(S_1)$
9	0	0	0	9	0 + 700 = 700	0	9	0 + 750 = 750
	1	350	1	7	220 + 500 = 720	1	8	60 + 720 = 780*
	2	500	2	5	230 + 350 = 580	2	7	110 + 580 = 690
	3	700*	3	3	400 + 350 = 750*	3	6	140 + 570 = 710
			4	1	540 + 0 = 540	4	5	170 + 570 = 740
						5	4	210 + 350 = 560
						6	3	250 + 350 = 600
						7	2	300 + 220 = 520
						8	1	400 + 0 = 400
						9	0	500 + 0 = 500
8	0	0	0	8	0 + 500 = 500			
	1	350	1	6	220 + 500 = 720*			
	2	500*	2	4	230 + 350 = 580			
			3	2	400 + 0 = 400			
			4	0	540 + 0 = 540			
7	0	0	0	7	0 + 500 = 500			
	1	350	1	5	220 + 350 = 570			
	2	500*	2	3	230 + 350 = 580*			
			3	1	400 + 0 = 400			
6	0	0	0	6	0 + 500 = 500			
	1	350	1	4	220 + 350 = 570*			
	2	500*	2	2	230 + 0 = 230			
			3	0	400 + 0 = 400			
5	0	0	0	5	0 + 350 = 350			
	1	350*	1	3	220 + 350 = 570*			
			2	1	230 + 0 = 230			
4	0	0	0	4	0 + 350 = 350*			
	1	350*	1	2	220 + 0 = 220			
			2	0	230 + 0 = 230			
3	0	0	0	3	0 + 350 = 350*			
	1	350*	1	1	220 + 0 = 220			
2	0	0*	0	2	0 + 0 = 0			
			1	0	220 + 0 = 220*			
1	0	0*	0	0	0 + 0 = 0*			

Результати умовної оптимізації процесу зводимо до таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 — Підсумки умовної оптимізації

S_{k-1}	$k = 3$		$k = 2$		$k = 1$	
	$x^*{}_3(S_2)$	$Z^*{}_3(S_2)$	$x^*{}_2(S_1)$	$Z^*{}_2(S_1)$	$x^*{}_1(S_0)$	$Z^*{}_1(S_0)$
1	0	0	0	0		
2	0	0	1	220		
3	1	350	0	350		
4	1	350	0	350		
5	1	350	1	570		
6	2	500	1	570		
7	2	500	2	580		
8	2	500	1	720		
9	3	700	3	750	1	780

Отже маємо оптимальний варіант завантаження має вигляд: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Тобто необхідно завантажити один вантаж масою 1 *т*, один вантаж масою 2 *т* та два вантажі масою 3 *т*. При цьому досягається максимальний прибуток від перевезення $Z_{\max} = 780$ *грн*.