

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

**Електротехнічний факультет
Кафедра «Електропривод та автоматизація промислових
установок»**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ТА КОМПЛЕКСІВ»

Частина 1.

**Класичне варіаційне обчислення в задачах оптимального керування
складними електромеханічними системами
(для усіх форм навчання)**

**для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія»
всіх форм навчання**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ до курсу: «Основи наукових досліджень складних електромеханічних систем та комплексів». Частина 1: «Класичне варіаційне обчислення в задачах оптимального керування складними електромеханічними системами», для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» всіх форм навчання. Укл. В.В. Зіновкін, проф., д.т.н., Крисан Ю.О., доцент., к.т.н. – Запоріжжя. НУ «ЗП», 2026. – 91 с.

Укладачі:

В.В. Зіновкін, проф., д.т.н.

Ю.О. Крисан, доц., к.т.н.

Рецензент:

А.Є.Казурова, доц., к.т.н.

Відповідальний
за випуск:

А.В.Пирожок, доц., к.т.н.

Затверджено на засіданні кафедри ЕПА
Протокол №5 від 04.02 2026 р.

Рекомендовано до видання НМК ЕТФ
Протокол № 7 від 19.02 2026 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Варіаційне обчислення в задачах оптимального керування.....	5
1.1 Задачі з вільним правим кінцем і фіксованим часом.....	5
1.2 Оптимальне управління лінійної системи із квадратичним функціоналом.....	16
1.3.Умови оптимальності математичних моделей.....	35
2 Принцип максимуму.....	53
2.1 Задачі з вільним правим кінцем і заданим часом.....	53
2.2 Вирішення задач керування з незаданим часом закінчення процесу керування.....	66
Перелік джерел посилання.....	85
Додаток 1 Пояснення до вирішення основних задач і формул.....	91

ВСТУП

Курс «Основи наукових досліджень складних електромеханічних систем та комплексів». Частина 1: «Класичне варіаційне обчислення в задачах оптимального керування складними електромеханічними системами», для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» всіх форм навчання. Спеціалізація «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» є складовою підготовки магістрів. Він сприяє більш ґрунтовному засвоєнню теоретичних основ і оволодінню студентами інженерними методами розрахунків систем автоматизованого управління складними електромеханічними об'єктами та окремими ланками.

Методи варіаційного обчислення дозволяють більш досконало досліджувати взаємні зв'язки між параметрами електромеханічних систем та об'єктів та, на їх підставі, розробляти автоматизовані системи управління і керування.

Конспект лекцій складаються із доволі ґрунтовної теоретичної частини, структурних схем та прикладів, які дозволяють засвоїти матеріали з метою самостійно виконувати дослідження та складати комп'ютерні моделі відповідних ланок та механізмів.

Скорочена теоретична частина не претендує на вичерпний курс теорії автоматизованого керування складними електромеханічними об'єктами та комплексами, а висвітлює лише окремі розділи та фізико-математичні основи, які пов'язані зі змістом розрахункового завдання. Для вивчення повного курсу студентам необхідно звернутися до літератури яка наведена в методичних вказівках.

Наведені в методичних вказівках методи можуть бути використані при інженерних розрахунках, науково-технічних дослідженнях при виконанні практичних та самостійних робіт і дипломному проектуванні за спеціальністю».

1 ВАРІАЦІЙНЕ ОБЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

У цьому розділі розглядаються методи варіаційного числення, які дозволяють більш досконало досліджувати взаємні зв'язки між параметрами електропривода та, на їх підставі, розробляти автоматизовані системи керування. Розглянуто умови локально оптимального в сильному сенсі екстремуму у відповідних задачах без обмежень на управління. Спочатку встановлюються необхідні умови для задач з вільним правим кінцем траєкторії. Потім наводиться правило вирішення розглянутих завдань в загальному вигляді, що дозволяє визначати низку окремих випадків відповідно інженерної задачі яка вирішується.

1.1 Задачі з вільним правим кінцем і фіксованим часом

Умови локально оптимального екстремуму у деяких науково-практичних задачах без обмежень на управління зустрічаються доволі часто і в деяких випадках потребують утоснення. Методологічний підхід вирішення таких задач полягає у визначенні необхідних початкових і граничних умов із послідуочим вибором відповідної математичної моделі в загальному вигляді. При цьому доцільно мати траєкторію відповідно до якої рішення задачі конкретизується. В подальшому рішення таких задач зводиться до виду інженерного використання [1].

1.1.1 Формування визначальних припущень

Встановимо необхідні умови оптимальності в задачі управління системою, яка, в математичному сенсі, відповідає наступному математичному рівнянню:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

в межах $x \in R_n, \quad u \in R_n,$

із критерієм якості

$$J(u) = \phi(x(T)) \rightarrow \inf \quad (1.2)$$

Моменти початку руху t_0 і його закінчення T , а також початкове положення x_0 задані. Припустимо, що безперервні функції

$$f(t, x, u): R_1 \times R_n \times R_m \rightarrow R_n, \quad \phi(x): R_n \rightarrow R_1$$

диференціюємі по x і u . Відповідно до початкових і граничних умов позначаємо похідні функцій відповідним нижнім індексом:

$$f_x(t, x, u) = \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x}, \quad f_u(t, x, u) = \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u},$$

$$\phi_x(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}.$$

Відповідно до математичної постановки задачі, f_x — матриця розміру $n \times n$ з елементами

$$\frac{\partial f_j(t, x, u)}{\partial x_i},$$

де $i, j = 1, \dots, n$ (i — номер рядка;

j — номер стовпця);

$\varphi_x(x)$ — вектор-стовпець з компонентами $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}$, де $i = 1, \dots, n$.

Будемо вважати, що функція $f(t, x, u)$, а також $f_x(t, x, u)$ і $\phi_x(x)$ задовольняють умові Ліпшиця по (x, u) .

Тобто існує постійна $C > 0$ така, що для будь-яких $t \in R_1, x, y \in R_n, u, v \in R_m$ виконуються наступні нерівності:

$$|f(t, x, u) - f(t, y, v)| \leq C(|x - y| + |u - v|),$$

$$\begin{aligned} |f_x(t, x, u) - f_x(t, y, v)| &\leq C(|x - y| + |u - v|), \quad (1.3) \\ |\phi_x(x) - \phi_x(y)| &\leq C|x - y|. \end{aligned}$$

У задачі (1.1), (1.2) управління $u(t)$ відшукується у класі неперервних функцій.

1.1.2 Формула Коші

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x \in R_n \quad (1.4)$$

Квадратна матриця $A(t)$ розміру $n \times n$ має кусочно-безперервні обмежені елементи. Позначимо через $X(t)$ фундаментальну матрицю системи (1.4), тобто матрицю, стовпці якої являють собою будь-які n лінійно незалежних рішень рівняння (1.4). Матриця Коші $Z(t, s)$ системи (1.4) повинна задовольняти наступному рівнянню [1]:

$$Z(t, s) = X(t) X^{-1}(s), \quad (1.5)$$

яке є рішенням лінійного неоднорідного рівняння

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.6)$$

де $f(t)$ - частково-неперервна обмежена функція, яка задовольняє формулі Коші:

$$x(t) = Z(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Z(t, s) f(s) ds. \quad (1.7)$$

При цьому найбільш ефективними для системи автоматичного керування є наступні властивості матриці $Z(t, s)$:

$$\frac{\partial Z(t, s)}{\partial t} = A(t)Z(t, s), \quad \frac{\partial Z(t, s)}{\partial s} = -Z(t, s)A(s),$$

$$Z(s, t) = Z^{-1}(t, s), \quad \frac{\partial Z^{-1}(t, s)}{\partial t} = Z^{-1}(t, s) A(t), \quad (1.8)$$

$$Z(t, s) Z(s, t) = Z(t, t_1)$$

Слід відзначити, що постійна матриця $A(t) \equiv B$, у відповідних межах, взаємозалежна з матрицею Коші $Z(t, s)$ експоненціальною залежністю, яка має наступний вигляд:

$$Z(t, s) = \exp[B(t - s)]. \quad (1.9)$$

В деяких практичних випадках використовується нерівність Коші – Буняковського. Це справедливо для будь-яких двох скалярних функцій $x(t)$ і $y(t)$, квадрат яких інтегрується на відрізок $[t_0, T]$, що задовольняє умовам *нерівності Коші – Буняковського* [3]

$$\left[\int_{t_0}^T |x(t) y(t)| dt \right]^2 \leq \left(\int_{t_0}^T x^2(t) dt \right) \cdot \left(\int_{t_0}^T y^2(s) ds \right). \quad (1.10)$$

1.1.3 Додержання умови оптимальності

Введемо наступне позначення:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u). \quad (1.11)$$

Теорема 1.1 (необхідні умови оптимальності). Нехай $u_0(t)$ - оптимальне П-керування в задачі (1.1), (1.2), а $x_0(t)$ - відповідна йому траєкторія

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), \quad x_0(t) = x_0.$$

тоді

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{\substack{x_0(t) \\ u_0(t)}} = H_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (1.12)$$

Тут $\psi(t) \in R_n$ є рішення задачі Коші, а

$$\dot{\psi}(t) = H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad \psi(t) = -\phi_x(x_0(T)) \quad (1.13)$$

Розглянемо будь-яке безперервне управління

$$v(t), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Визначимо траєкторію $y(t)$ системи (1.1), відповідну управлінню

$$u_0(t) + v(t):$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u_0(t), +v(t)), \quad y(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T$$

Оцінімо $\Delta(t) = y(t) - x_0(t)$ зміну оптимальної траєкторії, що залежить від змінної оптимального управління на величину $v(t)$. Очевидно, що

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^t [f(s, y(s), u_0(s), v(s)) - f(s, x_0(s), u_0(s))] ds$$

Звідси і з умови Ліпшиця (1.3) випливає, що

$$|\Delta(t)| \leq C \int_{t_0}^t (|\Delta(s)| + |v(s)|) ds.$$

Значить, в силу леми Гронуолла-Беллмана маємо

$$\left| \Delta(t) \right| \leq e^{C(t-t_0)} \int_{t_0}^t \left| v(s) \right| ds \leq C_1 \int_{t_0}^t \left| v(s) \right| ds \quad (1.14)$$

Тут і далі через C_i позначені деякі невід'ємні постійні.

Оцінимо тепер зміну критерію якості (1.2), тобто оцінимо різницю

$$\Delta J = J(u_0 + v) - J(u_0) .$$

Враховуючи (1.2), знаходимо

$$\Delta J = \phi'_x(x_0(T))\Delta(T) + N_1, \quad (1.15)$$

$$N_1 = [\phi'_x(x_0(T) + \Theta\Delta(T)) - \phi'_x(x_0(T))]\Delta(T) \quad (1.16)$$

Тут і нижче через Θ позначені деякі числа з відрізка $(0, 1)$. Із співвідношень (1.14), (1.16) та умови Ліпшиця (1.3) випливає, що

$$\left| N_1 \right| \leq C_2 \left(\int_{t_0}^T \left| v(s) \right| ds \right)^2 \quad (1.17)$$

Перетворимо тепер перший доданок у правій частині рівності (1.15). Використовуючи вираз (1.13), маємо

$$\begin{aligned} \phi'_x(x(T))\Delta T &= -\psi'(T)\Delta(T) = -\int_{t_0}^T \frac{d}{dt}(\psi'(t)\Delta(t))dt = -\int_{t_0}^T (\psi'(t)\Delta(t) + \psi'(t)\Delta(t))dt = \\ &= -\int_{t_0}^T \psi'(t) [f(t, y(t), u_0(t) + v(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t))]dt + \\ &+ \int_{t_0}^T H'_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))\Delta(t)dt \end{aligned}$$

Звідси і з співвідношень (1.11), (1.15) випливає наступне рівняння:

$$\Delta J = - \int_{t_0}^t [H(t, y(t), u_0(t) + v(t), \psi) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi)] dt + \\ + \int_{t_0}^T H'_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi) \Delta(t) dt + N_1 \quad (1.18)$$

Доцільно відзначити, що

$$H(t, y(t), u_0(t) + v(t), \psi) = H(t, x_0(t), u_0(t), v(t), \psi) + \\ + H'_x(t, x(t) + \Theta \Delta(t), u_0(t) + v(t), \psi) \Delta(t)$$

Тому рівняння (1.18) можливо представити у наступному вигляді:

$$\Delta J = - \int_{t_0}^T \left[H(t, x_0(t), u_0(t) + v(t), \psi) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi) \right] dt + N_1 + N_2, \quad (1.19)$$

де

$$N_2 = \int_{t_0}^T \left[H'_x(t, x_0(t) + \Theta \Delta(t), u_0(t) + v(t), \psi) - H'_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi) \right] \Delta(t) dt.$$

В силу рівняння (1.13) і умов теореми функція $|\psi(t)|$ повина бути рівномірно обмеженою при $0 \leq t \leq T$. Звідси, а також з врахуванням вище викладеного, а також вимоги (1.4) випливає, що

$$|N_2| \leq C_3 \int_{t_0}^T (|\Delta(t)|^2 + |\Delta(t)| |v(t)|) dt. \quad (1.20)$$

Використовуючи нерівність (1.14), одержуємо наступні умови:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T |\Delta(t)| |v(t)| dt &\leq C_1 \int_{t_0}^T |v(t)| \left(\int_{t_0}^T |v(s)| ds \right) dt \leq \\
&\leq C_1 \int_{t_0}^T |v(t)| dt \int_{t_0}^T |v(s)| ds = C_1 \left[\int_{t_0}^T |v(t)| dt \right]^2
\end{aligned} \quad (1.21)$$

Аналогічно в силу (1.14) маємо, що

$$\int_{t_0}^T |\Delta(t)|^2 dt \leq (T - t_0) C_1^2 \left[\int_{t_0}^T |v(s)| ds \right]^2. \quad (1.22)$$

Формули (1.20) - (1.22) означають, що

$$|N_2| \leq C_4 \left[\int_{t_0}^T |v(t)| dt \right]^2. \quad (1.23)$$

Отже, для довільної допустимої варіації $v(t)$ для забезпечення оптимального управління $u_0(t)$ доведено, що необхідною умовою є дотримання основного співвідношення (1.19) для прирощення ΔJ критерію якості.

Подальший математичний аналіз показує наступне.

У випадках коли

$$v(t) = \varepsilon \cdot \omega(t),$$

де $\omega(t)$ - довільне безперервне управління, а $\varepsilon > 0$ параметр, то з (1.19) випливає, що

$$\begin{aligned}
0 \leq \Delta J = & - \int_{t_0}^T H'_u(t, x_0(t), u_0(t) + \Theta \cdot \varepsilon \cdot \omega(t), \psi) \cdot \\
& \cdot \varepsilon \cdot \omega(t) dt + N_1 + N_2
\end{aligned} \quad (1.24)$$

В нашому випадку слід відзначити, що в силу нерівностей (1.17), (1.23) при $v = \varepsilon \cdot \omega$ маємо $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_1 \varepsilon^{-1} = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_2 \varepsilon^{-1} = 0$. Поділивши обидві частини (1.24) на ε і переходячи до межі при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо наступний інтеграл в залежності від трьох визначальних параметрів:

$$0 \leq - \int_{t_0}^T H'_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi) \omega(t) dt .$$

На підставі основної лему варіаційного числення, можемо встановити, а також із суті задачі, що розглядається, що остання нерівність може мати місце лише у випадку, коли дотримано умови рівняння (1.12).

1.1.4 Задача Больца

При вирішенні інженерних задач управління технологічними процесами необхідно отримати рішення при дотриманні наступних умов [8]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.25)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(T)) \rightarrow \inf . \quad (1.26)$$

Тут t_0 і T - задані моменти часу, а $x_0 \in R_n$ - заданий вектор початкового положення системи. Правий кінець траєкторії $x(T)$ вільний. Необхідні умови оптимальності в задачі (1.25), (1.26) можна отримати за допомогою теореми 1.1. При цьому необхідно скористатись способом відомості задачі Больца до задачі Майєра. У відповідності з цим способом завдання (1.25), (1.26) еквівалентна наступній математичній задачі:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(t, x(t), u(t)), \quad x_{n+1}(t_0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.27)$$

$$x_{n+1}(T) + \phi(x(T)) \rightarrow \inf .$$

Необхідні умови оптимальності в задачі (1.27) сформульовані відповідно до теореми 1.1. У розглянутому випадку, внаслідок співвідношень (1.27) і (1.11), функція H набуває наступний вигляд:

$$H = \psi'(t) f(t, x, u) + \phi_{n+1}(t) F(t, x, u) .$$

Рівняння для вектора $\psi(t) \in R_n$ зберігається відповідно до (1.12), а скалярна функція $\psi_{n+1}(t)$ задовольняє співвідношенням

$$\dot{\psi}_{n+1}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}} = 0, \quad \psi_{n+1}(T) = -1 .$$

Таким чином $\psi_{n+1}(t) = -1$, тому першу функцію корисно представити в наступному вигляді:

$$H(t, x, u, \psi) = F(t, x, u) + \psi'(t) f(t, x, u) .$$

Таким чином, сукупність необхідних умов оптимальності в задачі (1.25), (1.26), яким задовольняють оптимальна траєкторія $x_0(t)$ і оптимальне $u_0(t)$ управління можливо представити у вигляді наступних співвідношень:

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x_0(t_0) = x_0, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= f(t, x_0(t), u_0(t)) \psi(t) + F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \\ \psi(t) &= -\phi_x(x_0(T)) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$f_u(t, x_0(t), u_0(t)) \psi(t) - F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0 \quad (1.30)$$

Якщо рішення задачі оптимального керування (1.25), (1.26)

існує і воно єдине, то воно повністю визначається співвідношеннями (1.28), (1.29). При цьому побудова оптимального управління складається з наступних кроків:

а) вирішують рівняння (1.30) відносно u_0 і визначають функцію

$$u_0 = u_0(t, \psi(t), x_0(t));$$

б) підставляють знайдене вираження u_0 в рівняння (1.28), (1.29).

У результаті виходить двоточкова крайова задача щодо невідомих

$$x_0(t) \text{ і } \psi(t);$$

в) вирішують отриману крайову задачу і визначають функції часу

$$x_0(t) \text{ і } \psi(t);$$

г) підставляючи знайдені функції

$$x_0(t), \psi(t),$$

в формулу, що визначає оптимальне управління, отримують математичний вираз оптимального управління $u_0(t)$;

в) на підставі отриманого математичного виразу розробляється відповідна програма для розробки комп'ютерної моделі.

Реалізація зазначеного методу в конкретних інженерних випадках пов'язана з численними труднощами. Зокрема необхідно вирішувати крайову задачу (1.28), (1.29), з великою розмірністю систем, з врахуванням не лінійних взаємозв'язків між параметрами. Якщо мають місце нелінійні взаємозв'язки, то задача набуває значних ускладнень в наслідок використання відповідних апроксимацій.

Крім того, необхідно мати на увазі, що для доказу оптимальності отриманого таким чином управління слід встановити існування рішення вихідної задачі оптимального керування та єдиного

розв'язку крайової задачі (1.28), (1.29), в якій замість u і підставлено $u_0(t, \psi(t), x_0(t))$. Не дивлячись на ці труднощі, в деяких важливих інженерних випадках описаний метод можливо ефективно використовувати шляхом кускової ліанерізації нелінійностей на відповідних межах. Іншим шляхом оптимальне керування лінійною системою можливо досягти шляхом використання квадратичного функціоналу.

1.2 Оптимальне управління лінійної системи з квадратичним функціоналом

В деяких дуже відповідальних інженерних задачах приведений вище метод дуже ефективно використовується шляхом екстраполяції окремих нелінійних участків лінейними функціями в межах відповідних кривих. Але при використанні таких підходів необхідно оцінювати можливі похибки в межах переходу від одного лінійного рішення до іншого. Розглянемо досягнення оптимального керування лінійною системою шляхом використання квадратичного функціоналу.

1.2.1 Необхідні умови оптимальності

Лінійно-квадратична задача (в подальшому ЛК-завданням) полягає в мінімізації квадратичного функціонала, який доцільно представити в наступному вигляді [9]:

$$J(x) = x'(T) N_1 x(T) + \int_{t_0}^T (x'(t) N_2(t) x(t) + u'(t) N_3(t) u(t)) dt \quad (1.31)$$

на траєкторіях лінійної системи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in R_n, \quad u \in R_m; \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.32)$$

Моменти часу t_0 і T , а також початкове положення x_0 задані. Передбачається, що матриці

$$A(t), B(t), N_2(t), N_3(t)$$

відповідних розмірностей мають кусочно-безперервні елементи, причому

$$N_1 \geq 0, \quad N_2(t) \geq 0, \quad N_3(t) \geq 0 \quad (1.33)$$

Нагадаємо, що матриця $N \geq 0$, якщо $x'N \cdot x \geq 0$ для будь-якого вектора $x \in R_n$, і $N > 0$, якщо $x'N \cdot x > 0$, для будь-якого $x \in R_n$, $x \neq 0$.

Для визначення оптимального керування в ЛК-задачі (1.31), (1.32) слід використовувати встановлені в п.1 необхідні умови оптимальності (1.28) - (1.30). У розглянутому випадку вони задані рівняннями (1.32) і співвідношеннями

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = -x'(t)N_2(t)x(t) - u'(t)N_3(t)u(t) + \psi'(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)],$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\psi}(t) = -A'(t)\psi(t) + 2N_2(t)x(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\psi(T) = -2N_1x(T) \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B'(t)\psi(t) + 2N_3(t)u(t) = 0$$

В силу умов (1.33) функціонал (1.31) є опуклим по u . Використовуючи це, так само як і в скінченно вимірному випадку, можна показати [18], що співвідношення (1.32), (1.34) відображають не тільки необхідні, але і достатні умови оптимальності.

Необхідно зауважити, що існують і інші методи лінеаризації нелінійних залежностей. При цьому усім притаманні певні недоліки, які полягають в тому, що для досягнення більшої точності необхідно збільшувати кількість лінійних ланок.

1.2.2 Побудова оптимального управління

Для визначення оптимального керування за допомогою необхідних умов (1.32); (1.34) застосуємо описаний в ч.1 метод. В цьому випадку побудова математичної моделі здійснюється в

наступній послідовності:

Формування рівняння оптимального управління.

Завдання полягає в математичному представленні опису досягнення оптимального управління на підставі аналізу рівняння (1.34). Звідки випливає, що оптимальне управління визначається формулою

$$u_0 = \frac{1}{2} N_3^{-1}(t) B'(t) \psi(t). \quad (1.35)$$

Формування крайової задачі. Підставляючи (1.35) в (1.32), (1.34) отримуємо крайову задачу для оптимальної траєкторії $x_0(t)$ і вектора сполучених змінних $\psi(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= A(t) x_0(t) + \frac{1}{2} B_1(t) \psi(t), \\ x_0(t_0) &= x_0, \\ \dot{\psi}(t) &= -A'(t) \psi(t) + 2N_2(t) x_0(t), \\ \psi(T) &= -2N_1 x_0(T), \\ B_1(t) &= B(t) N_3^{-1}(t) B'(t). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Розв'язання крайової задачі (1.36) необхідно відшукати аналітичне представлення функції $\psi(t)$. Для вирішення інженерної задачі найбільш ефективним вбачається використання наступного рівняння:

$$\psi(t) = -2P(t)x_0(t), \quad (1.37)$$

де симетрична матриця $P(t)$ підлягає визначенню відповідно до задачі, що вирішується.

Диференціюючи обидві частини рівняння (1.37) по t отримуємо наступне:

$$\dot{\psi}(t) = -2 \left[\dot{P}(t) x_0(t) + P(t) \dot{x}_0(t) \right].$$

Замінімо тут похідні $\dot{\psi}$ і $\dot{x}_0$ відповідно до рівняння (1.36), а потім підставимо замість $\psi(t)$ вираз (1.37). Після перетворення отримаємо наступну систему:

$$\begin{aligned} -A'(t) \psi(t) + 2N_2(t) x_0(t) &= -2 \left[\dot{P}(t) x_0(t) + P(t) A(t) x_0(t) + \frac{1}{2} B_1(t) \psi(t) \right], \\ \left[\dot{P}(t) + A'(t) P(t) + P(t) A(t) - P(t) B_1(t) P(t) + N_2(t) \right] \cdot x_0(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$P(T) \cdot x_0(T) = N_1 x_0(T).$$

Останні рівняння будуть виконані для будь-якого вектора $x_0(t)$ при дотриманні наступних умов

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A'(t) P(t) + P(t) A(t) - P(t) B_1(t) P(t) + N_2(t) &= 0 \quad (1.38) \\ P(T) &= N_1 \end{aligned}$$

При вирішенні інженерних задач рівняння (1.38) слід використовувати для визначення матриці $P(t)$ відповідно до фізичного тлумачення процесу. Матриця $P(t)$ називається матричним рівнянням Ріккати. Воно відіграє важливу роль в теорії ЛК-задач управління [10].

Після того як матриця $P(t)$ визначена, оптимальне управління, в силу рівностей (1.35) і (1.37), виражається наступною формулою:

$$u_0(t) = -N_3^{-1}(t) B'(t) P(t) x_0(t). \quad (1.39)$$

Крім означеного, мінімальне значення критерію якості (1.31) і відповідне йому управління (1.39), повинні задовольняти наступним співвідношенням:

$$\min_u J(u) = J(u_0) = x'_0 P(t_0) x_0 \quad (1.40)$$

Таким чином, побудова матриці $P(t)$ дозволяє повністю вирішити завдання управління (1.31), (1.32).

Відзначимо ще, що управління (1.39) отримано у вигляді С-управління, тобто у вигляді функції часу і фазових координат. При інженерній реалізації отриманих рівнянь, позначаючи реалізоване значення оптимальної траєкторії $x_0(t)$ через x , можливо отримати, що оптимальне управління технічною системою, що знаходиться в стані x в момент t , перетворюється до наступного вигляду:

$$u_0(t, x) = -N_3^{-1}(t) B'(t) P(t) x. \quad (1.41)$$

1.2.3 Матричне рівняння Ріккати

При вирішенні інженерних задач виникає декілька випадків, які призводять до неузгодженостей результатів математичних та інженерних моделей. Тому на практиці необхідно враховувати деякі властивості матричного рівняння Ріккати (1.38). Розглянемо основні властивості рівняння Ріккати в послідовності їх практичного використання.

Рішення крайової задачі диференціальних рівнянь.

Рішення рівняння (1.37) існує і єдино при всіх $t < T$.

Локальне (тобто належить деякій околиці точки T) існування і єдність задачі (1.38) є очевидним наслідком загальних теорем існування розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Значно важче отримати доказ того, що рішення задачі (1.38) визначено при всіх $t < T$. Це пов'язано з тим, що рівняння (1.38) містить квадратичну не лінійність $P(t)B_1(t)P(t)$. В наслідок чого отримуємо, що не всяке рівняння з квадратичною не лінійністю має рішення впродовж всієї вісі. Наприклад, скалярне рівняння

$$\dot{y}(t) = 1 + y^2(t), \quad y(0) = 0$$

має рішення $y(t) = \tan t$, яке приймає нескінченне рішення при $t = \pm \pi / 2$ і

тому не може відображати управління за межами точки $t = \pi / 2$ як вправо, так і за точку $t = -\pi / 2$ вліво. Однак спеціальна структура рівняння (1.38) дозволяє встановити продовження рішень на відповідних піввісях $t \leq T$.

Розглянемо скалярні рівняння у вигляді типу (1.38):

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) - b_1 p^2(t) + n_2 &= 0, & p(T) &= n_1; \\ b_1, n_1, n_2 &> 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Рішення цього рівняння не може перетинати пряму $p(t) = 0$. Це пояснюється тим, що в точці $t = t_1 < T$ рішення перетинає пряму $p(t) = 0$, тому має бути $p(t_1) = 0$ і $\dot{p}(t_1) \geq 0$. Але при цих умовах рівняння (1.42) в цій точці t_1 порушується (не відповідає як математичному так і фізичному представленню). Рішення $p(t)$ не може також перетнути пряму

$$p(t) = \sqrt{\frac{n_2}{b_1}},$$

оскільки на цій прямій - $b_1 p^2(t) + n_2 = 0$,

а вище цієї прямої - $b_1 p^2(t) + n_2 < 0$.

Таким чином, рішення рівняння (1.42) ускладнено в наступних межах:

$$0 \leq p(t) \leq \sqrt{n_2 / b_1}, \quad t \leq T.$$

Виходячи із фізичного представлення задачі видно, що $p(t)$ не може продовжуватись в нескінченність для кінцевих значень t на відміну від інших рішень рівняння (1.42).

Використовуючи близькі за ідеєю міркування, Р. Калман довів, що рішення рівняння (1.38) математично визначені при всіх $t < T$.

Рішення рівняння (1.38) невід'ємне, тобто $p(t) \geq 0$. Зі співвідношення (1.40) випливає, що

$$x_0' P(t) x_0 = J(u_0) \geq 0, \quad (1.43)$$

оскільки завжди функціонал $J(u) \geq 0$.

У співвідношенні (1.43) момент $t_0 < T$, а також x_0 можуть бути вибрані довільно. Це й означає, що $P(t) \geq 0$.

1.2.4 Рівняння Бернуллі в явному представленні

Нехай $N_2(t) \equiv 0$ і $N_1 > 0$. Тоді рівняння (1.38) інтегрується в явному вигляді.

Рівняння (1.38) при $N_2(t) \equiv 0$ називається *рівнянням Бернуллі* і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B_1(t)P(t) &= 0, \\ P(T) &= N_1, \quad N_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Розглянемо деяку матрицю $D(t) = P^{-1}(t)$. Так як

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P^{-1}(t)P(t)) &= P^{-1}(t)P(t) + P^{-1}(t)\dot{P}(t) = 0 \\ \dot{D}(t) &= -P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t). \end{aligned}$$

Перемножуючи рівняння (1.44) зліва і справа на $P^{-1}(t)$, отримаємо, що матриця $D(t)$ є рішенням наступного лінійного рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) - D(t)A'(t) - A(t)D(t) + B_1(t) &= 0, \\ D(T) &= N_1^{-1}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Безпосередньою підстановкою в (1.45) можна переконатися, що рішення можливо отримати в наступному вигляді:

$$D(t) = Z(t, T) N_1^{-1} Z'(t, T) + \int_t^T Z(t, s) B_1(s) Z'(t, s) ds. \quad (1.46)$$

Тут матриця Коші (7, 5) визначається співвідношеннями (1.5) і (1.8). З (1.46) та (1.8) випливає, що

$$\begin{aligned} P(t) &= \left[Z(t, T)(N_1^{-1} + Z^{-1}(t, T) \int_t^T Z(t, s) \cdot B_1(s) Z'(t, s) ds \cdot Z'(t, T)^{-1}) Z'(t, T) \right]^{-1} = \\ &= Z'(T, t) \left[1 + N_1 \int_t^T Z(T, s) B_1(s) Z'(T, s) ds \right]^{-1} \\ &N_1 Z(T, t). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Формула (1.47) показує, що умова $N_1 > 0$ не є необхідною для її справедливості. Достатньо лише вимагати, щоб матриця в квадратних дужках в (1.47) була невиврождена.

1.2.5 Матриця Коші при довільних припущеннях $N_2(t)$

Формула для рішень задачі (1.38) при довільній матриці $N_2(t)$. Отримаємо формулу для рішень задачі (1.38) при довільній матриці $N_2(t)$, використовуючи матрицю Коші $G(t, s)$ розміру $2n \times 2n$.

Розглянемо систему $2n$ лінійних рівнянь

$$\dot{x}_1(t) = A(t)x_1(t) - B(t)x_2(t), \quad x_1 \in R_n;$$

$$\dot{x}_2(t) = -N_2(t)x_1(t) - A'(t)x_2(t), \quad x_2 \in R_n; \quad (1.48)$$

$$x_2(T) = N_1 x_1(T).$$

Знайдемо матрицю $K(t)$ таку, що $K(T) = N_1$ й $x_2(t) = K(t)x_1(t)$ при всіх $t \leq T$. На підставі рівнянь (1.48) отримаємо

$$\dot{x}_2(t) = -N_2(t)x_1(t) - A'(t)K(t)x_1(t) = \dot{K}(t)x_1(t) + K(t)[A(t)x_1(t) - B_1(t)K(t)x_1(t)].$$

Звідси випливає, що

$$[\dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) - K(t)B_1(t)K(t) + N_2(t)]x_1(t) = 0$$

Останнє рівняння можливо при будь-якому $x_1(t)$, якщо вираз у квадратних дужках дорівнює нулю при всіх t .

Таким чином, $K(t)$ задовольняє рівнянню (1.38) і також ж при початковій умові $K(T) = N_1$, що і $P(t)$.

У силу властивості єдності (див. п. 1) при вирішенні інженерних задач можливо вважати, що $K(t) \equiv P(t)$.

Представляючи матрицю $G(t, s)$ у вигляді наступних чотирьох блоків розміру $n \times n$:

$$G(t, s) = \begin{pmatrix} G_{11}(t, s) & G_{12}(t, s) \\ G_{21}(t, s) & G_{22}(t, s) \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

на підставі формули Коші (1.7) рішення системи (1.48) можна перетворити до наступного вигляду:

$$x_1(t) = G_{11}(t, T)x_1(T) + G_{12}(t, T)x_2(T),$$

$$x_2(t) = G_{21}(t, T)x_1(T) + G_{22}(t, T)x_2(T).$$

Отже,

$$x_2(t) = (G_{21}(t, T) + G_{22}(t, T) \cdot N_1)x_1(T),$$

$$x_2(t) = P(t)x_1(t) = P(t)(G_{11}(t, T) + G_{12}(t, T) \cdot N_1)x_1(T).$$

Порівнюючи ці дві формули і враховуючи, що $x_1(T)$ вибрано довільно, отримуємо, що

$$P(t) = [G_{21}(t, T) + G_{22}(t, T) \cdot N_1] \cdot [G_{11}(t, T) + G_{12}(t, T) \cdot N_1]^{-1} \cdot .50$$

Рівняння (1.50) є рішенням задачі (1.38). Воно справедливо за умови, що матриця в других квадратних дужках в (1.50) є не виродженою.

1.2.6 Метод послідовних наближень

Розглянемо послідовність симетричних матриць $P_i(t)$ ($i \geq 1$), введену за допомогою рекурентних формул

$$\dot{P}_0(t) + A'(t) P_0(t) + P_0(t) A(t) + N_2(t) = 0, \quad P_0(T) = N_1,$$

$$\dot{P}_i(t) + A'_i(t) P_i(t) + P_i(t) A_i(t) + P_{i-1}(t) B_1(t) P_{i-1}(t) + N_2(t) = 0,$$

$$P_i(t) = N_1, \quad A_i(t) = A(t) - B_1(t) P_{i-1}(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.51)$$

На підставі формули Коші і рівняння (1.50), рівняння (1.51) перетворюємо до наступного вигляду:

$$P_i(t) = \int_t^T W_i'(t, s) [P_{i-1}(s) B_1(s) P_{i-1}(s) + N_2(s)] W_i(t, s) ds + W_i'(t, T) N_1 W_i(t, T), \quad (1.52)$$

$i \geq 1$

де W_i - матриця Коші рішень однорідного рівняння

$$\dot{y}(t) = -A_i(t) y(t).$$

Зі співвідношення (1.52) і аналогічного подання для матриці $P_0(t)$ випливає, що всі $P_i(t) \geq 0$.

Покладемо $Q_i = P_{i+1} - P_i$.

Тоді на підставі (1.51) при $i \geq 2$ одержуємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i(t) + A'_i(t) Q_i(t) + Q_i(t) A_i(t) - Q_{i-1}(t) B_1(t) Q_{i-1}(t) &= 0 \\ Q_i(T) &= 0. \end{aligned}$$

Звідси і з формули Коші випливає, що

$$Q_i(t) = - \int_t^T W_i'(t, s) Q_{i-1}(s) B_1(s) Q_{i-1}(s) W_i(s, T) ds.$$

Фізично останні рівняння означають, що всі матриці $Q_i(t) \leq 0$, тобто $0 \leq P_i(t) \leq P_{i-1}(t)$ при $i \geq 2$.

Таким чином, $P_i(t)$ являє собою не зростаючу послідовність невід'ємно-певних матриць, тобто $P_{i+1} - P_i \leq 0$. Можливо довести, що послідовність $P_i(t)$ має межу $P(t) \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$, причому збіжність $P_i(t) \rightarrow P(t)$ є рівномірною на кожному обмеженому інтервалі часу. Це означає, що переходячи до межі при $i \rightarrow \infty$ в інтегральній тотожності, відповідному рівнянню (1.51), визначаємо, що матриця $P(t)$ є рішення задачі (1.38).

Отже, для наближеного рішення рівняння Ріккати (1.38) достатньо визначити рішення лінійного рівняння (1.51), яке виражається формулою (1.52). Позначимо через $\|P\|$ норму матриці P , рівну кореню квадратному із суми квадратів елементів матриці P . Тоді справедливе дотримання наступної умови:

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} \|P(t) - P_i(t)\| \leq \frac{C}{i!}$$

1.2.7 Приклад оптимального управління

В якості прикладу розглянемо завдання управління виду (1.31), (1.32) з постійними коефіцієнтами $a, b, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0, N_1 \geq 0$:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0, \quad (1.53)$$

$$J(u) = N_1 x^2(T) + \int_0^T (N_2 x^2(t) + N_3 u^2(t)) dt.$$

У цьому завданні оптимальне управління $u_0(t)$, у відповідності до рівняння (1.39), задовольняє наступній формулі:

$$u_0(t) = -b N_3^{-1} P(t) x(t),$$

де $x(t)$ - розв'язання задачі Коші.

$$\dot{x}(t) = (a - r^{-1} P(t)) x(t), \quad x(0) = x_0, \quad r = b^{-2} N_3.$$

В силу формули Коші (1.14) і співвідношення (1.16) отримуємо, що оптимальна траєкторія $x(t)$ має експоненційну залежність

$$x(t) = x_0 \exp \left[a t - r^{-1} \int_0^t P(s) ds \right].$$

Скалярна функція $P(t)$ визначається як рішення задачі (1.38), та відповідно до розглядаємого випадку приймає наступний вигляд:

$$\dot{P}(t) = -N_2 - 2a P(t) + r^{-1} P^2(t), \quad P(T) = N_1. \quad (1.54)$$

Розділяючи відповідні змінні та інтегруючи отриманий результат, приходимо до наступної системи рівнянь:

$$P(t) = r [N_1 r - a + \beta - (N_1 r - a - \beta) \alpha(t)]^{-1} \cdot [(\beta + \alpha)(N_1 r - a + \beta) + (\beta - a) - (N_1 r - a - \beta) \alpha(t)],$$

$$\alpha(t) = \exp[-2\beta(T - t)], \quad \beta = \sqrt{a^2 + N_2 r^{-1}}.$$

Отримані вирази для $P(t)$ та оптимальної траєкторії $x(t)$ дозволяють досліджувати їх вигляд при різних значеннях параметрів.

В якості прикладу на рис. 1.1 зображені оптимальні траєкторії $x(t)$ для $a = -1$, $N_1 = 0$, $N_2 = 1$, $T = 1$, $x(0) = 1$ при значеннях $r = b^{-2} N_3$, рівних 100; 1; 0,2 і 0,02. Звідки видно, що швидкість убуття траєкторії $x(t)$ до нуля суттєво залежить від величини r . Це характеризує вартість управління (множник N_3) і ефективність управління (множник b^{-2}).

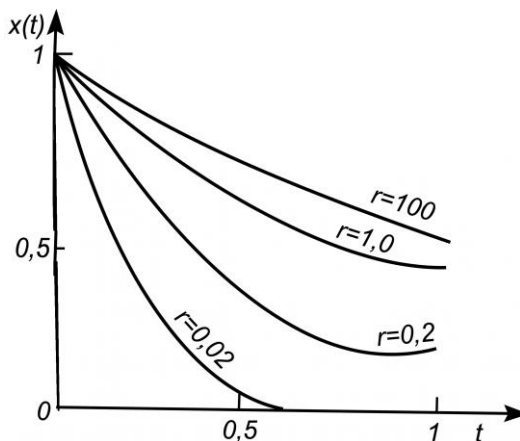


Рисунок 1.1 – Залежність оптимальної траєкторії від часу відповідно до задачі (1.53) при фіксованих радіусах r

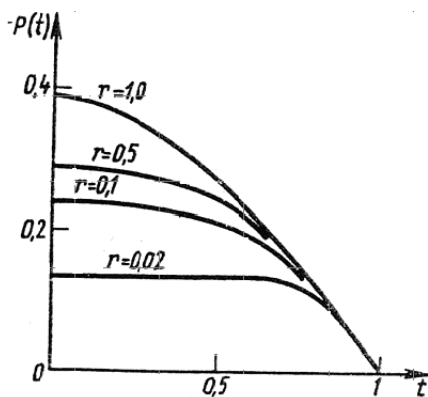


Рисунок 1.2 – Залежність скалярної функції $P(t)$ (Рікатті) від часу при фіксованих r

На рис. 1.2 зображені графіки рішень рівняння (1.54) при $r=1$; 0,5; 0,1; 0,02. Видно, що для $t \leq T - \frac{3\beta}{2}$ функція $P(t)$ близька до

постійної, рівною $N_2(\beta - a)$. Останнє означає, що при $t \leq T - \frac{3\beta}{2}$ управління системою (1.53) здійснюється з майже постійним коефіцієнтом підсилення зворотного зв'язку.

На рис. 1.3 зображені графіки оптимального управління при $r = 1; 0,5; 0,1; 0,02$. Видно, що при зменшенні вартості управління (зі зменшенням N_3) або при збільшенні його ефективності (із збільшенням b) оптимальне управління прагне до дельта-функції, тобто приймає імпульсний характер.

З рис. 1.4, де представлена залежність рішень задачі при $a = -1; -1; = 1; 3, 5, 10$ і $N_1 = 0, 1$, видно, що, як і вище, для $t \leq T - \frac{3\beta}{2}$ функція $P(t)$ наближується до постійної $N_2 / (\beta - a)$.

На рис. 1.5 зображені оптимальні траєкторії при $a = 1, x(0) = 1, N_1 = 0, N_2 = 1, T = 1$ для $r = 100; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,05$. Вихідна система (1.53) при $b = 0$ нестійка. Видно, що при малих ресурсах управління (тобто великих значеннях r) управління не суттєво впливає на траєкторії системи.

Нарешті, на рис. 1.6 наведені графіки $P(t)$ при $a = 1, N_1 = 0, T = 1$, і $r = 2; 0,5; 0,2; 0,05$.

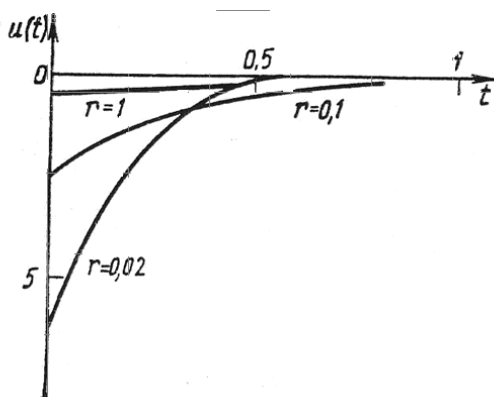


Рисунок 1.3 – Залежність параметра $u(t)$ від часу t

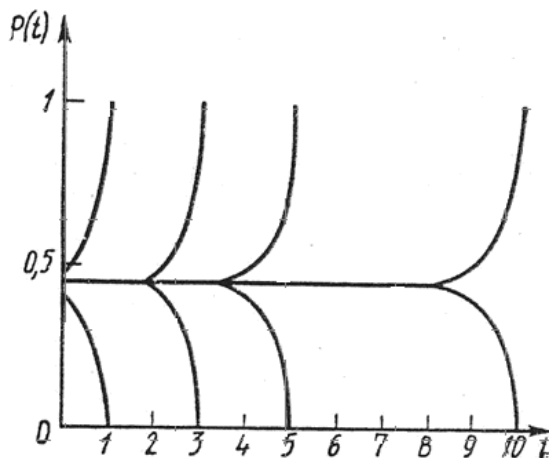


Рисунок 1.4 – Залежність скалярної функції $P(t)$ (Рікатті) від часу управління: $N_1 = 0$ - нижні ділянки ; $N_1 = 1$ - верхні ділянки

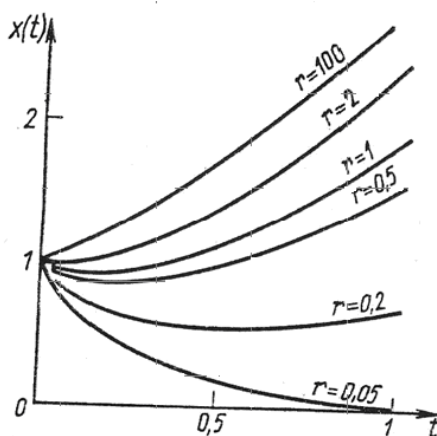


Рисунок 1.5 – Залежність оптимальної траєкторії від часу при фіксованих радіусах r

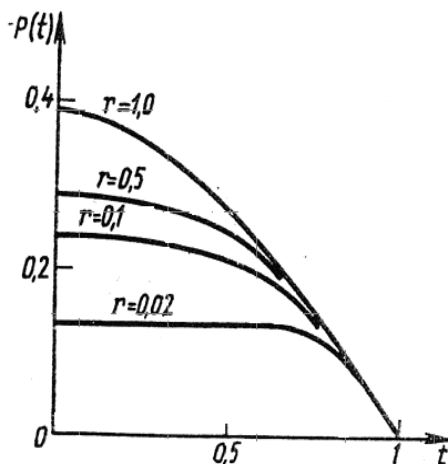
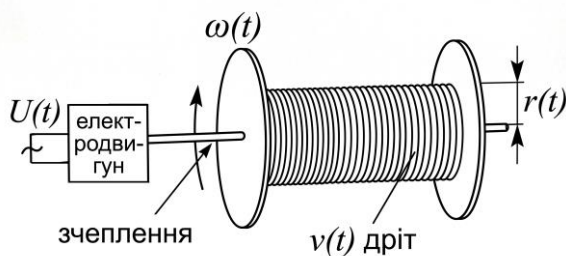


Рисунок 1.6 – Залежність скалярної функції $P(t)$ (Рікатті) від часу при фіксованих r

1.2.8 Приклад практичного використання оптимального керування

На рис. 1.7 зображено механізм установки для намотування дроту.



$U(t)$ – напруга на електродвигуні; $\omega(t)$ – кутова швидкість котушки; $r(t)$ – радіус котушки з дротом; $v(t)$ – лінійна швидкість намотки дроту

Рисунок 1.7 – Структурна схема технологічного пристрою для намотки дроту

Електродвигун обертає котушку, на яку намотується дріт. Щоб уникнути обривів дроту або його провисання швидкість намотування повинна підтримуватися постійною. Під час намотування діаметр котушки збільшується, що призводить до збільшення моменту інерції котушки $g(t)$. Для підтримки постійної лінійної швидкості намотування $v(t) = v_0$ необхідно під час намотування зменшувати кутову швидкість зі швидкістю $\omega(t)$ так, щоб

$$r(t) \omega(t) = v(t) = v_0 \quad (1.55)$$

Рівняння обертання котушки має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} [g(t) \omega(t)] = \chi U(t) - \psi \omega(t). \quad (1.56)$$

У рівнянні 1.56 прийнято наступні позначення : $U(t)$ - напруга на вході електродвигуна; χ - коефіцієнт пропорційності.

між моментом, що обертає двигу на і його входною напругою; ψ - коефіцієнт тертя обертання.-

Управлінням у даному випадку є $U(t)$, а регульованою величиною - $\omega(t)$, яку необхідно змінювати таким чином, щоб виконувалася умова (1.55).

При вирішенні інженерної задачі необхідно знайти оптимальне співвідношення і залежність $r(t)$ і $g(t)$ від часу при постійній швидкості намотування дроту v_0 .

За час $t_{об}$, необхідне для намотування одного ряду дроту, радіус зміниться від r_0 до $r(t_{об})$ так, що

$$r^2(t_{об}) - r_0^2 = k v_0 t_{об} \quad (1.57)$$

де $k > 0$ - деякий коефіцієнт, що характеризує режим роботи привод. З рівності (1.57) при $t_{об} \ll 1$ отримуємо

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + Ct} \quad (1.58)$$

Так як (для кола радіуса R) момент інерції пропорційний R^4 , то

$$g(t) = g(0) + C_1 [r^4(t) - r^4(0)]$$

Номінальне значення $\omega_{ном}(t)$ кутової швидкості визначається наступним співвідношенням між інженерними параметрами:

$$\omega_{ном}(t) = v_0 r^{-1}(t),$$

а номінальна керуюча напруга $U_{ном}(t)$ є

$$U_{ном}(t) = \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dt} (g(t) \omega_{ном}(t)) + \psi \omega_{ном}(t) \right].$$

В теорії стійкості $\omega_{ном}(t)$ і $U_{ном}(t)$ прийнято називати не обуреним рішенням. Для обурених значень відповідних змінних

$$x(t) = g(t) [\omega(t) - \omega_{ном}(t)],$$

$$u(t) = U(t) - U_{ном}(t).$$

Для динамічного режиму намотки дроту отримуємо наступне рівняння:

$$\dot{x}(t) = -\psi g^{-1}(t) x(t) + \chi u(t). \quad (1.59)$$

При чому критерій якості, підлягає мінімізації. Відповідно до фізико-технічного представлення процесу намотки дроту критерій

якості представляємо в наступному вигляді:

$$J(u) = \int_0^T \left[(r(t)g^{-1}(t)x(t))^2 + \rho u^2(t) \right] dt, \quad \rho > 0. \quad (1.60)$$

Перший доданок в інтегралі (1.60) пропорційний кінетичній енергії котушки що обертається, а другий - електричній енергії, що витрачається електродвигуном.

Таким чином, задача оптимального управління технологічним процесом намотуванням дроту зведена до ЛК-задачі (1.59), (1.60) зі змінними коефіцієнтами. При цьому С-керування, що дає рішення задачі (1.59), (1.60), приймає наступний вигляд:

$$u(t) = -K(t)x(t), \quad K(t) = \chi \rho^{-1} P(t).$$

де $P(t)$ є рішення рівняння Рікатті:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) - 2\psi g^{-1}(t)P(t) - \chi^2 \rho^{-1} P^2(t) &= -r^2(t)g^{-2}(t), \\ P(T) &= 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Технічні параметри приймаємо відповідно до режимів роботи пристрою та технології намотки дроту

$$g(t) = 0,02 + 66,67 \left[r^4(t) - r^4(0) \right] \text{ (кг} \cdot \text{м}^2),$$

$$r(t) = \sqrt{0,01 + 0,0005t} \text{ (м)},$$

$$\psi = 0,01 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

$$\chi = 0,1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}}{B \cdot \text{с}}$$

$$\rho = 0,06 \frac{\text{м}^2}{B^2 \cdot \text{с}^2}$$

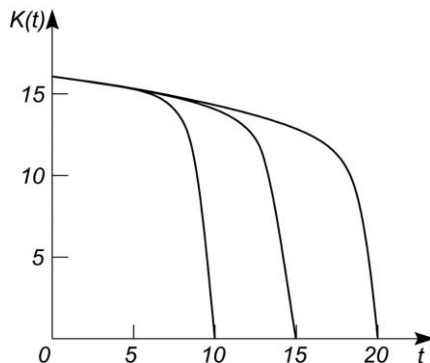


Рисунок 1.8 – Залежність коефіцієнта підсилення $K(t)$ від часу

В якості прикладу на рис. 1.8 зображені графіки оптимального коефіцієнта посилення $K(t)$ в залежності від часу t для значень $T=10$; 15; 20 с. Звідки видно, що оптимальний коефіцієнт посилення $K(t)$ на початкових стадіях змінюється в часі однаково при різних T , за винятком кінцевих ділянок часу.

1.3 Умови оптимальності математичних моделей

При вирішенні інженерних задач автоматизованого керування технологічними процесами та іншими фізичними об'єктами, які працюють в певних умовах, при побудові математичних моделей необхідно враховувати характерні риси та взаємні зв'язки між первинними та вторинними параметрами в динамічних та статичних режимах.

В наукових працях використовується дуже багато методологічних підходів і методів побудови відповідних моделей, але в їх основі використовуються існуючі підходи і математичні співвідношення між параметрами окремих вузлів або ланок. Останні поєднуються в єдину математичну модель за допомогою відповідних підходів при збереженні фізичних і практичних рис діючої або розробляємої системи керування.

Так, наприклад, одна математична модель може задовольняти вимогам до керування пневмо-, гідро-, та електроприводів. При цьому змінюються математичні співвідношення між описом виконуючих

механізмів. Методи оптимальності досягаються різними методами та багато чисельними засобами, але найбільш ефективними вбачається використання метода Лагранжа та його різних варіацій.

1.3.1 Метод множників Лагранжа

Зручним і ефективним методом отримання необхідних умов оптимальності в кінцево вимірних задачах оптимізації і у варіаційному численні є метод множників Лагранжа. Використовуючи поняття множників Лагранжа, розглянемо необхідні умови досягнення оптимальності для наступної задачі:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x \in R_n, \quad u \in R_m,$$

$$t_0 \leq t \leq T,$$

$$J_0(t_0, x(t_0),$$

$$i, T, x(T)) \rightarrow \inf,$$

$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = 0, j = 1, \dots, m_1$$

$$J_l(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \leq 0,$$

$$i = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad (1.62)$$

$$J_k = \int_{t_0}^T F_k(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_k(t_0, x(t_0), T, x(T)), \quad k = 0, \dots, m_2.$$

Сама постановка вирішуємої задачі попереджає метод і хід її рішення. Вважаємо, що рішення задачі (1.62) існує і має наступний вигляд $\{t_0, T, u_0(t), x_0(t)\}$. Тут $u_0(t)$ - оптимальне рівняння в задачі (1.62), $x_0(t)$ - оптимальна траєкторія; t_0 і T - невідомі моменти початку і закінчення руху.

Припустимо, що функції $f, F, f_x, f_u, F_x, \varphi, \varphi_x$ безперервні в деякій межі $(x_0(t), u_0(t), t), t \in [t_0, T]$, де $F = (F_1, \dots, F_{m_2})$.

Теорема 1.1. Нехай $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$ - розв'язок задачі (1.62). Тоді існують такі не рівні одночасно нулю множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m_2})$, $\psi(t) \in R_n$, причому $\psi(t)$ неперервно диференційованих на $[t_0, T]$, що справедливі наступні співвідношення:

– рівняння еволюції системи

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)); \quad (1.63)$$

– рівняння Ейлера

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - F_x(t, x_0(t), u_0(t))\lambda; \quad (1.64)$$

– умова трансверсальності

$$\psi(t_0) = -\varphi_x(t_0, x, T, y)\lambda, \psi(T) = \varphi_y(t_0, x, T, y)\lambda \quad (1.65)$$

При $x=x_0(t_0)$, $y=x_0(T)$;

– умова стаціонарності

$$-F_u(t, x_0(t), u_0(t))\lambda + f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) = 0; \quad (1.66)$$

– умова стаціонарності рухомі кінці t_0 , T (враховуються лише в разі рухомих меж)

$$F'(t_0, x_0(t_0),$$

$$u_0(t_0))\lambda - \left[\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_x(t_0, x, T, y) \dot{x}_0(t_0) \right]' \lambda = 0, \quad (1.67)$$

$$F'(T, x_0(T),$$

$$u_0(T))\lambda + \left[\varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_y(t_0, x, T, y) \dot{x}_0(T) \right]' \lambda = 0, \quad (1.68)$$

при $x=x_0(t)$, $y=x_0(T)$;

– умови доповнюючої не жорсткості

$$\lambda_j \left[\int_{t_0}^T F_j(t, x_0(t), u_0(t)) dt + \varphi_j(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) \right] = 0,$$

$$j = 1, \dots, m_1; \quad (1.69)$$

– умови не позитивності

$$\lambda_i \leq 0, i = 0, 1, \dots, m_1. \quad (1.70)$$

Доказ сформульованої теореми приведено в багато чисельних наукових працях та підручниках по фізико-математичним напрямкам [2].

Відзначимо, що умову (1.67) слід враховувати, у випадку коли варіюється момент t_0 початку руху, а умова (1.68) - якщо варіюється момент T .

Якщо ж який-небудь із моментів t_0 або T є заданим, то відповідна умова (1.67) або (3.7) не враховується. Крім того, якщо λ_0 відмінно від нуля, тобто якщо $\lambda_0 < 0$, то в якості λ_0 можна взяти будь-яку від'ємну постійну, але вона не повина дорівнювати нулю.

Отже, для завдання управління (1.62) необхідні умови оптимальності виражаються сукупністю співвідношень (1.62) - (1.70).

Спосіб визначення оптимального управління, заснований на використанні необхідних умов оптимальності, складається з наступних кроків:

1. З рівняння (1.66) знаходять керування u_0 у вигляді функції часу t , траєкторії $x_0(t)$ і множників Лагранжа $\lambda, \psi(t)$, тобто

$$u_0 = u_0(t, x_0(t), \psi(t), \lambda).$$

2. Підставляють цей вираз управління в рівняння (1.63), (1.64), (1.67) - (1.70). Тоді для визначення траєкторії $x_0(t)$ і вектора $\psi(t)$ отримують крайову задачу, яка аналогічна системі рівнянь (1.1), (1.64), граничними умовами (1.65), (1.67), (1.68) і співвідношеннями (1.69), (3.9).

3. Будують спільне рішення $x_0(t)$, $\psi(t)$ системи $2n$ рівнянь (1.1), (1.64). Це спільне рішення залежить від $2n$ довільних постійних, а також від множників Лагранжа λ і двох моментів часу t_0 і T .

Слід відзначити, що співвідношення (1.62) - (1.70) зберігають свій вигляд при заміні ψ на $C\psi$ і λ на $C\lambda$ для довільної сталої $C > 0$. Значить, число незалежних компонент вектора $\lambda \in R_{m_2+1}$ не перевершує m_2 . Таким чином, загальне рішення системи (1.63), (1.64) залежить від $2n + m_2 + 2$ постійних для визначення яких є $2n$ умов (1.65), дві умови (1.67), (1.68) на рухомі кінці t_0 , T і нарешті, m_1 умов (1.69) і $m_2 - m_1$ нерівностей з (1.62).

Отже, число умов, для побудови оптимального управління, збігається з числом пошукових постійних.

Нижче, використовуючи теорему 3.1, наведемо вид умов оптимальності для найбільш характерних завдань управління.

1.3.2 Фіксовані початкові та граничні умови

У цьому випадку необхідні умови оптимальності повинні задовольняти вимогам теореми 1.1. Твердження теореми 1.1 виходить як наслідок із загальних необхідних умов оптимальності, сформульованих в теоремі 3.1. Вектор λ множників Лагранжа зводиться в даному випадку до скаляру λ_0 , непозитивному в силу умов (1.70). Тому рівняння (1.64), (1.65) перетворюються до наступного виду:

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - \lambda_0 F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \quad (1.71)$$

$$\psi(T) = \lambda_0 \varphi_x(x_0(T)). \quad (1.72)$$

Виконання умови (1.65) призводить до наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + \lambda_0 F_u(t, x_0(t), \\ u_0(t)) = 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

Так як моменти часу t_0 і T і початкове положення системи $x(t_0)$ задані і фіксовані, а обмеження типу рівностей і нерівностей з (1.62)

відсутні, то інші необхідні умови оптимальності (1.67) - (1.69) не враховуються. Значить, для задачі (1.1), (1.2) необхідні умови оптимальності зводяться до існування числа $\lambda_0 \leq 0$ і вектора $\psi(t) \in R_n$ не рівних одночасно нулю, для яких виконуються рівняння (1.1), (1.71), (1.72). Це свідчить про можливість побудови математичної і комп'ютерної моделей відповідно до вирішуємої конкретної практичної задачі оптимального керування.

1.3.3 Фіксовані початок і кінець руху, вільні початкове і кінцеве положення

Розглянемо задачу керування системою (1.63) з заданими моментами t_0, T і критерієм якості

$$J = \int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(x(t_0)),$$

$$x(T) \rightarrow \inf.$$

Початкове положення $x(t_0)$ і кінцеве $x(T)$ вільні. Необхідні умови оптимальності (1.64) - (1.70) приймають в даному випадку вид рівнянь (1.71), (1.73) і граничних умов

$$\psi(t_0) = -\lambda_0 \varphi_x(x, y),$$

$$\psi(T) = \lambda_0 \varphi_y(x, y)$$

$$x = x_0(t_0),$$

$$y = x_0(T)$$

Аналогічно, як і в п. 2, вважаємо за можливе покласти $\lambda_0 = -1$. Таким чином, в розглянутій задачі, в математичному сенсі, для досягнення необхідної оптимальності слід задовольняти наступним початковим і граничним умовам:

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) &= -f_x(t, x_0(t), \\
u_0(t))\psi(t) + F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \quad (1.74) \\
\psi(t_0) &= \varphi_x(x, y), \quad x = x_0(t_0), \\
\psi(T) &= -\varphi_y(x, y), \quad y = x_0(T), \\
f_y(t, x_0(t), \\
u_0(t))\psi(t) - F_u(t, x_0(t), \\
u_0(t)) &= 0.
\end{aligned}$$

1.3.4 Задача з фіксованими значеннями змінних стану моменту початку і кінця руху

Розглянемо ту ж задачу управління, що і в п.3, але з заданими значеннями деяких компонентів векторів $x_0(t)$ і $x(T)$. При цьому рівняння руху мають вигляд (1.63) з критерієм якості J , моменти часу t_0 і T задані.

Крім того, заданими є q_1 компонент $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{q_1}^0$ вектора $x(t_0)$ і q_2 компонент $x_1^T, x_2^T, \dots, x_{q_2}^T$ вектора $x(T)$, де цілі числа q_1, q_2 не перевершують n .

Запишемо останнє обмеження у вигляді (1.62):

$$\begin{aligned}
x_i(t_0) - x_i^0 &= 0, \quad i = 1, \dots, q_1, \\
x_j(T) - x_j^T &= 0, \quad j = 1, \dots, q_2.
\end{aligned} \quad (1.75)$$

У силу обмежень (1.75) природно вважати, що функція φ в функціоналі J залежить тільки від інших значень фазових координат, тобто

$$\varphi(x(t_0), x(T)) = \varphi(x_{q_1+1}(t_0), \dots, x_n(t_0), x_{q_2+1}(T), \dots, x_n(T)).$$

Вектор множників Лагранжа має вигляд

де

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m_2}),$$

$$m_2 = q_1 + q_2, \lambda_0 \leq 0.$$

Отже, необхідні умови оптимальності (1.64) - (1.70) в даному випадку, можна представити у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= f(t, x_0(t), u_0(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ \dot{\psi}(t) &= f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - \lambda_0 F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \\ f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + \lambda_0 F_u(t, x_0(t), u_0(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (1.76)$$

Причому виконуються умови трансверсальності

$$\begin{aligned} \psi_i(t_0) &= -\lambda_i, \quad i = 1, \dots, q_1, \\ \psi_j(t_0) &= -\lambda_0 \varphi_{x_j}(t_0, x(T)), \quad j = q_1 + 1, \dots, n, \\ \psi_k(T) &= \lambda_{q_1+k}, \quad k = 1, \dots, q_2 \\ \psi_l(T) &= \lambda_0 \varphi_{x_l(T)}(x(t_0), x(T)), \quad l = q_2 + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Приклад 1.1. У якості прикладу розглянемо одновимірну задачу управління, яка задовольняє наступному рівнянню:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(0) &= 0, x(T) = 1, \quad \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1.78)$$

де a і T - задані деякі постійні.

Виконання необхідних умов оптимальності (1.76), (1.77) призводять до отримання наступних співвідношень:

$$\dot{\psi} = -a\psi(t), \quad -2\lambda_0 u(t) - \psi(t) = 0, \quad (1.79)$$

$$\psi(0) = -\lambda_1, \quad \psi(T) = \lambda_2 \quad (1.80)$$

Якщо $\lambda_0=0$, то на підставі (1.79) функція $\psi(t) \equiv 0$. Тому в силу (1.80) постійні $\lambda_1=0, \lambda_2=0$, тобто всі множники Лагранжа $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \psi(t))$, одночасно дорівнюють нулю, що неможливо з точки зору здорового глузду фізичного тлумачення задачі. Значить, в якості λ_0 можна взяти будь-яку від'ємну постійну.

Покладемо $\lambda_0=-1/2$. Тоді $u(t)=\psi(t)$ в силу (1.79). Звідси і з формули Коші випливає, що

$$\psi(t) = -\lambda_1 e^{-at} = u(t).$$

Підставляючи цей вираз для управління $u(t)$ в (1.78), знаходимо, що

$$x(t) = -\lambda_1 \int_0^t e^{a(t-2s)} ds.$$

Вважаючи тут $t = T$ і використовуючи граничну умову $x(T) = 1$, отримаємо

$$\lambda_1 = -2a \left[e^{aT} - e^{-aT} \right]^{-1}.$$

Отже, оптимальне управління $u_0(t)$ має наступний вигляд:

$$u_0(t) = 2ae^{-at} \left[e^{aT} - e^{-aT} \right]^{-1}, \quad (1.81)$$

а відповідна цьому управлінню траєкторія визначається рівнянням

$$x(t) = \left[e^{at} - e^{-at} \right] \left[e^{aT} - e^{-aT} \right]^{-1}. \quad (1.82)$$

Формули (1.81), (1.82) справедливі при будь-якому a . Зокрема, якщо $a = 0$, то з урахуванням правила Лопіталя маємо $u_0(t)=1|T$, $x(t)=t|T$.

1.3.5 Задача з невизначеним моментом закінчення руху

Розглянемо задачу управління (1.62) для заданих початкових моменту t_0 , положення $x(t_0)$ і вільних кінцевих моменту T і положення $x(T)$ зі скалярним критерієм якості

$$J_0(u, T, x(T)) \rightarrow \inf \quad (1.83)$$

при обмеженнях виду

$$\begin{aligned} J_i(u, T, x(T)) &= 0, \\ i &= 1, \dots, m_2. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Тут скалярні функціонали J_k визначаються рівностями

$$\begin{aligned} J_k(u, T, x(T)) &= \int_{t_0}^T F_k(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_k(T, x(T)), \\ k &= 0, \dots, m_2. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Необхідні умови оптимальності в задачі (1.62), (1.83) - (1.85) полягають в існуванні вектора

$$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m_2}), \lambda_0 \leq 0$$

і функції $\psi(t) \in R^n$, що не є рівними одночасно нулю і таких, що справедливі рівняння (1.63), (1.64) - (1.66), (1.68), в яких

$$F = (F_0, \dots, F_{m_2}), \varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{m_2}).$$

1.3.6 Задача Чаплигіна

Припустимо, що в горизонтальній площині системи координат Oxy рухається літак з постійною швидкістю v , складовою кута u з віссю Ox . На літак діє вітер, швидкість якого ω постійна і спрямована по осі Ox (рис. 1.9).

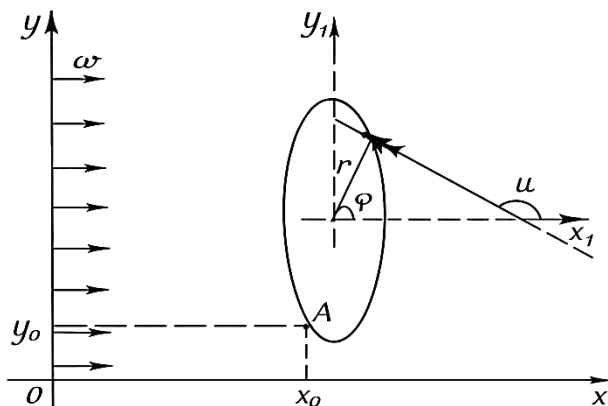


Рисунок 1.9 – Графічне представлення задачі Чаплигіна

Завдання Чаплигіна полягає у виборі такого керування u (кута курсу літака або ж напрямку осі літака), при якому літак, почавши рух з точки $A(x_0, y_0)$, облетить за заданий час T фігуру максимальної площі S .

Позначимо поточні координати літака через $x(t)$ і $y(t)$. Тоді рівняння руху літака, початкові і кінцеві умови мають вигляд

$$\dot{x} = v \cos u - \omega, \quad \dot{y} = v \sin u, \quad (1.86)$$

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad y(0) = y(T) = y_0. \quad (1.87)$$

Площа S , яку облітає літак, визначається наступним виразом:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)) dt \rightarrow \max$$

Це означає, що в якості мінімізуемого функціонала $J(u)$ можна

взяти наступний інтеграл у відповідних межах:

$$J(u) = - \int_0^T [xv \sin u - y(v \cos u - \omega)] dt. \quad (1.88)$$

Таким чином, задача Чаплигіна є класичною варіаційною задачею типу Лагранжа.

Для її вирішення, як це було викладено вище, побудуємо функцію

$$H = [xv \sin u - y(v \cos u - \omega)] + \psi_1(v \cos u - \omega) + \psi_2 v \sin u.$$

Вважаємо, що $\lambda_1 = -\psi_1$, $\lambda_2 = -\psi_2$. Тоді з рівнянь (1.64), для спряжених змінних ψ_1 і ψ_2 і умови стаціонарності (1.66), отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\dot{\psi}_1 = \frac{\partial H}{\partial x} = v \sin u = \dot{y} \\ \dot{\lambda}_2 &= -\dot{\psi}_2 = \frac{\partial H}{\partial y} = -(v \cos u - \omega) = -x \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_1 v \sin u - \lambda_2 v \cos u = 0$$

З перших двох рівнянь (1.89) випливає, що

$$\lambda_1 = y + C_2, \quad \lambda_2 = -x - C_1.$$

Тоді з останнього рівняння (1.89) знаходимо

$$(y + C_2) \sin u + (x + C_1) \cos u = 0 \quad (1.90)$$

Рівняння (1.86), (1.90) геометрично відображають параметрично деяку криву. Покажемо, що ця крива при $\omega < v$ є еліпс. З цією метою та дотриманням фізично-геометричного тлумачення досліджує мого процесу введемо нові змінні

$$\begin{aligned}x_1 &= x + C_1 \\ y_1 &= y + C_2; \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} + u.\end{aligned}$$

Щодо цих змінних рівняння (1.86), (1.90) перетворюються до наступної систем:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + v \sin \varphi - \omega &= 0, \\ \dot{y}_1 - v \cos \varphi &= 0, \\ y_1 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi &= 0\end{aligned}\quad (1.91)$$

Аналіз останнього рівняння (1.91) показує, що

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \varphi \\ y_1 &= r \sin \varphi, \\ r^2 &= x_1^2 + y_1^2\end{aligned}\quad (1.92)$$

Диференціюючи (1.92) і використовуючи данні (1.91), отримаємо, що

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{d}{dt}(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}) = \frac{2(x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1)}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \\ x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi &= \omega \cos \varphi = \frac{\omega}{v} \dot{y}_1\end{aligned}$$

Інтегруючи це співвідношення, знаходимо

$$r = \frac{\omega}{v} y_1 + C = r \frac{\omega}{v} \sin \varphi + C$$

$$\text{Або } r = \frac{C}{1 + \frac{\omega}{v} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \quad (1.93)$$

Відомо, що рівняння (1.93) при $\omega < v$ описує еліпс в полярній системі координат з ексцентриситетом ω/v , фокальним параметром C і більшою віссю, паралельною осі Oy . Визначивши постійну інтегрування C з умов (1.87), отримаємо, що максимальна площа S , яку облітає саме влітку за час T , визначається наступним рівнянням:

$$S_{\max} = \frac{v^2 T^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)^{3/2}$$

1.3.7 Приклад визначення максимальної швидкості ракети в кінці ділянки виведення її на прямолінійну траєкторію

В якості прикладу розглянемо визначення максимальної швидкості ракети при умові виведення її на прямолінійну траєкторію руху. Для спрощення задачі вважаємо, що ракета представляє собою матеріальну точку постійної маси m , рухається в площині Oxy під дією сили тяги (рис.1.10). Реактивне прискорення $a(t)$ вважається відомою функцією часу, у зпрощеному випадку - постійною, тобто $a(t) = a$. (Зміну маси, дію сторонніх збуджень, та інш. не враховуємо).

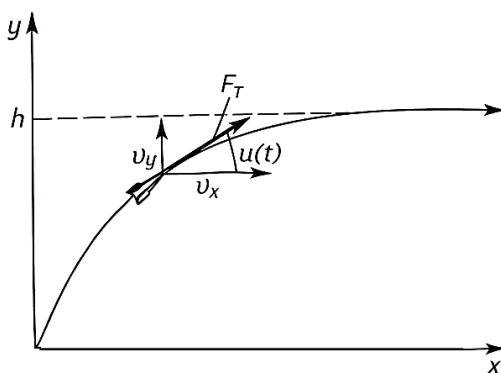


Рисунок 1.10 – Графічне представлення виводу ракети в горизонтальну площину польоту

Така модель руху реальної ракети практично виправдана. Якщо маса ракети в процесі руху змінюється незначно $((m - m_0) \ll m_0)$ то масою ракети можна знехтувати $(g \ll a(t))$. Позначимо через $v_x(t)$ і $v_y(t)$ горизонтальну і вертикальну компоненти швидкості ракети, тобто

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}.$$

В якості управління виберемо кут $\theta(t) = u$ між силою тяги F_T і віссю x .

Рух ракети описується рівняннями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_x &= a \cos u, & \dot{v}_y &= a \sin u. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Завдання полягає в тому, щоб за заданий час T перевести ракету на траєкторію, яка паралельна осі Ox і відстоїть від неї на відстань h , так, щоб досягалося максимальне значення швидкості. Інакше кажучи, початкові умови повинні мати наступний вигляд:

$$x(0) = y(0) = v_x(0) = v_y(0) = 0, \quad (1.95)$$

а кінцеві умови при заданому T –

$$y(T) = h, \quad v_y(T) = 0, \quad x(T) \text{ довільні.} \quad (1.96)$$

Відповідно до умови вирішуємої задачі необхідно вибрати таке управління $\theta(t)$, щоб забезпечити максимум наступного функціонала:

$$J(u) = v_x(T) \rightarrow \max. \quad (1.97)$$

На кут $\theta = u$ ніяких обмежень не накладається. При таких умовах сформульована задача є класичною варіаційної задачею Майєра.

Гамільтоніан H в вирішувемій задачі можливо представити у вигляді

$$H = \psi_1 a \cos \vartheta + \psi_2 a \sin \vartheta + \psi_3 v_x + \psi_4 v_y.$$

У цьому випадку для відповідних змінних ψ_1 справедливі наступні умови:

$$\dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2, \quad \dot{\psi} = 0,$$

звідки $\psi_1 = C_1$

$$\psi_2 = C_2,$$

$$\psi_3 = -C_1 t + C_3,$$

$$\psi_4 = -C_2 t + C_4.$$

Згідно умові оптимальності отримані результати повинні задовольняти наступному диференційному рівнянню:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\psi_3 \sin u + \psi_4 \cos u = 0.$$

Вирішення останнього рівняння показує, що оптимальний напрямок сили тяги виражається формулою

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\text{opt}} = \frac{\psi_4}{\psi_3} = \frac{-C_2 t + C_4}{-C_1 t + C_3}, \quad (1.97)$$

а відповідний закон зміни напрямку тяги (1.97) називають законом дробно-лінійного тангенса.

З крайових умов (1.95), (1.96) випливає, що

$$\psi_1 \equiv 0, \text{ а } \psi_3 \equiv 1$$

Тому закон (1.97) приймає вигляд

$$tgu = tg\vartheta_0 - Ct.$$

Величини ϑ_0 і C визначаються з двох граничних умов

$$\begin{aligned} v_y(T) &= 0, \\ y(T) &= h \end{aligned}$$

В якості прикладу на рис 1.11 показано можливі траєкторії управління кутом тяги u_{opt} в залежності від параметра θ_0 .

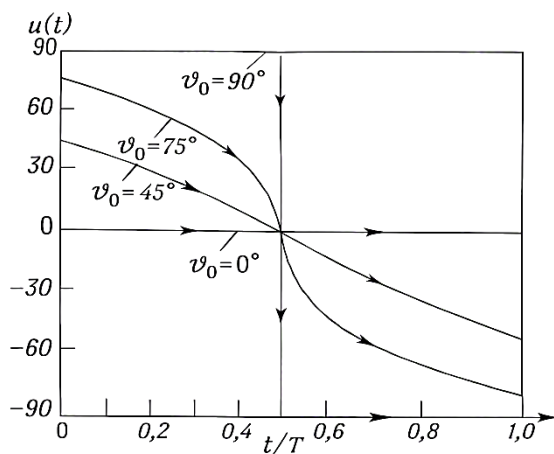


Рисунок 1.11 – Залежність параметра $u(t)$ від часу t

2 ПРИНЦИП МАКСИМУМУ

У практичних задачах управління, в залежності від режимів і характерних рис об'єкта, необхідно враховувати суттєві обмеження. Для цих задач встановлені в попередньому розділі необхідні умови оптимальності не завжди задовольняють поставленій меті по деяким показникам.

В таких випадках умови оптимальності досягаються шляхом використання принципу максимуму Понтрягіна, якому присвячені дослідження цього розділу.

Доцільно відзначити, що модифікація полягає лише в умові стаціонарності, а всі інші необхідні умови оптимальності зберігаються.

2.1 Задачі з вільним правим кінцем і заданим часом

В деяких випадках досягти умови оптимальності зручно отримати шляхом впровадження принципу максимуму. Цей методологічний підхід і рішення запропонував Понтрягін, тому він отримав формулювання «принципа максимуму Понтрягіна».

Слід зауважити, що на практиці мають місце модифіковані задачі в яких розглядаються умови стаціонарності, а умови оптимальності набувають іншого змісту.

2.1.1 Задача Майера

Розглянемо наступну задачу управління:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), x \in R_n, u \in R_m, \\ t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$J(u) = \varphi(x(T)) \rightarrow \inf, \quad (2.2)$$

$$u(t) \in U. \quad (2.3)$$

Новим елементом у постановці задачі, в порівнянні з попередньою главою, є обмеження (2.3).

Якщо множина U замкнута і обмежена, то оптимальне

керування може знаходитись в граничних межах множини U . У цьому випадку управління не можна варіювати довільним чином і, отже, використання методів класичного варіаційного обчислення не дає задовільного результату.

Передбачається, що f і φ задовольняють обмеженням (2.3) - (2.5), а оптимальне управління шукається в класі частково-неперервних функцій $u(t)$. Так як значення $u(t)$ в точках розриву не впливають на величину критерію якості (2.2), то значення управління в точках розриву можна визначити довільно.

Для визначеності вважається, що розглядаються управління частково-неперервні справа. Якщо обмеження (2.3) відсутні, то необхідні умови оптимальності наведені в теоремі 1.1.

Наявність обмеження (2.3) вимагає модифікації умови (2.7) зазначеної теореми, оскільки оптимальне управління $u(t)$ може знаходитись на кордоні множини U і тому похідна $\partial H / \partial u$, може бути відмінна від нуля. В таких випадках необхідні умови оптимальності, які називають принципом максимуму Понтрягіна, формулюються наступним чином.

2.1.2 Принцип максимуму Понтрягіна

Нехай – оптимальне управління в задачі (2.1) - (2.3), а $x_0(t)$ – відповідна йому оптимальна траєкторія. Тоді $u_0(t)$ задовольняє наступній умові максимуму:

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \quad (2.4)$$

Тут гамільтоніан H визначається рівністю

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x(t), u(t)),$$

а вектор сполучених змінних $\psi(t)$ є рішенням задачі

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \\ \psi(T) &= -\varphi_x(x_0(T)). \end{aligned}$$

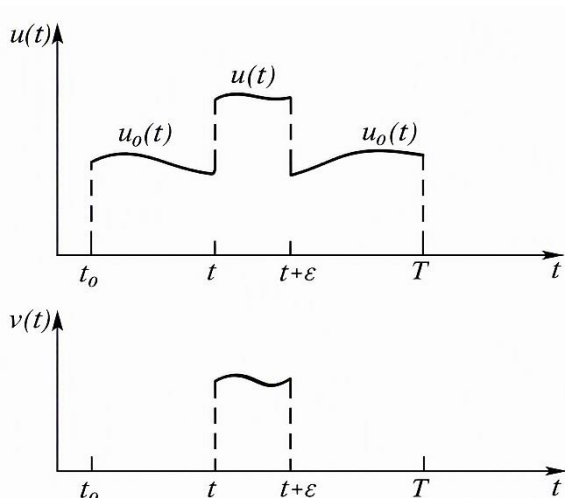


Рисунок 2.1 – Залежність параметра $u(t)$ при гольчатому варіаційному керуванні

Слід відзначити, що у порівнянні з необхідними умовами оптимальності в класичній варіаційній задачі управління (теорема 1.1) в принципі максимуму Понтрягіна замінено тільки умову стаціонарності на умову максимуму (2.4). Всі ж інші умови залишаються без змін.

Доказ даної теореми аж до формули (2.26) дослівно повторює доказ теореми 1.1. Зміни в доказі, обумовлені обмеженням на управління (2.3), стосуються подальших міркувань.

Наведемо їх. Візьмемо довільний елемент і моменти часу t і $t + \varepsilon$ на відрізку (t_0, T) , де $\varepsilon > 0$. Позначимо через $v(s)$, так названу, гольчатку варіацію управління (рис.2.1), що задається формулою

$$v(s) = -u_0(s) + u, \quad t \leq s \leq t + \varepsilon,$$

$$v(s) = 0, s \in (t_0, T) \setminus (t, t + \varepsilon).$$

Тоді з (2.22) (аналогічно висновку (2.27)) маємо, що

$$0 \leq J = - \int_t^{t+\varepsilon} \gamma(s) ds + N_1 + N_2,$$

$$\gamma(t) = H(t, x_0(t), u, \psi(t)) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)).$$

Тут доданки N_1 і N_2 виражаються формулами (2.16) і (2.19). Використовуючи нерівність Коші - Буняновського, оцінки (2.17) і (2.20) доданків N_1 і N_2 і вирази для варіації v враховуємо, що при деякій постійній $3 > 0$ справедливі наступні нерівності:

$$|N_1| + |N_2| \leq C \left[\int_t^{t+\varepsilon} |v(s)| ds \right]^2 \leq \varepsilon C \int_t^{t+\varepsilon} |v(s)|^2 ds$$

В силу прийнятих припущень H є безперервна функція їх аргументів. Тому з урахуванням часткової безперервності управління $u_0(t)$ знайдеться настільки мале $\varepsilon > 0$, що функція $\gamma(t)$ буде неперервна при $s \in [t, t + \varepsilon]$. Значить, при деякому $\theta \in [0, 1]$ отримаємо

$$\int_s^{t+\varepsilon} \gamma(s) ds = \varepsilon \gamma(t + \theta \varepsilon)$$

Звідси і з виразу для J випливає, що

$$0 \leq J \leq -\varepsilon \gamma(t + \theta \varepsilon) + \varepsilon C \int_t^{t+\varepsilon} |v(s)|^2 ds, \varepsilon > 0.$$

Розділивши обидві частини отриманої нерівності на ε і перейшовши до межі при $\varepsilon \rightarrow 0$, встановлюємо, що $\gamma(t) \leq 0$. Так як елемент $u \in U$ є довільним, то співвідношення (2.4) встановлено при $u \in U$. Подібним же чином встановлюється справедливність рівності

(2.4) і при $u \in U$, якщо покласти $v(s) = u - u_0(s), T - \varepsilon \leq s \leq T$ та $v(s) = 0, s < T - \varepsilon$. Відзначимо, що в умовах доведеної теореми $H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))$, як функція часу t неперервна, оскільки незалежно від того, чи є управління безперервним праворуч або ліворуч, значення функції в будь-який момент часу одне і те ж і дорівнює лівій частині виразу (2.4).

2.1.3 Задача Больца

В якості слідства теореми 1.1 наведемо необхідні умови оптимальності в задачі управління системою (2.1) з обмеженнями (2.3) і з мінімізуємим функціоналом

$$J(u) = \int_{t_0}^T F_0(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(T)) \rightarrow \inf. \quad (2.5)$$

Моменти часу t_0 і T , а також початкова умова $x(t_0) = x_0 \in R_n$ задані.

Подібно висновку необхідних умов в теоремі 1.1, встановлено, що має місце наступна теорема.

Теорема 2.2 Нехай - оптимальне управління в задачі (2.1), (2.3), (2.5), а - оптимальна траєкторія. Тоді існує такий вектор, що задовольняє рівнянням

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= -H_x(t, x_0, u_0(t), \psi(t)), t_0 \leq t \leq T, \\ \phi(T) &= -\phi(x_0(T)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

що справедлива умова максимуму

$$\max H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad (2.7)$$

де функція H визначається рівністю

$$H(t, x(t), U, \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x(t), u) - F_0(t, x(t), u). \quad (2.8)$$

Відзначимо, що максимум функції $H(t, x(t), U, \psi(t))$ в лівій частині умови (2.7) обчислюється за параметром $u \in U$ при фіксованих значеннях решти аргументів $t, x_0(t)$ і $\psi(t)$.

Побудова оптимального управління в задачі (2.1), (2.3), (2.5) досягається аналогічно, як у класичній варіаційній задачі управління, з тією лише різницею, що управління виключається завдяки використанню співвідношення умови (2.7). Інженерна реалізація данного методу досягає шляхом складається з наступних кроків:

1. Визначають управління з рівняння (2.7);

$$u_0(t, \psi(t), x_0(t))$$

2. Підставляють знайдене управління в рівняння (2.1), (2.6) і вирішують отриману крайову задачу щодо

$$t, x_0(t) \text{ і } \psi(t);$$

3. Підставляють знайдене значення у вираз для u_0 .

$$x_0(t), \psi(t)$$

В результаті застосування цього методу виходить П-керування $u_0(t)$. Як і для задач без обмежень (2.3), отримане П-керування є оптимальним, якщо рішення вихідної задачі управління (2.1), (2.3), (2.5) існує, а рішення крайньої задачі в п.2 єдино.

2.1.4 Приклад вирішення задачі оптимального управління скалярної системи рівнянь з постійними коефіцієнтами

В якості прикладу використання теоретичних положень викладених вище при вирішенні інженерних завдань розглянемо задачу оптимального управління скалярної системи з постійним

коефіцієнтом a і b .

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), 0 \leq t \leq T, x(0) = 0 \quad (2.9)$$

з критерієм якості

$$J = \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)] dt \rightarrow \min. \quad (2.10)$$

Рішення задачі (2.9), (2.10), очевидно, є $u_0(t) = 0$ і $x_0(t) = 0$. Встановимо його також і за допомогою принципу максимуму. Функція H рівняння (2.8) в даному випадку перетворюється до вигляду

$$H = \psi(t)[ax(t) + bu(t)] = x^2(t) - u^2(t). \quad (2.11)$$

Виконання умови (2.7) з урахуванням (2.11) призводить до перетворення другого рівняння системи (2.6), відповідно до сполученої змінної, до наступного виду:

$$\dot{\psi}(t) = 2x(t) - a\psi(t), \psi(T) = 0. \quad (2.12)$$

Підставимо в (2.9) замість u вираз $\psi(t)/2$. Тоді для визначення траєкторії і функції $\psi(t)$ отримуємо крайову задачу, утворену рівнянням (2.12) і рівнянням

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b^2\psi(t)/2, x(0) = 0. \quad (2.13)$$

Рішенням крайової задачі (2.12), (2.13) є $x_0(t) \equiv 0, \psi(t) \equiv 0$ тобто $u_0(t) = b\psi(t)/2 \equiv 0$.

Відзначимо, що принцип максимуму представляє собою необхідну умову оптимальності, але вона не є достатньою. Іншими словами, траєкторія $x(t)$ і керування $u(t)$ можуть задовольняти всім умовам принципу максимуму, але не бути оптимальними. Розглянемо відповідні приклади.

2.1.5 Приклади рішень рівнянь принципу максимуму

В якості прикладу розглянемо деяку траєкторію в певних межах $x(t) \in R_1$, яка задовольняє наступним умовам:

$$x(t) = u(t), 0 \leq t \leq 1, x(0), x(1) = 0. \quad (2.14)$$

При вирішенні практичної задачі необхідно визначити таке керування $u(t)$, щоб воно задовольняло мінімуму наступного функціонала:

$$J(u) = \int_0^1 [u^2(t) - 4x(t)u^3(t) + 2tu(t)]dt \rightarrow \inf. \quad (2.15)$$

Запишемо співвідношення принципу максимуму для задачі (2.14), (2.15). Маємо

$$H = p_0(u^2 - 4xu^3 + 2tu^4) + \psi(t)u.$$

При цьому постійну p_0 можна покласти рівною $p_0 = -1$. Тобто

$$\psi(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -4u^3(t). \quad (2.16)$$

Зауважимо, що функції

$$x_0(t) = 0, \psi_0(t) = 0, u_0(t) = 0 \quad (2.17)$$

задовольняють рівняннями (2.14), (2.16), а також для будь-якого управління та наступній умові максимуму:

$$H(t, x_0, \psi_0, u_0) \equiv 0 \geq H(t, x_0, \psi_0, u) = -u^2(1 + 2tu^2).$$

Інакше кажучи, функції (2.17) задовольняють всім умовам принципу максимуму. Покажемо, однак, що траєкторія $x_0(t) = 0$ і управління $u_0(t) = 0$ не є вирішенням задачі оптимального керування (2.14), (2.15).

Значення функціонала (2.15) при управлінні $u_0(t) \in J(u_0) = 0$.

Побудуємо тепер послідовність управлінь, для яких значення критерію якості можуть бути негативним (і при тому повинні прагнути до $-\infty$).

Вважаючи, що

$$u_{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon^{-1}, 0 \leq t \leq \varepsilon, (\varepsilon - 1)^{-1}, \varepsilon < t \leq 1, \quad (2.18)$$

де $\varepsilon \in (0,1)$, то відповідає траєкторія $x_{\varepsilon}(t)$ приймає наступний аналітичний вигляд:

$$x_{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon^{-1}, 0 \leq t \leq \varepsilon, (1-t)(1-\varepsilon)^{-1}, \varepsilon < t \leq 1, \quad (2.19)$$

Знайдене значення критерію якості (2.15), відповідає рівнянням (2.18), (2.19). В результаті перетворення маємо

$$J(u_{\varepsilon}) = [\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-1} - \varepsilon^{-2} + 2(1-\varepsilon)^{-2} + (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-3}.$$

Звідки видно, що при $J(u_{\varepsilon}) \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Виходячи з фізичного тлумачення отриманого результату видно, що в данному випадку управління не є оптимальним.

2.1.6 Приклад вирішення задачі на умови мінімуму оптимізаційного функціонала

Розглянемо задачу про мінімум функціоналу

$$J(u) = \int_0^1 |x(t)| dt \quad (2.20)$$

На рішеннях рівняння (2.14) при обмеженні $|u| \leq 1$. Ясно, що в цій задачі оптимальне управління $u_0(t) \equiv 0$, а оптимальна траєкторія $x_0(t) \equiv 0$. З іншого боку, Гамільтоніан H в задачі (2.14), (2.20) є

$$H = \psi(tu - |x|). \quad (2.21)$$

Так як оптимальне керування $u_0(t) \equiv 0$, то максимум гамільтоніана (2.21) при цьому управлінні може досягатися лише за умовою, якщо $\psi(t) \equiv 0$. Однак у цьому випадку і будь-яке інше управління u максимізує гамільтоніан H . Значить, умова максимуму не дозволяє відрізнити оптимальне управління від неоптимального.

У подібних випадках, коли принцип максимуму не дозволяє визначити оптимальне керування, говорять про вироджену задачу управління. Вироджені задачі доволі часто зустрічаються при вирішенні різних інженерних питань керування в технологіях, управління багато параметричними процесами, ракетодинаміки, екології, моніторингу, діагностики та інші.

2.1.7 Приклад визначення повороту вала електродвигуна на максимальний кут

Цю задачу розглянемо на основі спрощеної моделі електродвигуна. При цьому, аналогічно як в попередньому аналізі, використовуємо наступні позначення:

$$x_1 = x_2, x_2 = u, |u| \leq b, \quad (2.22)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad (2.23)$$

$$x_2(T) = 0, x_1(T) \rightarrow \max. \quad (2.24)$$

де x_1 - кут повороту вала двигуна; u -наведений обертаючий момент; T -заданий час закінчення повороту. Потрібно вибрати керування $u(t)$ так, що б у момент часу T швидкість обертання була рівна нулю, а кут повороту при цьому був максимальним.

Для того, щоб скористатися методами цього параграфу, зведемо задачу (2.22) - (2.24) до задачі Майєра за допомогою введення штрафної функції. Відзначимо, що *метод штрафних функцій* досить часто використовується з метою використання і врахування різних обмежень.

Введемо функціонал

$$J_k(u) = -x_1(T) + \frac{k}{2} x_2^2(T) \rightarrow \min. \quad (2.25)$$

Тут $k > 1$ називається коефіцієнтом штрафу. Ясно, що при оптимальному управлінні в задачі (2.22), (2.23), (2.25) повинно прагнути до оптимального управління в задачі (2.22) - (2.24).

Для задачі (2.22), (2.23), (2.25) на підставі теореми 1.1 отримуємо

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \\ \psi_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \psi_1(T) &= 1, \\ \psi_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \\ \psi_2(T) &= -kx_2(T), \\ \max_{|u| \leq b} H &= \max_{|u| \leq b} \psi_2 u. \end{aligned} \quad (2.26)$$

З рівнянь системи (2.26) випливає, що оптимальне управління повинно задовольняти наступним умовам:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= 1, \quad \psi_2(t) = C - t, \quad u_0(t) = b \operatorname{sign} \psi_2(t), \\ u_0^k(t) &= \{b, 0 \leq t \leq \tau, -b, \tau < t \leq T. \end{aligned} \quad (2.27)$$

де τ - момент перемикання, для якого $\psi_2(\tau) = 0$; (Його фізичну суть буде визначено нижче). З рівнянь (2.22) для $x_2(t)$ і $x_1(t)$ при управлінні (2.27) отримаємо, що:

$$x_2(t) = \{bt, 0 \leq t \leq \tau,$$

$$x_2(t) = \{2b\tau - bt, \tau \leq t \leq T. \quad (2.28)$$

$$x_1(t) = \{b \frac{t^2}{2}, 0 \leq t \leq \tau,$$

$$x_1(t) = \{b \frac{\tau^2}{2} + 2b\tau(t - \tau) - \frac{b}{2}(t^2 - \tau^2).$$

Для знаходження моменту перемикання τ використовуємо крайову умову

$$\psi_2(T) = -kx_2(T).$$

Звідси випливає, що

$$\psi_2(T) = C - T = -k(2b\tau - bT), C = T - k(2b\tau - bT).$$

Оскільки $\psi_2(\tau) = 0$, маємо

$$T - k(2b\tau - bT) - \tau = 0.$$

Таким чином, для визначення необхідного моменту перемикання отримуємо наступну формулу:

$$\tau = T(1 + bk)(1 + 2bk)^{-1}. \quad (2.29)$$

Наведемо й інший можливий спосіб визначення моменту τ .

2.1.8 Приклад визначення функціоналу на відповідній траєкторії

В якості наступного прикладу вирішення інженерних задач розглянемо можливі умови мінімуму функціонала $J_k(u)$, який приймає певні значення на відповідній траєкторії, яка відповідає директивному або заданому завданню. Обчислимо значення

функціонала $J_k(u)$ на траєкторії (2.28):

$$J_k(u) = \frac{bT^2}{2} + b\tau^2 + \frac{kb^2}{2}(2\tau - T)^2 - 2bT\tau. \quad (2.30)$$

Тепер момент перемикання можливо визначити з умови мінімуму виразу (2.30) по τ . Для вирішення такої інженерної задачі оптимізаційний функціонал представимо наступним диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = 2b\tau + 2kb^2(2\tau - T) - 2bT = 0,$$

Звідки

$$\tau = T(1 + bk)(1 + 2bk)^{-1},$$

Аналіз отриманого рішення математичної моделі показує, що воно аналогічне отриманому раніше і при розробці фізичної моделі можливо використовувати обидва метода.

З рівності (2.29) видно, що $\tau \rightarrow T/2$ при $k \rightarrow \infty$. Далі, так як

$$x_2(T) = bT(1 + 2bk)^{-1},$$

то $x_2(T) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отже, оптимальне управління $u_0^k(t)$ знайдено і при достатньо великому k воно наближене до оптимальному управлінню $u_0(t)$ в задачі (2.22) - (2.24), яке задовольняє наступним умовам:

$$u_0(t) = \{b, 0 \leq t \leq T/2,$$

$$u_0(t) = \{-b, T/2 \leq t \leq T.$$

2.2 Вирішення задач керування з незадалим часом закінчення

При вирішенні інженерних задач управління різними

технологічними об'єктами і технологічними процесами час його закінчення не визначено. Це обумовлено специфікою технологій, або замкнутим циклом виробництва.

В таких випадках математична модель зводиться до відомих рішень при заданні певних початкових і граничних умов.

Останні відіграють вирішальну роль оскільки вони повинні відображати фізичну роль дійсного процесу керування.

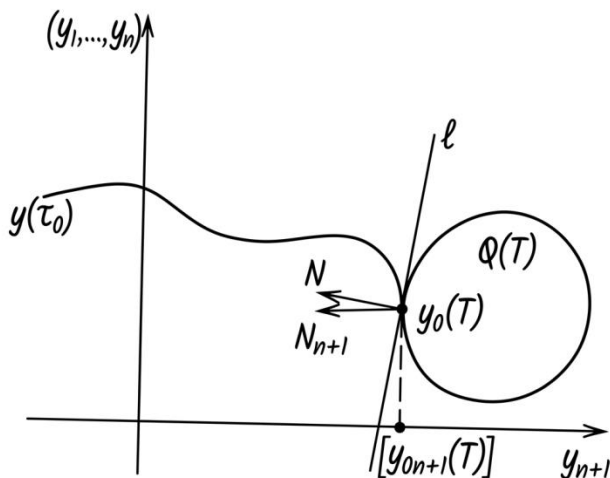


Рисунок 2.2 – Залежність множини $Q(T)$ опорної гіперплощини і нормалі N від змінної y_{n+1}

2.2.1 Зведення до задачі Майєра

Розглянемо задачу керування системою (1.1) з обмеженням (1.3) і критерієм якості

$$J(u) = \int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf_u, x \in R_n. \quad (2.31)$$

Передбачається, що початкове положення $x(t_0) = x_0$, кінцеве

положення $x(T) = x_1$ та момент t_0 задані, а момент T не заданий. Формуємо поставлену задачу інакше. При чому скористаємось прикладом, який використовували при переході задачі Лагранжа до задачі Майєра. Введемо вектори

$$y(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)), y(t) \in R_{n+1},$$

$$F = (f_1, \dots, f_n, F_0), F \in R_{n+1}.$$

Тоді задача (1.1), (1.3), (2.31) перетвориться до наступної системи рівнянь:

$$y(t) = F(t, y(t), u(t)), \quad t \geq t_0, \quad y(t_0) = (x_0, 0), \quad (2.32)$$

$$y_1(T) = x_1(T), \dots, y_n(T), x_n(T), y_{n+1}(T) \rightarrow \inf_u,$$

$$u(t) \in U(t).$$

Відзначимо, що в рівнянні (2.32) права частина F не залежить від змінної $y_{n+1}(t)$.

2.2.2 Визначальні умови оптимізації

Виведемо необхідні умови оптимальності для лінійної за управлінням системи виду (2.32)

$$y(t) = F(t, y(t)) + b(t)u(t),$$

$$t_0 \leq t \leq T, \quad y \in R_{n+1},$$

$$u \in R_1, \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.33)$$

Передбачається, що F не залежить від y_{n+1} і задовольняє умовам Ліпшиця (1.3), а u і $b(t) \in R_{n+1}$ вектор з обмеженими та частково-неперервними компонентами. Скалярне управління $u(t)$ задовольняє обмеженню

$$|u(t)| \leq a, a = \text{const.} \quad (2.34)$$

Момент t_0 початку руху, початкове положення $y(t_0)$, а також n перший компонент $y(T)$ задані.

Момент T і керування $u(t)$ визначаються з умови попадання системи в кінцевий стан $y(T)$ з мінімальним значенням $y_{n+1}(T)$:

$$y_{n+1}(T) \rightarrow \inf_u. \quad (2.35)$$

Припустимо, що розв'язок задачі (2.33) - (2.35) існує. Позначимо через $u_0(t)$ оптимальне керування, а через $y_0(t)$ - оптимальну траєкторію з компонентами $y_{0,1}(t), \dots, y_{0,n+1}(t)$.

Нехай $v(t)$ – будь-яка частково-неперервна функція така, що

$$u_0(t) + v(t)$$

задовольняє обмеженню (2.34), тобто

$$|u_0(t) + v(t)| \leq a. \quad (2.36)$$

Таку функцію $v(t)$ назовемо допустимою.

Позначимо через $a(t) \in R_{n+1}$ рішення рівнянню у варіаціях:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= A(t)a(t) + b(t)v(t), a(t_0) = 0, \\ A(t) &= F_y(t, y_0(t)). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Рішення задачі (2.37), що відповідає заданому $v(t)$, позначимо $a(t, v)$.

Введемо в просторі R_{n+1} множину $Q(T)$ (рис.2.2), яка визначається таким чином:

$$Q(T) = \{q \in Q(T): q = y(T) + a(T, v),$$

де v - будь-яка допустима функція}.

Наглядний приклад геометричного тлумачення множини $Q(T)$ в просторі R_{n+1} гіперплощини L і нормалі N показано на рис.2.2.

Встановимо властивості множини $Q(T)$, які істотно впливають і використовуються при отриманні необхідних умов оптимальності:

а) множина $Q(T)$ обмежена.

Оскільки множину допустимих $v(t)$ обмежено ($|v(t)| \leq 2a$) і матриця $A(t)$ також обмежена на $[t_0, T]$, всі $a(t, v)$ обмежені на $[t_0, T]$.

б) множина $Q(T)$ опукла.

Нехай q_1 і q_2 - дві точки з $Q(T)$. Покажемо, що всі точки q_v виду

$$q_v = \gamma q_1 + (1 - \gamma) q_2,$$

де $0 \leq \gamma \leq 1$ належать $Q(T)$. Якщо $q_1, q_2 \in Q(T)$, то існують допустимі $v_1(t)$ і $v_2(t)$ такі, що

$$q_1 = y_0(T) + \alpha(T, v_1), q_2 = y_0(T) + \alpha(T, v_2).$$

$$q_v = y_0(T) + \gamma \alpha(T, v_1) + (1 - \gamma) \alpha(T, v_2).$$

Для лінійного рівняння (2.37) справедливий принцип суперпозиції, в силу якого

$$\gamma \alpha(T, v_1) + (1 - \gamma) \alpha(T, v_2) = \alpha(T, \gamma v_1 + (1 - \gamma) v_2).$$

Функція

$$v(t) = \gamma v_1(t) + (1 - \gamma) v_2(t)$$

при всіх $\gamma \in [0, 1]$ і $t \in [t_0, T]$ є допустимою, оскільки

$$\begin{aligned}
|u_0(t) + v_1(t)| &= |u_0(t) + \gamma v_1(t) + (1 - \gamma)v_2(t)| = \\
&= |\gamma(u_0(t) + v_1(t)) + (1 - \gamma)(u_0(t) + v_2(t))| \leq \\
&\leq \gamma |u_0(t) + v_1(t)| + (1 - \gamma) |u_0(t) + v_2(t)| \leq a.
\end{aligned}$$

Значить, $\alpha(T, v_\gamma)$ при будь-якому $\gamma \in [0, 1]$ відповідає допустимій функції $v_\gamma(t)$. Тому, за визначенням,

$$q_1 = y_0(T) + \alpha(T, v_1) \in Q(T),$$

Що і доводить опуклість множини $Q(T)$.

в) точка $y_0(T)$ є гранична точка множини $Q(T)$.

Припустимо протилежне, тобто що $y_0(T)$ - внутрішня точка множини $Q(T)$. Тоді знайдеться таке число $\beta < y_{0,n+1}(T)$, що відрізок, паралельний осі Y_{n+1} і з'єднує точку $y_0(T)$ і точку

$$q_\beta = y_0(T), \dots, y_{0,n}(T), \beta),$$

цілком лежить в множині $Q(T)$. Оскільки

$$q_\beta \in Q(T),$$

знайдеться така допустима функція $v_\beta(t)$, що

$$q_\beta = y_0(T) + \alpha(T, v_\beta).$$

Позначимо через $y_\beta(t)$ рішення рівняння (2.33), відповідне допустимому управлінню $u_0(t) + v_\beta(t)$.

В силу формул (1.17) і (1.20) отримуємо, що при деяких постійних C_1 і C_2 мають місце нерівності

$$|y_0(T) - y_\beta(T)| \leq C_1 \left(\int_{t_0}^T |v_\beta(t)| dt \right),$$

$$|q_\beta - y_\beta(T)| \leq C_2 \left(\int_{t_0}^T |v_\beta(t)| dt \right)^2.$$

Звідси випливає, що при β , досить близько до $y_{0,n+1}(T)$, справедливо нерівність

$$y_{\beta,n+1}(T) < y_{0,n+1}(T).$$

Однак ця нерівність неможлива, оскільки вона суперечить оптимальності $y_0(T)$. Таким чином, показано, що $y_0(T)$ - гранична точка множини $Q(T)$.

г) існує вектор $N \neq 0$ такий, що для будь-якого $\alpha(T, v)$, задовольняє умові

$$(y_0(T) + \alpha(T, v)) \in Q(T),$$

і має місце наступна нерівність:

$$N' \alpha(T, v) \leq 0. \quad (2.38)$$

Нагадаємо, що через граничну точку $y_0(T)$ опуклої множини можна провести опорну гіперплошкність таку, що всі точки $Q(T)$ лежать по одну сторону від цієї гіперплощини [10; 21]. В якості N візьмемо нормаль одиничної довжини до гіперплощини l в точці $y_0(T)$, спрямовану в ту сторону, яка не містить точок множини $Q(T)$ (рис.2.1). Ясно, що для такого вектора N виконується нерівність (2.38).

2.2.3 Аналіз впливу визначальних і необхідних умов

Нехай $Z(t, s)$ - матриця Коші системи

$$\dot{\alpha}(t) = A(t)\alpha(t).$$

Позначимо через

$$\psi(t) = (\psi_1, \dots, \psi_n, \psi_{n+1})$$

вектор сполучених змінних. Маємо

$$\psi(t) = Z'(T, t)N,$$

де N - вектор, існування якого встановлено раніше.

Відомо, що $\psi(t) \equiv 0$, так як $N = 0$ і матриця $Z'(T, t)$ невиводжена. У силу властивості (1.8) матриці Коші $Z(t, s)$ отримаємо

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial Z'(T, t)}{\partial t} N = -A'(t)Z'(T, t) = -A'(t)\psi(t). \quad (2.39)$$

Введемо тепер гамільтоніан

$$H(t, y(t), u, \psi(t))$$

задачі (2.33) - (2.35) за допомогою рівності

$$H(t, y(t), u, \psi(t)) = \psi'(t)[F(t, u(t) + b(t)u)]. \quad (2.40)$$

Тоді рівняння (2.39) для сполучених змінних $\psi(t)$ можна записати у наступному вигляді:

$$\dot{\psi}(t) = -H_y(t, y_0(t), u_0(t), \psi(t)), \psi(T) = N. \quad (2.41)$$

Доведемо тепер, що оптимальне управління $u_0(t)$ максимізує гамільтоніан H , тобто що виконується умова максимуму виду

$$\max H(t, y_0(t), u, \psi(t)) = H(t, y_0(t), u_0(t), \psi(t)). \quad (2.42)$$

З формули (2.40) для гамільтоніана і зі співвідношенням (2.42) при цьому свідчить, що

$$u_0(t) = a \cdot \text{sign}(\psi'(t)b(t)). \quad (2.43)$$

Припустимо, що рівність (2.43) не виконується. Розглянемо спочатку ті точки $t \in [t_0, T]$, в яких $\psi'(t)b(t) = 0$. У цих точках умова максимуму (2.42) може не виконатися лише в тих точках $t \in [t_0, T]$ в яких $\psi'(t)b(t) \neq 0$. Оскільки $\psi'(t)b(t)$ частково-неперервна, то виходячи з математичного тлумачення знайдеться такий відрізок

$$[t_1, t_2] \subset [t_0, T], t_1 < t_2,$$

що:

$$\psi'(t)b(t) < 0, u_0(t) \geq -a_1 > -a, t \in [t_1, t_2],$$

або

$$\psi'(t)b(t) > 0, u_0(t) \leq a_1 < a, t \in [t_1, t_2], t_1 < t_2. \quad (2.44)$$

Для визначеності розглянемо тільки випадок (2.44). Із співвідношень (2.37), (2.38) і формули Коші випливає, що

$$N' \alpha(T, v) = N' \int_{t_0}^T Z(T, t) b(t) v(t) dt \leq 0.$$

Звідси і з визначення $\psi(t)$ отримуємо наступну нерівність:

$$\int_{t_0}^T \psi'(t) b(t) v(t) dt \leq 0. \quad (2.45)$$

Аналізуючи постійну C в межах

$$t \in [t_1, t_2], \quad 0 < C \leq a - a_1 \quad \text{і} \quad v(t) = 0, t \in [t_1, t_2],$$

виконуючи відповідні перетворення, та враховуючи $v(t)$, формула (2.39) в силу (2.44) приймає вигляд наступної нерівності:

$$N' \alpha(T) = \int_{t_0}^T b'(t) \psi(t) v(t) dt = C \int_{t_1}^{t_2} b'(t) \psi(t) dt > 0,$$

яка суперечить (2.45). Тим самим справедливість рівності (2.43) доведена.

Із співвідношень (2.40), (2.41) випливає, що $\psi_{n+1}(t) \equiv 0$, тобто $\psi_{n+1}(t)$ постійна і $\psi_{n+1}(T) = N_{n+1}$.

Крім того, можна показати, що $N_{n+1} \leq 0$ (рис 2.1). Отже

$$\psi_{n+1}(t) = N_{n+1} \leq 0.$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.1 Нехай $u_0(T)$. і $y_0(T)$. - оптимальні рівняння і траєкторія в задачі (2.33) - (2.35). Тоді існує такий ненульовий вектор $\psi(t)$, який задовольняє рівнянню (2.41), що виконується умова максимуму (2.42), причому ψ_{n+1} постійна і непомітна.

2.2.4 Випадок багатовимірною управління

На практиці доволі поширені багато параметричні об'єкти і системи. Режими їх роботи забезпечуються різними видами виконавчих механізмів (гідро-, пневмо-, електропривода різних типів і призначення), багато чисельними інформаційними каналами і сигналами різної фізичної природи та програмно-логічними системами.

При розробці математичної моделі керування режимами таких об'єктів певна кількість параметрів зводиться до одного за характерними фізичними рисами, а багатопараметрична система зводиться до зменшеної кількості узагальнених однопараметричних. Це дозволяє розробляти доволі складні інженерні задачі, а отримані

рішення дозволяють забезпечити оптимальне керування технологічними процесами. В таких випадках необхідно сформулювати умови оптимальності для математичної моделі, яка відповідає наступній задачі:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t, x(t), u(t)), t \geq t_0, x \in R_n, u \in R_m, \\ x(t_0) &= x_0, x(T) = x_1, u(t) \in U(t), \\ \int_{t_0}^T F_0(t, x(t), u(t)) dt &\rightarrow \inf_u. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Тут t_0, x_0, x_1 задані, а T вільне.

Теорема 2.2. Якщо $u_0(t), x_0(t)$ - оптимальні управління і траєкторія в задачі (2.46), то існує ненульовий вектор

$$(\psi(t), \psi_{n+1}), \psi(t) \in R_n$$

такий, що

$$\psi_{n+1}(t) = \text{const} \leq 0, \psi(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \quad (2.47)$$

Гамільтоніан H в задачі (2.46) має наступний вигляд:

$$H(t, x, u, \psi(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, x, u) + \psi_{n+1} F_0(t, x, u). \quad (2.48)$$

При цьому виконується умова максимуму

$$\max_{u \in U(t)} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \quad (2.49)$$

Поряд із відзначенням,

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) = \int_T^t H_s(s, x_0(s), u_0(s), \psi(s)) ds, \quad (2.50)$$

$$H_s = \frac{\partial H}{\partial s}.$$

2.2.5 Випадок стаціонарних систем

Наведемо необхідні умови оптимальності для задач (2.46) при додатковому припущенні про наявність стаціонарності. Стаціонарність завдання (2.46) означає, що f , F_0 і U не залежать явно від часу, тобто

$$f(t, x, u) \equiv f(x, u), F_0(t, x, u) = F_0(x, u), U(t) \equiv U. \quad (2.51)$$

Якщо стаціонарна задача (2.46), (2.51) має оптимальне управління $u_0(t)$ і оптимальну траєкторію $x_0(t)$, то існує ненульовий вектор сполучених змінних

$$(\psi(t), \psi_{n+1}), \psi(t) \in R_n,$$

задовольняє умовам (2.47), і виконана умова максимуму (2.49). Крім того, в стаціонарному випадку необхідно забезпечити умову наступної тотожності:

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \equiv 0. \quad (2.52)$$

2.2.6 Перетворення системи рівнянь з одного різноманіття до іншого

Наведемо ще необхідні умови оптимальності для стаціонарної задачі (2.46), в якій відносно початкового і кінцевого положень x_0 і x_1 передбачається, що вони належать заданим гладким різноманіттям M_0 і M_T , розмірності яких менше n , тобто

$$x_0 \in M_0, x_1 \in M_T.$$

Необхідні умови оптимальності в цій задачі збігаються з попередніми умовами оптимальності. Крім того, необхідно додержуватись умови трансверсальності, що полягають в тому, що $\psi(t_0)$ перпендикулярно всім дотичним векторів різноманіття M_0 в точці x_0 , а $\psi(T)$ перпендикулярно всім дотичним векторів різноманіття MT в точці x_1 . Нижче для конкретних завдань наведемо явний аналітичний вид умов трансверсальності.

2.2.7 Задача управління з ізопараметричними обмеженнями

Наведемо необхідні умови оптимальності для задач (2.49) - (2.53):

$$x(t) = f(t, x(t), u(t)), x \in R_n, u \in R_m, t_0 \leq t \leq T, \quad (2.53)$$

$$J_0(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \rightarrow \inf,$$

$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = 0, j = 1, \dots, m_1, \quad (2.54)$$

$$J_i(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \leq 0, i = m_1 + 1, \dots, m_2, u(t) \in U.$$

Тут скалярні функціонали J_k мають наступний вигляд:

$$J_k(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = \int_{t_0}^T F_k(t, x(t), u(t)) dt + \\ + \phi_k(t_0, x(t_0), u, T, x(T)), k = 0, 1, \dots, m_2.$$

У випадку відсутності обмежень на керування вигляду $u(t) \in U$ необхідні умови оптимальності слід використовувати такі, які наведені в розділі 1. Обмеження на керування $u(t) \in U$ призводить до необхідності модифікувати лише тільки умови стаціонарності, які будуть розглянуті нижче.

Позначимо

$$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m_2}), \psi(t) \in R_n$$

через вектори множників Лагранжа. Припустимо, що розв'язання $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$ задачі (2.54) існує. Передбачається, що функції

$f(t, x, u), F = (F_0(t, x, u), \dots, F_{m_2}(t, x, u))$ і часткові похідні по x і u безперервні в деяких обмеженнях

$$(t, x_0(t), u_0(t)), t \in [t_0, T],$$

а функція

$$\phi = (\phi_0(t_0, \xi, T, \zeta), \dots, \phi_{m_2}(t_0, \xi, T, \zeta))$$

безмежно диференціюється в межах точки $(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T))$.

При таких припущеннях існують такі не рівні одночасно нулю множники Лагранжа λ і $\psi(t)$, що задовольняють співвідношенням (2.53), а також (1.64), (1.65), (1.66) - (1.68). В залежності від початкових і граничних умов, а також визначеності стаціонарності можливо отримати наступні:

- рівняння еволюції системи

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)); \quad (2.55)$$

- рівняння Ейлера для сполучених змінних

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - F_x(t, x_0(t), u_0(t))\lambda; \quad (2.56)$$

- умови трансверсальності

$$\psi(t_0) = -\phi_x(t_0, x, T, y)\lambda, \psi(T) = \phi_y(t_0, x, T, y)\lambda \quad (2.57)$$

При $x = x_0(t_0), y = x_0(T)$; при цьому замість умов стаціонарності справедлива умова максимальності, що набуває наступного виду:

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad (2.58)$$

де гамільтоніан має вигляд

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t) f(t, x, u) + \lambda' F(t, x, u);$$

- умови на рухомі кінці (враховуються лише в разі рухомих кінців)

$$F'(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0))\lambda - [\phi_{t_0}(t_0, T, x_0(T)) + \phi'_{x_0}(t_0, x, T, y)x_0(t_0)]'\lambda = 0; \quad (2.59)$$

$$F'(T, x_0(T), u_0(T))\lambda + [\phi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \phi'_{y_0}(t_0, x, T, y)x_0(T)]'\lambda = 0 \quad (2.60)$$

При $x = x_0(t_0), y = x_0(T);$

-умови доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_j \left[\int_{t_0}^T F_j(t, x_0(t), u_0(t))dt + \phi_j(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) \right] = 0 \quad (2.61)$$

$$j = 1, \dots, m_1.$$

- умови не позитивності

$$\lambda_i \leq 0, i = 0, 1, \dots, m_1. \quad (2.62)$$

2.2.8 Математична модель скалярної керованої системи

Приклад 2.1. У якості прикладу розглянемо математичну скалярну керовану систему

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), 0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0, x(t) \rightarrow \min. \quad (2.63)$$

Управління $u(t)$ в кожний момент часу може приймати два значення: або

$$u(t) = 1, \text{ або } u(t) \neq 1,$$

що відповідає випадку, коли в кожен момент часу можна або керувати, або не керувати. При цьому задано ізопараметричне обмеження на час керування:

$$\int_0^T u(t)dt = T_0, 0 \leq T_0 \leq T. \quad (2.64)$$

де a, T, T_0, x_0 - задані постійні.

Для вирішення задачі (2.63), (2.64) скористаємося необхідними умовами оптимальності (2.25) - (2.62).

Функція H в задачі (2.63), (2.64) має наступний вигляд:

$$H = \psi(t)(ax(t) + u(t)) + \lambda_1 u(t), \quad (2.65)$$

а рівняння для функції $\psi(t)$

$$\dot{\psi}(t) = -a\psi(t) = -H_x, \psi(T) = \lambda_0. \quad (2.66)$$

У виразах (2.65), (2.66) λ_0 і λ_1 позначені постійні множники Лагранжа.

Якщо $u_0(t)$ - оптимальне керування, то на підставі (2.28) повинно бути справедливо співвідношення

$$\max_{u; u=0,1} (\psi(t) + \lambda_1)u = (\psi(t) + \lambda_1)u_0. \quad (2.67)$$

Вектор $(\psi(t), \lambda_0, \lambda_1)$ має бути ненульовим. Звідси випливає, що $\lambda_0 \neq 0$. Дійсно, якби $\lambda_0 = 0$, то в силу (2.66) функція $\psi(t) \equiv 0$, тобто $\lambda_1 \neq 0$.

Однак при цьому в силу (2.67) управління $u_0(t)$ повинне бути постійним, що неможливо, так як це протирічить умові ізопараметричності (2.64).

Отже, $\lambda_0 \neq 0$, тобто в якості λ_0 можна взяти будь-яку негативну постійну.

Проаналізуємо випадок покладаючи $\lambda_0 = -1$.

Звідси і з (2.66) випливає, що

$$\psi(t) = -\exp[a(T-t)].$$

Отриманий вираз для $\psi(t)$ показує, що $\psi(t)$ монотонно зростає при $a > 0$ і монотонно убыває при $a < 0$.

Тому, використовуючи рівність (2.67), одержуємо, що якщо $a > 0$, то $u_0(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \tau$ і $u_0(t) = 1$ при $\tau < t \leq T$, якщо ж $a < 0$, то $u_0(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \tau$ і $u_0(t) = 0$ при $\tau < t \leq T$. Тут τ - момент перемикання управління, який в окремих випадках може дорівнювати нулю $t = \tau$ та задовольняти наступній монотонній функції:

$$\lambda_1 + \psi(t) = \lambda_1 - \exp[a(T-t)].$$

Вибравши постійну λ_1 так, щоб задовольнялося обмеження (2.66), укладаємо, що $\tau = T - T_0$ при $a > 0$ і $\tau = T$ при $a < 0$. Якщо ж $a = 0$, то оптимальним буде будь-яке управління при умові, що воно задовольняє інтегральному рівнянню (2.64).

2.2.9 Достатність принципу максимуму

У ряді випадком принцип максимуму є не тільки необхідним, але і достатньою умовою досягнення оптимальності. Розглянемо, наприклад, задачу управління лінійною системою

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2.68)$$

$$x(t_0) = x_0, x(T) = x_1, u \in U,$$

$$\int_{t_0}^T F_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, x \in R_n, u \in R_m.$$

Тут моменти часу t_0, T і вектори x_0, x_1 задані.

Функція $F_0(t, x, u)$ опукла і безперервно диференційована по параметрам x, u і безперервна в часі t ; матриці $A(t), B(t)$ також задовольняють вище означеним умовам.

Множина $U \subset R_m$ в замкнутому просторі можливих траєкторій. Причому сукупність всіх внутрішніх точок множини U не повинні дорівнювати нулю.

Нарешті $B'(t)\psi(t) \equiv 0$, для будь-якого нульового розв'язання $\psi(t)$ системи

$$\dot{\psi}(t) = -A'(t)\psi(t).$$

Тоді необхідні умови оптимальності в задачі (2.68), що мають вигляд (2.26), (2.28), при зроблених припущеннях є і достатніми.

2.2.10 Зв'язок принципу максимуму і класичного варіаційного числення

Використовуючи принцип максимуму, можна отримати відомі з варіаційного числення умови екстремуму в задачах без обмежень.

В якості прикладу розглянемо задачу про мінімум функціоналу

$$\int_{t_0}^T F(x(t), \dot{x}(t)) dt, x \in R_n, x(t_0) = x_0, x(t) = x_1. \quad (2.69)$$

де t_0, T, x_0, x_1 і скалярна функція F задані.

Безперервно диференційована функція $x(t)$ повинна бути обрана так, щоб задовольнялися задані граничні умови і досягався мінімум функціоналу.

Необхідні умови оптимальності функції $x(t)$ полягають у тому, що вона повина задовольняти рівнянню Ейлера

$$\frac{d}{dt} F_x(x(t), \dot{x}(t)) = F_x(x(t), \dot{x}(t)) = 0. \quad (2.70)$$

Покажемо, що рівняння (2.70) можна отримати, використовуючи принцип максимуму.

Покладемо $u = x$. Тоді задача (2.69) еквівалентна наступній задачі оптимального управління:

$$x(t) = u, x(t_0) = x_0, x(T) = x_1, \\ \int_{t_0}^T F(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (2.71)$$

Необхідні умови оптимальності в задачі (2.71) задовольняють теоремі 1.2. Для того щоб виконати аналіз умовам оптимальності розглянемо гамільтоніан $H = \psi' u - F(x, u)$. Оскільки обмежень на керування u не накладено, умова максимуму H по u призводить до наступного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi(t) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Рівняння для вектора сполучених змінних $\psi(t)$ можливо представити в такому рівнянні:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

З останніх двох рівнянь очевидно, що

$$\dot{\psi}(t) = F_x(x(t), u(t)), \psi(t) = F_u(x(t), u(t)).$$

звідси, та ураховуючи те що наведено вище отримуємо

$$\frac{d}{dt} F_u(x(t), u(t)) = F_x(x(t), u(t)) = \frac{d}{dt} F_x(x(t), x(t)),$$

що збігається з рівнянням (2.70).

Відзначимо, що при деяких припущеннях інші необхідні умови мінімуму (умови Вейєрштрасса, Лежандра та Якобі) також можуть бути виведені з принципу максимуму.

У деяких науково-практичних задачах умови локально оптимального екстремуму без обмежень на управління зустрічаються відіграють доволі важливе значення.

Досягнення достатньо високої точності потребує ретельного підходу і аналізу та іноді потребують утоснення майже на стадії впровадження. З метою запобігання останніх треба додержуватись методологічного підходу вирішення таких задач шляхом ретельного визначені необхідних початкових і граничних умов відповідно до узгодженості математичної моделі реальному об'єкту.

Важливу роль відіграє завдання або знання траєкторії, відповідно до якої рішення задачі набуває суттєвої конкретизації.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Tocci R.J., Widmer N.S. Digital Systems: Principles and Applications. M: Williams, 2004. 1024 p.
2. Islam M. S. Design considerations of sinusoidally excited permanent-magnet Machines for low-torque-ripple applications. IEEE Transactions on Industry Applications . 2005. Vol. 41, No. 4. P. 955–962.
3. Sugimoto H., Tamai S. Secondary resistance identification of an induction motor applied model reference adaptive system and its characteristics. IEEE Transactions on Industry Applications . 1987. Vol. IA-23, No. 2. P. 296–303.
4. Islam M. S. Experimental Verification of Design Techniques of Permanent-Magnet Synchronous Motors for Low-Torque-Ripple Applications. IEEE Transactions on Industry Applications . 2011. Vol. 47, No. 1. P. 88–95. DOI: [<https://doi.org/10.1109/TIA.2010.2091612>].
5. Panda S.K., Xu J.-X., Qian W. Review of torque ripple minimization in PM synchronous motor drives. Proc. IEEE Power & Energy Society General Meeting (20–24 July 2008, Pittsburgh, PA, USA) . IEEE, 2008. P. 1–6.
6. Chen C., Namuduri S., Mir S. Controller-induced parasitic torque ripples in a PM synchronous motor. IEEE Transactions on Industry Applications . 2002. Vol. 38, No. 5. P. 1273–1281.
7. Islam R., Husain I., Fardoun A., McLaughlin K. Permanent magnet synchronous motor magnet designs with skewing for torque ripple and cogging torque reduction. IEEE Transactions on Industry Applications . 2009. Vol. 45, No. 1. P. 152–160.
8. Zinovkin V., Antonov M., Krysan I. Research of Non-Stationary Electromagnetic Processes in Synchronous Electric Drive. 2017 International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES). Kremenchuk, 2017. P. 148–151. DOI: [<https://doi.org/10.1109/MEES.2017.8248874>].
9. Zinovkin V., Blyzniakov O., Vasilieva E. Physical Simulation of Electromagnetic Phenomena in Transformer Equipment under Strongly Varying Loads. 2017 International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES) . Kremenchuk, 2017. P. 312–315.
10. Computer optimization on energy- and save resource expert system parameters of management electrosteel-smelting / I. Trufanov et al. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer

Science . 2002. P. 207.

11. Конопльов К. Г., Олейніченко Н. М. Новий метод розрахунку вищих гармонік при імпульсному регулюванні синхронних генераторів. Електротехніка та електроенергетика . 2010. № 2. С. 4–7.

12. Яримбаш С. Т., Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Особливості визначення параметрів електричної схеми заміщення печної петлі печі графітації змінного струму. Електротехніка та електроенергетика . 2010. № 2. С. 36–43.

13. Лазарєв В.І., Лазарєв І.В. Про причину зменшення сил осьового пресування обмоток трансформаторів при коротких замиканнях. Електротехніка та електроенергетика . 2005. № 1. С. 18–22.

14. Моделювання електромеханічної системи ВЕУ з аеродинамічним мультиплікатором у режимі стабілізації швидкості вітротурбіни / Н.С. Голубенко та ін. Електротехніка та електроенергетика . 2011. № 1. С. 70–73.

15. Андрієнко П. Д., Лобода В. Д., Міщенко А. В. Перетворювачі частоти для електропередачі залізничного електротранспорту. Електротехніка та електроенергетика . 2001. № 1. С. 55–58.

16. Жежеленко Ю.С., Шейнкман Л.М., Степанов В.Б. Якість електроенергії на промислових підприємствах. Київ : Техніка, 2012. 384с.

17. Rashid N. Short-time Overloading of Power Transformers : Master Thesis. Stockholm, Sweden, 2011. 60 p. URL: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:511551/fulltext01>.

18. Data augmentation and optimization method based on conditional generative adversarial network and convolutional neural network for transformer fault diagnosis / B. Liang et al. Measurement . 2025. Vol. 254. Art. 117872. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2025.117872>.

19. Murugan R., Ramasamy R. Failure analysis of power transformer for effective maintenance planning in electric utilities. Engineering Failure Analysis . 2015. Vol. 55. P. 182–192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.06.002>.

20. Liu X. H., Zhao G., Yu J. J. Simulation research on the influence of electric arc furnace nonlinear characteristics on power supply network. Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering . 2004. P. 34–38.

21. An improved SVC control for electric arc furnace voltage flicker mitigation / M. Cernan et al. International Journal of Electrical Power &

Energy Systems . 2021. Vol. 129. Art. 106831. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2021.106831>.

22. Abbasi M. K., Dezfuli H. Smart Maintenance Planning for Distribution Transformers Using Discrete-time Markov Chain. 2022 26th International Electrical Power Distribution Conference (EPDC) . IEEE, 2022. P. 8–17. DOI: <https://doi.org/10.1109/EPDC56235.2022.9817256>.

23. Rama Rao K. S., Karsiti M. N. Optimal design of a furnace transformer by intelligent evolutionary methods. International Journal of Electrical Power & Energy Systems . 2012. Vol. 43, No. 1. P. 1056–1062. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2012.06.019>.

24. Samet H., Golshan M. E. H. A wide nonlinear analysis of reactive power time series related to electric arc furnaces. International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2012. Vol. 36, No. 1. P. 127–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2011.10.033>.

25. Synthesis and analysis of arc furnace electrical mode control system on the basis of three-dimensional phase currents vector distribution / O. Y. Lozynskiy et al. Electrical Engineering & Electromechanics . 2019. No. 4. P. 26–34. DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2019.4.04>.

26. Olczykowski Z. Electric Arc Furnaces as a Cause of Current and Voltage Asymmetry. Energies . 2021. Vol. 14, No. 16. Art. 5068. DOI: <https://doi.org/10.3390/en14165058>.

27. Gzarmeski L. Comments on Active Power Flow and Energy Accounts in Electrical Systems with Non sinusoidal Waveforms and Asymmetry. IEEE Transactions on Power Delivery . 1996. Vol. 11, No. 3. P. 1244–1250. DOI: <https://doi.org/10.1109/61.517478>.

28. Awadallah S. K., Milanović J. V., Jarman P. N. The influence of modeling transformer age related failures on system reliability. IEEE Transactions on Power Systems . 2014. Vol. 30, No. 2. P. 970–979. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2014.2331103>

29. Ebrahim E. A. Optimal Design of SAPFs for Harmonic Mitigation of Electric Arc Furnaces with Real-Time Digital Simulation Hardware. 2023 24th International Middle East Power System Conference (MEPCON) . Cairo, Egypt, 2023. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/MEPCON58725.2023.10462253>.

30. So E., Arseneau R., Hanique E. Measurement and correction of no-load losses of power transformers. Conference Digest Conference on Precision Electromagnetic Measurements. 2004. P. 570–571. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEM.2004.305383>.

31. Волошин О. Ф., Маляр М. П., Швалагін О. О. Процедури послідовного аналізу і відсіювання варіантів комбінаторних оптимізаційних задач з нечіткими функціоналами. Вісник Київського національного університету. Серія : Кібернетика . 2010. № 10. С. 4–7.

32. Zinovkin V., Krysan I., Savchenko V. The Equivalent Parameters of Losses in Inactive Parts of Transformers under Nonsinusoidal Loads. IEEE 9th International Conference on Energy Smart Systems (ESS) . Kyiv, 2026. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/ESS70338.2026.11536712>.

33. Investigation of Stator Voltage Oscillations in an Asynchronous Motor Within a High-Frequency Specialized Electric Drive / V. Zinovkin et al. Lecture Notes in Networks and Systems . 2025. Vol. 1480. P. 285–295.

34. Influence of Nonstationary Electromagnetic Processes on Electromagnetic Compatibility and Technical Condition of Special-Purpose Transformer Equipment / V. Zinovkin et al. IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2025. P. 826–831.

35. Zinovkin V., Krysan Y., Shylo S. Devising a method for large-scale modeling of non-stationary electromagnetic processes in power transformer equipment under sharply changing loads. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies . 2025. Vol. 6, No. 8 (138). P. 6–23. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.348152>.

36. Study of stability criteria of automatic control systems by multiparametric aviation objects / V. Zinovkin et al. Transactions on Aerospace Research . 2024. Vol. 274, No. 1. P. 45–70. DOI: <https://doi.org/10.2478/tar-2024-0004>.

37. Multiparametric System for Automated Analysis of the Current Technical Condition of Power Transformers / V. Zinovkin et al. IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2024. P. 661–666.

38. Optimization of Multivariable Technological Systems' Automatic Control based on Stability Criteria / V. Zinovkin et al. IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312865>.

39. Influence of Sharp Load Fluctuations on Electromagnetic Processes in Electrical Equipment / V. Zinovkin et al. IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2022. P. 641–645. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916410>.

40. Multi-parameter Technological Process Optimization Functional Similarity Criteria / V. Zinovkin et al. IEEE 2nd KhPI Week on Advanced

Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2021. P. 490–495. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570014>.

41. Zinovkin V., Antonov M., Krysan I. Research of electromagnetic parameters of complex electromechanical system under hardly varying loads. IEEE 7th International Conference on Energy Smart Systems (ESS) . Kyiv, 2020. P. 267–272. DOI: <https://doi.org/10.1109/ESS50319.2020.9160022>.

42. Zinovkin V., Antonov M., Krysan I. Simulation of Static Stability of Synchronous Electric Drive at Hardly Variable Load. IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES) . Kremenchuk, 2019. P. 86–89. DOI: <https://doi.org/10.1109/MEES.2019.8896368>.

43. Зіновкін В.В. Різкозмінні навантаження та їх вплив на електротехнічне обладнання і методи дослідження: навчальний посібник. Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. 374 с.

44. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник / П.В. Леонтьєв та ін. Суми: Сумський державний університет, 2024. 296 с. URL: <https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/97189>.

45. Гуров А. П., Ольшевський С. І., Черно О. О., Бугрім Л. І. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Миколаїв : Національний університет кораблебудування, 2018. URL: <https://eir.nuos.edu.ua/items/c6d19b91-5ad4-4563-a13d-5b3960e55d85>.

46. Марченко А. А., Гулий В. С. Теорія автоматичного керування. Комп'ютерний практикум: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/40b17431-d0a6-42bf-9387-eb408c1bfbf3>.

47. Толочко О.І. Теорія автоматичного керування. Математичні методи та програмування в MATLAB для теорії керування : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/2cb5a885-ee3-4b52-bf9d-bb218ce48929>.

48. Гайденок Ю.А. Теорія автоматичного керування. Комп'ютерний практикум: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/edac02be-d940-4fd4-a566-7c8b782b89a2>.

49. Іносов С. В., Соболевська Т. Г. Теорія автоматичного керування: методичні вказівки до лабораторних і практичних робіт. Київ: КНУБА, 2024. URL: [\https://repository.knuba.edu.ua/items/82da287f-a9d2-43e9-8f9a-

1e8d7f7dc136.

50. Мірошник М.А., Лістровий С.В., Клименко Л.А. Теорія автоматичного керування, штучний інтелект і автоматизація процесу прийняття рішення: навчальний посібник. Харків : УкрДУЗТ, 2019. URL: <https://dspace.onua.edu.ua/items/d64933de-004c-4977-a0bf-68c744eede6f>.

51. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ, 2007. URL: <https://uareferats.com/index.php/book/details/336>.

52. Mironov Yu. M. Specific Features of Electric Arc Furnaces as Electric Energy Receivers. Russian Metallurgy (Metally) . 2021. Vol. 2021. P. 703–708. DOI: [<https://doi.org/10.1134/S0036029521060185>].

53. 3-D computation of transformers overheating under nonlinear loads / A. Lefevre et al. IEEE Transactions on Magnetism . 2005. Vol. 41, No. 5. P. 1564–1567.

ДОДАТОК А

Пояснення до вирішення основних задач і формул розділу 1

1. Задача Майєра без обмежень на управління:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\varphi(x(T)) \rightarrow \inf_u$$

необхідні умови оптимальності:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad H(t, x, u, \psi) = \psi'(t) f(t, x, u);$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x, u, \psi), \quad \psi(T) = -\varphi_x(x(T)).$$

2. Задача Больца без обмежень на керування

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0;$$

$$\int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(x(T)) \rightarrow \inf_u$$

необхідні умови оптимальності

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

де $H(t, x, u, \psi) = -F(t, x, u) + \psi'(t) f(t, x, u);$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x, u, \psi), \quad \psi(T) = -\varphi_x(x(T)).$$

3. Лінійно-квадратична задача:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0$$

$$J_0 = x'(T)N_1x(T) + \int_{t_0}^T (x'(t)N_2(t)x(t) + u'(t)N_3(t)u(t))dt,$$

$$N_1 \geq 0, \quad N_2(t) \geq 0, \quad N_3(t) > 0;$$

оптимальне управління

$$u_0(t) = -N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x_0(t);$$

4. Матричне рівняння Ріккати

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)N_3^{-1}(t)B'(t)P(t) + N_2(t) = 0,$$

$$0 \leq t \leq T, \quad P(T) = N_1$$