

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.**

**РОЗДІЛИ «КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ», «КРИВОЛІНІЙНІ ТА
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ»**

**для студентів технічних спеціальностей
денної форми навчання**

2018

Методичні вказівки до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 74 с

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
 Онуфрієнко Л.М., к.ф.-м.н., доцент
 Полякова Т.Г., асистент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д.ф.-м.н., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики ЗНТУ
Протокол № 8 від 18.04.2018 р.

Затверджено НМК машинобудівного
факультету ЗНТУ
Протокол № 6 від 24.05.18 р.

ЗМІСТ

1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ	4
1.1 Відомості з теорії	4
1.2 Аудиторні завдання	10
1.3 Індивідуальні завдання	15
2. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ	46
2.1 Відомості з теорії	46
2.2 Аудиторні завдання.	51
2.3 Індивідуальні завдання	54
ЛІТЕРАТУРА	73

І. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1 Відомості з теорії

Таблиця невизначених інтегралів $\int f(u) du = F(u) + C$

1	$\int du = u + C$	2	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C ; \alpha \neq -1$
2a	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
4a	$\int e^u du = e^u + C$	5	$\int \sin u du = -\cos u + C$
6	$\int \cos u du = \sin u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	9	$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$
10	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	11	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right + C =$ $= \ln\left \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right + C$
12	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C =$ $= \ln\left \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u\right + C$	13	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$

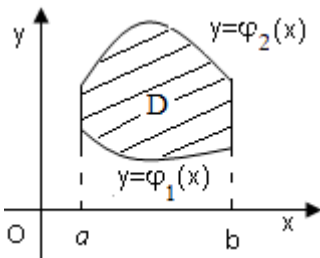
14	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$	15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
16	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$	17	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$
18	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left u + \sqrt{a^2 - u^2} \right + C$		
19	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$	20	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

Обчислення подвійного інтеграла

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторних (двократних) інтегралів.

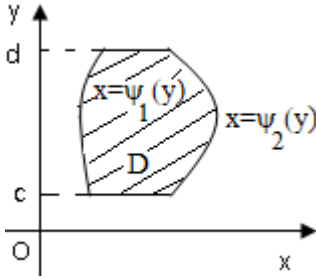
Подвійний інтеграл у декартових координатах $\iint_D f(x, y) dx dy$, де

$f(x, y)$ – підінтегральна функція двох змінних x та y , D – область інтегрування.



Випадок 1.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$



Випадок 2.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах.

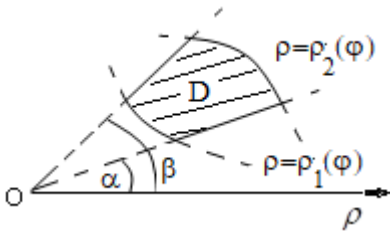
Перехід здійснюється за формулами: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$,
 $dx dy = \rho d\rho d\varphi$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Для області D , яка обмежена двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$

($\alpha < \beta$) та двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і

$\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то
 подвійний інтеграл обчислюється за
 формулою:



$$\iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Застосування подвійного інтеграла.

1) Площа області D .

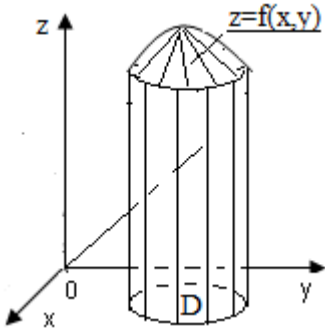
$$S = \iint_D dx dy$$

2) Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz , яке обмежене знизу областю D , що лежить на площині xOy , а зверху поверхнею

$$z = f(x, y) \quad (f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D),$$

яка неперервна в області D , знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



3) Площа поверхні, яка задана рівнянням $z = f(x, y)$ і однозначно проектується на площину xOy в область D , а функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q цієї поверхні знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy.$$

Якщо поверхня проектується на координатні площини xOz або yOz , то формула відповідно змінюється.

4) Якщо $\gamma = \gamma(x, y)$ – поверхнева щільність неоднорідної плоскої пластини D , то її маса m і координати центра маси $(x_c; y_c)$ знаходять за формулами

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\gamma(x, y) dx dy}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\gamma(x, y) dx dy}{m},$$

де M_x , M_y – статичні моменти пластини відносно осей Ox та Oy відповідно. Якщо пластина однорідна, то густина $\gamma = \text{const}$.

Обчислення потрійного інтеграла

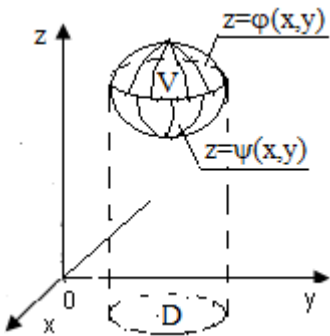
Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах зводиться до обчислення трикратного інтеграла. Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна в замкненій області $V \in \mathbb{R}^3$.

1) Область V є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат: $V: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq k \end{cases}$. Тоді потрійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^k f(x, y, z) dz$$

Порядок інтегрування в правій частині формули може бути будь яким.

2) Область V така, що кожна «вертикальна» пряма, зустрічаючи границю області V , має з нею не більше двох спільних точок, а область D – її проекція V на площину xOy . Рівняння поверхонь, що обмежують область V зверху і знизу $z = \varphi(x, y)$ та $z = \psi(x, y)$ відповідно. Тоді потрійний інтеграл записується за формулою



$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Якщо область D обмежена лініями: $D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$, то

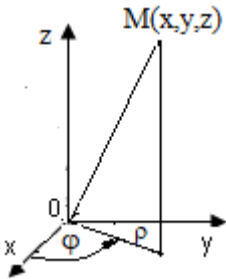
$$\iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Якщо область D обмежена лініями: $D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$, то

$$\iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах.

Якщо область D є сектор, то зручно перейти до циліндричних координат. Перехід здійснюється за формулами:

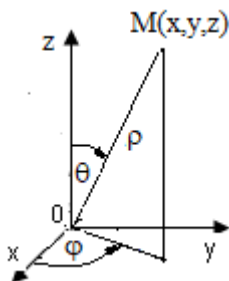


$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \\ dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq \rho \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty \leq z \leq \infty \end{cases}.$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

Потрійний інтеграл у сферичних координатах

Якщо область V є частиною сфери, то зручно перейти до сферичних координат. Перехід здійснюється за формулами:



$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \\ dx dy dz = \rho d\rho d\varphi d\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq \rho \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}.$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

Зауваження:
$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases}$$

1.2 Аудиторні завдання.

1.2.1 Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області D

$$1) \iint_D (x + 2y) dx dy \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Відповідь: 5.

$$2) \iint_D \sin(2x + y) dx dy \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}(\sin 1 + \sin 2 - \sin 3)$.

$$3) \iint_D (xy + y^2) dx dy \quad D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{8}{3}.$$

$$4) \iint_D \frac{x}{1+y^2} dx dy \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi}{6}.$$

$$5) \iint_D e^{2x-3y} dx dy \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{6}(e^2 - 1) \cdot (e^{-1} - 1).$$

1.2.2 Подати подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ у вигляді повторного інтеграла по області D , обмеженої вказаними лініями:

$$1) D: \begin{cases} y = x - 4 \\ y^2 = 2x \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \int_{-2}^4 dy \int_{0,5y^2}^{y+4} f(x, y) dx$$

$$2) D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx$$

$$3) D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, x = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy$$

1.2.3 Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$1) \int_{-3}^0 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-0,75y} f(x, y) dx \qquad 2) \int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x, y) dy$$

1.2.4 Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженої вказаними лініями:

$$1) \iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx dy \qquad D: \begin{cases} y=2, x=y \\ x=\frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{27}{64}.$$

$$2) \iint_D (x-y) dx dy \qquad D: \begin{cases} y=2 \\ y=x^2+1 \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{32}{15}.$$

$$3) \iint_D y(x+1) dx dy \qquad D: \begin{cases} y=x^3 \\ y \leq 4x \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } 28\frac{4}{21}.$$

1.2.5 Обчислити подвійний інтеграл по області D , використовуючи полярні координати. Знайти площу області D :

$$1) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad D: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y = 0 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

Відповідь: $3\sqrt{2}$; $S = 3,75(2 + \pi)$ (кв.од.).

$$2) \iint_D \frac{y \, dx \, dy}{x^2 + y^2} \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 = -4x \\ x^2 + y^2 = -8x \\ y \leq -\sqrt{3}x; \quad y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x \end{cases}$$

Відповідь: 1; $S = 2\pi$ (кв.од.).

1.2.6 Обчислити площу плоскої пластини D , обмеженої заданими лініями:

$$1) D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, x = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } S = \frac{5}{6} \text{ (кв.од).}$$

$$2) D: \begin{cases} y^2 = x - 1 \\ y^2 = 3 - x \end{cases} \quad \text{Відповідь: } S = \frac{8}{3} \text{ (кв.од).}$$

1.2.7 Обчислити площу плоскої пластини D в полярній системі координат:

$$D: (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$$

$$\text{Відповідь: } \rho = \frac{a}{2} \sqrt{3 + 4\varphi}; \quad S = 0,75\pi a^2 \text{ (кв.од).}$$

1.2.8 Обчислити об'єм тіла V , обмеженого заданими поверхнями:

$$1) V: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y = 1 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } S = \frac{1}{6} \text{ (куб.од).}$$

$$2) V: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4, z = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } S = 12\pi \text{ (куб.од).}$$

1.2.9 Обчислити площу поверхні I, відсіченою поверхнею II:

$$\begin{cases} I: z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ II: x^2 + y^2 = 2x \\ \text{(всередині циліндра)} \end{cases} \quad \text{Відповідь: } S = \pi\sqrt{2} \text{ (куб.од).}$$

1.2.10 Обчислити масу неоднорідної пластини D , обмеженої заданими лініями, якщо поверхнева щільність у кожній її точці $\gamma = \gamma(x, y)$:

$$1) D: \begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}, \gamma = x^2 - y \quad \text{Відповідь: } m = \frac{31}{280} \text{ (од. маси).}$$

$$2) D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, \gamma = \frac{2}{x^2 + y^2} \quad \text{Відповідь: } m = 4\pi \cdot \ln 4 \text{ (од. маси).}$$

1.2.11 Обчислити потрійний інтеграл по області V , обмеженої вказаними поверхнями:

$$1) \iiint_V (x^2 y - z) dx dy dz \quad V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \\ 2 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{32}{3}.$$

$$2) \iiint_V e^x y^2 z \, dx \, dy \, dz \quad V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Відповідь: $18(e-1)$.

1.2.12 Обчислити об'єм тіла V за допомогою потрібного інтеграла, використовуючи циліндричні координати:

$$1) V: \begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } V = 4\pi (\text{куб.од.}).$$

$$2) V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } V = \pi (\text{куб.од.}).$$

$$3) V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 3y \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } V = 12 (\text{куб.од.}).$$

1.2.13 Обчислити об'єм тіла V за допомогою потрібного інтеграла, використовуючи сферичні координати:

$$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \quad \text{Відповідь: } V = \frac{19\pi}{24} (2 - \sqrt{2}) (\text{куб.од.}).$$

1.3 Індивідуальні завдання.

1.3.1 Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області D

1.	a)	$\iint_D x^2 y dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x + 3y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
2.	a)	$\iint_D xy^2 dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3x + 2y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
3.	a)	$\iint_D e^{2x+3y} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x - 5y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
4.	a)	$\iint_D e^{3x-2y} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (5x - 3y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
5.	a)	$\iint_D \frac{x}{1+y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3x - 4y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
6.	a)	$\iint_D \frac{y^2}{1+x^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (x - 6y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

7.	a)	$\iint_D x^3 y^2 dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x + 5y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
8.	a)	$\iint_D e^{2x-4y} dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3x - 5y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
9.	a)	$\iint_D \frac{3y}{1+x^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (5x + 3y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$
10.	a)	$\iint_D x^2 y^3 dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x - 6y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
11.	a)	$\iint_D e^{4x+3y} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (y - 3x) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
12.	a)	$\iint_D x^3 y^3 dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (x + 7y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
13.	a)	$\iint_D \frac{y^3}{1+x^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3x + 5y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

14.	a)	$\iint_D \frac{x^3}{1+y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (y-4x) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
15.	a)	$\iint_D xy^3 dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (5y-x) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
16.	a)	$\iint_D x^2 y^2 dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x+4y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$
17.	a)	$\iint_D e^{5y-x} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$	б)	$\iint_D (y-2x) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
18.	a)	$\iint_D e^{2y-3x} dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq y \leq 5 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3y-2x) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
19.	a)	$\iint_D x^4 y^3 dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2y-5x) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
20.	a)	$\iint_D e^{3y-4x} dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3x+y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

21.	a)	$\iint_D e^{3x+y} dx dy$ $D: \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (4x+2y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
22.	a)	$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x-7y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
23.	a)	$\iint_D e^{x-5y} dx dy$ $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (6x+y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
24.	a)	$\iint_D \frac{x^4}{1+y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (5x-2y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$
25.	a)	$\iint_D xy^4 dx dy$ $D: \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (4x-3y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
26.	a)	$\iint_D x^3 y^4 dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (3x-2y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$
27.	a)	$\iint_D \frac{y^4}{1+x^2} dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$	б)	$\iint_D (2x-5y) dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

28.	a)	$\iint_D x^4 y \, dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq y \leq 5 \end{cases}$	б)	$\iint_D (x+3y) \, dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$
29.	a)	$\iint_D e^{3x+2y} \, dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$	б)	$\iint_D (7x-2y) \, dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
30.	a)	$\iint_D \frac{y^5}{1+x^2} \, dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	б)	$\iint_D (x+6y) \, dx dy$ $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

1.3.2 Подати подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$ у вигляді повторного інтеграла по області D , обмеженої вказаними лініями.

1.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = \sqrt{3x}, x \geq 0 \end{cases}$	2.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, y \leq 0 \\ 3x - 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$
3.	$D: \begin{cases} x = \sqrt{8-y^2} \\ y = x, y \geq 0 \end{cases}$	4.	$D: \begin{cases} y = \ln x \\ x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 \end{cases}$
5.	$D: \begin{cases} x^2 = 2-y \\ x+y=0 \end{cases}$	6.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ y \geq x^2 \end{cases}$
7.	$D: \begin{cases} y = x^2 - 2 \\ x = y \end{cases}$	8.	$D: \begin{cases} y = 2x, y = x \\ y = 1, y = 3 \end{cases}$
9.	$D: \begin{cases} x^2 = 2y, x \leq 1 \\ y^2 = 2x \end{cases}$	10.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{9-x^2} \\ y \geq x, x \geq 0 \end{cases}$

11.	$D: \begin{cases} y^2 = 2 - x \\ x = y \end{cases}$	12.	$D: \begin{cases} x = \sqrt{2 - y^2} \\ x = y^2, y \geq 0 \end{cases}$
13.	$D: \begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ y^2 = 4x, y \geq 0 \end{cases}$	14.	$D: \begin{cases} x = y, x = 1 \\ y = 2x \end{cases}$
15.	$D: \begin{cases} y = -\sqrt{2 - x^2} \\ y \geq x, y = 0 \end{cases}$	16.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{6 - x^2} \\ x = \sqrt{y}, y \geq 0 \end{cases}$
17.	$D: \begin{cases} y^2 = 2 + x \\ y = -x \end{cases}$	18.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = 4, 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$
19.	$D: \begin{cases} xy = 1 \\ x = y, x = 2 \end{cases}$	20.	$D: \begin{cases} x = \sqrt{2 - y^2} \\ x^2 = -y, y \leq 0 \end{cases}$
21.	$D: \begin{cases} y^2 = 6 - x \\ y = x, y \geq 0 \end{cases}$	22.	$D: \begin{cases} y^2 = 4x, y = 2 \\ y^2 = x \end{cases}$
23.	$D: \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x^2 = y \end{cases}$	24.	$D: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \end{cases}$
25.	$D: \begin{cases} y = -\sqrt{4 - x^2} \\ y - 2 = x^2, 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$	26.	$D: \begin{cases} y = x^2, x = 2 \\ 4y = x^2 \end{cases}$
27.	$D: \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ y = x^2, y \geq 0 \end{cases}$	28.	$D: \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ 4 - y = (x - 1)^2 \end{cases}$
29.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2}, y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$	30.	$D: \begin{cases} x = -\sqrt{4 - y^2} \\ 4 - x = y^2 \end{cases}$

1.3.3 Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

1.	$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x^3+1} f(x, y) dx$	2.	$\int_0^{1,5} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x, y) dx$
----	--	----	--

3.	$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$	4.	$\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y) dx$
5.	$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$	6.	$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y^2+1} f(x, y) dx$
7.	$\int_1^2 dx \int_{x-2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$	8.	$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{2-x^2} f(x, y) dy$
9.	$\int_0^1 dy \int_y^{e^y} f(x, y) dx$	10.	$\int_0^3 dx \int_{x^2-x}^{2x} f(x, y) dy$
11.	$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$	12.	$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy$
13.	$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$	14.	$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x^2} f(x, y) dy$
15.	$\int_1^2 dy \int_{\ln y}^y f(x, y) dx$	16.	$\int_0^1 dy \int_y^{2+\sqrt{y}} f(x, y) dx$
17.	$\int_1^2 dx \int_{3-x}^{2x} f(x, y) dy$	18.	$\int_0^1 dy \int_y^{3-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
19.	$\int_0^2 dx \int_x^{4-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$	20.	$\int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^{2-y} f(x, y) dx$
21.	$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x^2+2} f(x, y) dy$	22.	$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{5-\frac{3y}{2}} f(x, y) dx$
23.	$\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy$	24.	$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx$

25.	$\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dy$	26.	$\int_0^{\frac{8}{3}} dy \int_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x, y) dx$
27.	$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$	28.	$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{2-y} f(x, y) dx$
29.	$\int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{4+x}}^{3+\frac{3}{4}x} f(x, y) dy$	30.	$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y) dy$

1.3.4 Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженої вказаними лініями

1.	$\iint_D (x^2 + y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$
2.	$\iint_D xy^2 dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$
3.	$\iint_D (x + y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x \\ x = y^2 \end{cases}$
4.	$\iint_D x^2 y dx dy$	$D: \begin{cases} y = 2 - x \\ x = y, x \geq 0 \end{cases}$
5.	$\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y \leq 0, x \geq 0 \end{cases}$
6.	$\iint_D (y - x) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$
7.	$\iint_D x(1 + y) dx dy$	$D: \begin{cases} 5y = x \\ x = y^2 \end{cases}$
8.	$\iint_D (x + y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$

9.	$\iint_D x(y-1) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x, x = 3 \\ y = 5x \end{cases}$
10.	$\iint_D (x-2)y dx dy$	$D: \begin{cases} y = \frac{1}{2}x, x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$
11.	$\iint_D (x-y^2) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$
12.	$\iint_D x^2 y dx dy$	$D: \begin{cases} y = 2x^3, x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$
13.	$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$	$D: \begin{cases} x = y^2 \\ x = 1 \end{cases}$
14.	$\iint_D xy dx dy$	$D: \begin{cases} y = -x^3, x \leq 2 \\ y = 0 \end{cases}$
15.	$\iint_D (x+y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^3, x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$
16.	$\iint_D x(2x+y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$
17.	$\iint_D y(1-x) dx dy$	$D: \begin{cases} x = y, y^3 = x \\ x = 1 \end{cases}$
18.	$\iint_D xy^3 dx dy$	$D: \begin{cases} y^2 = 1 - x \\ x \geq 0 \end{cases}$
19.	$\iint_D x(y+5) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x + 5, x \leq 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$
20.	$\iint_D (x-y) dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 3 \end{cases}$

21.	$\iint_D (x+1)y^2 \, dx dy$	$D: \begin{cases} y = 3x^2 \\ y = 3 \end{cases}$
22.	$\iint_D xy^2 \, dx dy$	$D: \begin{cases} x = y, y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$
23.	$\iint_D (x^3 + y) \, dx dy$	$D: \begin{cases} x + y = 1, x \leq 1 \\ x + y = 2, x \geq 0 \end{cases}$
24.	$\iint_D xy^3 \, dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^3, y = 4x \\ y \geq 0 \end{cases}$
25.	$\iint_D (x^3 + 3y) \, dx dy$	$D: \begin{cases} x + y = 1 \\ y = x^2 - 1, x \geq 0 \end{cases}$
26.	$\iint_D xy \, dx dy$	$D: \begin{cases} x + y = 2 \\ y = \sqrt{x}, y \geq 0 \end{cases}$
27.	$\iint_D \frac{y^2}{x^2} \, dx dy$	$D: \begin{cases} y = x, xy = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
28.	$\iint_D y(1 + x^2) \, dx dy$	$D: \begin{cases} y = x^3 \\ y \leq 4x \end{cases}$
29.	$\iint_D y^2(1 + 2x) \, dx dy$	$D: \begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x = 0 \end{cases}$
30.	$\iint_D xe^y \, dx dy$	$D: \begin{cases} y = \ln x, y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

1.3.5 Обчислити подвійний інтеграл по області D , використовуючи полярні координати. Знайти площу області D .

1.	$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy$	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, y = \sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 = 4, y = 0 \end{cases}$
----	---	---

2.	$\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x, y = \sqrt{3}x \end{cases}$
3.	$\iint_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = Rx \\ y \leq x \end{cases}$
4.	$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = x \end{cases}$
5.	$\iint_D \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0 \end{cases}$
6.	$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ y \geq x, x \geq 0 \end{cases}$
7.	$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{5 + x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16 \\ x = \sqrt{3}y, y = \sqrt{3}x, y \geq 0 \end{cases}$
8.	$\iint_D \frac{y - 2x}{x^2 + y^2} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \leq \sqrt{3}x, y \geq 0 \end{cases}$
9.	$\iint_D \frac{2y - 5x}{x^2 + y^2} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
10.	$\iint_D \frac{y - 4x}{x^2 + y^2} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = \sqrt{3}y, y = x, x \geq 0 \end{cases}$
11.	$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2 - 9} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$
12.	$\iint_D \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = \sqrt{3}x, y = x \end{cases}$

13.	$\iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ y = x, y = 0 \end{cases}$
14.	$\iint_D \frac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x = 0, y = x \end{cases}$
15.	$\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x, x = \sqrt{3}y \end{cases}$
16.	$\iint_D \frac{xy dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq -\sqrt{3}x, y \leq x \end{cases}$
17.	$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 0,25\pi^2 \\ y \leq \sqrt{3}x, y \geq 0 \end{cases}$
18.	$\iint_D \frac{dx dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x, x \geq 0 \end{cases}$
19.	$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0 \end{cases}$
20.	$\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, y \geq -\sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 = 25, y \leq 0 \end{cases}$
21.	$\iint_D \tg(x^2 + y^2) dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \leq \sqrt{3}x, y \leq 0 \end{cases}$
22.	$\iint_D xy dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = x \end{cases}$
23.	$\iint_D 3^{x^2 + y^2} dx dy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x, y = x \end{cases}$

24.	$\iint_D \frac{dxdy}{e^{x^2+y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = 0, y \leq x \end{cases}$
25.	$\iint_D xy^2 dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x^2 + y^2 = 4y \end{cases}$
26.	$\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 2}$	$D:$	$\begin{cases} y = \sqrt{25-x^2} \\ y = \sqrt{3}x, x = \sqrt{3}y \end{cases}$
27.	$\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x \\ y = 0, y \leq x \end{cases}$
28.	$\iint_D \cos(x^2 + y^2) dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \leq \sqrt{3}x, y \geq -x \end{cases}$
29.	$\iint_D \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \sqrt{3}y \leq x, y \geq -x \end{cases}$
30.	$\iint_D \frac{xy dxdy}{x^2 + y^2}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq -x, y \leq x \end{cases}$

1.3.6. Обчислити площу плоскої пластини D , обмеженої заданими лініями.

1.	$D: \begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y = 3, y \geq 0 \end{cases}$	2.	$D: \begin{cases} y = 6x^2 \\ x + y = 2, x \geq 0 \end{cases}$
3.	$D: \begin{cases} y^2 = x + 2 \\ x = 2 \end{cases}$	4.	$D: \begin{cases} x = -2y^2, x \leq 0 \\ x = 1 - 3y^2, y \geq 0 \end{cases}$
5.	$D: \begin{cases} y = \frac{8}{x^2 + 4} \\ x^2 = 4y \end{cases}$	6.	$D: \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$
7.	$D: \begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases}$	8.	$D: \begin{cases} y = \cos x, y \geq 0 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

9.	$D: \begin{cases} x = \sqrt{4 - y^2} \\ y = \sqrt{3x}, x \geq 0 \end{cases}$	10.	$D: \begin{cases} y = x^2 + 2 \\ x = 2, y = x, x \geq 0 \end{cases}$
11.	$D: \begin{cases} y = 4x^2 \\ 9y = x^2, y \leq 2 \end{cases}$	12.	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x \end{cases}$
13.	$D: \begin{cases} x = \frac{3}{4}y^2 + 1 \\ x = y^2 \end{cases}$	14.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ y = x^2 \end{cases}$
15.	$D: \begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}$	16.	$D: \begin{cases} x + y = 5 \\ 2y = \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$
17.	$D: \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 2^x, x = 2, x = 0 \end{cases}$	18.	$D: \begin{cases} y = -2x^2 + 2 \\ y \geq -6 \end{cases}$
19.	$D: \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = y^2 - 3 \end{cases}$	20.	$D: \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$
21.	$D: \begin{cases} x = y^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$	22.	$D: \begin{cases} x^2 = 3y \\ y^2 = 3x \end{cases}$
23.	$D: \begin{cases} x = \cos y, x \geq 0 \\ x \leq y + 1 \end{cases}$	24.	$D: \begin{cases} x = 4 - y^2 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$
25.	$D: \begin{cases} x = \sqrt{2 - y^2} \\ x = y^2 \end{cases}$	26.	$D: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ y \leq \frac{1}{2}x, y \geq 0 \end{cases}$
27.	$D: \begin{cases} y^2 = 4 - x, y = -2 \\ y = x + 2, y = 2 \end{cases}$	28.	$D: \begin{cases} y = \frac{3}{4}x^2 + 1 \\ y = x^2 \end{cases}$
29.	$D: \begin{cases} y^2 = 4 - x \\ x = y^2 \end{cases}$	30.	$D: \begin{cases} xy = 1, x^2 = y \\ y = 2, x = 0 \end{cases}$

1.3.7. Обчислити площу плоскої пластини D в полярній системі координат.

1.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2$	2.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + 4y^2)$
3.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^4$	4.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^2 (4x^2 + 3y^2)$
5.	$D:(x^2 + y^2)^4 = a^2 x^3 y^3$	6.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (3x^2 + y^2)$
7.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 xy^3$	8.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2)^2$
9.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^3 y$	10.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^4 + x^2 y^2 + y^4)$
11.	$D:(x^2 + y^2)^7 = a^8 x^4 y^2$	12.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (3x^2 + y^2)$
13.	$D:(x^2 + y^2)^5 = a^6 xy^3$	14.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^2 (x^2 + 3y^2)$
15.	$D:(x^2 + y^2)^5 = a^4 x^2 y^4$	16.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + 2y^2)$
17.	$D:(x^2 + y^2)^5 = a^4 x^4 y^2$	18.	$D:(x^2 + y^2)^7 = a^8 x^2 y^4$
19.	$D:(x^2 + y^2)^5 = a^6 x^3 y$	20.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$
21.	$D:(x^2 + y^2)^2 = ax^3$	22.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (5x^2 + 7y^2)$
23.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$	24.	$D:(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 + 3y^2)$
25.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^3$	26.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (3x^2 - y^2)$
27.	$D:(x^2 + y^2)^2 = 4ay^3$	28.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (x^2 + 3y^2)$
29.	$D:(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4$	30.	$D:(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - 3y^2)$

1.3.8 Обчислити об'єм тіла V , обмеженого заданими поверхнями

1.	$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 6 - x^2 \\ z = 0 \end{cases}$	2.	$V: \begin{cases} z = -x^2 - y^2 + 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$
3.	$V: \begin{cases} y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5}{3}x \\ z = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$	4.	$V: \begin{cases} x + y = 6 \\ x = \sqrt{3y}, z = 4x \\ x = 0, z = 0 \end{cases}$
5.	$V: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4y \\ z \geq 0 \end{cases}$	6.	$V: \begin{cases} z = 2\sqrt{x} \\ y^2 = 4x \\ x = 1, z = 0 \end{cases}$
7.	$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2x \\ z \geq 0 \end{cases}$	8.	$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = y \\ z \geq 0 \end{cases}$
9.	$V: \begin{cases} x = \sqrt{y}, x = 2\sqrt{y} \\ z + y = 4 \\ x \geq 0, z = 0 \end{cases}$	10.	$V: \begin{cases} z = 9 - y^2, z = 0 \\ 3x - 4y - 12 = 0 \\ x = 0, y = 0 \end{cases}$
11.	$V: \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$	12.	$V: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x^2, y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
13.	$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = x + 2y \\ z = 0 \end{cases}$	14.	$V: \begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x = 3 \\ z \geq 0 \end{cases}$

15.	$V: \begin{cases} x+z=2 \\ y=2\sqrt{x}, y=\frac{1}{4}x^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$	16.	$V: \begin{cases} x^2+y^2=4y \\ z^2=4-y \\ z \geq 0 \end{cases}$
17.	$V: \begin{cases} z=y^2, z=0 \\ 2x+3y=6 \\ x=0 \end{cases}$	18.	$V: \begin{cases} x^2+z^2=2x \\ y^2=x \\ z \geq 0 \end{cases}$
19.	$V: \begin{cases} z=(x-1)^2 \\ x=y^2 \\ z=0 \end{cases}$	20.	$V: \begin{cases} z=4-x^2 \\ x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$
21.	$V: \begin{cases} z=y^2+1 \\ x+y=1 \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$	22.	$V: \begin{cases} z=3x^2, z=0 \\ 2x-y=0 \\ x+y=9 \end{cases}$
23.	$V: \begin{cases} z=x^2+3y^2 \\ x+y=1 \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$	24.	$V: \begin{cases} 2-z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$
25.	$V: \begin{cases} 1-z^2=y \\ y=2x, x=y \\ z=0 \end{cases}$	26.	$V: \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x=\sqrt{y}, y=0 \\ z=0 \end{cases}$
27.	$V: \begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y=2, y=x \\ x=0, z=0 \end{cases}$	28.	$V: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=4x \\ z=0 \end{cases}$
29.	$V: \begin{cases} z=3y \\ x+y=8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$	30.	$V: \begin{cases} z+y=1 \\ y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$

1.3.9 Обчислити площу поверхні I, відсіченою поверхнею II

1.	$\begin{cases} I: x + y + z = 4 \\ II: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} I: x^2 + z^2 = 1 \\ II: x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} I: x + 2y + 3z = 12 \\ II: x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$	4.	$\begin{cases} I: x + 2y + z - 12 = 0 \\ II: x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$
5.	$\begin{cases} I: x^2 + z^2 = 4 \\ II: x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} I: z = x \\ II: x^2 + y^2 = 16, z = 0 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} I: x + 2y + 3z = 6 \\ II: x = 0, x = 4, y = 0, y = 1 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ II: x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} I: x + 2y + z = 4 \\ II: x = 2y^2, z = 0 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} I: z = 2x \\ II: x^2 + y^2 = 4, z = 0 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} I: x^2 = y^2 + z^2 \\ II: y^2 + z^2 = 2z \end{cases}$	12.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ II: x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} I: x^2 = 2z \\ II: x = 2y, y = 2x, x = 2\sqrt{2} \end{cases}$	14.	$\begin{cases} I: x + 2y + z = 3 \\ II: y = x^2 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} I: z^2 = 4x \\ II: y^2 = 4x, x = 1 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 = 25 - z \\ II: x^2 + y^2 = 9, z = 0 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} I: x^2 + z^2 = 4 \\ II: y = z, z = y = 0 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} I: z = 2y \\ II: x^2 + y^2 = 1, z = 0 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} I: y^2 = x^2 + z^2 \\ II: x^2 + z^2 = 2z \end{cases}$	20.	$\begin{cases} I: x = 1 - y^2 - z^2 \\ II: y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} I: z^2 = x \\ II: y^2 = x, x = 2 \end{cases}$	22.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ II: x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

23.	$\begin{cases} I: z = 1 - x^2 - y^2 \\ II: x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} I: 2y = x^2 + y^2 \\ II: x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$
25.	$\begin{cases} I: z = y \\ II: x^2 + y^2 = 9, z = 0 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 = 2y \\ II: x^2 + y^2 = 4 - z, z = 0 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} I: x + z = 9 \\ II: y^2 = x, y^2 = 4x, z = 0 \end{cases}$	28.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 = 4 \\ II: z = 0, y = 0, x + y = 2, \\ \quad x - y = 2 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} I: 2x + y + 3z = 6 \\ II: x = 0, x = 1, y = 0, y = 4 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} I: x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ II: x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

1.3.10 Обчислити масу неоднорідної пластини D , обмеженої заданими лініями, якщо поверхнева щільність у кожній її точці $\gamma = \gamma(x, y)$

1.	$D: \begin{cases} x = 2y; y = 2x \\ xy = 2 \ (x \geq 0) \end{cases}$ $\gamma = x^2 + y$	2.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$
3.	$D: \begin{cases} xy = 4, x = 2 \\ y = 2x \end{cases}$ $\gamma = \frac{x^2}{y^2}$	4.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = -2x \end{cases}$ $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$
5.	$D: \begin{cases} y^2 = 2x \\ x + y = 1,5 \end{cases}$ $\gamma = x^2 + y^2$	6.	$D: \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = x^2 \end{cases}$ $\gamma = x^2$

7.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2 + xy^2}}$	8.	$D: \begin{cases} xy = 1, y = x \\ x = 2 \end{cases}$ $\gamma = \frac{x^2}{y^2}$
9.	$D: \begin{cases} x = y, x = \frac{y}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\gamma = 3x$	10.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$
11.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ $\gamma = 3\sqrt{x^2 + y^2}$	12.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$ $\gamma = e^{x^2 + y^2}$
13.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4, x \geq 0 \end{cases}$ $\gamma = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$	14.	$D: \begin{cases} y = \frac{2}{x}, x = 2y \\ y = 2 \end{cases}$ $\gamma = \frac{y^2}{x^2}$
15.	$D: \begin{cases} x = 2y^2, y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\gamma = y^2$	16.	$D: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 3y, y = x \end{cases}$ $\gamma = y + 1$
17.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x^2 + y^2 = 4y \end{cases}$ $\gamma = 11\sqrt{x^2 + y^2}$	18.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$ $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$
19.	$D: \begin{cases} 2y = \sqrt{x}, x + y = 5 \\ y \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$ $\gamma = y^2$	20.	$D: \begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\gamma = y - 2$

21.	$D: \begin{cases} y = x, y = x\sqrt{3} \\ x = 0, x = 2 \end{cases}$ $\gamma = \frac{x}{x^2 + y^2}$	22.	$D: \begin{cases} y = 2x^2, y = 2x^2 + 1 \\ x = -1, x = 1 \end{cases}$ $\gamma = x^2$
23.	$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4, x \geq 0 \end{cases}$ $\gamma = \frac{xy}{x^2 + y^2}$	24.	$D: \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ y = x^2 \end{cases}$ $\gamma = 2y$
25.	$D: \begin{cases} x = y^2, x = y^2 + 3 \\ y = -2, y = 2 \end{cases}$ $\gamma = y^2$	26.	$D: \begin{cases} y = x, x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ $\gamma = 2x^2 + y^2$
27.	$D: \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\gamma = 2x + 8$	28.	$D: \begin{cases} y^2 = 1 - x \\ \gamma = 2 - x - y \\ x = 0 \end{cases}$
29.	$D: \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$ $\gamma = x^2$	30.	$D: \begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}$ $\gamma = x$

1.3.11 Обчислити потрійний інтеграл по області V , обмеженої вказаними поверхнями

1.	$\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$	2.	$\iiint_V x^2 y z dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$
----	---	----	--

3.	$\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$	4.	$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$
5.	$\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq z \leq 5 \end{cases}$	6.	$\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$
7.	$\iiint_V (2x - y^2 - z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ -1 \leq z \leq 0 \end{cases}$	8.	$\iiint_V 2xy^2 z dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$
9.	$\iiint_V 5xyz^2 dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 3 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$	10.	$\iiint_V (x^2 + y^2 - z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ -1 \leq z \leq 2 \end{cases}$
11.	$\iiint_V (x + 2yz) dx dy dz$ $V: \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases};$	12.	$\iiint_V (x + yz^2) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ -1 \leq z \leq 3 \end{cases}$

13.	$\iiint_V (xy + 3z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$	14.	$\iiint_V (xy - z^2) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 3 \end{cases}$
15.	$\iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$	16.	$\iiint_V (x^3 + y^2 - z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$
17.	$\iiint_V (2x^2 + y - z^3) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$	18.	$\iiint_V x^2 y z^2 dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \\ -1 \leq z \leq 0 \end{cases}$
19.	$\iiint_V (x + y - z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ -1 \leq z \leq 5 \end{cases}$	20.	$\iiint_V (x + 2y + 3z^2) dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 3 \end{cases}$
21.	$\iiint_V (3x^2 + 2y + z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 3 \end{cases}$	22.	$\iiint_V (x - y) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$

23.	$\iiint_V x^3 yz dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$	24.	$\iiint_V xy^2 z dx dy dz$ $V: \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$
25.	$\iiint_V xyz^2 dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 0 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$	26.	$\iiint_V xyz dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 0 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$
27.	$\iiint_V (x + y - z^2) dx dy dz$ $V: \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{cases}$	28.	$\iiint_V (x + y^2 + z^2) dx dy dz$ $V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 2 \leq z \leq 3 \end{cases}$
29.	$\iiint_V (x + y^2 - 2z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$	30.	$\iiint_V (x - y - z) dx dy dz$ $V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ -2 \leq z \leq 1 \end{cases}$

1.3.12 Обчислити об'єм тіла V , обмеженого заданими поверхнями, за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи циліндричні координати

1.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = 0, z = 1 - x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{20 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$
2.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 7,5\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 8,5 - x^2 - y^2 \end{cases}$

3.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x \\ z = 0, z = 64 - x^2 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{8 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$
4.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ z = 0, z = 4 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 60, z = 0, \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
5.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$
6.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6y \\ z = 36 - x^2 - y^2 \\ z = 0, (z \geq 0) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 3\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 10 - x^2 - y^2 \end{cases}$
7.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 0, z = 9 - x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{18 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$
8.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{100 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 51, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
9.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 \\ z = 4 - x^2 - y^2, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 3 - x^2 - y^2 \end{cases}$
10.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ z = 0, z = 4 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \\ 6z = x^2 + y^2 \end{cases}$
11.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10x \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/3} \end{cases}$

12.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8y \\ z = 64 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{81 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 45, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
13.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x \\ z = 0, z = 9 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ 3z = x^2 + y^2 \end{cases}$
14.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6y \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 6\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 16 - x^2 - y^2 \end{cases}$
15.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x, z = 0 \\ z = 36 - x^2 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{32 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$
16.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = 4 - x^2 - y^2, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 39, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
17.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ z = 0, z = 12 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{32 - x^2 - y^2} \\ 4z = x^2 + y^2 \end{cases}$
18.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 1,5\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2,5 - x^2 - y^2 \end{cases}$
19.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ z = 0, z = 16 - x^2 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{45 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{0,8(x^2 + y^2)} \end{cases}$
20.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 0, z = 4 - x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{49 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 33, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
21.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \\ 9z = x^2 + y^2 \end{cases}$

22.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y, z = 0 \\ z = 16 - x^2 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 9\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 22 - x^2 - y^2 \end{cases}$
23.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ z = 0, z = 1 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{8 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{7}} \end{cases}$
24.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12x \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 5, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
25.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ z = 4 - x^2 - y^2, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{90 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$
26.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 0, z = 6 - x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 12\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 28 - x^2 - y^2 \end{cases}$
27.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10y \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/8} \end{cases}$
28.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0, z = 4 - x^2 - y^2 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 21, z = 0 \\ (\text{в середині циліндра}) \end{cases}$
29.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0, z = 1 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ 12z = x^2 + y^2 \end{cases}$
30.	a)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8y \\ z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 4,5\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 5,5 - x^2 - y^2 \end{cases}$

1.3.13 Обчислити об'єм тіла V , обмеженого заданими поверхнями, за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи сферичні координати

1.	$V: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ -x \leq y \leq 0 \end{cases}$	2.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \\ -\sqrt{3}x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
3.	$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ -\sqrt{3}x \leq y \leq 0 \end{cases}$	4.	$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \\ z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}} \\ 0 \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
5.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ \sqrt{3}x \leq y \leq 0 \end{cases}$	6.	$V: \begin{cases} 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ \sqrt{3}x \leq y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}$
7.	$V: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \\ y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}$	8.	$V: \begin{cases} 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0 \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq -\sqrt{3}x \end{cases}$
9.	$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ x \leq y \leq 0 \end{cases}$	10.	$V: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \\ z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$

11.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ -\sqrt{3}x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$	12.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}} \\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}$
13.	$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49 \\ z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \leq 0, y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$	14.	$V: \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121 \\ z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \geq 0, y \geq \sqrt{3}x \end{cases}$
15.	$V: \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \\ 0 \leq y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}$	16.	$V: \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0 \\ y \geq \sqrt{3}x, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases},$
17.	$V: \begin{cases} 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \\ 0 \leq y \leq -x \end{cases}$	18.	$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \\ y \leq \sqrt{3}x, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
19.	$V: \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ \sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$	20.	$V: \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}} \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$

21.	$V: \begin{cases} 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$	22.	$V: \begin{cases} 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
23.	$V: \begin{cases} 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$	24.	$V: \begin{cases} 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 169 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0 \\ y \geq 0, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
25.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$	26.	$V: \begin{cases} 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \\ y \leq 0, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
27.	$V: \begin{cases} 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196 \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 0 \end{cases}$	28.	$V: \begin{cases} 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}} \\ 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
29.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81 \\ z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \leq 0, y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}$	30.	$V: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \\ y \leq 0, y \leq -x/\sqrt{3} \end{cases}$

2. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

2.1 Відомості з теорії

Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл 1-го роду (по довжині дуги кривої) це $\int_L f(x, y) dl$, де функція $f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L , L – шлях інтегрування.

Криволінійний інтеграл першого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу. При цьому треба враховувати, що межі інтегрування у визначеному інтегралі завжди «беруть» від «меншої» до «більшої», незалежно від заданого напрямку інтегрування.

1) Якщо крива L задана рівнянням $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

2) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

3) Якщо крива L задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

4) У випадку просторової кривої, яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, то матимемо

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Криволінійний інтеграл першого роду застосовують для знаходження:

а) обчислення довжини кривої AB здійснюється за формулою:

$$L_{AB} = \int_{AB} dl;$$

б) маса матеріальної кривої обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl, \text{ де } \gamma(x, y) - \text{лінійна густина.}$$

Криволінійний інтеграл 2-го роду (по координатах) це $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, де функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ визначені і обмежені на кривій L , L – шлях інтегрування.

Криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

1) Якщо крива L задана рівнянням $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)) dx.$$

2) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt.$$

Формула Гріна та повний диференціал функції.

Якщо L – замкнений контур, який обмежує область D і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними 1-го порядку: $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D включаючи межу L , то справедлива формула Гріна:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

де обхід контуру L вибирається таким, щоб область D залишалась зліва.

Якщо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то значення інтеграла $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не залежить від форми кривої AB , яка сполучає точки A та B і $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, а вираз $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = du$ – повний диференціал функції $u(x, y)$, яку можна відновити використовуючи формули:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C \text{ або}$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C ,$$

де (x_0, y_0) довільна фіксована точка, в якій визначені функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Зручно за точку (x_0, y_0) брати точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ або $(1, 1)$.

Криволінійний інтеграл другого роду застосовують для знаходження:

а) площі плоскої фігури D , обмеженої кривою L , за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx;$$

б) роботи сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L : $A = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Поверхневі інтеграли.

Поверхневий інтеграл 1-го роду це $\iint_S F(x, y, z) dS$, де функція $F(x, y, z)$ визначена і обмежені на кусково-гладкій поверхні S .

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і однозначно проєктується на площину xOy в область D , то поверхневий інтеграл 1-го роду зводиться до подвійного інтегралу:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Поверхню S можна проєктувати на будь-яку координатну площину, залежно від умов. Подвійний інтеграл змінюється відповідно.

Поняття **поверхневого інтегралу 2-го роду** існує для двосторонньої поверхні.

Це поверхня σ , для якої виконується умова: якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру L , розміщеного на поверхні σ , який не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$. Двостороння поверхня є орієнтована поверхня (вибрано сторону). Будемо вважати за додатний той напрям обходу контуру L , коли він залишається зліва.

На практиці найпоширенішим є поверхневий інтеграл 2-го роду

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz + \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені та обмежені в точках поверхні σ .

Поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma, \end{aligned}$$

де α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ у довільній її точці та осями Ox, Oy, Oz відповідно.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проекція поверхні σ на площину xOy . Тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz . Якщо кут тупий, то беремо "-".

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz$$

Поверхня σ задана рівняннями $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ відповідно. D_{yz} , D_{xz} проекції поверхні σ відповідно на площини yOz та xOz відповідно. Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox , Oy відповідно, а "-" – коли кут тупий.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то одиничний вектор нормалі до поверхні обчислюється за формулою

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

Знак " $\pm$ " відповідає двом сторонам поверхні σ .

2.2 Аудиторні завдання.

2.2.1. Обчислити $\int_L f(x, y) dl$ по заданій лінії L :

1) $f(x, y) = 3x - 2y$, де L – пряма AB : $A(2, 4)$, $B(-1, 1)$

Відповідь: $10,5\sqrt{2}$.

2) $f(x, y) = y$, де L : $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0; \pi]$

Відповідь: 4.

3) $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$, де L : $y = \frac{x}{2} - 2$, $x \in [0, 4]$.

Відповідь: $\sqrt{5} \ln 2$.

2.2.2. Обчислити масу параболи $y = x^2$ для $x \in [1; 2]$, якщо в кожній точці кривої густина дорівнює абсцисі.

Відповідь: $m = \frac{17\sqrt{17} - 1}{12}$ од. маси.

2.2.3. Обчислити $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по заданій лінії L :

1) $P(x, y) = x^2 - 2y$, $Q(x, y) = y^2 + 2xy$, $L: y = x^2 + 1, |x| \leq 1$

Відповідь: $-\frac{2}{5}$.

2) $P(x, y) = 4 - y$, $Q(x, y) = x$ $L: \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} t \in [0; \pi]$

Відповідь: 4π .

2.2.4. Застосувавши формулу Гріна обчислити

1) $\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$, де L : контур трикутника з вершинами у точках $A(3, 0)$, $B(3, 3)$, $C(0, 3)$.

Відповідь: 18.

2) $\oint_L xy^2 dy - x^2 dx$, де $L: x^2 + y^2 = 4$.

Відповідь: 4π .

2.2.5. Обчислити інтеграл, перевіривши незалежність від шляху інтегрування

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy.$$

Відповідь: 5.

2.2.6. Знайти функцію $u(x, y)$ за її повним диференціалом

$$1) du = 4(x^2 - y^2) \cdot (xdx - ydy)$$

Відповідь: $u(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + C$.

$$2) du = \left(\frac{3}{x} - \frac{2x}{y} \right) dx + \left(\frac{3}{y} + \frac{x^2}{y^2} \right) dy.$$

Відповідь: $u(x, y) = \ln x^3 + \ln y^3 - \frac{x^2}{y} + C_1$, $C_1 = C + 1$.

2.2.7. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^4$ і прямою $y = 1$.

Відповідь: $S = 1,6$ кв. од.

2.2.8. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (y + x, xy)$ при переміщенні матеріальної точки одиничної маси вздовж відрізка, що з'єднує точку $A(1, 1)$ з точкою $B(3, 3)$.

Відповідь: $\frac{50}{3}$ од. роботи.

2.2.9. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду

$\iint_S (x + 2y - z) dS$, де S – частина площини $x + 2y + z = 2$ в першому октанті.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

2.2.10. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$\iint_{\sigma} (z + xy) dx dz$, де σ – нижня сторона площини $x + 2y + z = 1$, яка обмежена координатними площинами.

Відповідь: $-\frac{13}{18}$.

2.3 Індивідуальні завдання

2.3.1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L f(x, y) dl$, де L – відрізок прямої від точки $A_1(x_1, y_1)$ до точки $A_2(x_2, y_2)$.

1.	$f(x, y) = x + 7y$	$A_1(-2, 5)$	$A_2(3, 7)$
2.	$f(x, y) = 3x + 5y$	$A_1(3, 4)$	$A_2(5, 1)$
3.	$f(x, y) = -2x + 5y$	$A_1(-3, 2)$	$A_2(0, 5)$
4.	$f(x, y) = 5x + 2y$	$A_1(-2, 7)$	$A_2(3, -3)$
5.	$f(x, y) = -4x + y$	$A_1(3, 1)$	$A_2(2, 7)$
6.	$f(x, y) = x + 4y$	$A_1(4, 0)$	$A_2(1, -4)$
7.	$f(x, y) = 2x + 3y$	$A_1(5, -7)$	$A_2(2, -1)$
8.	$f(x, y) = -5x + 2y$	$A_1(3, 5)$	$A_2(7, 1)$
9.	$f(x, y) = x + 3y$	$A_1(2, 5)$	$A_2(0, 3)$
10.	$f(x, y) = 2x - 4y$	$A_1(7, 2)$	$A_2(5, -3)$

11.	$f(x, y) = 5x + y$	$A_1(2, 5)$	$A_2(4, -3)$
12.	$f(x, y) = 3x + 5y$	$A_1(2, -1)$	$A_2(3, -2)$
13.	$f(x, y) = 7x + 6y$	$A_1(6, 5)$	$A_2(3, 6)$
14.	$f(x, y) = 6x + 2y$	$A_1(3, 5)$	$A_2(5, -2)$
15.	$f(x, y) = 2x - 5y$	$A_1(3, -7)$	$A_2(2, -6)$
16.	$f(x, y) = 2x - y$	$A_1(1, 2)$	$A_2(3, -1)$
17.	$f(x, y) = x + y$	$A_1(3, 1)$	$A_2(-2, 2)$
18.	$f(x, y) = -x - 2y$	$A_1(1, -3)$	$A_2(4, 5)$
19.	$f(x, y) = 3x - y$	$A_1(2, 1)$	$A_2(1, -3)$
20.	$f(x, y) = 5x + y$	$A_1(4, 2)$	$A_2(-3, 1)$
21.	$f(x, y) = -2x + 3y$	$A_1(3, -3)$	$A_2(4, 1)$
22.	$f(x, y) = -x + 5y$	$A_1(7, 2)$	$A_2(1, 4)$
23.	$f(x, y) = 3x + 2y$	$A_1(4, -1)$	$A_2(2, 7)$
24.	$f(x, y) = -2x + 3y$	$A_1(3, 2)$	$A_2(5, 1)$
25.	$f(x, y) = x + 3y$	$A_1(1, -3)$	$A_2(3, 2)$
26.	$f(x, y) = x - 3y$	$A_1(5, 2)$	$A_2(-1, 5)$
27.	$f(x, y) = 7x - 2y$	$A_1(3, 5)$	$A_2(2, -3)$
28.	$f(x, y) = -3x + 2y$	$A_1(2, -4)$	$A_2(3, -5)$
29.	$f(x, y) = -5x + 3y$	$A_1(-2, 5)$	$A_2(3, 2)$
30.	$f(x, y) = -2x + y$	$A_1(1, 5)$	$A_2(2, -4)$

2.3.2 Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L f(x, y) dl$ по заданій

лінії L .

1.	$f(x, y) = \frac{x}{y}$	$L: \begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$
2.	$f(x, y) = x + y$	$L: \begin{cases} x = 5 \cos^2 t \\ y = 5 \sin^2 t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$
3.	$f(x, y) = \frac{1}{xy}$	$L: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$
4.	$f(x, y) = x$	$L: \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
5.	$f(x, y) = xy^2$	$L: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$	$t \in [\pi, 2\pi]$
6.	$f(x, y) = \frac{y}{x}$	$L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$	$t \in [1, 3]$
7.	$f(x, y) = 2x^2 + 3y$	$L: \begin{cases} x = 6 \cos^2 t \\ y = 6 \sin^2 t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$
8.	$f(x, y) = x^2 y$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
9.	$f(x, y) = y^2$	$L: \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
10.	$f(x, y) = x^2 y + xy^2$	$L: \begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
11.	$f(x, y) = \sqrt{2y}$	$L: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$	$t \in [0, 1]$

12.	$f(x, y) = x^2 + y^2$	$L : \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
13.	$f(x, y) = 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}$	$L : \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
14.	$f(x, y) = \sqrt{2y}$	$L : \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
15.	$f(x, y) = 4y + 3x^2$	$L : \begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$
16.	$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}},$	$L : \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^2 t \\ y = \sqrt{2} \sin^2 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
17.	$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$	$L : \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$
18.	$f(x, y) = x + y$	$L : \begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
19.	$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$	$L : \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
20.	$f(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$	$L : \begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
21.	$f(x, y) = y \cdot e^{-x}$	$L : \begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = 2 \arctg t - t \end{cases}$	$t \in [0, 1]$
22.	$f(x, y) = y^{\frac{3}{2}}$	$L : \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
23.	$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$	$L : \begin{cases} x = 3(1 + \cos t) \\ y = 3 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
24.	$f(x, y) = xy,$	$L : \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

25.	$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	$L: \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
26.	$f(x, y) = 4x^2 - y^2$	$L: \begin{cases} x = 7 \cos^3 t \\ y = 7 \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$
27.	$f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{y^3}$	$L: \begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
28.	$f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$	$L: \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
29.	$f(x, y) = y + 1$	$L: \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5(1 + \sin t) \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
30.	$f(x, y) = 3 + \frac{1}{3}y^2$	$L: \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi \right]$

3.3 Обчислити $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по заданій лінії L .

1.	$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$	$L: y = x^2$, від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$
2.	$\int_L (x^2 + y^2)dx + 2xydy$	$L: y = x^3$, від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$
3.	$\int_L (x^2 + y)dy$	$L: y = 2 - x^2$, від точки $A(-\sqrt{2}, 0)$ до точки $B(0, 2)$
4.	$\int_L (x - 2xy^2)dx$	$L: x = 1 - y^2$, від точки $A(1, 0)$ до точки $B(-3, 2)$
5.	$\int_L x^2 y dx + (y - xy^2)dy$	$L: y = -x^2 + 1$, від точки $A(0, 1)$ до точки $B(2, -3)$

6.	$\int_L xy dx + (y - x) dy$	$L: y = x^3$, від точки $O(0,0)$ до точки $A(-1, -1)$
7.	$\int_L (1 - xy) dx + (xy + 1) dy$	$L: y = -x^3$, від точки $A(1, -1)$ до точки $B(-1, 1)$
8.	$\int_L xy dx + (y - x^2) dy$	$L: y^2 = x$, від точки $O(0,0)$ до точки $A(4, 2)$
9.	$\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$	$L: 4 - 4x = y^2$, від точки $A(1,0)$ до точки $B(0, 2)$
10.	$\int_L x^2 y dx + (y^2 - x) dy$	$L: y = x^2$, від точки $O(0,0)$ до точки $A(-1, 1)$
11.	$\int_L (xy - y^2) dx + x dy$	$L: y = x^2 + 2$, від точки $A(0,2)$ до точки $B(1, 3)$
12.	$\int_L \frac{y^2 + 1}{y} dx + \frac{x}{y} dy$	L : відрізок прямої від точки $A(1, 2)$ до точки $B(3, 4)$
13.	$\int_L (xy - x) dx + \frac{1}{2} x^2 dy$	$L: y^2 = 4x$, від точки $O(0,0)$ до точки $A(1, 2)$
14.	$\int_L \frac{y}{x} dx + x dy$	$L: y = \ln x$, від точки $A(1,0)$ до точки $B(e, 1)$
15.	$\int_L xy dx - y^2 dy$	$L: y^2 = 2x$, від точки $A(2,2)$ до точки $B(0,5; -1)$
16.	$\int_L 2xy dx - x^2 dy$	$L: y = 0,25x^2$, від точки $O(0,0)$ до точки $A(2, 1)$
17.	$\int_L (xy - y^2) dx + x dy$	$L: y = 2x^2$, від точки $O(0,0)$ до точки $A(1, 2)$
18.	$\int_L 2xy dx + x^2 dy$	$L: y = 2x^3$, від точки $A(1,2)$ до точки $B(-1, -2)$

19.	$\int_L \left(x - \frac{1}{y} \right) dy$	$L: y = 3x^2$, від точки $A(1, 3)$ до точки $B(-1, 3)$
20.	$\int_L (3x^2 y + 1) dx + (x^3 + 2) dy$	$L: 4y^2 = x$, від точки $O(0, 0)$ до точки $A(4, 1)$
21.	$\int_L (xy - x) dx + \frac{x^2}{y} dy$	$L: y = 2\sqrt{x}$, від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 2)$
22.	$\int_L (x^2 - y^2) dx$	$L: y = 3x^2$, від точки $A(-1, 3)$ до точки $B(1, 3)$
23.	$\int_L x dy$	$L: y = \sin x$ від точки $A(\pi, 0)$ до точки $O(0, 0)$
24.	$\int_L (x^2 - 2xy) dx + (x - 2y)^2 dy$	L : відрізок прямої від точки $A(2, 0)$ до точки $B(3, 1)$
25.	$\int_L (xy - y^2) dx + x dy$	$L: x = y^2 + 2$, від точки $A(3, 1)$ до точки $B(2, 0)$
26.	$\int_L (3x^2 + y^2) dx + (x - 2y^2) dy$	L : відрізок прямої від точки $A(1, 3)$ до точки $B(-1, 5)$
27.	$\int_L 2xy dx - x^2 dy$	$L: x = 2y^2$, від точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 1)$
28.	$\int_L \frac{x}{y} dx - \frac{y-x}{x} dy$	$L: x + 1 = y^2$, від точки $A(3, 2)$ до точки $B(8, -3)$
29.	$\int_L x dy - y dx$	$L: y = x^2$, від точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 4)$
30.	$\int_L (xy - x) dx + \frac{x^2}{2} dy$	$L: y = 4x^2$, від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 4)$

2.3.4 Обчислити $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по заданій лінії L .

1.	$\int_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
2.	$\int_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$	$L: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$
3.	$\int_L xdy - ydx$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
4.	$\int_L (xy - x)dx + (y - xy)dy$	$L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [\pi, 2\pi]$
5.	$\int_L (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
6.	$\int_L (2 - y)dx + xdy$	$L: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
7.	$\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$	$L: \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = 1 + 2 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
8.	$\int_L x^2 ydx + xy^2 dy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$	$t \in [\pi, 2\pi]$
9.	$\int_L xy^2 dx$	$L: \begin{cases} x = 7 \cos t \\ y = 7 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
10.	$\int_L \frac{x}{y} dx - \frac{dy}{y-2}$	$L: \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$
11.	$\int_L ydx + xdy$	$L: \begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

12.	$\int_L (8 - y)dx + xdy$	$L: \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
13.	$\int_L (4y - 3x)dy - 4ydx$	$L: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
14.	$\int_L xdy - ydx$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
15.	$\int_L y^2 dx + x^2 dy$	$L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
16.	$\int_L (x + y)dx + (2x - y)dy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
17.	$\int_L (6 - y)dx + (y - 3)dy$	$L: \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
18.	$\int_L (2x - 3y)dx + xdy$	$L: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
19.	$\int_L (x - y)dx + dy$	$L: \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
20.	$\int_L y^2 dx - 2xdy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
21.	$\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$	$L: \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = 1 + 2 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
22.	$\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$	$L: \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$

23.	$\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
24.	$\int_L 2ydx + xdy$	$L: \begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
25.	$\int_L (2-y)dx + xdy$	$L: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
26.	$\int_L (x+3y)dx + (x-y)dy$	$L: \begin{cases} x = 1 + 3 \cos t \\ y = 1 + 3 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
27.	$\int_L y^{\frac{1}{3}} dx - x^{\frac{1}{3}} dy,$	$L: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
28.	$\int_L (x^2 - y)dx - (x + y^2)dy$	$L: \begin{cases} x = 8 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
29.	$\int_L (3y - 8x)dy - ydx$	$L: \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \cos t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
30.	$\int_L \left(1 - \frac{y}{2}\right)dx - \frac{x}{2}dy$	$L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$

2.3.5 Застосувавши формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл по замкненому контуру (обхід контуру здійснити в додатному напрямі)

1.	$\oint_L (1 - x^2)dx + x(1 + y^2)dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
2.	$\oint_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
3.	$\oint_L xydx + x^2 dy$	$L: x^2 + y^2 = 9$

4.	$\oint_L (x - y)dx$	L : трикутник з вершинами $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$
5.	$\oint_L (x + y)dy$	L : прямокутник з вершинами $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, -1)$
6.	$\oint_L (1 + x)ydx + (x - y)dy$	L : трикутник з вершинами $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(0, -1)$
7.	$\oint_L (1 + y^2)dx + (1 - x^2)dy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
8.	$\oint_L y^2 dx + x^2 dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
9.	$\oint_L y^2 dx + xydy$	$L: x^2 + y^2 = 9$
10.	$\oint_L (x^2 - y^2)dx + 2xydy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
11.	$\oint_L y^2 dx + (x^2 - y^2)dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
12.	$\oint_L (1 - xy)dx + x^2 dy$	L : прямокутник з вершинами $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$, $D(1, -1)$
13.	$\int_L (xy - 1)dx + (1 - x)dy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
14.	$\oint_L (1 - y^2)dx + y(1 + x)dy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
15.	$\oint_L ydx + \frac{y}{x}dy$	L : трикутник з вершинами $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 1)$
16.	$\oint_L (x^2 + 3y)dx + (3x^2 + y)dy$	L : трикутник з вершинами $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$
17.	$\oint_L (y^2 + 3)dx + xy dy$	L : прямокутник, утворений всіма координат і прямими $y = 2$, $x = 1$

18.	$\oint_L (x+y)dx + xydy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
19.	$\oint_L ydx + (y-x)dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
20.	$\oint_L xdx + (x+y)dy$	L : контур, утворений параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$
21.	$\oint_L (x+y)dx + (2x-y)dy$	$L: x^2 + y^2 = 9$
22.	$\oint_L (x-y)dx - (x+y)dy$	$L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
23.	$\oint_L (xy - y^2)dx + xdy$	L : контур, утворений віссю Ox і параболою $y = 1 - x^2$
24.	$\oint_L y^2 dx + (x - 2y)dy$	L : контур, утворений віссю Oy і параболою $x = 1 - y^2$
25.	$\oint_L y^2 dx + (x^2 - y^2)dy$	L : трикутник з вершинами $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$
26.	$\oint_L (x-y)dx + (y-x)dy$	$L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
27.	$\oint_L 2xydx + 2(x^2 + y^2)dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
28.	$\oint_L 3ydx + (x-y)dy$	$L: x^2 + y^2 = 9$
29.	$\oint_L (y^2 - x)dy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
30.	$\int_L \left(2x - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(2y^2 x + \frac{x^3}{3} \right) dy$	$L: x^2 + y^2 = 36$

2.3.6 Обчислити інтеграл, перевірявши незалежність від шляху інтегрування

1.	$\int_{(1;2)}^{(2;3)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy$	2.	$\int_{(0;0)}^{(2;1)} y dx + x dy$
3.	$\int_{(0;0)}^{(1;2)} (y + \ln(x+1)) dx + (x + e^y) dy$	4.	$\int_{(-1;1)}^{(2;4)} \frac{dx}{y^2} + \left(4 - \frac{2x}{y^3} \right) dy$
5.	$\int_{(-1;1)}^{(1;1)} x^2 y dx + \left(\frac{x^3}{3} - y \right) dy$	6.	$\int_{(1;1)}^{(2;-2)} (x + 3y) dx + (y + 3x) dy$
7.	$\int_{(1;2)}^{(1;-2)} \ln(x+1) dx + e^y dy$	8.	$\int_{(0;2)}^{(3;3)} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{y^2-1}$
9.	$\int_{(-1;-1)}^{(1;1)} \frac{y dx}{\sqrt{1-x^2 y^2}} + \frac{x dy}{\sqrt{1-x^2 y^2}}$	10.	$\int_{(-1;1)}^{(1;3)} -\frac{dx}{y} + \frac{x}{y^2} dy$
11.	$\int_{(1;-1)}^{(2;1)} (4 + 8x^2) x dx - y^2 dy$	12.	$\int_{(0;1)}^{(2;3)} \frac{y dx}{1+x} + \ln(1+x) dy$
13.	$\int_{(-1;1)}^{(2;3)} (x^2 - 2y) dx + (y^2 - 2x) dy$	14.	$\int_{(1;1)}^{(-1;2)} \left(1 - \frac{1}{y} \right) dx + \frac{x}{y^2} dy$
15.	$\int_{(1;1)}^{(2;2)} \frac{y}{x^2} dx + \left(2 - \frac{1}{x} \right) dy$	16.	$\int_{(0;1)}^{(3;2)} (x^2 - y) dx - (x - y^2) dy$
17.	$\int_{(-1;-1)}^{(1;2)} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx - \frac{x dy}{x^2 + y^2}$	18.	$\int_{(1;0)}^{(e;1)} \frac{y}{x} dx + \ln x dy$
19.	$\int_{(0;1)}^{(-1;2)} \ln(y+1) dx + \frac{x}{y+1} dy$	20.	$\int_{(-1;1)}^{(0;2)} \left(x - \frac{1}{y} \right) dx + \frac{x}{y^2} dy$

21.	$\int_{(0;1)}^{(1;2)} (y + \ln(x+1))dx + (x + e^y)dy$	22.	$\int_{(1;1)}^{(2;-1)} \left(2x + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy$
23.	$\int_{(1;1)}^{(-1;-1)} x\sqrt{x^2 + y^2}dx + y\sqrt{x^2 + y^2}dy$	24.	$\int_{(-1;1)}^{(1;2)} \frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy$
25.	$\int_{(0;-2)}^{(1;1)} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	26.	$\int_{(0;0)}^{(1;2)} \frac{ydx}{1+x} + \ln(1+x)dy$
27.	$\int_{(0;0)}^{(1;1)} (x + y \sin xy)dx + (y + x \sin xy)dy$	28.	$\int_{(-1;1)}^{(1;1)} 2xydx + x^2ydy$
29.	$\int_{(1;1)}^{(2;3)} \left(\frac{1}{x} + y\right)dx + (\ln y + x)dy$	30.	$\int_{(0;1)}^{(1;0)} (3x^2 - 2xy + y^2)dx + x(2y - x)dy$

2.3.7 Знайти функцію $u(x, y)$ за її повним диференціалом

1.	$du = (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$
2.	$du = \frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy$
3.	$du = (x^2 - 2y)dx + (y^2 - 2x)dy$
4.	$du = (4x + 3y)dx + (3x + 2y)dy$
5.	$du = (10x + 6y)dx + 6x dy$
6.	$du = (y + 2x)dx + (x + 2y)dy$
7.	$du = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$
8.	$du = (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$
9.	$du = (3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$

10.	$du = \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy$
11.	$du = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy$
12.	$du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$
13.	$du = \left(3x^2y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right)dy$
14.	$du = \left(3x^2y - \frac{1}{3}y^3\right)dx + (x^3 - xy^2)dy$
15.	$du = (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2)dy$
16.	$du = \frac{1-y}{x^2y}dx + \frac{1-2x}{xy^2}dy$
17.	$du = (3x^2y - y^3)dx + (x^3 - 3xy^2)dy$
18.	$du = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy$
19.	$du = \left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy$
20.	$du = \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy$
21.	$du = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx + \frac{1-x}{y^2}dy$
22.	$du = (4xy + 3y^2 + 3x^2)dx + (2x^2 + 6xy)dy$
23.	$du = \frac{-2x}{y^2 - x^2}dx + \frac{2y}{y^2 - x^2}dy$
24.	$du = (6x^2y - 4y^5)dx + (2x^3 - 20xy^4)dy$

25.	$du = (5y^2 - 9x^2y^4)dx + (10xy - 12x^3y^3)dy$
26.	$du = (-3y - 4x^3)dx + (2y - 3x)dy$
27.	$du = (5 - 3x^2)dx - 3y^2dy$
28.	$du = (7 - 3x^2y^2)dx + (4y^3 - 2x^3y)dy$
29.	$du = (4xy^2 + 3x^2)dx + (4x^2y - 3y^2)dy$
30.	$du = (y^4 - 6xy)dx + (4xy^3 - 3x^2)dy$

2.3.8 Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S , де S – частина площини P в першому октанті.

1.	$\iint_S (2x + 3y + 2z)dS$	$P:$	$x + 3y + z = 3$
2.	$\iint_S (2 + y - 7x + 9z)dS$	$P:$	$2x - y - 2z = -2$
3.	$\iint_S (6x + y + 4z)dS$	$P:$	$3x + 3y + z = 3$
4.	$\iint_S (x + 2y + 3z)dS$	$P:$	$x + y + z = 2$
5.	$\iint_S (3x - 2y + 6z)dS$	$P:$	$2x + y + 2z = 2$
6.	$\iint_S (2x + 5y - z)dS$	$P:$	$x + 2y + z = 2$
7.	$\iint_S (5x - 8y - z)dS$	$P:$	$2x - 3y + z = 6$
8.	$\iint_S (3y - x - z)dS$	$P:$	$x - y + z = 2$
9.	$\iint_S (3y - 2x - 2z)dS$	$P:$	$2x - y - 2z = -2$
10.	$\iint_S (2x - 3y + z)dS$	$P:$	$x + 2y + z = 2$
11.	$\iint_S (5x + y - z)dS$	$P:$	$x + 2y + 2z = 2$

12.	$\iint_S (3x + 2y + 2z) dS$	$P:$	$3x + 2y + 2z = 6$
13.	$\iint_S (2x + 3y - z) dS$	$P:$	$2x + y + z = 2$
14.	$\iint_S (9x + 2y + z) dS$	$P:$	$2x + y + z = 4$
15.	$\iint_S (5x + 8y + 8z) dS$	$P:$	$x + 4y + 2z = 8$
16.	$\iint_S (4y - x + 4z) dS$	$P:$	$x - 2y + 2z = 2$
17.	$\iint_S (7x + y + 2z) dS$	$P:$	$3x - 2y + 2z = 6$
18.	$\iint_S (2x + 3y + z) dS$	$P:$	$2x + 3y + z = 6$
19.	$\iint_S (4x - y + z) dS$	$P:$	$x - y + z = 2$
20.	$\iint_S (6x - y + 8z) dS$	$P:$	$x + y + 2z = 2$
21.	$\iint_S (4x - 4y - z) dS$	$P:$	$x + 2y + 2z = 4$
22.	$\iint_S (2x + 5y + z) dS$	$P:$	$x + y + 2z = 2$
23.	$\iint_S (4x - y + 4z) dS$	$P:$	$2x + 2y + z = 4$
24.	$\iint_S (5x + 2y + 2z) dS$	$P:$	$x + 2y + z = 2$
25.	$\iint_S (2x + 5y + 10z) dS$	$P:$	$2x + y + 3z = 6$
26.	$\iint_S (2x + 15y + z) dS$	$P:$	$x + 2y + 2z = 2$
27.	$\iint_S (3x + 10y - z) dS$	$P:$	$x + 3y + 2z = 6$
28.	$\iint_S (2x + 3y + z) dS$	$P:$	$2x + 2y + z = 2$

29.	$\iint_S (5x - y + 5z) dS$	$P:$	$3x + 2y + z = 6$
30.	$\iint_S (x + 3y + 2z) dS$	$P:$	$2x + y + 2z = 2$

2.3.9 Обчислити поверхневий інтеграл другого роду через нижню сторону поверхні σ , яка обмежена координатними площинами

1.	$\iint_{\sigma} (x^2 - y) dydz$	$\sigma:$	$2x - 3y + z = 1$
2.	$\iint_{\sigma} (y^2 + xz) dydz$	$\sigma:$	$x + 2y - z = 1$
3.	$\iint_{\sigma} (xy + z) dydz$	$\sigma:$	$x + 3y + 2z = 1$
4.	$\iint_{\sigma} (z - 2x + y) dydz$	$\sigma:$	$2x + y - 3z = 1$
5.	$\iint_{\sigma} (z - 3xy) dydz$	$\sigma:$	$x - 3y + z = 1$
6.	$\iint_{\sigma} (xz + y^2) dydz$	$\sigma:$	$x + y + 3z = 1$
7.	$\iint_{\sigma} (z^2 + y) dydz$	$\sigma:$	$y - x + 2z = 1$
8.	$\iint_{\sigma} (y^2 - z^2) dydz$	$\sigma:$	$2y - x + z = 1$
9.	$\iint_{\sigma} (x^2 + xz) dydz$	$\sigma:$	$z - y - x = 1$
10.	$\iint_{\sigma} (xz + 4y) dydz$	$\sigma:$	$-2x - y + 2z = 1$
11.	$\iint_{\sigma} (y^2 - x) dx dz$	$\sigma:$	$3x - y + 2z = 1$
12.	$\iint_{\sigma} (y^2 + x^2) dx dz$	$\sigma:$	$2x - 3y + 2z = 1$
13.	$\iint_{\sigma} (yz + x^2) dx dz$	$\sigma:$	$3y - 2x + z = 1$

14.	$\iint_{\sigma} (x - 2y + z) dx dz$	$\sigma :$	$-2x - 3y + 2z = 1$
15.	$\iint_{\sigma} (x - 3yz) dx dz$	$\sigma :$	$-x - 3y + z = 1$
16.	$\iint_{\sigma} (z - xy) dx dz$	$\sigma :$	$2x - y + 3z = 1$
17.	$\iint_{\sigma} (x^2 - y) dx dz$	$\sigma :$	$x + y - 2z = 1$
18.	$\iint_{\sigma} (x^2 - y^2) dx dz$	$\sigma :$	$2x + 2y + 3z = 1$
19.	$\iint_{\sigma} (z^2 + x) dx dz$	$\sigma :$	$x - 3y - 3z = 1$
20.	$\iint_{\sigma} (yz + x) dx dz$	$\sigma :$	$2x - 2y + 3z = 1$
21.	$\iint_{\sigma} (xy + 2z) dx dy$	$\sigma :$	$x - y + 3z = 1$
22.	$\iint_{\sigma} (2y + 2xz) dx dy$	$\sigma :$	$-3x + 2y - 3z = 1$
23.	$\iint_{\sigma} (2xy - 1) dx dy$	$\sigma :$	$-3x + y + 2z = 1$
24.	$\iint_{\sigma} (x - y + z) dx dy$	$\sigma :$	$2x - 3y - z = 1$
25.	$\iint_{\sigma} (y + 3xz) dx dy$	$\sigma :$	$x + 3y + 4z = 1$
26.	$\iint_{\sigma} (2yz - x) dx dy$	$\sigma :$	$x + y + 2z = 1$
27.	$\iint_{\sigma} (x + yz) dx dy$	$\sigma :$	$2x - 3y + z = 1$
28.	$\iint_{\sigma} (2y + x - z) dx dy$	$\sigma :$	$-x + 2y + 3z = 1$
29.	$\iint_{\sigma} (x + 3y - 1) dx dy$	$\sigma :$	$x + 4y - z = 1$
30.	$\iint_{\sigma} (2y - 3z) dx dz$	$\sigma :$	$y - 4x + 2z = 1$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика [Текст]: Збірник задач: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко; За ред.: В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 478с. : іл. – (Університетська бібліотека). – ISBN 966-539-321-9 : 16.80.
2. Высшая математика. (В 3-х томах) Бугров Я.С., Никольский С.М. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004. – 512с.
3. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 368 с. – ISBN 966-06-0228-6.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2006. – 416 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика: Навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Вид-во А.С.К., 2003. – 648 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике. Учебное пособие в 4 частях. Ч. 3. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля, Ряды / Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юреть И. Е. – Вышэйшая школа. 2013. – 368с.
7. Корнілович Є Ю., Петрусенко В. П., Трофименко В. І. Вища математика. Модуль 7. Кратні, криволінійні інтеграли та елементи теорії поля: Навч. посібник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 148 с.
8. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. — М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001. — 656 с.: ил
9. Овчинников П.П. та ін. Вища математика. Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
10. Пак, В. В. Носенко Ю.Л. Вища математика : Підручник . – Д. : « Видавництво Сталкер», 2003. – 496 с.
11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.2:- М.: Интеграл-Пресс, 2004.

– 544 с..

12. Шипачев В. С. Курс высшей математики /В. С. Шипачев. – М. Оникс, 2009. – 608 с. – ISBN 978-5-488-02067-2.