

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
(для студентів заочної форми навчання)
та РГР (для студентів денної форми навчання)
з вищої математики
(скорочена форма навчання)
(2 семестр, 1 частина)

2016

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт (для студентів заочної форми навчання) та РГР (для студентів денної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання) (2 семестр, 1 частина) / Укл. : Килимник І.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016 –98 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Комп'ютерна верстка

Давиденко С.І.

Відповідальний за випуск:

Килимник І.М., к.т.н., доц.

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики ЗНТУ
Протокол № 7 від 03.02.2016 р.

ЗМІСТ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)	Стор 4
1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА (РГР) № 3. Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь. Ряди	
1.1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі «Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь»	5
1.1.1 Загальні поняття	5
1.1.2 Диференціальні рівняння першого порядку (ДР-1)	6
1.1.3 Диференціальні рівняння вищих порядків	18
1.1.4 Системи диференціальних рівнянь першого порядку. Нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку	37
1.2 Індивідуальні завдання	40
2.1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі «Ряди»	51
2.1.1 Знакододатні числові ряди	51
2.1.2 Знакозмінні числові ряди	60
2.1.3 Степеневі ряди	63
2.1.4 Ряди Фур'є	76
2.2 Індивідуальні завдання	85
3.1 Довідковий матеріал «Таблиця невизначених інтегралів»	96
ЛІТЕРАТУРА	98

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (РГР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати номер контрольної роботи (РГР), назву дисципліни, з якої виконується контрольна робота (РГР), номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.

3. В контрольній роботі (РГР) повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: дві останні цифри шифру треба поділити на 30. Остача від ділення відповідає номеру задачі в завданні.

Якщо остача дорівнює нулю, то студент розв'язує 30 задачу завдання.

5. Контрольна робота (РГР) подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольна робота (РГР), виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА (РГР) № 3

Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь. Ряди.

1.1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі «Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь»

1.1.1 Загальні поняття

Рівняння, яке, крім незалежних змінних і невідомих функцій цих змінних, має в своєму складі і похідні невідомих функцій або їх диференціали, називається диференціальним рівнянням (ДР).

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідомі функції, які входять в нього, залежать від однієї незалежної змінної.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної або диференціала невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння.

Диференціальне рівняння n - го порядку (ДР- n) у неявній формі можна записати: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Явною формою ДР- n є рівняння, розв'язане відносно старшої похідної: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$.

Загальним розв'язком або загальним інтегралом ДР- n є функція, що містить стільки довільних сталих, яким є порядок ДР. Розв'язок ДР- n можна подати у явному вигляді: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ – загальний розв'язок, або неявному вигляді: $\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ – загальний інтеграл.

Кожна функція, яку дістанемо з загального розв'язку при окремих значеннях довільних сталих, називається частинним розв'язком або частинним інтегралом диференціального рівняння. Для визначення довільних сталих необхідно задати стільки умов, скільки є сталих:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \quad (1.1)$$

Числа $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n-1,0}$ називають початковими значеннями, а рівності (1.1) – початковими умовами.

Задача розв'язування диференціального рівняння з заданими початковими умовами називається задачею Коші. Загальний розв'язок ДР – це множина інтегральних ліній. Частинний розв'язок ДР – це одна інтегральна лінія, яка проходить через точку (x_0, y_0) .

1.1.2 Диференціальні рівняння першого порядку (ДР-1)

ДР-1 може бути записано у загальному вигляді $F(x, y, y') = 0$ – неявна форма; розв'язане відносно похідної: $y' = f(x, y)$ – явна форма, де $f(x, y)$ – задана і неперервна функція двох змінних x і y в деякій області на площині; записано у диференціальній формі: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – задані і неперервні функції двох змінних x і y в деякій області на площині. Загальний розв'язок ДР-1 має вигляд:

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad \text{або} \quad y = \varphi(x, C).$$

Задача Коші для ДР-1:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок ДР-1 має вигляд

$$\varphi(x, y, C_0) = 0 \quad \text{або} \quad y = \varphi(x, C_0),$$

де C_0 – дійсне число, визначене з початкової умови.

Розглянемо деякі типи ДР-1.

ДР-1 з відокремлюваними змінними.

Рівняння $y' = f(x, y)$ називається з відокремлюваними змінними, якщо функцію $f(x, y)$ можна зобразити як добуток функцій $P(x)$ та $Q(y)$: $f(x, y) = P(x) \cdot Q(y)$. Маємо рівняння $y' = P(x) \cdot Q(y)$, яке можна записати $\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx \Rightarrow \frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx$.

Візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C$$

Після обчислення інтегралів дістанемо загальний розв'язок ДР-1.

Задача 1. Знайти розв'язок ДР-1

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xy dy = 0$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{(x^2 + 1)}{x} dx = -\frac{y}{y^2 - 1} dy$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x} dx + C = -\int \frac{y dy}{y^2 - 1}$$

Загальний розв'язок

$$\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1|.$$

Задача 2. Знайти розв'язок задачі Коші.

$$2(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 0$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot \frac{1}{2y};$$

$$2ydy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx; \quad \int 2ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx + C$$

$$y^2 = \ln|1 + e^x| + C \quad \text{— загальний розв'язок}$$

Знайдемо C , застосовуючи початкову умову:

$$0 = \ln|1 + e^0| + C \Rightarrow C = -\ln 2$$

$$y^2 = \ln|1 + e^x| - \ln 2$$

$$y^2 = \ln \frac{1 + e^x}{2} \quad \text{— частинний розв'язок.}$$

ДР-1 однорідні

Рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним ДР-1, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто $f(xt, yt) = f(x, y)$. За допомогою підстановки $y = u(x) \cdot x = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$ однорідне ДР-1 зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними.

Задача 3. Знайти розв'язок ДР-1.

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$y' = -\frac{x - y \cos \frac{y}{x}}{x \cos \frac{y}{x}}; \quad y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos \frac{y}{x}}.$$

Маємо $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos \frac{y}{x}}$. Перевіримо однорідність функції $f(x, y)$:

$$f(xt, yt) = \frac{yt}{xt} - \frac{1}{\cos \frac{yt}{xt}} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos \frac{y}{x}} = f(x, y).$$

Задане ДР-1 є однорідним. Зробимо заміну: $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$.

Підставимо її в задане рівняння:

$$u' \cdot x + u = u - \frac{1}{\cos u}; \quad u' \cdot x = -\frac{1}{\cos u}$$

Відокремимо змінні:

$$\cos u \, du = -\frac{dx}{x}; \quad \int \cos u \, du = -\int \frac{dx}{x} + C$$

$$\sin u = -\ln|x| + C, \quad \text{де} \quad u = \frac{y}{x}$$

Маємо загальний розв'язок: $\sin \frac{y}{x} = -\ln|x| + C$.

Задача 4. Знайти частинний розв'язок ДР-1.

$$y' x^2 = x y + y^2 e^{-\frac{x}{y}}, \quad y(1)=1$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot e^{-\frac{x}{y}}, \quad \text{де} \quad f(x, y) = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot e^{-\frac{x}{y}}$$

Перевіримо однорідність функції $f(x, y)$:

$$f(xt, yt) = \frac{yt}{xt} + \left(\frac{yt}{xt}\right)^2 \cdot e^{-\frac{xt}{yt}} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}} = f(x, y).$$

Задане ДР-1 є однорідним. Зробимо заміну: $y = u \cdot x$; $y' = u' \cdot x + u$

$$u' \cdot x + u = u + u^2 e^{-\frac{1}{u}}; \quad u' \cdot x = u^2 e^{-\frac{1}{u}}.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2} du = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C;$$

$$-e^{\frac{1}{u}} = \ln|x| + C, \quad \text{де } u = \frac{y}{x}.$$

Маємо загальний розв'язок: $-e^{-\frac{x}{y}} = \ln|x| + C.$

Знайдемо C , застосовуючи початкову умову:

$$-e^{-1} = \ln 1 + C; \quad C = -e^{-1}.$$

$$-e^{-x/y} = \ln|x| - e^{-1} - \text{частинний розв'язок.}$$

ДР-1 лінійні

Це ДР-1 виду $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x), q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку. Зробимо заміну

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставимо її в рівняння. Воно матиме вигляд:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v p(x) = q(x);$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + v \cdot p(x)) = q(x).$$

Знайдемо такий розв'язок його, щоб $v' + v \cdot p(x) = 0$, тоді $u' \cdot v = q(x)$. Маємо систему двох ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v \cdot p(x) = 0, & (1) \\ u' \cdot v = q(x) & (2) \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння (1), матимемо $v = e^{-\int p(x)dx}$. Підставимо v в рівняння (2) системи:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Розв'яжемо його. Матимемо $u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C$.

Загальний розв'язок лінійного ДР-1 має вигляд:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C \right).$$

Задача 5. Знайти розв'язок ДР-1.

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$$

Розв'язання. Це лінійне ДР-1. Перепишемо його у вигляді:

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2,$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}; \quad q(x) = 1+x^2.$$

Зробимо заміну: $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Маємо

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1+x^2,$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{2xv}{1+x^2} \right) = 1+x^2.$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0, & (1) \\ u'v = 1+x^2 & (2) \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння (1): $\frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2x}{1+x^2} dx$. Інтегруємо

отримане рівняння: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$; $\ln|v| = \ln|1+x^2|$ або

$v = 1+x^2$. Підставимо в рівняння (2) знайдене значення v , матимемо:
 $u'(1+x^2) = 1+x^2 \Rightarrow u' = 1$. Інтегруємо отримане рівняння $\int du = \int dx$
 або $u = x + C$.

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = u \cdot v = (1+x^2)(x+C).$$

Задача 6. Знайти частинний розв'язок ДР-1

$$2ydx - (y^2 - 6x)dy = 0, \quad x(1) = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним відносно x та x' .
 Перепишемо його у вигляді:

$$x' + \frac{3}{y}x = \frac{y}{2},$$

$$p(y) = \frac{3}{y}, \quad q(y) = \frac{y}{2}.$$

Зробимо заміну: $x = u \cdot v$; $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$u'v + uv' + \frac{3}{y}uv = \frac{y}{2};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3}{y}v\right) = \frac{y}{2}.$$

Маємо систему двох ДР-1 із відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v \frac{3}{y} = 0, & (1) \\ u'v = \frac{y}{2}, & (2) \end{cases}$$

Розв'язком рівняння (1) є $v = e^{-\int \frac{3}{y} dy} = e^{-3 \ln|y|} = y^{-3}$. З рівняння (2)

маємо: $u' \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{y}{2}; \quad u' = \frac{y^4}{2}.$

$$\int du = \int \frac{y^4}{2} dy + C \quad \Rightarrow \quad u = 0,1y^5 + C.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $x = u \cdot v = y^{-3}(0,1y^5 + C)$.

Знайдемо C , застосовуючи початкову умову:

$$0 = 1^{-3}(0,1 \cdot 1^5 + C), \quad C = -0,1.$$

$$x = y^{-3}(0,1y^5 - 0,1) - \text{частинний розв'язок.}$$

ДР-1 Бернуллі.

Це ДР-1 виду $y' + p(x)y = q(x)y^n$, де $p(x), q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку, n – дійсне число, відмінне від нуля. Зведемо це рівняння до лінійного ДР-1. Для цього зробимо підстановку:

$$z = y^{-n+1}, \quad z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'$$

Отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{z'}{-n+1} + p(x)z &= q(x) \cdot (-n+1) \\ z' + p(x)(-n+1)z &= q(x) \cdot (-n+1) \end{aligned}$$

Це лінійне ДР-1. Позначимо $p_1(x) = p(x) \cdot (-n+1)$, $q_1(x) = q(x) \cdot (-n+1)$. Зробимо заміну $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u :

$$v = e^{-\int p_1(x) dx}; \quad u = \int q_1(x) e^{\int p_1(x) dx} \cdot dx + C.$$

$$\text{Тоді: } z = e^{-\int p_1(x) dx} \left(\int q_1(x) e^{\int p_1(x) dx} \cdot dx \right) + C.$$

Знайдемо шукану функцію y (загальний розв'язок): $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

Зауваження. Задане рівняння може бути розв'язано за допомогою підстановки $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, аналогічно розв'язуванню лінійного ДР-1.

Задача 7. Знайти розв'язок ДР-1

$$xy' = 3y - 4x^4 y^2.$$

Розв'язання. Це ДР-1 Бернуллі. Запишемо його у вигляді:

$$y' - \frac{3}{x} y = -4x^3 y^2$$

$$p(x) = -\frac{3}{x}, \quad q(x) = -4x^3, \quad n = 2$$

Поділимо рівняння на y^2 і перейдемо до лінійного ДР-1 шляхом підстановки:

$$z = y^{-2+1} = y^{-1}, \quad z' = -y^{-2} \cdot y'$$

Отримаємо рівняння:

$$\frac{z'}{-1} - \frac{3}{x} z = -4x^3 \quad | \cdot (-1)$$

$$z' + \frac{3}{x} z = 4x^3 \text{ — лінійне ДР-1.}$$

$$p_1(x) = \frac{3}{x}; \quad q_1(x) = 4x^3. \text{ Зробимо заміну: } z = u \cdot v; \quad z' = u'v + uv'.$$

$$\text{Знайдемо } v \text{ і } u: v = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln|x|} = x^{-3},$$

$$u = \int 4x^3 e^{\int \frac{3}{x} dx} \cdot dx + C = 4 \int x^3 e^{3 \ln|x|} \cdot dx + C = 4 \int x^3 \cdot x^3 dx + C =$$

$$= 4 \int x^6 dx + c = \frac{4}{7} x^7 + C.$$

Тоді $z = u \cdot v = x^{-3} \left(\frac{4}{7} x^7 + C \right)$. Так як $z = y^{-1}$, матимемо $y = z^{-1}$.

$$y = \left[x^{-3} \left(\frac{4}{7} x^7 + C \right) \right]^{-1} = \frac{x^3}{\frac{4}{7} x^7 + C} \text{ — загальний розв'язок заданого}$$

ДР-1 Бернуллі.

Задача 8. Знайти частинний розв'язок ДР-1.

$$x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy, \quad y(0) = 1$$

Розв'язання. Це ДР-1 Бернуллі відносно функції $x(y)$. Перепишемо його у вигляді

$$x' - \frac{1}{y} x = -y^3 \cdot x^{-1},$$

$$p(y) = -\frac{1}{y}; \quad q(y) = -y^3; \quad n = -1.$$

Поділимо рівняння на x^{-1} і перейдемо до лінійного ДР-1 шляхом підстановки: $z = x^{1+1} = x^2$; $z' = 2x \cdot x'$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{z'}{2} - \frac{1}{y} z = -y^3 \quad | \cdot 2$$

$$z' - \frac{2}{y} z = -2y^3 \text{ — лінійне ДР-1,}$$

$$p_1(y) = -\frac{2}{y}, \quad q_1(y) = -2y^3. \text{ Зробимо заміну } z = u \cdot v, \quad z' = u'v + uv'.$$

Знайдемо v і u :

$$v = e^{-\int \left(-\frac{2}{y} \right) dy} = e^{2 \ln |y|} = y^2,$$

$$\begin{aligned}
 u &= \int (-2y^3) \cdot e^{\int \left(-\frac{2}{y}\right) dy} \cdot dy + C = -2 \int y^3 e^{-2 \ln|y|} dy + C = \\
 &= -2 \int y^3 \cdot y^{-2} dy + C = -2 \int y dy + C = -y^2 + C.
 \end{aligned}$$

Тоді $z = u \cdot v = y^2(-y^2 + C)$. Так як $z = x^2$, то $x = z^{\frac{1}{2}}$.

$x = [y^2(-y^2 + C)]^{\frac{1}{2}} = y\sqrt{C - y^2}$ – загальний розв’язок заданого ДР-1 Бернуллі. Знайдемо C , застосовуючи початкову умову:

$$0 = 1 \cdot \sqrt{C - 1}; \quad C = 1.$$

$x = y\sqrt{1 - y^2}$ – частинний розв’язок заданого ДР-1 Бернуллі.

ДР-1 у повних диференціалах.

ДР-1 виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається ДР-1 у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повний диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто виконується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Тоді $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) = 0$. Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах: $u(x, y) = C$.

Маємо $P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$. Знайдемо

$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – невизначена функція, яка залежить від y . Знаходимо її з умови, що $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Матимемо $\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx + \varphi(y) \right) = Q(x, y)$.

Звідси випливає, що $\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$. Знайдемо

$\varphi(y) = \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy$ і підставимо у вираз для $u(x, y)$. Загальний розв'язок ДР-1 у повних диференціалах має вигляд:

$$\int P(x, y) dx + \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy = C.$$

Зауваження. Загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах можна знайти за однією із двох формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C \quad (1.1)$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C, \quad (1.2)$$

де т. $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$.

Задача 9. Знайти розв'язок ДР-1.

$$(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$$

Розв'язання.

Позначимо

$$P(x, y) = u'_x = x + y,$$

$$Q(x, y) = u'_y = x + 2y. \text{ Перевіримо виконання умови } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}:$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1; \frac{\partial Q}{\partial x} = 1. \text{ Умова виконується. Задане рівняння є рівнянням у}$$

повних диференціалах. Розв'яжемо його застосувавши формулу (1.1). В якості точки $M_0(x_0, y_0)$ візьмемо точку $M_0(0, 0)$. Тоді $P(x, y_0) = P(x, 0) = x + 0 = x$.

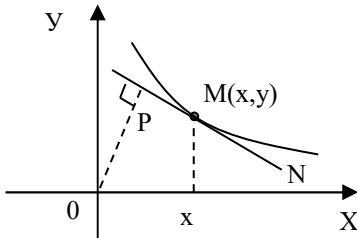
$$\int_0^x x dx + \int_0^y (x + 2y) dy = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} \Big|_0^x + (xy + y^2) \Big|_0^y = C. \text{ Підставимо межі}$$

інтегрування: $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$ – загальний розв’язок ДР-1.

Задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь.

Задача 10. Крива проходить через точку $B(5,0)$. Довжина перпендикуляра, який опущений із початку координат на будь-яку дотичну до кривої, дорівнює абсцисі точки дотику. Знайти рівняння кривої.

Розв’язання.



Нехай $y = f(x)$ – шукане рівняння кривої. Проведемо дотичну MN в довільній точці $M(x,y)$ до кривої. За умовою задачі $|OP| = x$.

Рівняння дотичної

$$Y - y = y'(X - x) \text{ або } y'X - Y - xy' + y = 0.$$

Знайдемо $|OP|$ як відстань від точки $O(0,0)$ до дотичної:

$$|OP| = \frac{|y' \cdot 0 - 0 - xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = \frac{|-xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}}.$$

Маємо диференціальне рівняння

$$\frac{|-xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = x \quad \uparrow \quad 2; \quad \frac{x^2(y')^2 - 2xyy' + y^2}{(y')^2 + 1} = x^2.$$

$$x^2(y')^2 - 2xyy' + y^2 = x^2(y')^2 + x^2.$$

Звідки $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$. Це ДР-1 однорідне. Зробимо заміну

$y = u \cdot x$; $y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = \frac{u^2x^2 - x^2}{2x^2u}; \quad u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}.$$

$$u'x = -\frac{u^2 + 1}{2u} \Rightarrow \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Візьмемо від обох частин рівняння інтеграл

$$\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C \Rightarrow \ln|u^2 + 1| = -\ln|x| + \ln C.$$

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x}, \quad \text{де } u = \frac{y}{x}.$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x} \Rightarrow y^2 + x^2 = Cx.$$

Крива проходить через точку $B(5, 0)$. Маємо $y(5) = 0$. Знайдемо C .

$$0 + 25 = 5C; \quad C = 5.$$

Рівняння шуканої кривої $x^2 + y^2 = 5x$.

1.1.3 Диференціальні рівняння вищих порядків

Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Розглянемо деякі типи цих рівнянь.

1) Диференціальне рівняння $F(x, y', y'') = 0$, яке не містить шукану функцію y .

Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни

$$y' = z(x) = z, \quad y'' = z'.$$

Отримаємо ДР-1: $F(x, z, z') = 0$. Розв'яжемо його відносно функції z . Розв'язок його $z = \varphi(x, C_1)$. Підставимо $z = y'$. Матимемо $y' = \varphi(x, C_1)$ або $dy = \varphi(x, C_1) \cdot dx$. Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Це загальний розв'язок заданого ДР-2.

Задача 11. Знайти частинний розв'язок ДР-2.

$$y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить функцію y . Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни $y' = z$; $y'' = z'$.

Маємо $z'(x^2 + 1) = 2xz$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{dx} \cdot (x^2 + 1) = 2xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{x^2 + 1} + \ln C_1 \Rightarrow \ln|z| = \ln|x^2 + 1| + \ln C_1.$$

$$z = (x^2 + 1)C_1 \Rightarrow y' = (x^2 + 1)C_1.$$

Знайдемо значення сталої C_1 , застосовуючи початкові умови:

$$3 = (0 + 1)C_1 \Rightarrow C_1 = 3.$$

Тоді ДР-1 матиме вигляд: $y' = 3(x^2 + 1)$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його

$$y = 3 \int (x^2 + 1) dx + C_2 = 3 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C_2.$$

Знайдемо значення сталої C_2 , застосовуючи початкові умови:

$$2 = 3 \cdot (0 + 0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Частинний розв'язок заданого ДР-2:

$$y = x^3 + 3x + 2.$$

Задача 12. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y''x \ln x = 2y'.$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить функцію y .

Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни $y' = z$; $y'' = z'$.

Маємо $z'x \ln x = 2z$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x \ln x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 2 \int \frac{dx}{x \ln x} + \ln C_1.$$

$$\ln|z| = 2 \ln|\ln x| + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 \ln^2 x.$$

Так як $z = y'$, матимемо $y' = C_1 \ln^2 x$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$y = C_1 \int \ln^2 x dx + C_2 = \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x; dv = dx \\ du = \frac{2 \ln x}{x} dx; v = x \end{array} \right] =$$

$$= C_1 \left(x \cdot \ln^2 x - \int \frac{2 \ln x dx}{x} \cdot x \right) + C_2 = \left[\begin{array}{l} u = \ln x; dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}; v = x \end{array} \right] =$$

$$= C_1 \left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int x \cdot \frac{dx}{x} \right) + C_2 = C_1 (x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) + C_2$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 має вигляд:

$$y = C_1 (x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) + C_2.$$

2) Диференціальне рівняння $F(y, y', y'') = 0$, яке не містить змінну x .

Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни:

$$y' = p(y) = p, \quad y'' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p.$$

Отримаємо ДР-1: $F(y, p, p'p) = 0$. Розв'яжемо його відносно функції p . Розв'язок його $p = \varphi(y, C_1)$. Підставимо $p = y'$. Матимемо

$$y' = \varphi(y, C_1) \text{ або } \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx. \text{ Інтегруємо обидві частини цього}$$

рівняння:

$$\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Це загальний розв'язок заданого ДР-2.

Задача 13. Знайти частинний розв'язок ДР-2

$$y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x . Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни $y' = p$; $y'' = pp'$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними: $y^3 p \cdot p' = y^4 - 16$. Розв'яжемо його:

$$\begin{aligned} p dp &= \frac{y^4 - 16}{y^3} dy \Rightarrow \int p dp = \int \left(y - \frac{16}{y^3} \right) dy + C_1 \\ \frac{p^2}{2} &= \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1 \cdot 2 \Rightarrow p^2 = y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1; \\ p &= \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1} \Rightarrow y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1}. \end{aligned}$$

Знайдемо значення сталої C_1 , застосовуючи початкові умови:

$$\sqrt{2} = \sqrt{8 + \frac{16}{8} + 2C_1}; \quad \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 + C_1} \Rightarrow C_1 = -4.$$

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними

$$y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} - 8} = \frac{y^2 - 4}{y}. \text{ Розв'яжемо його:}$$

$$\frac{y dy}{y^2 - 4} = dx; \quad \int \frac{y dy}{y^2 - 4} = \int dx + C_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|y^2 - 4| = x + C_2.$$

Знайдемо значення сталої C_2 , застосовуючи початкові умови:

$$\frac{1}{2} \ln|8 - 4| = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \ln 2.$$

Частинний розв'язок заданого ДР-2 має вигляд

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 - 4| = x + \ln 2 \Rightarrow y^2 - 4 = 4e^{2x}.$$

Задача 14. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$(y-1)y'' = (y')^2.$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x . Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни $y' = p$; $y'' = p \cdot p'$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними: $(y-1)p \cdot p' = p^2$. Розв'яжемо його:

$$p((y-1)p' - p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0, & (1) \\ (y-1)p' - p = 0 & (2) \end{cases}$$

З (1) маємо $y' = 0$; $y = C$ – загальний розв'язок ДР-2.

Рівняння (2) є ДР-1 з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв'язок:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y-1} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y-1} + \ln C_1.$$

$$\ln|p| = \ln|y-1| + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1(y-1). \text{ Так як } p = y', \text{ то}$$

$$y' = C_1(y-1) \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = C_1 \int dx + \ln C_2$$

$$\ln|y-1| = C_1 x + \ln C_2 \Rightarrow y-1 = C_2 e^{C_1 x}.$$

$$y = C_2 e^{C_1 x} + 1 \text{ – загальний розв'язок ДР-2.}$$

3) Диференціальне рівняння $F(x, y'') = 0$, яке не містить шукану функцію y та її похідну y' .

Можна знизити порядок ДР, як у випадку 1) або розв'язати ДР відносно y'' , якщо це можливо, і двічі інтегрувати його:

$$y'' = f(x) \Rightarrow y' = \int f(x) dx + C_1$$

$$y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 \text{ – загальний розв'язок ДР-2.}$$

Задача 15. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y'' = x - \ln x$$

Розв'язання. Рівняння розв'язане відносно y'' . Тому

$$y' = \int (x - \ln x) dx + C_1 = \left[\begin{array}{l} u = \ln x; dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}; v = x \end{array} \right] = \int x dx - x \ln x + \\ + \int x \cdot \frac{dx}{x} + C_1 = \frac{x^2}{2} - x \ln x + x + C_1.$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - x \ln x + x + C_1 \right) dx + C_2 = \left[\begin{array}{l} u = \ln x; dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \\ = \frac{1}{2} \int x^2 dx - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} + \int x dx + C_1 \int dx + C_2 = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{3}{4} x^2 + C_1 x + C_2.$$

4) Диференціальне рівняння $F(y', y'') = 0$, яке не містить шукану функцію y та змінну x .

Враховуючи, що у ДР $y'' = (y')'$, можна знизити порядок ДР шляхом заміни: $y' = z$, $y'' = z'$. Матимемо ДР-1 $F(z; z') = 0$. Розв'яжемо його відносно z : $z = f(x) + C_1 \Rightarrow y' = f(x) + C_1$. Інтегруємо це рівняння:

$$y = \int (f(x) + C_1) dx + C_2 \text{ — загальний розв'язок ДР-2.}$$

Задача 16. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y' + 2 = y''.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $y'' = (y')' = \frac{d}{dx}(y')$, зробимо

заміну: $y' = z$; $y'' = z'$. Маємо: $z + 2 = z' \Rightarrow \frac{dz}{z + 2} = dx$. Інтегруємо

це рівняння: $\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + \ln C_1 \Rightarrow \ln|z+2| = x + \ln C_1$.

$$z+2 = C_1 e^x; z = C_1 e^x - 2 \Rightarrow y' = C_1 e^x - 2.$$

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$y = \int (C_1 e^x - 2) dx + C_2 = C_1 e^x - 2x + C_2.$$

$y = C_1 e^x - 2x + C_2$ – загальний розв'язок заданого ДР-2.

5) Для ДР-2 $F(x, y, y', y'') = 0$ необхідно підібрати відповідну заміну (наприклад, $y y' = p$; $(y')^2 = p$; $x y' = p$; $y' = y p$ та інші), яка дозволить знизити порядок диференціального рівняння та розв'язати його. Якщо заміну підібрати складно, то для розв'язування ДР-2 застосовують наближені методи.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР-2, ЛОДР-3, ЛОДР-4 та інші)

Розглянемо ЛОДР-2. Воно має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \text{ де } a_1, a_2 - \text{дійсні числа.}$$

Загальним розв'язком ЛОДР-2 є $y_{одн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки ЛОДР-2, які лінійно незалежні.

Для знаходження загального розв'язку ЛОДР-2, необхідно скласти характеристичне рівняння, замінивши в заданому ДР похідні функції на змінну, степінь якої співпадає з порядком похідної:

$$y'' \sim k^2; y' \sim k; y \sim k^0 = 1.$$

Маємо алгебраїчне рівняння другого степеня: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

Розв'язок його $k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2}$, де дискримінант $D = a_1^2 - 4a_2$.

Можемо мати три випадки:

а) $D > 0 \Rightarrow k_1, k_2$ – дійсні різні корені.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{одн} = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$;

б) $D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k$ – дійсні рівні корені.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{одн} = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$;

в) $D < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-спряжені корені, де

$$\sqrt{-1} = i \text{ – уявна одиниця, } \alpha = \frac{a_1}{2}; \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Аналогічно розв'язуються ЛОДР-3, ЛОДР-4 та інші.

Задача 17. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-2

$$y'' + 4y' - 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 4k - 5 = 0$ і знайдемо його корені: $D = 16 + 4 \cdot 5 = 36$; $\sqrt{D} = 6$.

$$k_1 = \frac{-4 + 6}{2} = 1, \quad k_2 = \frac{-4 - 6}{2} = -5.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2: $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$.

Задача 18. Знайти частинний розв'язок ЛОДР-2

$$y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 2; y'(0) = 6.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0$ і знайдемо його корені: $D = 64 - 4 \cdot 16 = 0$, $k_1 = k_2 = 4$.

Загальний розв'язок ЛОДР-2: $y_{одн} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{4x}$.

Для знаходження частинного розв'язку визначимо сталі C_1 і C_2 , застосовуючи початкові умови.

$$2 = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot e^{4 \cdot 0} \Rightarrow C_1 = 2$$

$$y' = C_2 \cdot e^{4x} + (C_1 + C_2 x) \cdot 4e^{4x}$$

$$6 = C_2 e^{4 \cdot 0} + (2 + C_2 \cdot 0) \cdot 4 \cdot e^{4 \cdot 0} \Rightarrow C_2 = -2$$

Частинний розв'язок ЛОДР-2: $y_{одн, част} = (2 - 2x)e^{4x}$.

Задача 19. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-2

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 5 = 0$

$$D = 16 - 4 \cdot 5 = -4; \sqrt{D} = 2i$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i, \alpha = -2; \beta = 1.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2: $y_{одн} = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Задача 20. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-5

$$y^{IV} + 8y'' = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^5 + 8k^2 = 0$.

$$k^2 \cdot (k^3 + 8) = 0 \Rightarrow k^2 \cdot (k + 2) \cdot (k^2 - 2k + 4) = 0.$$

$$k_{1,2} = 0, k_3 = -2; k^2 - 2k + 4 = 0 \Rightarrow D = 4 - 4 \cdot 4 = -12, \sqrt{D} = 2\sqrt{3}i$$

$$k_{4,5} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i, \alpha = 1; \beta = \sqrt{3}.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-5:

$$y_{одн} = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + e^x(C_4 \cos \sqrt{3}x + C_5 \sin \sqrt{3}x).$$

Задача 21. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-4

$$y^{IV} - 16y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^4 - 16 = 0$.

$$\text{Маємо } k^4 = 16 \Rightarrow k^2 = 4, k^2 = -4 \text{ і } k_{1,2} = \pm 2, k_{3,4} = \pm 2i.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-4:

$$y_{одн} = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами (ЛНДР-2).

Рівняння має вигляд: $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, де a_1, a_2 – дійсні числа, $f(x)$ – функція змінної x .

Загальний розв'язок цього рівняння складається із суми загального розв'язку відповідного ЛОДР-2 та частинного розв'язку ЛНДР-2: $y = y_{одн} + \bar{y}$, де $y_{одн}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2, $\bar{y}$ – частинний розв'язок ЛНДР-2. Знаходження загального розв'язку ЛОДР-2 розглянуто вище. Якщо функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо окремі випадки вигляду функції $f(x)$.

1) $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня.

Частинний розв'язок $\bar{y}$ шукаємо у вигляді $\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^S$, де α – відповідає значенню α з функції $f(x)$; $Q_n(x)$ – многочлен такого ж степеня що і $P_n(x)$, але записаний в загальному вигляді:

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

де $b_i (i = 0, 1, \dots, n)$ – невідомі коефіцієнти; S – дорівнює числу збігів α з коренями k_i характеристичного рівняння для ЛОДР-2.

Знаходимо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ і підставляємо $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в задане ЛНДР-2.

Скорочуємо отримане рівняння на $e^{\alpha x}$ при наявності. В лівій частині рівняння матимемо многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами, а в правій частині – многочлен степеня n з відомими коефіцієнтами. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів b_i .

Задача 22. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x}(x + 4)$$

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд: $y = y_{\text{одн}} + \bar{y}$.
Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - y' - 6y = 0$.
Характеристичне рівняння для нього: $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$.
Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = e^{-2x}(x + 4)$, де $\alpha = -2$ і $n = 1$. Тому $Q_1(x) = Ax + B$, $S = 1$, так як $k_1 = \alpha$.
Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = e^{-2x} \cdot (Ax + B) \cdot x = e^{-2x} \cdot (Ax^2 + Bx). \text{ Знайдемо } \bar{y}', \bar{y}'':$$

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (Ax^2 + Bx) + e^{-2x} \cdot (2Ax + B) = \\ &= e^{-2x} \cdot (-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'' &= e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B) + e^{-2x} \cdot (-4Ax - 2B + 2A) = \\ &= e^{-2x} (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A). \end{aligned}$$

Підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} e^{-2x} \cdot (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A) - e^{-2x} \cdot (-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B) - \\ - 6e^{-2x} (Ax^2 + Bx) = e^{-2x}(x + 4) \quad | \div e^{-2x} \end{aligned}$$

$$4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A + 2Ax^2 + 2Bx - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx = x + 4$$

Приведемо подібні: $-10Ax - 5B + 2A = x + 4$. Маємо рівність двох многочленів. Можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x :

$$\begin{matrix} x \\ x^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -10A = 1 \\ -5B + 2A = 4 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} A = -0,1 \\ B = -0,84 \end{cases}$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2: $\bar{y} = e^{-2x}(-0,1x^2 - 0,84x)$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + e^{-2x}(-0,1x^2 - 0,84x).$$

Задача 23. Знайти частинний розв'язок ЛНДР-2.

$$y'' - 3y' + 2y = 36e^{-x}, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд: $y = y_{одн} + \bar{y}$

Знайдемо $y_{одн}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння для нього: $k^2 - 3k + 2 = 0$, $k_1 = 1$; $k_2 = 2$.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = 36e^{-x}$, де $\alpha = -1$, $n = 0$, $S = 0(\alpha \neq k_1; \alpha \neq k_2)$. Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2

шукатимемо у вигляді: $\bar{y} = Ae^{-x}$. Знайдемо $\bar{y}', \bar{y}'': \bar{y}' = -Ae^{-x}$, $\bar{y}'' = Ae^{-x}$. Підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 36e^{-x} \quad | \div e^{-x}$$

$$6A = 36 \quad \Rightarrow \quad A = 6.$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2: $\bar{y} = 6e^{-x}$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2 має вигляд: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 6e^{-x}$.

Знайдемо частинний розв'язок ЛНДР-2. Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2 :

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 6e^{-x}$$

$$\begin{cases} 8 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 6e^0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2 \\ 2 = C_1 e^0 + 2C_2 e^0 - 6e^0 \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 6 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок заданого ЛНДР-2: $y_{\text{част}} = -4e^x + 6e^{2x} + 6e^{-x}$.

Задача 24. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд $y = y_{одн} + \bar{y}$. Знайдемо $y_{одн}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' + 2y' = 0$.

Характеристичне рівняння для нього: $k^2 + 2k = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 0$.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{одн} = C_1 e^{-2x} + C_2$.

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$, де $\alpha = 0$ і $n = 2$. Тому $Q_1(x) = Ax^2 + Bx + C$, $S = 1$, так як $k_2 = \alpha$.

Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$:

$$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B.$$

Підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$6Ax + 2B + 2 \cdot (3Ax^2 + 2Bx + C) = 6x^2 + 2x + 1.$$

Приведемо подібні: $6Ax^2 + x \cdot (6A + 4B) + 2B + 2C = 6x^2 + 2x + 1$.

Маємо рівність двох многочленів. Можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 6A = 6 \\ 6A + 4B = 2 \\ 2B + 2C = 1 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1,5 \end{array} \right.$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2: $\bar{y} = x^3 - x^2 + 1,5x$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + x^3 - x^2 + 1,5x$.

2) $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$, де α, β – дійсні числа; $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени одного степеня, вони можуть бути і сталими числами, а один із них навіть нулем.

Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (S_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x) \cdot x^S,$$

де $\alpha i \beta$ – відповідають значенням $\alpha i \beta$ з функції $f(x)$; $S_n(x)$ і $R_n(x)$ – многочлени однакового степеня рівного степеню многочленів $P_n(x)$ і $Q_n(x)$, але записані в загальному вигляді; S – дорівнює числу збігів $\alpha \pm \beta i$ з коренями k_i характеристичного рівняння для ЛОДР-2 (збіг може бути, якщо k_i комплексні числа, при цьому рівні їх дійсні і уявні частини).

Зауваження. Вигляд $\bar{y}$ зберігається незалежно від того, дорівнює чи не дорівнює тотожно нулю один з многочленів функції $f(x)$.

Знаходимо $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}$ і підставляємо $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \frac{y'''}{y}$ в задане ЛНДР-2. Прирівнявши коефіцієнти при $\sin \beta x$ і $\cos \beta x$ в лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $S_n(x)$ та $R_n(x)$.

Задача 25. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' - 4y' + 53y = 200 \cos 7x.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд $y = y_{одн} + \bar{y}$. Знайдемо $y_{одн}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - 4y' + 53y = 0$.

Характеристичне рівняння для нього: $k^2 - 4k + 53 = 0 \Rightarrow$

$$D = 16 - 4 \cdot 53 = 16 - 212 = -196; \quad k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-196}}{2} = 2 \pm 7i.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн} = e^{2x} (C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x).$$

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = 200 \cos 7x$, де $\alpha = 0$, $\beta = 7$; $n = 0$ ($P_0(x) = 2$; $Q_0(x) = 0$); $S = 0$ ($\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$, так як $\alpha \pm \beta i = \pm 7i$, а $k_{1,2} = 2 \pm 7i$). Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2

шукатимемо у вигляді: $\bar{y} = A \cos 7x + B \sin 7x$. Знайдемо $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}$:
 $\frac{y'}{y} = -7A \sin 7x + 7B \cos 7x$, $\frac{y''}{y} = -49A \cos 7x - 49B \sin 7x$.

Підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$-49A \cos 7x - 49B \sin 7x - 4(-7A \sin 7x + 7B \cos 7x) + 53(A \cos 7x + B \sin 7x) = 2 \cos 7x.$$

Розкриємо дужки:

$$-49A \cos 7x - 49B \sin 7x + 28A \sin 7x - 28B \cos 7x + 53A \cos 7x + 53B \sin 7x = 200 \cos 7x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 7x$ і $\sin 7x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння:

$$\begin{cases} \cos 7x & 4A - 28B = 200 \\ \sin 7x & 4B + 28A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -7 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2: $\bar{y} = \cos 7x - 7 \sin 7x$.

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x) + \cos 7x - 7 \sin 7x.$$

Задача 26. Знайти частинний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд: $y = y_{одн} + \bar{y}$.

Знайдемо $y_{одн}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - 2y' + y = 0$.

Характеристичне рівняння для нього: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{одн} = (C_1 + C_2 x)e^x$.

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$, де $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $n = 0$ ($P_0(x) = -12$, $Q_0(x) = -9$); $S = 0$, ($\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$ так як $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$, а $k_{1,2} = 1$). Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукаємо

у вигляді: $\bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x$. Знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$:

$$\bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad \bar{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) +$$

$$+ A \cos 2x + B \sin 2x = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x.$$

Розкриємо дужки

$$\begin{aligned} -4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4A \sin 2x - 4B \cos 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = \\ = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x. \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$ у лівій і правій частинах:

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \right| \begin{array}{l} -3A - 4B = -12 \\ -3B + 4A = -9 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 3 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2: $\bar{y} = 3 \sin 2x$.

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + 3 \sin 2x.$$

Знайдемо частинний розв'язок ЛНДР-2. Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2 :

$$\begin{aligned} y' &= C_2 e^x + (C_1 + C_2 x) e^x + 6 \cos 2x \\ \begin{cases} -2 = (C_1 + C_2 \cdot 0) e^0 + 3 \sin(2 \cdot 0) \\ 0 = C_2 \cdot e^0 + (-2 + C_2 \cdot 0) e^0 + 6 \cdot \cos(2 \cdot 0) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Частинний розв'язок заданого ЛНДР-2:

$$y_{\text{част}} = (-2 - 4x) e^x + 3 \sin 2x$$

3) Якщо функція в правій частині ЛНДР-2 є сумою скінченної кількості функцій, кожна з яких відповідає випадкам 1) або 2), наприклад, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді: $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, де $\bar{y}_i$ є частинним розв'язком ЛНДР-2 з функціями $f_i(x)$ у правій частині рівнянь ($i = 1, 2$).

Задача 27. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 75 \sin 3x.$$

Розв'язання. В правій частині рівняння $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = 12x^2 - 2x$ і $f_2(x) = 75 \sin 3x$, які відповідають випадкам: 1) – функція $f_1(x)$ і 2) – функція $f_2(x)$. Загальний розв'язок ЛНДР-2:

$y = y_{одн} + \bar{y}$, де $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$. Знайдемо $y_{одн}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' + 4y' = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -4$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{одн} = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

Знайдемо частинні розв'язки $\bar{y}_1$ і $\bar{y}_2$.

а) для функції $f_1(x) = 12x^2 - 2x$ маємо $\alpha = 0, n = 2, S = 1$, так як $\alpha = k_1$. Частинний розв'язок $\bar{y}_1$ ЛНДР-2 шукаємо у вигляді: $\bar{y}_1 = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Знайдемо $\bar{y}_1', \bar{y}_1''$: $\bar{y}_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \bar{y}_1'' = 6Ax + 2B$. Підставимо $\bar{y}_1, \bar{y}_1', \bar{y}_1''$ в задане ЛНДР-2 з правою частиною $f_1(x) = 12x^2 - 2x$. Отримаємо рівняння: $6Ax + 2B + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 2x$. Приведемо подібні: $6Ax + 2B + 12Ax^2 + 8Bx + 4C = 12x^2 - 2x$. Маємо рівність двох многочленів. Можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x :

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 12A = 12 \\ 6A + 8B = -2 \\ 2B + 4C = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0,5 \end{array} \right.$$

Частинний розв'язок $\bar{y}_1$ ЛНДР-2: $\bar{y}_1 = x^3 - x^2 + 0,5x$.

б) для функції $f_2(x) = 75 \sin 3x$ маємо $\alpha = 0, \beta = 3, n = 0, S = 0$ ($\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$, так як $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$, а $k_1 = 0, k_2 = -4$). Частинний розв'язок $\bar{y}_2$ ЛНДР-2 шукаємо у вигляді: $\bar{y}_2 = A \cos 3x + B \sin 3x$.

Знайдемо $\bar{y}_2', \bar{y}_2''$: $\bar{y}_2' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x,$

$\bar{y}_2'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$. Підставимо $\bar{y}_2, \bar{y}_2', \bar{y}_2''$ в задане ЛНДР-2 з правою частиною $f_2(x) = 75 \sin 3x$. Отримаємо рівняння:

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x + 4(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) = 75 \sin 3x.$$

Розкриємо дужки

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x - 12A \sin 3x + 12B \cos 3x = 75 \sin 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 7x$ і $\sin 7x$ у лівій і правій частинах:

$$\left. \begin{array}{l} \cos 7x \\ \sin 7x \end{array} \right| \begin{array}{l} -9A + 12B = 0 \\ -12A - 9B = 75 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = -3 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок $\bar{y}_2$ ЛНДР-2: $\bar{y}_2 = -4 \cos 3x - 3 \sin 3x$.

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^{-4x} + x^3 - x^2 + 0,5x - 4 \cos 3x - 3 \sin 3x.$$

4) Якщо функція $f(x)$ в правій частині ЛНДР-2 не відповідає випадках 1) – 3), то для знаходження загального розв'язку ЛНДР-2 застосовують метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Він полягає у наступному:

а) знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2:

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \text{ де } C_1, C_2 - \text{const}$$

Загальний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \text{ де } C_1(x), C_2(x) - \text{невідомі функції.}$$

б) Складаємо систему рівнянь відносно похідних функцій $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Визначник системи

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Це визначник Вронського для фундаментальної системи часткових рішень $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ЛОДР-2. Тоді система рівнянь має єдиний

розв'язок: $C_1'(x) = \varphi_1(x)$; $C_2'(x) = \varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – деякі функції від змінної x . Тоді інтегруючи отримані розв'язки, матимемо:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1 \text{ і } C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2.$$

Загальний розв'язок ЛНДР-2 матиме вигляд:

$$y(x) = \left(\int \varphi_1(x) dx + C_1 \right) \cdot y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x) dx + C_2 \right) \cdot y_2(x).$$

Зауваження. Метод Лагранжа можна використовувати і у випадках 1) – 3).

Задача 28. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ в правій частині не

належить до розглянутих випадків 1) – 3). Розв'яжемо це рівняння методом Лагранжа. Знайдемо загальний розв'язок ЛОДР-2:

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

Характеристичне рівняння для нього: $k^2 - 10k + 25 = 0$, $k_{1,2} = 5$.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн} = (C_1 + C_2 x) e^{5x} = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$$

Загальний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x) \cdot e^{5x} + C_2(x) \cdot x \cdot e^{5x}.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему двох рівнянь відносно похідних цих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{5x} + C_2'(x) \cdot x \cdot e^{5x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 5 \cdot e^{5x} + C_2'(x) \cdot (e^{5x} + x \cdot 5 \cdot e^{5x}) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}} \end{cases}$$

Скоротимо обидва рівняння на e^{5x} . Матимемо

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0 \\ 5C_1'(x) + C_2'(x) \cdot (1 + 5x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \end{cases}$$

Розв'яжемо систему відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Інтегруємо отримані розв'язки $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-4}} = -\sqrt{x^2-4} + \bar{C}_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 4} \right| + \bar{C}_2$$

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = \left(-\sqrt{x^2 - 4} + \overline{C}_1\right) \cdot e^{5x} + \left(\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + \overline{C}_2\right) \cdot x \cdot e^{5x}.$$

1.1.4 Системи диференціальних рівнянь першого порядку. Нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку.

Сукупність співвідношень

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x,y_1,...,y_n,y'_1,...,y'_n)=0; \\ F_2(x,y_1,...,y_n,y'_1,...,y'_n)=0; \\ \\ F_n(x,y_1,...,y_n,y'_1,...,y'_n)=0, \end{array} \right.$$

де x – незалежна змінна; $y_1, y_2, \dots, y_n$ – невідомі функції від змінної x , а $F_1, F_2, \dots, F_n$ – відомі функції, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку. Розв’язком цієї системи є сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи. Якщо в лівій частині рівнянь системи стоять похідні першого порядку, а в правій частини зовсім не містять похідних, то така система називається **нормальною**. До неї в багатьох випадках зводяться системи і рівняння вищих порядків.

Можливий і зворотній перехід: нормальну систему ДР можна замінити одним ДР, порядок якого дорівнює числу рівнянь системи, а саме: систему n диференціальних рівнянь першого порядку, які містять n невідомих функцій, зводять до диференціального рівняння n -го порядку з однією невідомою функцією. Розглянемо розв'язування системи двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами на прикладі.

Задача 29. Розв'язати систему ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = x - 5y & (1) \\ y' = -x - 3y & (2) \end{cases}, \text{ де } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Розв'язання.

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t :

$$x'' = x' - 5y'$$

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 5(-x - 3y) \\ x'' &= x' + 5x + 15y \end{aligned} \quad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y : $y = \frac{1}{5}(x - x')$ (4)

і підставляємо в рівняння (3):

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 5x + 15 \cdot \frac{1}{5}(x - x'), \\ x'' &= x' + 5x + 3x - 3x', \\ x'' + 2x' - 8x &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння (5) є ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок:

$$k^2 + 2k - 8 = 0 \Rightarrow k_1 = -4, k_2 = 2.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}$. Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x' = -4C_1 e^{-4t} + 2C_2 e^{2t}$$

$$y = \frac{1}{5} (C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} + 4C_1 e^{-4t} - 2C_2 e^{2t}) = \frac{1}{5} (5C_1 e^{-4t} - C_2 e^{2t}) = C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t}.$$

Розв'язок системи:
$$\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} \\ y = C_1 e^{-4t} - 0,2 C_2 e^{2t} \end{cases}$$

Задача 30. Розв'язати систему ЛНДР-2 із сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t & (1) \\ y' = x + y + t & (2) \end{cases}, \text{ де } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Розв'язання. Виконуємо дії, як у попередньому прикладі:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t :

$$x'' = -3x' - 4y' + 2.$$

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$\begin{aligned} x'' &= -3x' - 4(x + y + t) + 2, \\ x'' &= -3x' - 4x - 4y - 4t + 2. \end{aligned} \quad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y : $y = \frac{1}{4}(2t - 3x - x')$ (4)

і підставляємо в рівняння (3):

$$\begin{aligned} x'' &= -3x' - 4x - 4 \cdot \frac{1}{4}(2t - 3x - x') - 4t + 2, \\ x'' &= -3x' - 4x - 2t + 3x + x' - 4t + 2, \\ x'' + 2x' + x &= -6t + 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння (5) є ЛНДР-2 із сталими коефіцієнтними відносно функції $x(t)$. Загальний розв'язок його $x = x_{одн} + \bar{x}$. Знаходимо розв'язок відповідного ЛОДР-2: $x'' + 2x' + x = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 + 2k + 1 = 0$, $k_{1,2} = -1$. Тоді $x_{одн} = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$. Функція в правій частині $f(t) = -6t + 2 \Rightarrow \alpha = 0, n = 1, S = 0$. Тому

частинний розв'язок $\bar{x}$ шукаємо у вигляді $\bar{x} = At + B$. Знайдемо $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ а саме $\bar{x}' = A; \bar{x}'' = 0$ і $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ підставляємо в ЛНДР-2 (5):

$$\begin{array}{l|l} 2A + At + B = -6t + 2. \\ t & A = -6 \\ t^0 & 2A + B = 2, \quad B = 14 \end{array}$$

Тоді $\bar{x} = -6t + 14$. Загальний розв'язок ЛНДР-2 (5) має вигляд $x = (C_1 + C_2 t) e^{-t} - 6t + 14$. Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x' = C_2 e^{-t} - (C_1 + C_2 t) e^{-t} - 6,$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4} (2t - 3 \cdot (C_1 + C_2 t) e^{-t} + 18t - 42 - C_2 e^{-t} + (C_1 + C_2 t) e^{-t} + 6) = \\ &= \frac{1}{4} (20t - 36 - 2(C_1 + C_2 t) e^{-t} - C_2 e^{-t}) = 0,5(C_1 + C_2 t) e^{-t} - \\ &\quad - 0,25C_2 e^{-t} + 5t - 9. \end{aligned}$$

Розв'язок системи:
$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{-t} - 6t + 14, \\ y = 0,5(C_1 + C_2 t) e^{-t} - 0,25C_2 e^{-t} + 5t - 9. \end{cases}$$

1.2 Індивідуальні завдання

Завдання 1.2.1 Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку

1. а) $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tgy} \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$

б) $\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ в) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$

2. а) $y' \cos^2 x \cdot \operatorname{tgy} + \operatorname{tg} x \sin^2 y = 0 \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$

б) $x(x + 2y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0$ в) $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

3. a) $\ln y dy + xy dx = 0 \quad y(0) = e$
- б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$ Б) $y'x \ln x + y = x^3$
4. a) $y'y - xe^y = 0 \quad y(0) = 0$
- б) $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) =$ Б) $y'x \ln x - y = x^2 \ln^3 x$
- $= y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$
5. a) $y' = \sqrt{(1 - y^2)(1 - x^2)} \quad y(0) = 0$
- б) $x dy = (y + \sqrt{y^2 - 4x^2}) dx$ Б) $y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$
6. a) $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy \quad y(1) = 0$
- б) $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$ Б) $y' - \frac{1}{x} y = x \operatorname{tg} x$
7. a) $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y}} + y' = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
- б) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$ Б) $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x$
8. a) $y^2 dy + ctg x dx = y^3 ctg x dx \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}$
- б) $(xy' - y) ctg \frac{y}{x} = x$ Б) $y' + \frac{y}{x + 2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{2 + x}$
9. a) $x dy = x^2 e^{-y} dx + 2 dy \quad y(3) = 0$
- б) $(2x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$ Б) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$
10. a) $dy - 3x dy - \sqrt{y} dx = 0 \quad y\left(\frac{2}{3}\right) = 0$
- б) $x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2$ Б) $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$

11. a) $2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0 \quad y(1) = 1$
 б) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2) \quad \text{B) } y' - y \operatorname{ctg} x = 2 \sin x$
12. a) $y(2 + e^x)dy = e^x dx \quad y(0) = 0$
 б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y \quad \text{B) } y' - \frac{1}{x}y = x^2$
13. a) $3x^2y(1 + \ln y)dx = dy \quad y(-1) = 1$
 б) $(2x - y)y' = x + 2y \quad \text{B) } y' + y = \ln(e^x + 1)$
14. a) $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)y' = y \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$
 б) $3x^2y' = y^2 + 10xy + 10x^2 \quad \text{B) } y' - \frac{x}{x^2 + 1}y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$
15. a) $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}dy - \sqrt{y}dx = 0 \quad y(0) = 1$
 б) $\left(x + y \cos \frac{y}{x}\right)dx - \left(x \cos \frac{y}{x}dy\right) = 0 \quad \text{B) } y' - 3y = e^{-2x}$
16. a) $(1 - x^2)dy - (2xy^2 + xy)dx = 0 \quad y(0) = -1$
 б) $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg} \frac{2y}{x}} \quad \text{B) } y' + y = 3x$
17. a) $2x^2ydy = (1 + y^2)dx \quad y(1) = 0$
 б) $(3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2 \quad \text{B) } y' - y \operatorname{tg} x = \sin^2 x$
18. a) $x \cos 2y dx - x^2 \sin 2y dy = 0 \quad y(1) = 0$
 б) $xy'(2y + 3x) = 2y^2 + 5xy \quad \text{B) } y' + y \operatorname{ctg} x = 3 \sin^4 x$
19. a) $xy' \ln y - y = 0 \quad y(1) = 1$

- 6) $\frac{xy' - y}{x + y} = \ln \frac{x + y}{x}$ B) $y' - \frac{1}{x}y = x \ln x$
20. a) $(1 - e^x) \sin y \cdot y' = e^x \cos^3 y \quad y(\ln 2) = \frac{\pi}{4}$
- 6) $x dy = \left(x \operatorname{tg} \frac{y}{x} + y \right) dx$ B) $y' + y \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$
21. a) $6x dx - 2x^2 y dy = 2y dy - 3xy^2 dx \quad y(0) = 0$
- 6) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ B) $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin^3 x$
22. a) $xy^2 dx - y dy = x^2 y dy - x dx \quad y(1) = 0$
- 6) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$ B) $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin 2x$
23. a) $(e^x - 5)dy = y^2 e^x dx \quad y(\ln 6) = 1$
- 6) $2xy = y'(3x^2 - y^2)$ B) $(x + 1)y' = 2y + (x + 1)^4$
24. a) $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0 \quad y(0) = 0$
- 6) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$ B) $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$
25. a) $2xy^2 dx - y dy = x^2 y dy - 6x dx \quad y(1) = 1$
- 6) $y'x = 2y \ln \frac{2y}{x}$ B) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
26. a) $ye^{2x} dx + (1 + e^{2x})dy = 0 \quad y(0) = 1$
- 6) $y^3 dy + 3y^2 x dx + 2x^3 dx = 0$ B) $y' + \frac{y}{x + 1} = \sin 2x$
27. a) $3e^x \operatorname{ctg} y dx + (1 - e^x) \frac{dy}{\cos^2 y} = 0 \quad y(\ln 2) = \frac{\pi}{4}$
- 6) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ B) $xy' + y = x \cos x$
28. a) $(1 + y^2)dx = (y + x^2 y)dy \quad y(0) = 0$

29. б) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ в) $y' + \frac{y}{3+x} = \ln(5x)$
 а) $y' = (2y-3)\operatorname{tg}x$ $y(2\pi) = 6$
 б) $xydy - y^2dx = (x+y)^2dx$ в) $y' + \frac{y}{x-1} = \frac{\arcsin x}{1-x}$
30. а) $y \sin x dx + (\cos x - 1)dy = 0$ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
 б) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$ в) $y' \sin x - y = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

Завдання 1.2.2 Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків

1. а) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ г) $y'' + 4y = 16xe^{-2x}$
 б) $y''\operatorname{tg}y = 2(y')^2$ д) $y'' - 6y' + 13y = 75 \sin 2x$
 в) $y''' + y'' = 0$ е) $y'' - 4y' + 5y = \frac{2e^{2x}}{\cos^3 x}$
2. а) $y''\operatorname{ctg}3x = -6y'$ г) $y'' + 2y' = 12x^2 - 6$
 б) $(y')^2 + y \cdot y'' = 0$ д) $y'' - 2y' + y = 25 \cos 2x$
 в) $y^{IV} - 27y' = 0$ е) $y'' + 14y' + 49y = \frac{e^{-7x}}{x^2 - 4x + 3}$
3. а) $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{ctg}x$ г) $y'' + 2y' + y = (4x - 8)e^x$
 б) $y''(2y + 3) = 2(y')^2$ д) $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$
 в) $y''' - 4y'' + 8y' = 0$ е) $y'' + 6y' + 10y = \frac{2e^{-3x}}{\sin 2x}$
4. а) $y''x \ln x = y'$ г) $y'' - 2y' = 24x^2$
 б) $y''\operatorname{ctg}y = -2(y')^2$ д) $4y'' - 4y' + y = -25 \cos x$
 в) $y''' + 2y' = 0$ е) $y'' + 10y' + 25y = \frac{e^{-5x}}{\sqrt{9 - x^2}}$

5. а) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ г) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$
 б) $y'' = y'e^{-y}$ д) $y'' - 6y' + 34y = 60\sin 5x + 18\cos 5x$
 в) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$ е) $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$
6. а) $xy'' - y' = x^2 e^x$ г) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$
 б) $y''(y^2 + 1) = 2(y')^2 \cdot y$ д) $y'' - 4y' + 5y = 8\sin x$
 в) $y^{IV} + 3y''' = 0$ е) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$
7. а) $y'' = -\frac{x}{y'}$ г) $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$
 б) $y''(3y + 2) = 3(y')^2$ д) $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$
 в) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ е) $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{\sqrt{x^2 - 9}}$
8. а) $y'' = y' + x$ г) $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$
 б) $y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$ д) $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$
 в) $y^{IV} + y'' = 0$ е) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\cos^2 x}$
9. а) $y'' - 2y' \operatorname{ctg} 2x = 2 \operatorname{ctg} 2x$ г) $y'' - 2y' = -24x^2$
 б) $y \cdot y'' - (y')^2 = 2$ д) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$
 в) $y''' + 4y'' + 29y' = 0$ е) $y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x} \operatorname{tg} 2x$
10. а) $y'' - y' \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 2x$ г) $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$
 б) $y'' = \frac{1}{(y')^2}$ д) $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$
 в) $y^{IV} - 4y'' + 4y = 0$ е) $y'' - 6y' + 9y = \frac{2e^{3x}}{x^2 - 6x + 10}$
11. а) $x^3 y'' + x^2 y' = \sqrt{x}$ г) $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x - 2$

- 6) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ д) $y'' - 14y' + 49y = 196 \sin 7x$
 в) $y^{IV} + 25y'' = 0$ е) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$
12. а) $(1 + \sin x)y'' = y' \cos x$ г) $y'' - 2y' + 5y = (8x - 4)e^x$
 б) $(y'')^2 = y'$ д) $y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$
 в) $y^{IV} + 4y'' = 0$ е) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$
13. а) $xy'' = y' + x$ г) $y'' + 5y' = 30x^2 - 8x - 2$
 б) $2yy'' = (y')^2 + 1$ д) $4y'' - 12y' + 9y = 225 \sin 3x$
 в) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$ е) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$
14. а) $(1 + x^2)y'' = 2xy'$ г) $9y'' - 6y' + y = 36e^{\frac{1}{3}x}$
 б) $y''(4y - 1) = 4(y')^2$ д) $y'' - 4y' - 5y = 130 \sin 5x$
 в) $y''' + 4y'' + 20y' = 0$ е) $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x} \ln x}{x}$
15. а) $xy'' - x^2 = 3y'$ г) $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x}$
 б) $y \cdot y'' + 1 = (y')^2$ д) $y'' + 2y' + 26y = 629 \cos x$
 в) $y''' + 4y' = 0$ е) $y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x^2 + 6x + 8}$
16. а) $x(y'' + 1) + y' = 0$ г) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$
 б) $y'' = 2yy'$ д) $y'' + 4y' + 13y = 80 \sin 3x$
 в) $y^{IV} + 9y'' = 0$ е) $y'' + y = \sqrt{\frac{2}{\cos 2x}}$
17. а) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ г) $y'' - 4y' - 5y = (8 - 12x)e^{-x}$
 б) $y'' = (y')^2 + 1$ д) $9y'' - 12y' + 4y = 169 \cos x$
 в) $y^{IV} + 4y''' + 29y'' = 0$ е) $y'' + 12y' + 36y = 4e^{-6x} \ln 2x$

18. а) $y'' - \frac{y'}{x+2} = x(x+2)$ г) $y'' - 4y' = 12x^2 - 14x + 2$
 б) $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$ д) $y'' + 10y' + 25y = 50 \sin 5x - 100 \cos 5x$
 в) $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$ е) $y'' - 8y' + 17y = \frac{e^{4x}}{\sin^2 x}$
19. а) $xy'' = y' + x^2$ г) $y'' + y' - 12y = (16x - 26)e^{4x}$
 б) $1 + (y')^2 + yy'' = 0$ д) $9y'' + 6y' + y = -4 \sin x - 22 \cos x$
 в) $y^{IV} - 16y = 0$ е) $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$
20. а) $xy'' - y' = x^2 e^x$ г) $y'' + 12y' + 36y = (144x - 120)e^{6x}$
 б) $2yy'' = (y')^2$ д) $y'' + 2y' = 4 \sin 2x + 12 \cos 2x$
 в) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$ е) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$
21. а) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ г) $y'' - 4y' = 24x + 10$
 б) $y'' = 2 - y$ д) $y'' - 2y' + 17y = 22 \cos x - 46 \sin x$
 в) $y^{IV} - 25y = 0$ е) $y'' + 2y' + y = \frac{2e^{-x}}{x^2 - 4x + 5}$
22. а) $x^2 y'' + (y')^2 = 0$ г) $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x}$
 б) $y'(1 + (y')^2) = 2y''$ д) $y'' + 6y' + 10y = 39 \cos x$
 в) $y^{IV} + y''' = 0$ е) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$
23. а) $y'' + \frac{y'}{x} - x^2 = 0$ г) $y'' - y' - 6y = 15e^{3x}$
 б) $y \cdot y'' = y'(y' - 1)$ д) $y'' - 4y' + 4y = 25 \sin x$
 в) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ е) $y'' + 2y' = 4e^{-6x} \cos e^{-2x}$
24. а) $y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$ г) $y'' - 6y' + 13y = (12x - 25)e^{3x}$
 б) $y^3 y'' = 3$ д) $y'' - 8y' + 16y = 289 \sin x$

- В) $y^{IV} + 5y'' - 6y = 0$ е) $y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$
25. а) $xy'' + 2y' = 0$ г) $2y'' - 3y' = 9x^2 + 1$
 б) $y''(3y - 4) = 3(y')^2$ д) $y'' - 4y' + 5y = 16 \cos x$
 в) $y^{IV} - 8y'' - 9y = 0$ е) $y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x} \operatorname{ctg}^2 2x$
26. а) $xy'' - y' = 3x^2 e^x$ г) $y'' + 6y' + 34y = 75xe^{-3x}$
 б) $y''y^2 = (y')^3$ д) $2y'' + 3y' - 2y = 68 \sin 2x$
 в) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$ е) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$
27. а) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$ г) $y'' + 6y' + 9y = 6xe^{-3x}$
 б) $y'' = 2(y')^2$ д) $y'' + 2y' + 5y = 17 \cos 2x$
 в) $y^{IV} - y = 0$ е) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$
28. а) $y'' + \frac{1}{x}y' = e^x \cdot x$ г) $y'' + 2y' = 48x + 20$
 б) $y'' = 3 - y$ д) $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$
 в) $y^{IV} - 8y' = 0$ е) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \ln x$
29. а) $(1 - x^2)y'' = xy'$ г) $2y'' + 3y' - 2y = 50xe^{\frac{x}{2}}$
 б) $2(y')^2 = (y - 1)y''$ д) $y'' - 2y' + 37y = 34 \sin x - 38 \cos x$
 в) $y^{IV} + 16y'' = 0$ е) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
30. а) $y'' = (2y' + 1) \operatorname{ctg} x$ г) $4y'' + 4y' + y = 24e^{-\frac{x}{2}}$
 б) $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$ д) $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$
 в) $y^{IV} + 4y''' = 0$ е) $y'' + y = \sec x$

Завдання 1.2.3 Розв'язати системи диференціальних рівнянь.

1. а) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -5x + 2y + 40e^t \\ y' = x - 6y + 9e^{-t} \end{cases}$
2. а) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y - \cos t \\ y' = -x + \sin t \end{cases}$
3. а) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 6y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x - y - 5t + 1 \\ y' = x + 2y + t - 1 \end{cases}$
4. а) $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -2x + y - e^{2t} \\ y' = -3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$
5. а) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t \\ y' = 4x + 5y + 1 \end{cases}$
6. а) $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}$
7. а) $\begin{cases} x' = 2x - 9y \\ y' = x + 8y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x - y + 2e^t \\ y' = 3x - 2y + 4e^t \end{cases}$
8. а) $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + y - \cos t \\ y' = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$
9. а) $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}$
10. а) $\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = -7x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$
11. а) $\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x - 8y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = x - e^t \end{cases}$
12. а) $\begin{cases} x' = -5x - 8y \\ y' = -3x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = \sin t - 2x - y \\ y' = \cos t + 4x + 2y \end{cases}$

13. a) $\begin{cases} x' + 4x + 6y = 0 \\ y' + 4x + 2y = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + y - t^2 + t - 2 \\ y' = -2x + 4y + 2t^2 - 4t + 7 \end{cases}$
14. a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -10x - y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' + 3x + 4y = 2t \\ y' - x - y = t \end{cases}$
15. a) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' + 2x + 4y = e^t \\ y' - x - 3y = -t \end{cases}$
16. a) $\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$
17. a) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$
18. a) $\begin{cases} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' - x + y = 0 \\ y' = x + y + e^t \end{cases}$
19. a) $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + te^{2t} \\ y' = 3x - y + e^{3t} \end{cases}$
20. a) $\begin{cases} x' = 3y + 2x \\ y' = 2y - 3x \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - y + 4\cos 2t \\ y' = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t \end{cases}$
21. a) $\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' - x - y + \cos t = 0 \\ y' + 2x + y = \sin t + \cos t \end{cases}$
22. a) $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x + y - 4 \\ y' = x + 2y + 3t - 6 \end{cases}$
23. a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' + 5x + 3y = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -y + t^2 \\ y' = x + e^t \end{cases}$
24. a) $\begin{cases} x' - y = 0 \\ y' - 2x - y = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x - y - \sin t \\ y' = 3x - 2y - \cos t \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{-t} \\ y' = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$
26. а) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2 \cos t \end{cases}$
27. а) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5 \sin t \end{cases}$
28. а) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 2e^{-t} \\ y' = 4x + 5y - 4 \end{cases}$
29. а) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -3x + 2y + 1 + t \\ y' = 2x - 3y - 3 \end{cases}$
30. а) $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t \\ y' = x + y + t \end{cases}$

2.1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі «Ряди»

2.1.1 Знакододатні числові ряди

Вираз виду $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, (2.1)

де $u_n \in R$, $n \in N$, називається *числовим рядом*. Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ називаються членами ряду, $u_n = f(n)$ – n -й член (загальний член) ряду (2.1).

Суми $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ називаються *частинними сумами*, а S_n – n -ою *частинною сумою* ряду (2.1). Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд (2.1)

називається *збіжним*, а число S називається *сумою* ряду. Якщо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує (або нескінченна), то ряд (2.1) називається

розбіжним. Якщо в ряді (2.1) відкинути перші n членів, то одержимо

ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, який називають n -м залишком ряду і позначають R_n . Для збіжності ряду (2.1) необхідно і достатньо, щоб $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Якщо всі члени ряду є додатними, то ряд називається знакододатним.

Розглянемо ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots, \quad (2.4)$$

Ряд (2.2) утворений із членів геометричної прогресії. Він збігається при $|q| < 1$, його сума $S = \frac{a}{1-q}$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

Ряд (2.3) називається *гармонічним рядом*, він розбігається і $S = +\infty$.

Ряд (2.4) називається *узагальненим гармонічним рядом*. Він збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$ (при $\alpha = 1$ маємо ряд (2.3)).

Задача 1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Розв'язання. Це геометрична прогресія з першим членом $a=1$ і знаменником $q = \frac{1}{2}$. Сума n перших членів геометричної прогресії дорівнює

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Знайдемо суму ряду

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = 2.$$

Необхідна умова збіжності ряду

Теорема. Якщо ряд (2,1) збігається, то границя загального члена дорівнює нулю, тобто,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Важливо підкреслити, що ця умова не є достатньою для збіжності ряду.

Наслідок (достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд (2.1) розбіжний. Навіть коли границя загального члена ряду дорівнює нулю, ряд може розбігатись.

Задача 2. Дослідити збіжність числового ряду за необхідною умовою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{3n^3 - n^2 + 1}.$$

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n^3 - n^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Згідно наслідку з теореми ряд є розбіжним.

Задача 3. Дослідити збіжність числового ряду за необхідною умовою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} = [\text{застосуємо правило Лопіталя} :$$

$$\begin{aligned} (\ln(n+1))' &= \frac{1}{n+1}; \left(\sqrt{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Отже, ряд може бути збіжним.

Задача 4. Дослідити збіжність числового ряду за необхідною умовою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n$$

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n = [1^\infty] = [\text{застосуємо другу важливу границю} :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e; \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n = \left(1 + \frac{-2}{2n+3} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{-2}{2n+3} \right)^{\frac{2n+3}{-2}} \right]^{\frac{-2n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{2n+3} \right)^{\frac{2n+3}{-2}} \right]^{\frac{-2n}{2n+3}} = e^{-1} \neq 0.$$

Заданий ряд є розбіжним.

Розглянемо достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.

Ознаки порівняння

Теорема (ознака порівняння). Нехай задано два ряди з невід'ємними членами: а) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ та б) $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ і для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $u_n \leq v_n$. Тоді із збіжності ряду б) випливає збіжність ряду а), а із розбіжності ряду а) випливає розбіжність ряду б).

Теорема (гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами: а) та б) і існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = r$, $0 < r < +\infty$,

то ряди або одночасно збіжні, або розбіжні.

Зауваження. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно знати, які ряди збіжні і які розбіжні.

На практиці найчастіше досліджувані ряди порівнюють або з нескінченно спадною геометричною прогресією:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} \quad \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1 \end{cases},$$

або з узагальненим гармонічним рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання. Відомо, що $n+1 > \ln(n+1)$. Тоді $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ є розбіжним (окремий випадок гармонічного ряду).

Згідно ознаки порівняння заданий ряд є розбіжним.

Задача 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Розв'язання. Відомо, що $\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний (узагальнений гармонічний ряд, $\alpha > 1$). Згідно ознаки порівняння заданий ряд є збіжним.

Задача 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

Розв'язання. Відомо, що $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ ($\operatorname{tg} x \approx x$ при $x \rightarrow 0$). Тому заданий ряд можна порівняти із збіжним рядом (узагальнений гармонічний ряд, $\alpha > 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Використовуючи граничну ознаку порівняння, знаходимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{n}} = 1 > 0.$$

Звідси випливає, що заданий ряд також збіжний.

Ознака Д'Аламбера

Якщо для ряду (2.1) з додатними членами існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D,$$

то при $D < 1$ ряд збіжний, при $D > 1$ ряд розбіжний, при $D = 1$ питання про збіжність ряду потребує додаткових досліджень.

Зауваження. Ознаку Д'Аламбера, як правило, застосовують, якщо загальний член ряду (2.1) містить показникові функції, або факторіал (!), або обидва.

Задача 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{(2n)!}.$$

Розв'язання. Скористаємось ознакою Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{5^n \cdot n!}{(2n)!}, \quad u_{n+1} = \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}.$$

Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{5^n \cdot n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

(В перетворенні виразу, що стоїть під знаком $\lim$ використали те, що $(n+1)! = n!(n+1)$ і $(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)$). Так як $D = 0 < 1$, то заданий ряд є збіжним.

Ознака Коші (радикальна)

Якщо для ряду (2.1) з додатними членами існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K,$$

то при $K < 1$ ряд збіжний, при $K > 1$ розбіжний, при $K = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим і потрібні додаткові дослідження.

Зауваження. Ознаку Коші зручно застосовувати, якщо загальний член ряду складається з множників, степінь яких кратний n .

Задача 9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Розв'язання. Скористаємось радикальною ознакою Коші. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arctg \frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{n}{n+1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Так як $K = \frac{\pi}{4} < 1$, то заданий ряд є збіжним.

Зауваження. Якщо ознака Д'Аламбера (радикальна ознака Коші), дає значення $D = 1$ ($K = 1$), то буває зручно перевірити необхідну умову збіжності ряду.

Задача 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші матимемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Питання про збіжність ряду залишається відкритим ($K = 1$) і потрібні додаткові дослідження. Перевіримо необхідну умову:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1} \neq 0$$

Заданий ряд є розбіжним.

Інтегральна ознака збіжності ряду

Якщо функція $f(x) \geq 0$ неперервна та монотонно спадна на проміжку $[1; +\infty)$, то невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

одночасно збіжні або розбіжні (тут всі члени ряду $u_n = f(n)$).

Зауваження. Твердження справедливе, якщо всі умови виконані на проміжку $[n; +\infty)$.

Задача 11. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(3n)}$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x \ln(3x)}$ (в загальному члені ряду n замінимо на x). Ця функція задовольняє всім умовам інтегральної ознаки: вона додатна, неперервна і не зростає на проміжку $[1; +\infty)$ і $u_n = f(n)$ для $n=1, 2, \dots$.

Знайдемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln(3x)} = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \frac{d \ln(3x)}{\ln(3x)} = \frac{1}{3} \ln \ln(3x) \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{3} (\ln \ln(\infty) - \ln \ln 1) = \infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний, тому заданий ряд розбіжний.

Задача 12. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^3 2n}{1 + 4n^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\arctg^3 2x}{1 + 4x^2}$ (в загальному члені ряду n замінимо на x). Ця функція задовольняє всім умовам інтегральної ознаки: вона додатна, неперервна і не зростає на проміжку $[1; +\infty)$ і $u_n = f(n)$ для $n=1, 2, \dots$.

Знайдемо невласний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\arctg^3 2x}{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \arctg^3 2x d(\arctg 2x) = \frac{1}{2} \frac{\arctg^4 2x}{4} \Big|_1^{\infty} = \\ &= \frac{1}{8} (\arctg^4(\infty) - \arctg^4 1) = \frac{1}{8} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^4 \right) = \frac{15\pi^4}{2048}. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл збіжний, тому заданий ряд збіжний.

Зауваження. Є випадки, коли при з'ясуванні питання про збіжність ряду потрібно застосовувати декілька ознак збіжності рядів.

2.1.2 Знакозмінні числові ряди

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакозмінним, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні члени.

Теорема 1. Знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо ряд, складений з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots + |u_n| + \dots$, (2.5) є збіжним.

Окремим випадком знакозмінного числового ряду є знакопереміжний ряд, знаки членів якого строго чергуються:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad (2.6)$$

де $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$

Цей ряд досліджують на збіжність за *ознакою Лейбніца*.

Теорема 2. (ознака Лейбніца). Якщо в знакопереміжному ряду (2.6) члени такі, що

$$u_k \geq u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq \dots, \text{ де } k \in N, \text{ але не обов'язково } k=1, \text{ і } (2.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (2.8)$$

то ряд (2.6) є збіжним.

Ряд виду (2.6), що задовольняє умовам (2.7) і (2.8), називається рядом Лейбніца.

Враховуючи ці дві теореми, можна запропонувати наступну схему дослідження на збіжність знакопереміжного ряду (2.6): потрібно скласти ряд (2.5) з модулів членів ряду (2.6) і дослідити

знакододатний ряд (2.5) на збіжність по одній з достатніх ознак збіжності для знакододатних числових рядів, викладених вище.

При цьому може виникнути одна із наступних ситуацій:

- а) Якщо ряд (2.5) збігається, то по теоремі 1 ряд (2.6) збігається абсолютно.
- б) Якщо ряд (2.5) розбігається і ознака Лейбніца (теорема 2) не виконується, то ряд (2.6) розбіжний.
- в) Якщо ряд (2.5) розбігається і ознака Лейбніца (теорема 2) виконується, то ряд (2.6) збігається умовно.

Зауваження. 1) З розбіжності ряду (2.5) не впливає розбіжність ряду (2.6): ряд (2.6) при цьому може бути або збіжним умовно (див. п.3 схеми дослідження), або розбіжним (див. п.2 тієї ж схеми). 2) Можна дослідження на збіжність ряду (2.6) починати з перевірки ознака Лейбніца, а при виконанні її перевіряти збіжність ряду (2.5).

Задача 13. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3 - n + 2}.$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - n + 2} \quad (*)$$

Порівняємо ряд (*) із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (узагальнений гармонічний ряд, $\alpha > 1$). Згідно ознаки порівняння ряд (*) також є збіжним. Тоді за теоремою 1 заданий ряд є абсолютно збіжним.

Задача 14. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Розв'язання. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Досліджуємо його на збіжність за інтегральною ознакою збіжності. Функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$. Знайдемо невластний інтеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln(x)}{\sqrt{\ln(x)}} = 2\sqrt{\ln(x)} \Big|_2^{\infty} = 2(\sqrt{\ln(\infty)} - \sqrt{\ln 2}) = \infty$$

Невластний інтеграл розбіжний, тому ряд складений з модулів теж розбіжний.

Перевіримо ознаку Лейбніца. Знайдемо границю загального члену u_n заданого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = 0.$$

Маємо випадок, описаний в п. в) схеми дослідження. Перевіримо, чи буде заданий ряд рядом Лейбніца. Заданий ряд – знакопереміжний, загальний член його прямує до нуля. Крім того, виконана умова (2.7).

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} > \frac{1}{3\sqrt{\ln 3}} > \dots > \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}} > \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}} > \dots$$

Всі умови ознаки Лейбніца виконано. Заданий ряд є умовно збіжний.

Задача 15. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Застосовуючи до цього ряду ознаку Д'Аламбера, матимемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n! \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1) \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n! \cdot \frac{\pi}{2^n}} = \infty.$$

Ряд складений з модулів розбіжний. Так як границя за ознакою Д'Аламбера не існує, то впливає, що $u_{n+1} > u_n$ для $\forall n \in N$, тому для заданого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0.$$

Ознака Лейбніца (теорема 2) не виконується, тому заданий ряд розбіжний.

2.1.3 Степеневі ряди

Функціональним рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2.9)$$

де функції $f_i(x)$ визначені на деякій множині D дійсної вісі.

Множина точок області D , в якій ряд (2.9) збігається, називається областю його збіжності. Якщо взяти довільну точку $x_0 \in D$ і розглянути в ній ряд (2.9), то матимемо числовий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) = f_0(x_0) + f_1(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots, \text{ який може бути як}$$

збіжним, так і розбіжним. Множина всіх точок, в яких ряд (2.9) збігається, називається областю збіжності функціонального ряду.

Окремим випадком функціонального ряду є *степеневий ряд*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_n)^n + \dots \quad (2.10)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots$ – дійсні числа (коефіцієнти ряду). При $x_0 = 0$ матимемо

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, який є частковим випадком ряду (2.10). Область

збіжності степеневому ряду (2.10) завжди є інтервал довжиною $2R$ з центром в точці x_0 . В кожній внутрішній точці цього інтервалу ряд (2.10) є збіжним абсолютно, а в точках, що лежать за ним, ряд є розбіжним. Інтервал збіжності ряду (2.10) має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Число R називається радіусом збіжності степеневому ряду. Радіус збіжності степеневому ряду можна знайти за однією з формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (2.11)$$

при умові, що границі існують.

На кінцях інтервалу збіжності (тобто при $x = x_0 - R$ та при $x = x_0 + R$) питання про збіжність чи розбіжність даного ряду розглядається окремо.

Степеневий ряд можна почленно диференціювати або інтегрувати всередині його інтервалу збіжності.

Задача 16. Знайти область збіжності степеневому ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Розв'язання. Маємо: $x_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{(2n+1)3^n}$. Знайдемо радіус збіжності ряду по одній з формул (2.11):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)3^n}}{\frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n+3)}{2n+1} = 3.$$

Ряд збігається абсолютно в інтервалі:

$$|x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3; \quad -2 < x < 4.$$

З'ясуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності: $x = -2$ і $x = 4$.

а) $x = -2$. Маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2-1)^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}.$$

Отримали знакопереміжний ряд. Ряд, складений з модулів членів

цього ряду, має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. З'ясуємо його збіжність за

граничною ознакою порівняння. Порівняємо його з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$. Робимо висновок,

що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ розбіжний. Всі умови ознаки Лейбніца виконано.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ є умовно збіжний.

б) $x=4$. Маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-1)^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Це знакододатний числовий ряд. Він розбіжний (досліджений в п. а).

Отже, областю збіжності заданого степеневому ряду є $-2 \leq x < 4$.

Задача 17. Знайти область збіжності степеневому ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^n}$$

Розв'язання. Маємо: $x_0=0$, $a_n = \frac{1}{(n+1)^n}$. Знайдемо радіус

збіжності ряду по одній з формул (2.11):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Область збіжності заданого степеневому ряду: $-\infty < x < \infty$.

Задача 18. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n.$$

Розв'язання. Маємо: $x_0 = -1$, $a_n = n!$. Знайдемо радіус збіжності ряду по одній з формул (2.11):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.$$

Область збіжності заданого степеневого ряду: $x = -1$.

Задача 19. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n^2 + 1} x^n.$$

Розв'язання. Маємо: $x_0 = 0$, $a_n = \frac{4^n}{n^2 + 1}$. Знайдемо радіус збіжності ряду по одній з формул (2.11):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n}{n^2 + 1}}{\frac{4^{n-1}}{(n-1)^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{4(n^2 + 1)} = \frac{1}{4}.$$

Ряд збігається абсолютно в інтервалі:

$$|x| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}.$$

З'ясуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності: $x = -\frac{1}{4}$ і

$$x = \frac{1}{4}.$$

а) $x = -\frac{1}{4}$. Маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (-1)^n}{(n^2+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}. \quad \text{Отримали}$$

знакопереміжний ряд. Складаємо ряд з модулів членів цього ряду, який має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Це узагальнений гармонічний ряд

($\alpha > 1$). Він є збіжним. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ є абсолютно збіжний.

б) $x = \frac{1}{4}$. Маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n^2+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}. \quad \text{Це} \quad \text{знакододатний}$$

числовий ряд. Він збіжний (досліджений в п. а).

Отже, областю збіжності заданого степеневому ряду є $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Розкладання функцій в ряд Тейлора

Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і в самій точці x_0 має похідні всіх порядків, то вона може бути представлена формулою Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n$$

де $R_n = \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ – залишковий член формули Тейлора,

$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ називають рядом Тейлора. Для того щоб ряд

Тейлора збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \end{aligned}$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член формули Тейлора $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$.

Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора називають *рядом Маклорена* і тоді

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n.$$

Справедливі такі розклади елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in R$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in R$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in R$$

$$4. \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in R$$

$$5. \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in R$$

$$6. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$7. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad |x| \leq 1$$

$$8. (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \dots, \\ \alpha \in R, |x| < 1$$

$$9. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$10. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$11. \frac{1}{(1 \pm x)^2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots \quad |x| < 1$$

Щоб розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 , необхідно: 1) скласти вирази похідних усіх порядків $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ та обчислити їх значення $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ в точці x_0 ; 2) написати формально відповідний ряд Тейлора; 3) скласти вираз залишкового члена $R_n(x)$ формули Тейлора даної функції та знайти сукупність значень x , при яких виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, тобто знайти область, у якій написаний ряд Тейлора збігається саме до функції $f(x)$. Описана послідовність дій називається способом безпосереднього розкладання функції в степеневий ряд.

Однак на практиці в переважній більшості випадків користуються іншими способами розвинення, що передбачають використання так званих найпростіших розвинень, тотожних перетворень заданої функції і різноманітних штучних прийомів, так як переважна більшість функцій, що зустрічаються у практичних застосуваннях математичного аналізу, подається відповідним рядом Тейлора в усій області збіжності цього ряду. Отже, щоб розвинути функцію в ряд Тейлора в околі деякої точки, необхідно лише написати цей ряд та знайти його область збіжності як звичайного степеневого ряду.

Задача 20. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x) = x^2 \ln(1+x^2)$ за степенями x .

Розв'язання. Так як

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad |x| < 1,$$

то замінімо в цій формулі x на x^2 , матимемо:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} + \dots \quad |x| < 1.$$

Тоді

$$x^2 \ln(1+x^2) = x^4 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^8}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n} + \dots \quad |x| < 1.$$

Задача 21. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ за степенями : а) x , б) $(x-1)$.

Розв'язання. а) Перетворимо функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ так, щоб можна було застосувати формулу:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Маємо
$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{3^{n+1}}.$$

Область збіжності: $\frac{|x|}{3} < 1 \Rightarrow |x| < 3.$

б) Перетворимо функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ так, щоб можна було при розкладанні її в ряд в околі точки $x = 1$ використати розклад функції

$$\frac{1}{1-x}. \text{ Нехай } \frac{1}{x+3} = \frac{m}{1-n(x-1)}, \text{ тоді } 1-n(x-1) = m(x+3).$$

Визначимо звідси m і n . При $x = 1$ маємо $1 = 4m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$. При

$$x = -3 \text{ маємо } 1 + 4n = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}. \text{ Отже, } \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{-4}}.$$

Замінімо в розкладі функції

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

x через $\frac{x-1}{-4}$, матимемо

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{-4} \right)^n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}.$$

Цей розклад має місце, якщо $\left| \frac{x-1}{-4} \right| < 1$, $|x-1| < 4$. Звідси

$-4 < x-1 < 4$, отже, $-3 < x < 5$.

Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів

1) Наближене обчислення значень функції

Для обчислення наближеного значення функції $f(x)$ в її розкладі в степеневий ряд зберігаються перші n членів, а останні члени відкидаються. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення потрібно оцінити суму відкинутих членів. Якщо ряд знакододастний, то ряд складений з відкинутих членів, порівнюють з нескінченно спадною геометричною прогресією. Якщо ряд знакозмінний, члени якого задовольняють ознаку Лейбніца, то використовують оцінку $|R_n(x)| < |u_{n+1}|$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів ряду.

Задача 22. Обчислити $\sqrt{1,004}$ з точністю до 0,00001.

Розв'язання. Використовуючи формулу (8):

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Тут $m = \frac{1}{2}$, $x = 0,004$. Тоді

$$\sqrt{1,004} = 1 + \frac{0,004}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(0,004)^2 + \dots = 1 + 0,002 - \frac{(0,004)^2}{2! \cdot 4} + \dots$$

Зауважимо, що знаки одержаного ряду, починаючи із другого, чергуються. Обмежившись сумою перших двох членів, одержимо

$$\sqrt{1,004} = 1,002.$$

Оцінюючи абсолютну похибку, маємо

$$\Delta < \frac{(0,004)^2}{2! \cdot 4} = 0,000002.$$

Отже, значення кореня знайдено з вказаною точністю.

Задача 23. Обчислити наближено $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 10^{-3} .

Розв'язання. Число 9 запишемо так:

$$9 = 2^3 + 1 = 2^3 \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) = 2^3 \left(1 + \frac{1}{8}\right); \quad \sqrt[3]{9} = 2 \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Використовуючи формулу (8), де $x = \frac{1}{8}$, $m = \frac{1}{3}$, матимемо знакопереміжний ряд, що задовольняє ознаку Лейбніца:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} &= 2 \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 8^3} + \dots\right) = \\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \dots \end{aligned}$$

Так як четвертий член ряду $\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 2! \cdot 8^3} < 10^{-3}$, а похибка не перевищує модуля першого з відкинутих членів, то обмежуємось першими трьома членами ряду.

Отже, $\sqrt[3]{9} = 2 + 0,0833 - 0,0035 = 2,0798 \approx 2,080$.

2) Наближене обчислення визначених інтегралів

Іноді при розв'язанні певних задач буває зручно подавати інтеграл у вигляді степеневому ряду. В першу чергу це стосується випадків, коли первісна не виражається у скінченному вигляді (у таких випадках говорять, що інтеграл “не береться”), але підінтегральна функція може бути розкладена в степеневий ряд. Тоді цей ряд інтегрують почленно на деякому проміжку всередині області збіжності. Цей проміжок – довільний, якщо інтеграл невизначений, і заданий, якщо інтеграл визначений. В першому випадку після застосування формули Ньютона-Лейбніца отримаємо невизначений інтеграл у вигляді степеневому ряду, а у другому випадку – точне значення визначеного інтеграла як суму числового ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Зауваження. Якщо проміжок інтегрування у випадку визначеного інтеграла повністю або частково розташований поза області збіжності степеневому ряду, що подає підінтегральну функцію, то застосування цього способу дуже ускладнене, або взагалі неможливе.

Задача 24. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд:

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots$, підставимо цей вираз замість підінтегральної функції. Матимемо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 2 \cdot 5} - \dots. \text{ Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки} \\ a_1 &= \frac{1}{4} = 0,24 > 0,001; a_2 = \frac{1}{4^3 \cdot 3} = 0,0052 > 0,001; \text{ третій член ряду} \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{1}{4^5 \cdot 2 \cdot 5} = 0,000098 < 0,001, \text{ то з точністю до } 0,001 \text{ маємо:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} = 0,25000 - 0,00521 = 0,24479 \approx 0,2448.$$

3) Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора. Розглянемо задачу знаходження частинного розв'язку $y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Припустимо, що шуканий розв'язок рівняння в околі точки x_0 можна розкласти в ряд

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Треба знайти $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ... Значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою. Значення $y'(x_0)$ знайдемо з заданого рівняння, поклавши в ньому $x = x_0$, $y = y_0$. Значення $y''(x_0)$ знаходимо диференціюванням заданого рівняння, поклавши в ньому $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'(x_0)$ і т.д. (кількість членів розкладу в ряд розв'язку диференціального рівняння задається умовою задачі).

Цей спосіб також застосовують, коли треба знайти наближений частинний розв'язок диференціального рівняння будь-якого порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Зауваження. Формулу загального члену ряду знайти вдається далеко не завжди, отже, й дослідити ряд на збіжність теж не вдається. Однак з загальної теорії відомо, що знайдене розв'язання справедливе в деякому околі точки x_0 . Розглянутий спосіб застосовний також у

випадку, коли треба знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, якщо початкові умови розглядати як довільні сталі.

Задача 25. Знайти чотири перших (відмінних від нуля) члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$, якщо $y(1)=1$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ заданого ДР у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \dots \quad \text{За}$$

умовою $y(1)=1$. З заданого рівняння знаходимо, що $y'(1) = 1 + 1 = 2$. Послідовно диференціюючи задане ДР, знаходимо значення похідних при $x=1$:

$$\begin{aligned} y'' &= 2x + 2yy', & y''(1) &= 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 6, \\ y''' &= 2 + 2y'^2 + 2yy'', & y'''(1) &= 2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 6 = 22. \end{aligned}$$

За умовою задачі ряд має чотири члени, відмінні від нуля. Таким чином, частинний розв'язок рівняння буде

$$y(x) \approx 1 + 2(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{22}{3!}(x-1)^3 + \dots = -1 + 2x + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3$$

Задача 26. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' - 2xy' - y = 0$, що задовольняє умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ заданого ДР у вигляді ряду

Маклорена:
$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad \text{За}$$

умовою $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. З рівняння знаходимо $y''(0) = 0$. Запишемо задане ДР у вигляді: $y'' = 2xy' + y$. Послідовно диференціюючи отримане рівняння, знаходимо значення похідних при $x=0$:

$$\begin{aligned} y''' &= 2y' + 2xy'' + y' = 3y' + 2xy'' & y'''(0) &= 3, \\ y^{(4)} &= 3y'' + 2y''' + 2xy''' = 5y'' + 2xy''' & y^{(4)}(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$y^{(5)} = 5y''' + 2y''' + 2xy^{(4)} = 7y''' + 2xy^{(4)} \quad y^{(5)}(0) = 3 \cdot 7.$$

За умовою задачі ряд має три члени, відмінні від нуля. Таким чином, частинний розв'язок рівняння буде

$$y(x) \approx x + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{3 \cdot 7}{5!}x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{2} + \frac{7}{40}x^5.$$

2.1.4 Ряди Фур'є

Ряд Фур'є для 2π - періодичної функції

Рядом Фур'є функції $f(x)$, яка є періодичною з періодом 2π , на відрізку $[-\pi, +\pi]$ називається тригонометричний ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.12)$$

де a_0, a_n, b_n називаються коефіцієнтами Фур'є і визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Нехай функція $f(x)$, яка визначена для $x \in (-\infty, +\infty)$, має період 2π і розвинена в ряд (2.12) на $[-\pi, +\pi]$. Тоді це розвинення зберігає силу для усіх $x \in (-\infty, +\infty)$, оскільки функції з цього ряду $\sin nx, \cos nx$ визначені для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-\pi, +\pi]$, то її можна довизначити на всю числову вісь, зберігаючи її періодичність.

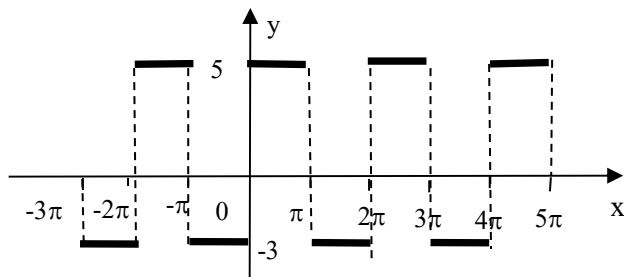
Достатні умови розвинення 2π - періодичної функції в ряд Фур'є визначаються теоремою Діріхле.

Теорема. Якщо періодична функція з періодом 2π на відрізку $[-\pi, +\pi]$ неперервна або має скінчене число розривів першого роду, і якщо відрізок $[-\pi, +\pi]$ можна розбити на скінчене число відрізків так, що всередині кожного з них $f(x)$ монотонна, то ряд Фур'є,

складений для функції $f(x)$, збігається для всіх значень x . При цьому сума одержаного ряду дорівнює значенню функції в точках неперервності функції. В точках розриву функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь зліва і справа.

Задача 27. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x \leq 0 \\ 5, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ з періодом 2π , задану на інтервалі $-\pi < x \leq \pi$.

Розв'язання. Графік даної функції має вигляд:



Задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми про розклад в ряд Фур'є. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-3) dx + \int_0^{\pi} 5 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-3x \Big|_{-\pi}^0 + 5x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (-3\pi + 5\pi) = 2;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-3) \cos nx dx + \int_0^{\pi} 5 \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{3}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{5}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = 0;$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-3) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} 5 \sin nx \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{5}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n} (3 - 3 \cos \pi n - 5 \cos \pi n + 5) = \\
 &= \frac{8}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \frac{8}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{16}{\pi n}, & n = 2k - 1; \\ 0, & n = 2k \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (2.12), дістанемо ряд Фур'є заданої функції:

$$f(x) = 1 + \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x.$$

Сума цього ряду дорівнює значенню функції в будь-якій точці неперервності цієї функції. В точках розриву $x = \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

сума ряду дорівнює $\frac{-3+5}{2} = 1$, тобто дорівнює середньому арифметичному значень даної функції зліва і справа від точки розриву.

Ряди Фур'є для парних і непарних 2π -періодичних функцій

Якщо функція $f(x)$ – парна на відрізку $[-\pi, +\pi]$, тобто $f(-x) = f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (2.13)$$

де $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = 0$, ($n = 1, 2, 3, \dots$).

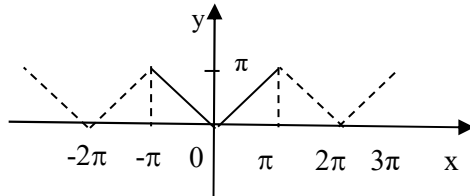
Якщо функція $f(x)$ – непарна на відрізку $[-\pi, +\pi]$, тобто $f(-x) = -f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (2.14)$$

$$\text{де } a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Задача 28. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$ з періодом 2π , задану на $[-\pi, +\pi]$.

Розв'язання. Графік даної функції має вигляд



Задана функція задовольняє умовам теореми про розклад в ряд Фур'є. Вона парна. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$: $b_n = 0$. Визначаємо a_0 і a_n :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos nx \, dx \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (2.13), дістанемо ряд Фур'є заданої функції:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Задана функція неперервна на всій числовій вісі, отже, її сума дорівнює $f(x)$.

Ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції

Рядом Фур'є функції $f(x)$, яка є періодичною з періодом $2l$, на відрітку $[-l, +l]$ називається тригонометричний ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (2.15)$$

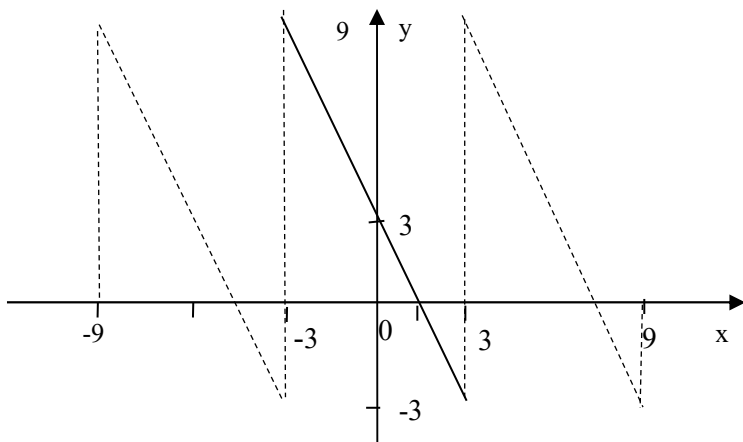
де a_0, a_n, b_n називаються коефіцієнтами Фур'є і визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Задача 29. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = -2x + 3$ з періодом 6, задану на інтервалі $-3 \leq x \leq 3$

Розв'язання. Графік даної функції має вигляд:



Задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми про розклад в ряд Фур'є. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 (-2x + 3x) dx = \frac{1}{3} \left(-x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^3 = \frac{1}{3} (-9 + 9 + 9 + 9) = 6.$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 (-2x + 3) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = -2x + 3, dv = \cos \frac{n\pi x}{3} dx \\ du = -2dx, v = \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left((-2x + 3) \cdot \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-3}^3 + \frac{6}{n\pi} \int_{-3}^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(0 - \frac{18}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = -\frac{6}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 (-2x + 3) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = -2x + 3, dv = \sin \frac{n\pi x}{3} dx \\ du = -2dx, v = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left((-2x + 3) \cdot \frac{-3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-3}^3 - \frac{6}{n\pi} \int_{-3}^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{\pi n} (-3 \cos \pi n - 9 \cos(-\pi n)) - \frac{6}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-3}^3 \right) =$$

$$= \frac{12}{n\pi} \cos n\pi = (-1)^n \cdot \frac{12}{n\pi}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (2.15), дістанемо ряд Фур'є заданої функції:

$$f(x) = 3 - \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

Ряди Фур'є для парних і непарних $2l$ - періодичних функцій

Якщо функція $f(x)$ – парна на відрізку $[-l, +l]$, тобто $f(-x) = f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.16)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Якщо функція $f(x)$ – непарна на відрізку $[-l, +l]$, тобто $f(-x) = -f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

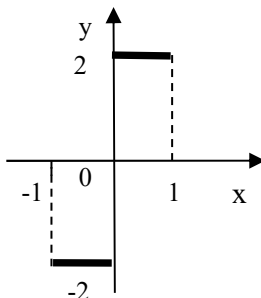
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.17)$$

$$\text{де } a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Задача 30. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Графік даної функції має вигляд:



Задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми про розклад в ряд Фур'є. Вона непарна. Її можна розкласти в ряд Фур'є за формулою

(2.17). Обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$: $l=1$, $a_0=0$ і $a_n=0$. Визначаємо b_n :

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 2 \sin \frac{n\pi x}{1} dx = 4 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = -\frac{4}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = -\frac{4}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n=2k \\ -\frac{8}{n\pi}, & n=2k-1 \end{cases}.$$

Підставивши знайдений коефіцієнт в (2.17), дістанемо ряд Фур'є заданої функції:

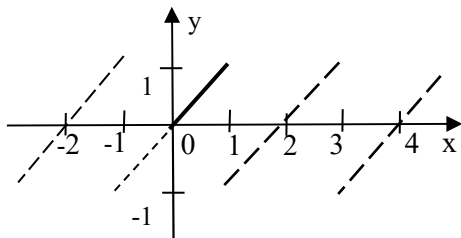
$$f(x) = -\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)\pi x).$$

Розклад в ряд Фур'є функцій, заданих на інтервалі $(0; l]$

Іноді маємо справу з функціями, заданими тільки на інтервалі $0 < x \leq l$. В цьому випадку можна продовжити по деякому закону функцію на інтервал $-l < x \leq 0$, а потім продовжити її на всю числову пряму періодично з періодом $2l$. Продовжити функцію з інтервалу $0 < x \leq l$ на інтервал $-l < x \leq 0$ можна довільним способом. Найчастіше функцію продовжують парним чи непарним способом. Якщо функцію продовжують парним способом, то ряд Фур'є містить тільки косинуси і вільний член. Якщо продовжити непарним способом, то ряд Фур'є містить тільки синуси. Одержані ряди представляють на інтервалі $0 < x \leq l$ задану функцію.

Задача 31. Розкласти в ряд по синусам функцію $f(x) = x$, задану на інтервалі $0 < x \leq 1$.

Розв'язання. Для розкладу функції в ряд по синусам потрібно спочатку її продовжити на інтервал $-1 < x \leq 0$ непарним способом, а потім одержану функцію продовжити періодично на всю числову вісь:



Так як продовжена функція непарна, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x). \text{ Коефіцієнти } a_0 = 0, a_n = 0 \ (n = 1, 2, 3 \dots), \text{ а}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \ dv = \sin(n\pi x) dx \\ du = dx, \ v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \left(-\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \right) =$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi x) \Big|_0^1 \right) = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi = \frac{-2 \cdot (-1)^n}{n\pi} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \ (n = 1, 2, 3 \dots)$$

Підставивши знайдені коефіцієнти b_n , дістанемо ряд Фур'є заданої функції:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x).$$

На інтервалі $0 < x < 1$ сума цього ряду дорівнює x .

2.2 Індивідуальні завдання

Завдання 2.2.1 За допомогою необхідної ознаки збіжності ряду встановити, які ряди напевно розбігаються.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1+9n}{16n+3}}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{1+4n}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{n\sqrt{5}}$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n^2}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{4}{\sqrt{n}}$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt[3]{n}}$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n\sqrt{n}}$$

2.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n^3+5n^2+3}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{1}{n}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+4}{n}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1000}{n} \right)$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+2n^2} \right)^2$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4\sqrt[4]{10}}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}}{n^2+1}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$$

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{1 + 5n}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n^3}$$

$$28. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{n+1}{\ln n}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n}{3^n}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right)$$

Завдання 2.2.2 За допомогою достатніх ознак збіжності рядів (ознаки порівняння, Коші, Д'Аламбера та інтегральної) дослідити збіжність заданих рядів.

$$1. \quad \text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$$

$$\text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\text{г)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

$$\text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}$$

$$\text{г)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

$$3. \quad \text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)^3}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)}{(n+2)!}$$

- 6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$$
4. a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$
5. a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^4}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$
6. a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} \right)^{n^2}$$
7. a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}$$
8. a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+10}}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+2n} \right)^n$$
9. a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-1}{n!}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3-1}}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}$$
- г)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}$$
- г)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n (3+e^{-n})}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{1+n^2}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$$

10. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{2+3n^2} \right)^2$
11. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$
12. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{\frac{n^2}{3}}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n-1) \cdot 3^n}$
13. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+8}{1+3n} \right)^n$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$
14. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)^{3n} \cdot 2^n}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)^{\frac{3}{2}}}$
15. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3}{n^2}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}$
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$
 Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}$
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2) \arctg^3 n}$
 Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
 г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
 Б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$
 г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n (\ln^4 n + 1)}$
 Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n+1)!}$
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$
 Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2+4}}$
 Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n+1)^5}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n \cdot 2^{\frac{n}{2}}}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}$
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+8}{n^4+2n+3}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2+1}\right)^{n^3}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n^3+1}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+3)!}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{5n+5}{5n-4}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}$
19. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^4+2n}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}$
20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3+2n+3}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(3+\frac{4}{n}\right)\right)^{-n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n^2}$
21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n-1}{n^3 \cdot \sqrt{n}}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)!}{(n+3)!}$

22. б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$
- а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}$$
23. б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \right)^n$$
- а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3 + 3}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n\sqrt{2}}{2n+1} \right)^n$$
24. а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2n}{3n^4 + 5}}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{2^n (n+1)^{n^2}}$$
25. а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \sqrt[3]{n+2}}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right)^n$$
26. а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3 + 4}}$$
- б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$
27. а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{4n^3 + 5n}$$
- г)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln^3 n)}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3 + 8}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^3}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n^2}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n}}{n^2 + 1}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2) \operatorname{arctg} n}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(2n-1)!}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{3^n (n+2)}$$
- г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{(1+n) \sqrt{n}}$$
- Б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{10^{3n-1}}$$

28. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{n} \right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^3}}$
- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n+1}$
29. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arccctg^3 n}{1+n^2}$
- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$
30. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cos^2 n}$
- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5^n}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{3n-1}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$

Завдання 2.2.3 Встановити, які знакопереміжні ряди збігаються абсолютно чи умовно або розбігаються

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{3n+5}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^{n-1}}{n \cdot (n+2)}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{n^2+1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$ 11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{\ln n}}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n^2+n+1)^3}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 3^n \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4^n}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{3n+1}}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-5}{5n+10}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n(n+1)}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+2}}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{(n^2+1)\sqrt{n}}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3n}{8n+2} \right)^n$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^{n+2}}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{arctg}(n+1)}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n^4+1}}{n^2+3}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5} \right)^{2n+1}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \sqrt{n+1}}{n^2+3}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(n+2) \cdot \sqrt[3]{n+1}}$$

Завдання 2.2.4 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} \cdot (x-2)^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} (x-1)^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2+2n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot (x-1)^n$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n-1)^2 \cdot 2^n} \cdot (x-2)^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2 \cdot 2^n} \cdot x^n$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+5) \cdot 9^n}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 \cdot 3^{2n+1}}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2 + 2n - 1}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n-3) \cdot (x+4)^n}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n-1) \cdot 3^n}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cdot 3^n}{n \cdot 2^n}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} (x-5)^n$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2) \cdot 3^n}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n-1)^2} \cdot (x-3)^n$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} (x+2)^n$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n \cdot (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n \cdot 2^n}{3n-2}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n-1} \cdot n(n+1)}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(2n-1) \cdot 4^n}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3) \cdot 3^n}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n \cdot n}{(n+1) \cdot 4^n}$$

Завдання 2.2.5 Знайти чотири перших (відмінних від нуля) члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах

1. $y'' = (y')^2 + xy$ $y(0) = 4$ $y'(0) = -2$
2. $y' = 2x + \cos y$ $y(0) = 0$
3. $y'' = xy - y^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$
4. $y' = y + xe^y$ $y(0) = 0$
5. $y' = 2y + x - 1$ $y(0) = 1$
6. $y' = y^3 - x$ $y(0) = 1$
7. $y'' - xy' + y = 2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$
8. $y'' = xy' - x^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$
9. $y' = x + y^{-1}$ $y(0) = 1$
10. $y' = \sin x + 0,5y^2$ $y(0) = 1$
11. $y'' + xy' - y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 1$
12. $y' + xy - y'' = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 2$
13. $y'' = x \sin x + 2^y$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
14. $y'' = x \cos x + y^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
15. $y'' = 2xy + 3y'$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$
16. $y'' = 3x \sin x + y$ $y(0) = -1$ $y'(0) = 0$
17. $y'' = 3y + xy'$ $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$
18. $y' = xe^y + y$ $y(0) = 0$
19. $y' = 3y + x - 2$ $y(0) = 2$
20. $y'' = 2xy' + x^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$
21. $y' = y^2 - xy$ $y(0) = 1$
22. $y' = x \cos 2x - y$ $y(0) = 2$
23. $y'' = x^2y + y^2 - y'$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$
24. $y'' = y'y + x$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$

25. $y' = y \sin 2x - x^2$ $y(0) = 1$
 26. $y'' = y'x - y^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$
 27. $y'' = xe^y - y'$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
 28. $y' = 2x + y^2 - xy$ $y(0) = 3$
 29. $y' = x + y^2$ $y(0) = -1$
 30. $y'' = xy - \sin x \cdot y'$ $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$

Завдання 2.2.6 Розкласти в ряд Фур'є

а) функцію $f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } -\pi < x \leq 0 \\ b, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ з періодом 2π ;

б) функцію $f(x) = cx + d$ задану на інтервалі $-l < x \leq l$;

в) функцію $f(x) = kx + m$ задану на інтервалі $0 < x \leq r$ (в прикладах з непарними номерами по косинусам, в прикладах з парними номерами по синусам).

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1. а) $a = 1, b = 2$; | б) $c = -1, d = 4, l = 3$; | в) $k = 4, m = -3, r = 2$. |
| 2. а) $a = 3, b = -1$; | б) $c = 1, d = 2, l = 2$; | в) $k = -1, m = 3, r = 3$. |
| 3. а) $a = 2, b = -2$; | б) $c = 2, d = -1, l = 4$; | в) $k = 5, m = 1, r = 2$. |
| 4. а) $a = -1, b = 2$; | б) $c = 3, d = 1, l = 5$; | в) $k = 2, m = -5, r = 4$. |
| 5. а) $a = 1, b = 3$; | б) $c = -2, d = 3, l = 3$; | в) $k = 6, m = -3, r = 3$. |
| 6. а) $a = 2, b = 1$; | б) $c = -5, d = 0, l = 4$; | в) $k = 1, m = -2, r = 2$. |
| 7. а) $a = 4, b = -1$; | б) $c = 3, d = -2, l = 6$; | в) $k = -2, m = 3, r = 4$. |
| 8. а) $a = 2, b = 0$; | б) $c = -3, d = 2, l = 2$; | в) $k = 3, m = 7, r = 4$. |
| 9. а) $a = 2, b = 1$; | б) $c = 5, d = -1, l = 4$; | в) $k = -4, m = 5, r = 5$. |
| 10. а) $a = 4, b = -4$; | б) $c = 1, d = 1, l = 4$; | в) $k = -2, m = 3, r = 2$. |
| 11. а) $a = -3, b = 5$; | б) $c = 2, d = -3, l = 6$; | в) $k = 7, m = 2, r = 4$. |
| 12. а) $a = 4, b = 3$; | б) $c = 1, d = 6, l = 2$; | в) $k = -2, m = 5, r = 4$. |
| 13. а) $a = -4, b = 1$; | б) $c = 3, d = -1, l = 5$; | в) $k = -6, m = 2, r = 5$. |
| 14. а) $a = 2, b = 3$; | б) $c = -4, d = 5, l = 6$; | в) $k = 2, m = -5, r = 4$. |
| 15. а) $a = 2, b = -2$; | б) $c = 4, d = -1, l = 3$; | в) $k = 5, m = -12, r = 6$. |

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 16. а) $a = 3, b = 4$; | б) $c = 6, d = -7, l = 3$; | в) $k = -1, m = 2, r = 3$. |
| 17. а) $a = 1, b = -1$; | б) $c = 3, d = -2, l = 4$; | в) $k = -3, m = 0, r = 2$. |
| 18. а) $a = -4, b = 2$; | б) $c = 2, d = -5, l = 6$; | в) $k = 4, m = -6, r = 5$. |
| 19. а) $a = -3, b = 1$; | б) $c = 7, d = 2, l = 3$; | в) $k = 1, m = -9, r = 4$. |
| 20. а) $a = 1, b = 1$; | б) $c = 8, d = 0, l = 4$; | в) $k = -1, m = 7, r = 2$. |
| 21. а) $a = 4, b = -6$; | б) $c = -5, d = 3, l = 3$; | в) $k = 3, m = -5, r = 5$. |
| 22. а) $a = 1, b = 3$; | б) $c = 1, d = 2, l = 4$; | в) $k = -1, m = 2, r = 3$. |
| 23. а) $a = -1, b = 3$; | б) $c = 4, d = 1, l = 4$; | в) $k = 4, m = -2, r = 3$. |
| 24. а) $a = 2, b = 3$; | б) $c = 1, d = -2, l = 2$; | в) $k = -2, m = 7, r = 4$. |
| 25. а) $a = 2, b = 5$; | б) $c = -2, d = 4, l = 3$; | в) $k = 2, m = -5, r = 6$. |
| 26. а) $a = -1, b = 4$; | б) $c = 2, d = -1, l = 4$; | в) $k = 5, m = -4, r = 2$. |
| 27. а) $a = -3, b = 2$; | б) $c = 3, d = -4, l = 6$; | в) $k = -4, m = 9, r = 4$. |
| 28. а) $a = 4, b = 4$; | б) $c = 5, d = 0, l = 4$; | в) $k = 7, m = -6, r = 5$. |
| 29. а) $a = -1, b = 4$; | б) $c = 4, d = -3, l = 5$; | в) $k = -1, m = 4, r = 6$. |
| 30. а) $a = 3, b = -5$; | б) $c = 2, d = 1, l = 6$; | в) $k = -5, m = 3, r = 4$. |

3.1 Довідковий матеріал «Таблиця невизначених інтегралів»

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

- | | |
|---|--|
| 1 $\int du = u + C$ | 2 $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1$ |
| 2a $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$ | 26 $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$ |
| 3 $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | 4 $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ |
| 4a $\int e^u du = e^u + C$ | 5 $\int \sin u du = -\cos u + C$ |

$$6 \quad \int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$8 \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$$

$$10 \quad \int ctg u \, du = \ln|\sin u| + C$$

$$12 \quad \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| tg \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$14 \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$16 \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$18 \quad \int \sqrt{u^2 \pm a^2} \, du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 - u^2} \right| + C$$

$$20 \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$7 \quad \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$$

$$9 \quad \int tg u \, du = -\ln|\cos u| + C$$

$$11 \quad \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| tg \frac{u}{2} \right| + C$$

$$13 \quad \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C$$

$$15 \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$17 \quad \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$19 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1960. – 1977.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Учебник для вузов – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 224 с.
3. Вища математика: Підручник: у 3 кн.: Кн.1 Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу/ М.І.Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. Посібник: у двох книгах. Книга 1/ Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва – К.: Либідь, 1994. – 312 с. Книга 2./ І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Є.Ю. Таран – 280 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Высш. шк., 1980. – 320 с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: “Высшая школа” 1964. – 479 с.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Харьков 1967. – 946 с.
8. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи.// За ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. – М. 1970. – 1986. – Т.1,2.
10. Сборник задач по математике для вузов / Под ред. А.Е. Ефимова, В.П. Демидовича. – М.: Высш. шк., 1978, ч.1,2.
11. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г.И. Кречковича. – М.: Высш. шк., 1973
12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в 3-х частях. Часть 3. // Под ред. А.П. Рябушко. – Минск: «Вышэйшая школа», 1991. – 288 с.