ДВОЕТАПНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З УМОВАМИ НА ПОТРЕБИ СПОЖИВАЧІВ ТА ПРОПУСКНІ СПРОМОЖНОСТІ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ[1]

Стецюк П.І., Хом'як О.М.
stetsyukp@gmail.com
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

A TWO-STAGE TRANSPORTATION PROBLEM WITH CONDITIONS ON CONSUMER NEEDS AND CAPACITIES OF INTERMEDIATE POINTS

Abstract. A mathematical model of a two-stage transportation problem with two-sided constraints on consumer needs and upper bounds on the capacities of intermediate points is proposed. Its partial case is the classic two-stage transportation problem, which determines the most economical plan for the transportation of products from suppliers to consumers through intermediate points. The results of computational experiments using the Gurobi solver for discrete analog of optimal set partitioning model problem are presented.

У статті [1] запропоновано математичну модель двоетапної транспортної задачі з двосторонніми обмеженнями на невідомі потреби

[1] Робота підтримана Volkswagen Foundation (грант № 97775)

споживачів. Нижче доповнимо її можливістю врахування верхніх границь на пропускні спроможності пропускних пунктів. Розглянемо застосування нової моделі для розв'язання модельної задачі оптимального розбиття множини та наведемо результати обчислювальних експериментів з використанням солвера Gurobi.

Формулювання задачі. Нехай в m пунктах постачання $A_1,...,A_m$ є $a_1,...,a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1,...,B_n$. Об'єми потреб споживачів будемо вважати невідомими, а їх нижні межі $b_1^{low},...,b_n^{low}$ та верхні межі $b_1^{up},...,b_n^{up}$ будемо вважати заданими. Транспортувати продукцію від постачальників до споживачів можна через l проміжних пунктів $D_1,...,D_l$, де $d_1^{up},...,d_l^{up}$ задають їх максимальні спроможності. Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j, та відповідні оптимальному плану потреби споживачів.

Нехай $x=\{x_{ik}\}_{i=1,...,m}^{k=1,...,l}$, де x_{ik} – кількість одиниць продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до пункту D_k; $y=\{y_{kj}\}_{k=1,...,l}^{j=1,...,n}$, де y_{kj} – кількість продукції від пункту D_k до споживача B_j; $z=\{z_j\}_{j=1,...,n}$, де z_j – кількість продукції, яка постачається споживачу B_j.

Двоетапна транспортна задача з обмеженнями на потреби споживачів та пропускні спроможності проміжних пунктів має такий вигляд: знайти

$$f_{xyz}^* = f\left(x^*, y^*, z^*\right) = \min_{x,y}\left\{ f\left(x,y,z\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = z_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0,\ k = \overline{1,l}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k^{up},\ k = \overline{1,l} \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{6}$$

$$b_j^{low} \le z_j \le b_j^{up}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$x_{ik} \ge 0,\ y_{kj} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,l},\ j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Задача (1) – (8) є задачею лінійного програмування (ЛП-задача), де цільова функція $f(x,y,z)$ задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до проміжних пунктів та від проміжних пунктів до споживачів. Обмеження (2) означають транспортування $a_1,...,a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) – що споживачам потрібно доставити невідомі об'єми $z_1,...,z_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (4) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам. Обмеження (5) задають верхні межі на пропускні спроможності проміжних пунктів. Їх також можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up},\ k = \overline{1,l}. \tag{9}$$

Обмеження (6) задає умову на те, щоб сумарна продукція постачальників дорівнювала сумарній продукції виробників. Обмеження (7) задає нижні та верхні межі на невідомі потреби споживачів.

Твердження 1. *Система обмежень (2) – (8) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконуються умови*

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \le \sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j^{up}, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{k=1}^{l} d_k^{up} \tag{10}$$

Перша частина умов (10) означає, що обмеження (2) – (5), (6) є лінійно залежними та одну з рівностей в обмеженнях (2) або (4) може

бути вилучено, причому довільну.

Частковий випадок задачі (1) – (9). Якщо $d_k^{up} = \sum_{i=1}^{m} a_i,\ k = \overline{1,l},$ $b_j^{low} = b_j^{up} = b_j,\ j = \overline{1,n},$ то задача (1) – (7) переходить в класичну двоетапну транспортну задачу, яка має такий вигляд: знайти

$$f_{xy}^* = f\left(x^*, y^*\right) = \min_{x,y}\left\{ f\left(x,y\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \tag{11}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0,\ k = \overline{1,l}, \tag{14}$$

$$x_{ik} \geq 0,\ y_{kj} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,l},\ j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Задача (11) – (15) є ЛП-задачею, де цільова функція $f\left(x,y\right)$ задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів. Обмеження (12) гарантують транспортування $a_1,...,a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (13) гарантують, що споживачам буде доставлено необхідні об'єми $b_1,...,b_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (14) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Твердження 2 [2]. *Система обмежень (12) – (15) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{16}$$

Рівність в умові (16) означає, що обмеження (12) – (14) є лінійно залежними, тому одну довільну рівність з обмежень (12), (13) та (14)

може бути вилучено.

Обчислювальний експеримент. Розглянемо застосування задачі (1) – (8) до модельного прикладу задачі оптимального розбиття-розподілу, описаної в статті [3]. Деякий постачальник однорідного ресурсу, неперервно розподілений зі щільністю $\rho(x)=1$ в області $\Omega=\left\{x=\left(x^{(1)},x^{(2)}\right):\ 0\le x^{(1)}\le 1,\ 0\le x^{(2)}\le 1\right\}$, постачає його в п'ять пунктів (першого етапу) для зберігання. Задано координати цих пунктів та координати пунктів (другого етапу) споживання ресурсу, що зберігався в пунктах першого етапу (рис.1.).

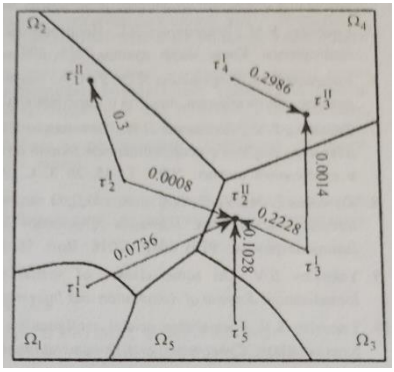


Рис.1 – Модельний приклад задачі оптимального розбиття-розподілу [3].

Потрібно розбити множину Ω постачальників ресурсу на сфери їх обслуговування в п’яти пунктах першого етапу і визначити об'єми перевезень v_{ij}, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,3}$, від пунктів першого етапу в пункти другого етапу так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників в пункти першого етапу і доставки ресурсу в пункти другого етапу.

Модельний приклад можна описати за допомогою задачі (1) – (8), де постачальниками є m ділянок з дискретного розбиття області Ω, споживачами є три пункти другого етапу, а проміжними пунктами – п’ять пунктів першого етапу. Якщо обсяги ресурсу постачальників вибрати пропорційними площам ділянок, то розв’язок задачі (1) – (8) буде відповідати одному з варіантів оптимального розбиття-розподілу множини Ω з точністю до вибраної дискретизації ділянок.

Два оптимальні розбиття множини Ω для квадратної сітки 500×500 наведено на рис. 2. На рис. 2, а представлено оптимальне розбиття множини Ω для $d_k^{up}=\sum_{i=1}^{m}a_i,\ k=\overline{1,l},$ а на рис. 2, б – для $d_k^{up}=0.25\times\sum_{i=1}^{m}a_i,\ k=\overline{1,l}.$ При цьому об'єми споживання у пунктах другого етапу були рівними 0.22896; 0.428868; 0.342172 (рис. 2, а, $f_{xyz}^{*}=0,477676$) та 0.25; 0.5; 0.25 (рис. 2, б, $f_{xyz}^{*}=0,485096$). Для вибраної сітки задачі (1) – (8) мають 1.250.018 змінних та 250.014 лінійних обмежень. Вони розв'язувалися за допомогою солвера Gurobi за декілька секунд на NEOS-сервері.

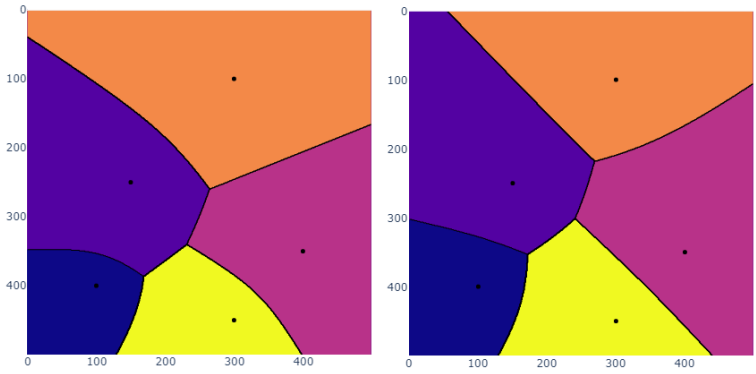


Рис. 2 – Два оптимальні розбиття множини Ω: $0\le b_i\le1,\ i=\overline{1,3}$.

План перевезення v_a відповідає оптимальному розбиттю з рис. 2, а, план перевезення $v_б$ – оптимальному розбиттю з рис. 2, б:

$$v_a=\begin{pmatrix}0.0000 & 0.09066 & 0.0000\\ 0.22896 & 0.0000 & 0.0000\\ 0.0000 & 0.232524 & 0.0000\\ 0.0000 & 0.0000 & 0.342172\\ 0.0000 & 0.105684 & 0.0000\end{pmatrix},\quad v_б=\begin{pmatrix}0.0000 & 0.112212 & 0.0000\\ 0.2500 & 0.0000 & 0.0000\\ 0.0000 & 0.2500 & 0.0000\\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2500\\ 0.0000 & 0.137788 & 0.0000\end{pmatrix}.$$

Висновок. Запропоновано математичну модель двоетапної транспортної задачі з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів та верхніми границями на пропускні спроможності

проміжних пунктів. Її частковим випадком є класична двоетапна транспортна задача, яка визначає найбільш економічний план транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти. Наведено результати обчислювальних експериментів з використанням солвера Gurobi для дискретного аналога модельної задачі оптимального розбиття-розподілу множини з заданими центрами підмножин.

Література

1. Стецюк П.І., Хом’як О.М., Ляшко В.І. Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів. Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. 2022. Т. 5.

2. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. К.:Центр учбової літератури, 2007. 256 с.

3. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. Кибернетика и системный анализ. 2020. № 1. С. 3-15.