

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

До виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни
«Опір матеріалів»

для студентів галузі знань “Механічна інженерія”
заочної форми навчання

Частина I

2019

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів галузі знань “Механічна інженерія” заочної форми навчання. Частина I /Укл.: В.Г. Шевченко, С.Л. Рягін, О.Г. Попович, О.С. Омельченко, Г.Д. Фурсіна, А.А. Скребцов – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка». 2019. – 40 с.

Укладачі: В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н.
С.Л. Рягін, доцент, к.т.н.
О.Г. Попович, доцент, к.т.н.
О.С. Омельченко, ст. викладач
Г.Д. Фурсіна, доцент, к.т.н.
А.А. Скребцов, доцент, к.т.н

Рецензент: П.К. Штанько, доцент, к.т.н

Видання доповнене та перероблене

Відповідальний

за випуск: В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н зав. каф.

Затверджено

на засіданні кафедри “Механіка”

Протокол № 1 від 28 серпня 2019 р.

**Рекомендовано до видання НМК ФБАД як Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів галузі знань “Механічна інженерія” заочної форми навчання. Частина I
Протокол № 1 від 5 вересня 2019 р.**

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	4
ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ №1	5
1. Визначення геометричних характеристик складного поперечного перерізу	5
2. Побудова епюр поздовжніх сил і переміщень при розтяганні східчастого стержня з урахуванням власної ваги	17
ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ №2	24
3. Розрахунки на міцність та жорсткість при крученні вала круглого поперечного перерізу	24
4. Розрахунки на міцність при згинанні прямих балок	32
ЛІТЕРАТУРА	39

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій різних споруд та механізмів [1].

Навчальним планом IV семестру студенту заочнику передбачено виконати дві розрахунково-графічні роботи (РГР). Студент повинен виписати із таблиці, що додається до умови кожної задачі, дані у відповідності зі своїм особистим номером (шифром), який складається з шести останніх цифр його залікової книжки та перших шести літер російського алфавіту.

Наприклад, номер залікової книжки – 02.06.60.014, тоді

- шифр – 6 6 0 0 1 4 → рядки таблиці,
- літери – *a b v z d e* → колонки таблиці.

Із кожної вертикальної колонки таблиці, що позначена відповідною літерою, необхідно виписати тільки одне число, яке стоїть в тому горизонтальному рядку, номер якого співпадає з номером літери.

Наприклад, вертикальні колонки таблиці 1.1 позначені літерами *e*, *z* і *d*. В цьому випадку студент повинен виписати із колонки *e* рядок з номером 4 (IV тип перерізу, рис. 1.1), із колонки *z* – рядок номер 0 (швелер 36) та із колонки *d* – рядок номер 1 (рівнобічний кутник 80×80×8).

Розрахунково-графічну роботу необхідно виконувати в окремому зошиті або на зброшурованих аркушах формату А4.

Перед розв'язанням кожної задачі необхідно виписати її назву та умову задачі з числовими даними, накреслити розрахункову схему або переріз і показати на рисунку або графіку в числах всі величини, необхідні для розрахунку.

Комп'ютерний варіант виконання роботи не допускається.

Роботи, виконані з порушенням цих вказівок, не зараховуються.

Перевірка правильності виконання РГР та її захист здійснюється безпосередньо у викладача під час консультації.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО- ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ №1

1 ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Як відомо, опір елементів конструкцій різним видам деформації часто залежить не тільки від матеріалу та розмірів, а й від обрису осі, форми поперечних перерізів та їх розташування.

Тому, незважаючи на фізико-механічні властивості об'єкту, що вивчається, розглянемо порядок визначення основних геометричних характеристик поперечних перерізів, які визначають опір різним видам деформацій.

1.1 Умова задачі

Для заданого поперечного перерізу необхідно:

- а)* виписати розміри прокатних профілів, з яких складається переріз, із таблиць сортаменту [1, 3] і накреслити його в масштабі 1:2 на аркуші паперу формату А4;
- б)* провести допоміжні осі координат, відносно яких визначити положення центру ваги кожного профілю;
- в)* визначити положення центру ваги заданого перерізу та провести на кресленні центральні осі x_c , y_c ;
- г)* визначити осьові (екваторіальні) і відцентровий момент інерції відносно центральних осей;
- д)* визначити положення головних центральних осей (u , v) і провести їх на кресленні;
- е)* визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;
- ж)* визначити моменти опору заданого перерізу.

Схеми складних перерізів та номери їх профілів наведені на рисунках 1.1 і в таблиці 1.1.

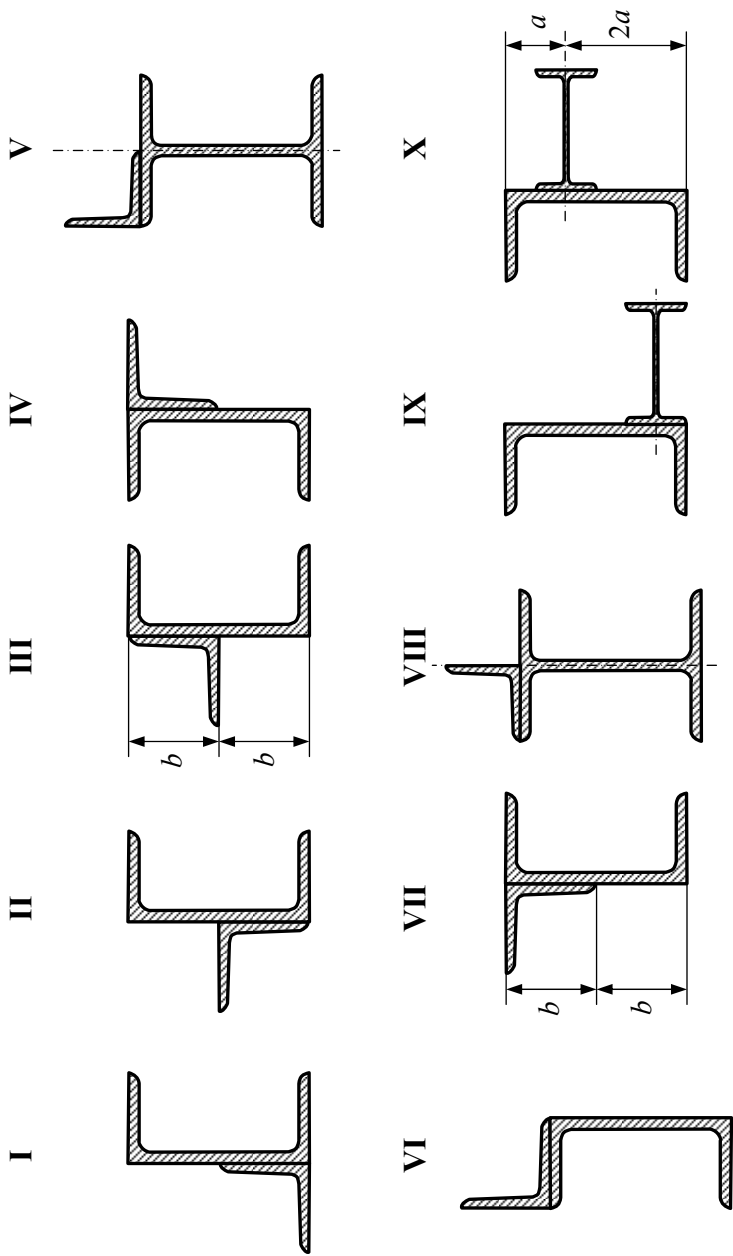


Рисунок 1.1 – Схеми складних перерізів з рівнобічним кутником

Таблиця 1.1 – Номери профілів складного перерізу

№ рядка	Схема	Швелер	Двотавр	Рівнобічний кутник
<i>1</i>	<i>I</i>	14	12	№8: 80×80×8
<i>2</i>	<i>II</i>	16	14	№8: 80×80×6
<i>3</i>	<i>III</i>	18	16	№9: 90×90×8
<i>4</i>	<i>IV</i>	20	18	№9: 90×90×7
<i>5</i>	<i>V</i>	22	20а	№9: 90×90×6
<i>6</i>	<i>VI</i>	24	20	№10: 100×100×8
<i>7</i>	<i>VII</i>	27	22а	№10: 100×100×10
<i>8</i>	<i>VIII</i>	30	22	№10: 100×100×12
<i>9</i>	<i>IX</i>	33	24а	№12,5: 125×125×10
<i>0</i>	<i>X</i>	36	24	№12,5: 125×125×12
	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>д</i>

1.2 Приклад розрахунку задачі

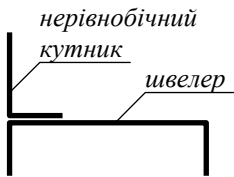


Рисунок 1.3 – Ескіз заданого складного перерізу

Нехай заданий переріз складається зі швелера №20 (ГОСТ 8210-72) і нерівнобічного кутника №16/10 (ГОСТ 8510-72), ескіз якого зображено на рис. 1.3. Згідно таблиць сортаменту зазначених стандартів виписуємо розміри і геометричні характеристики швелера (рис. 1.4, *a*) та нерівнобічного кутника (рис. 1.4, *б*), які наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Основні дані профілів складного перерізу

Профіль	№	h, B , см	b , см	d , см	F , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	$I_{u_{min}}$, см ⁴	y_0 , см	x_0, z_0 , см	$tg \alpha$
Швелер	20	20	7,6	0,52	23,4	1520	113	–	–	2,07	–
Кутник	16/10	16	10	1,0	25,3	667	204	121	5,23	2,28	0,39

Після цього накреслюємо заданий переріз в масштабі 1:2 і проводимо центральні осі, x_1, y_1 та x_2, y_2 кожного профілю з позначенням їх центрів ваги o_1, o_2 . Індеси 1 і 2 прийняті відповідно нумерації профілів в заданому складному перерізі (рис. 1.5).

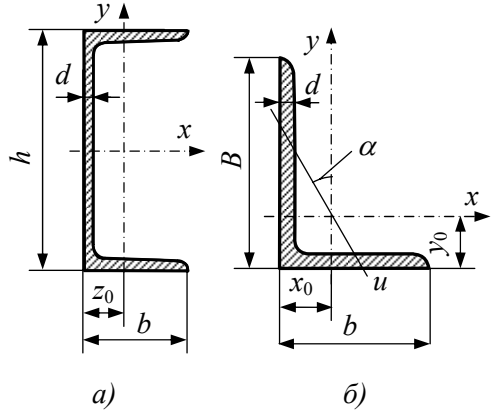


Рисунок 1.4 – Схеми заданих профілів згідно таблиць сортаменту

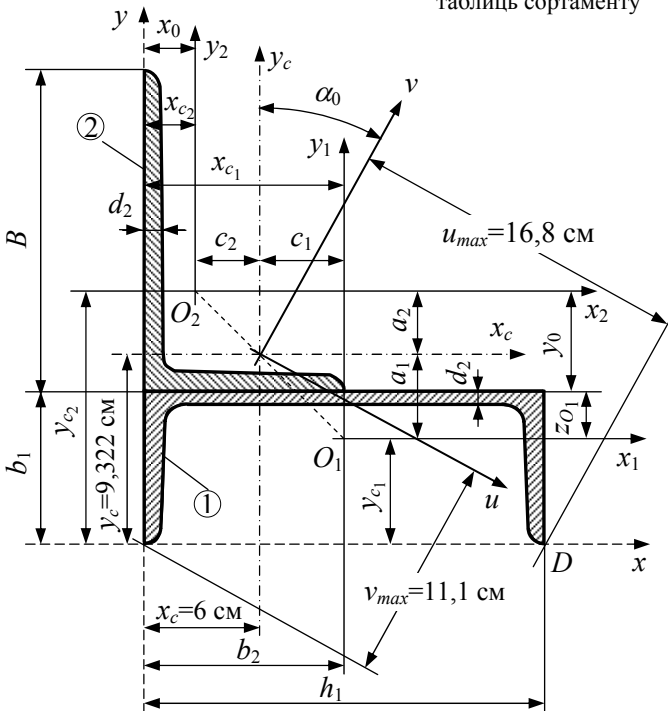


Рисунок 1.5 – Схема заданого складного перерізу

1.2.1 *Визначення положення центру ваги складного перерізу*

Для визначення положення центру ваги перерізу необхідно вибрати та провести на кресленні систему допоміжних осей і в цій системі визначити координати центрів ваги кожного профілю, тобто x_{c1} , y_{c1} та x_{c2} , y_{c2} .

Допоміжні осі можна вибирати по-різному, але для уникнення помилок зі знаками, їх проводять по крайнім лівим і крайнім нижнім точкам перерізу. Тоді координати центрів ваги o_1 , o_2 будуть додатними. На рис. 1.5 допоміжні осі позначені x , y (пунктир), тому координати центрів ваги швелера і кутника визначаємо так

$$x_{c1}=h_1/2=20/2=10 \text{ см};$$

$$y_{c1}=b_1-z_{o1}=7,6-2,07=5,53 \text{ см};$$

$$x_{c2}=x_o=2,28 \text{ см};$$

$$y_{c2}=b_1+y_o=7,6+5,23=12,83 \text{ см},$$

де h_1 , b_1 , z_{o1} , x_o , y_o – параметри швелера і кутника (рис. 1.5).

Тепер за відомими формулами визначаємо координати центру ваги складного перерізу

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot x_{c1} + F_2 \cdot x_{c2}}{F_1 + F_2} = \\ &= \frac{23,4 \cdot 10 + 25,3 \cdot 2,28}{23,4 + 25,3} = 5,989 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{c_1} + F_2 \cdot y_{c_2}}{F_1 + F_2} = \\
 &= \frac{23,4 \cdot 5,53 + 25,3 \cdot 12,83}{23,4 + 25,3} = 9,322 \text{ см},
 \end{aligned}$$

де F_1, F_2 – площі поперечних перерізів швелера і кутника.

За результатами обчислення положення центру ваги перерізу проводимо на кресленні систему центральних осей x_c, y_c (штрихпунктир). Точка перетину цих осей є центр ваги складного перерізу. З метою перевірки правильності розрахунку необхідно упевнитись в тому, що точка перетину центральних осей лежить на прямій, яка з'єднує центри ваги o_1 і o_2 . Тепер визначимо в системі осей x_c, y_c координати центрів ваги швелера та кутника

$$c_1 = x_{c_1} - x_c = 10 - 5,989 = 4,011 \text{ см};$$

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 5,53 - 9,322 = -3,792 \text{ см};$$

$$c_2 = x_{c_2} - x_c = 2,28 - 5,989 = -3,709 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 12,83 - 9,322 = 3,508 \text{ см}.$$

1.2.2 *Визначення моментів інерції відносно центральних осей*

Момент інерції складного перерізу відносно центральних осей визначається як сума моментів інерції кожного профілю, з яких складається заданий переріз, тобто

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} ;$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} ;$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^I + I_{x_c y_c}^{II}$$

де I_{x_c} , I_{y_c} – осьові моменти інерції;

$I_{x_c y_c}$ – відцентровий момент інерції.

В свою чергу моменти інерції відносно центральних осей кожного профілю визначаються за формулами паралельного переносу осей, наприклад,

$$I_{x_c}^I = I_{x_1} + a_1^2 F_1;$$

$$I_{y_c}^I = I_{y_1} + c_1^2 F_1;$$

$$I_{x_c y_c}^I = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1,$$

де I_{x_1} , I_{y_1} – осьові моменти інерції швелера відносно своїх центральних осей x_1 , y_1 (рис. 1.5);

$I_{x_1 y_1}$ – відцентровий момент інерції швелера відносно осей x_1 , y_1 .

Якщо підставити відповідні числові значення у наведені залежності, будемо мати наступне.

1.2.2.1 Осьові моменти інерції

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} = 449,475 + 978,343 = 1427,82 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c}^I = I_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1 = 113 + (-3,792)^2 \cdot 23,4 = 449,475 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c}^{II} = I_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2 = 667 + 3,508^2 \cdot 25,3 = 978,343 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} = 1896,462 + 552,044 = 2448,507 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^I = I_{y_1} + c_1^2 \cdot F_1 = 1520 + 4,011^2 \cdot 23,4 = 1896,462 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^{\text{II}} = I_{y_2} + c_2^2 \cdot F_2 = 204 + (-3,709)^2 \cdot 25,3 = 552,044 \text{ см}^4,$$

де $I_{x_1}=113 \text{ см}^4$, $I_{y_1}=1520 \text{ см}^4$ – моменти інерції швелера відносно осей x , y (рис. 1.4, *a*), які позначені на рис. 1.5 як осі x_1 та y_1 відповідно, тобто швелер в складному перерізі має горизонтальне положення, а не таке, як в таблиці сортаменту¹.

1.2.2.2 Відцентровий момент інерції

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^{\text{I}} + I_{x_c y_c}^{\text{II}} = -355,91 - 542,08 = -897,99 \text{ см}^4.$$

$$I_{x_c y_c}^{\text{I}} = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + (-3,792) \cdot 4,011 \cdot 23,4 = -355,91 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c y_c}^{\text{II}} = I_{x_2 y_2} + a_2 c_2 F_2 = -212,9 + 3,508 \cdot (-3,709) \cdot 25,3 = -542,08 \text{ см}^4,$$

де $I_{x_1 y_1}$ – відцентровий момент інерції швелера відносно своїх осей x_1 , y_1 ;

$I_{x_2 y_2}$ – відцентровий момент інерції кутника відносно своїх осей x_2 , y_2 .

Так як осі x_1 , y_1 швелера є головними центральними осями (вісь x_1 є віссю симетрії), то $I_{x_1 y_1}=0$. Це стосується також і двотаврового профілю.

Осі x_2 , y_2 нерівнобічного кутника не є головними, тому відцентровий момент інерції відносно таких осей можна визначити за формулою

$$I_{x_2 y_2} = (I_x - I_{u_{\min}}) \cdot \text{tg} \alpha = (667 - 121) \cdot 0,39 = -212,9 \text{ см}^4.$$

Знак відцентрового моменту визначається знаком відцентрових моментів окремих частин кутника, розташованих у відповідних квадрантах центральної системи осей x , y (рис. 1.6, *a*), тобто

¹ Це застереження відноситься і до двотавра на схемах IX, X (рис. 1.1).

$$I_{xy} = \int_F xy dF = \int_{F_{II}} xy dF + \int_{F_{III}} xy dF + \int_{F_{IV}} xy dF = I_{xy}^{II} + I_{xy}^{III} + I_{xy}^{IV}.$$

Так як сума площ окремих частин кутника ($F_{II}+F_{IV}$) з від'ємними добутками координат $xу$ більша ніж площа F_{III} з додатнім добутком $xу$, то відцентровий момент кутника згідно рис. 1.6, а є від'ємним, тобто $I_{xy}<0$.

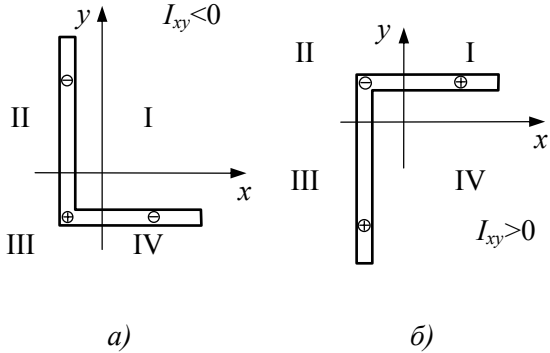


Рисунок 1.6 – До визначення знаку відцентрового моменту

Порівнюючи зображення нерівнобічного кутника і напрям центральних осей x_2, y_2 на рис. 1.5 та x, y на рис. 1.6, а,

можна дійти висновку, що $I_{x_2y_2}<0$. Для іншого напрямку центральних осей або іншого розташування кутника, наприклад, зображеного на рис. 1.6, б, можна визначити, що відцентровий момент кутника в цьому випадку є доданий ($I_{xy}>0$).

Описані вище пояснення щодо знаку відцентрового моменту стосуються також і рівнобічного кутника (рис. 1.7), модуль якого визначається формулою

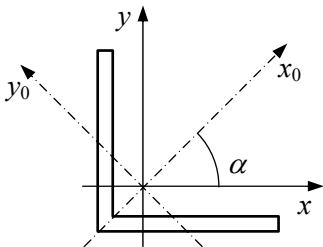


Рисунок 1.7 – До визначення відцентрового моменту рівнобічного кутника

$$I_{xy} = \frac{I_{x_{0max}} - I_{y_{0min}}}{2} \sin 2\alpha,$$

де $I_{x_{0max}}, I_{y_{0min}}$ – головні моменти інерції відносно головних осей x_0, y_0 .

Головна вісь x_0 є віссю симетрії, тому кут $\alpha=45^\circ$, а $\sin 2\alpha=1$.

1.2.3 *Визначення положення головних осей інерції складного перерізу*

Положення головних осей інерції визначається формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}}.$$

Після підстановки значень I_{x_c} , I_{y_c} , $I_{x_c y_c}$ будемо мати

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2(-897,99)}{2448,507 - 1427,82} = -1,75958;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1,75958) = -30,2^\circ.$$

Знак мінус вказує на те, що головні осі, відносно центральних, необхідно повернути за годинниковою стрілкою.

На рис. 1.5 головні осі позначені як u , v (жирна суцільна лінія). З метою перевірки правильності визначення кута α_0 обчислимо відцентровий момент відносно головних осей, який повинен дорівнювати нулю

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = \\ &= \frac{1427,82 - 2448,507}{2} \cdot (-0,86941) + (-897,99) \cdot 0,4941 = \\ &= 8,8 \cdot 10^{-4} \approx 0. \end{aligned}$$

Головні центральні осі мають найбільш практичне значення, так як розрахунок напружень і деформацій в системі цих осей набагато спрощується. Всі подальші розрахунки в опорі матеріалів будемо виконувати в системі головних центральних осей.

1.2.4 *Визначення головних моментів інерції*

$$\begin{aligned}
 I_{\min} &= \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} = \\
 &= \frac{1427,82 + 2448,507}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1427,82 - 2448,507}{2}\right)^2 + (-897,99)^2} = \\
 &= 1938,164 \pm 1032,878;
 \end{aligned}$$

$$I_{\max} = 1938,164 + 1032,878 = 2971,042 \text{ см}^4 \rightarrow I_v;$$

$$I_{\min} = 1938,164 - 1032,878 = 905,286 \text{ см}^4 \rightarrow I_u;$$

Так як $I_{y_c} > I_{x_c}$, то максимальний момент буде відносно головної осі v , яка відхиляється від центральної осі y_c на кут α_0 .

1.2.5 *Визначення моментів опору*

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}} = \frac{905,286}{11,1} = 81,56 \text{ см}^3;$$

$$W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{2971,042}{16,8} = 176,8 \text{ см}^3,$$

де v_{\max} , u_{\max} – відстані від головних осей до найбільш віддалених точок перерізу, які можна відшукувати за допомогою трикутника та лінійки безпосередньо на кресленні або за аналітичними формулами

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha;$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Наприклад, координати крайньої точки D (рис. 1.5) в системі центральних осей будуть такими

$$x_D = c_1 + h_1/2 = 4,011 + 10 = 14,011 \text{ см};$$

$$y_D = -y_c = -9,322 \text{ см};$$

$$\text{кут } \alpha = \alpha_0 = -30,2^\circ,$$

тоді $u_{max} = -9,322 \cdot \sin(-30,2) + 14,011 \cdot \cos(-30,2) = 16,8 \text{ см}$.

Аналогічно обчислюють або відшукують відстані інших крайніх точок і серед них вибирають максимальні.

[1, С. 23–35; 3, С. 154–162].

2 ПОБУДОВА ЕПЮР ПОЗДОВЖНІХ СИЛ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗТЯГАННІ СХІДЧАСТОГО СТЕРЖНЯ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

2.1 Умова задачі

Сталевий стержень знаходиться під дією поздовжньої сили P і власної ваги. Модуль пружності матеріалу стержня $E=2 \cdot 10^5$ МПа, питома вага $\gamma=78$ кН/м³.

При виконанні задачі необхідно:

- а) використовуючи метод перерізів, побудувати епюру поздовжніх сил $N(z)$;
- б) обудувати епюру переміщень $\Delta l(z)$.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рис. 2.1 і в табл. 2.1.

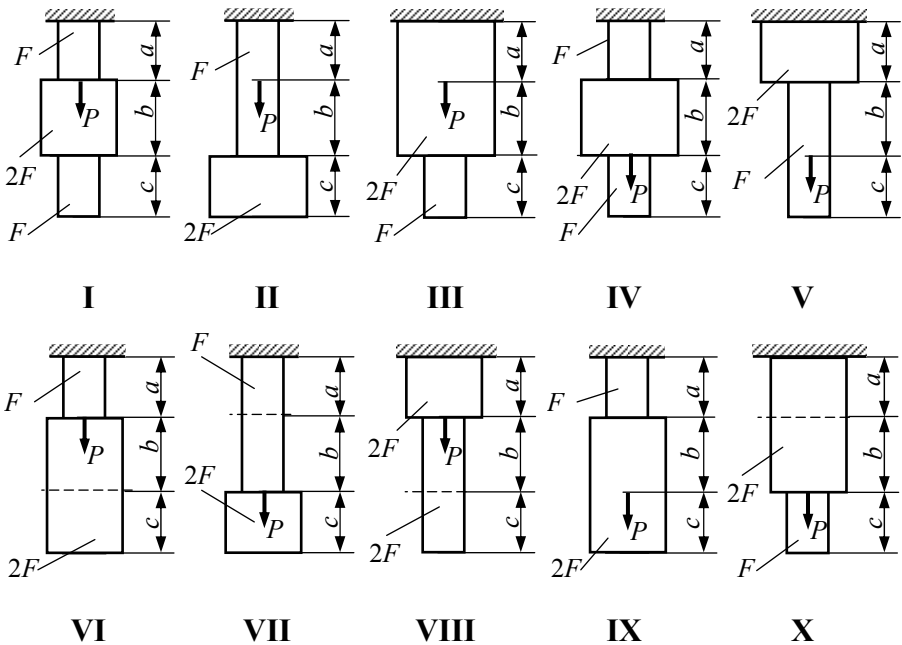


Рисунок 2.1 – Розрахункові схеми

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

№ рядка	Схема	Площа, $F \cdot 10^4 \text{ м}^2$	Довжина ділянок, м			Зосереджена сила P , кН
			a	b	c	
I	I	11	2,1	2,1	1,1	1,1
2	II	12	2,2	2,2	1,2	1,2
3	III	13	2,3	2,3	1,3	1,3
4	IV	14	2,4	2,4	1,4	1,4
5	V	15	2,5	2,5	1,5	1,5
6	VI	16	2,6	2,6	1,6	1,6
7	VII	17	2,7	2,7	1,7	1,7
8	VIII	18	2,8	2,8	1,8	1,8
9	IX	19	2,9	2,9	1,9	1,9
0	X	20	3,0	3,0	2,0	2,0
	e	б	з	д	e	з

2.2 Приклад виконання задачі

Вихідні данні:

$$P=1,2 \text{ кН}; \quad F=20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad a=2,2 \text{ м}; \quad b=3 \text{ м};$$

$$c=1,2 \text{ м}; \quad E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \gamma=78 \text{ кН/м}^3;$$

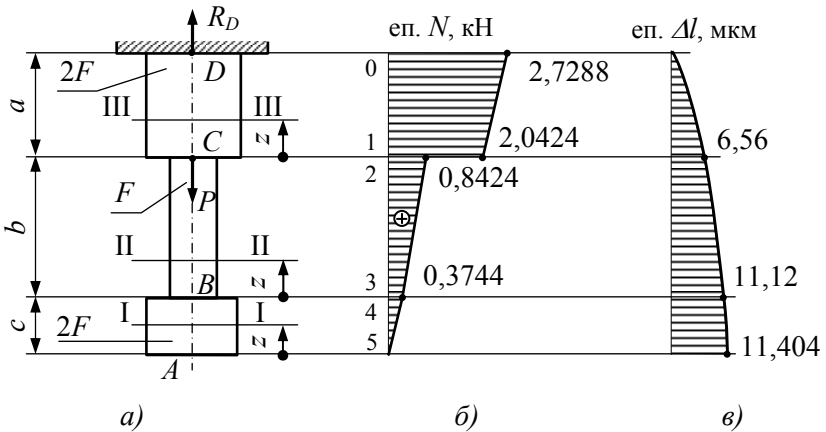


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема і епюри повздовжніх сил та переміщень

2.2.1 *За вихідними даними накреслимо розрахункову схему* (рис. 2.2, а), в певному масштабі, наприклад: довжина (a , b , c) – 1 м=10 мм; товщина (діаметр) стержня, що відповідає площі, – $10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 5 \text{ мм}$.

2.2.2 Побудова епюри поздовжніх сил

Розпочинаючи будувати епюру, стержень поділяють на силові ділянки. Границями ділянок навантаження є місця (точки) прикладення зовнішніх сил та зміна розмірів поперечного перерізу стержня.

В нашому випадку маємо три ділянки: AB , BC та CD (рис. 2.2, а). Поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтягання, та від'ємною, якщо вона спричинює стискання.

Поздовжню силу в довільному перерізі стержня знаходимо з рівняння рівноваги, яке записуємо для відсіченої частини у вигляді

$$N + \sum P_z = 0, \quad (2.1)$$

де $\sum P_z$ – алгебраїчна сума проекції на вісь стержня всіх зовнішніх сил, які діють по одну сторону від перерізу.

Початок координат для кожної ділянки вибираємо в точках A , B , C .

Проведемо довільний переріз I–I на ділянці AB (рис. 2.2, а) та, умовно відкинувши верхню частину стержня, розглянемо рівновагу нижньої (рис. 2.3).

На цю частину діє відшукуване зусилля N (додатне, направлене від перерізу в сторону розтягання) і вага відсіченої частини $\gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z$ (направлена униз, як зовнішня сила).

Складаючи рівняння рівноваги, будемо мати

$$N_{(I)} - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z = 0; \quad N_{(I)} = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z.$$

Це рівняння похилої лінії до осі стержня.

При $z=0$; → точка A або 5 (рис. 2.2, б): $N_{(A)} = N_5 = 0$;

$z=c$; → точка B або 4: $N_{(B)} = N_4 = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z = 78 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 = 0,3744 \text{ кН}$.

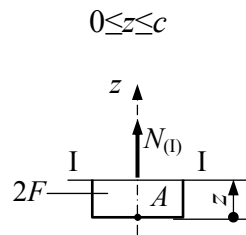


Рисунок 2.3 – Відсічена нижня частина стержня

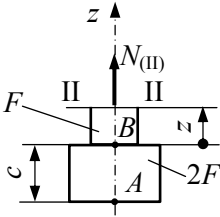
Виконуючи аналогічні дії на ділянках BC і CD , визначаємо по-
довжнє зусилля в контрольних точках 3, 2, 1, 0 (рис. 2.2, б).

Ділянка BC (переріз II–II):

$$N_{(II)} - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c - \gamma F \cdot z = 0;$$

$$0 \leq z \leq \epsilon$$

$$N_{(II)} = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c + \gamma F \cdot z.$$



При $z=0$; \rightarrow точка B або 3:

$$N_{(B)} = N_3 = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c = 0,3744 \text{ кН};$$

$z=\epsilon$; \rightarrow точка C або 2:

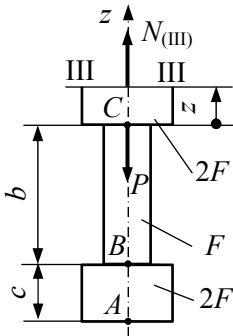
$$N_{(C)} = N_2 = 0,3744 + 78 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = 0,8424 \text{ кН}.$$

Ділянка CD (переріз III–III):

$$N_{(III)} - P - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c - \gamma F \cdot \epsilon - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z = 0;$$

$$0 \leq z \leq a$$

$$N_{(III)} = P + \gamma F(2 \cdot c + \epsilon) + \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z.$$



При $z=0$; \rightarrow точка C або 1:

$$N_{(C)} = N_1 = P + \gamma F(2 \cdot c + \epsilon) = 1,2 + 0,8424 = 2,0424 \text{ кН};$$

$z=a$; \rightarrow точка D або 0:

$$\begin{aligned} N_{(D)} = N_0 &= P + \gamma F(2 \cdot c + \epsilon) + \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot a = \\ &= 2,0424 + 78 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2,2 = \\ &= 2,7288 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Застосовуючи метод перерізів, можна було б на ділянці CD залишити верхню частину стержня (рис. 2.4), тобто довільну координату z відрахувати від точки D униз. В цьому випадку необхідно спочатку визначити реакцію R_D в закріпленні стержня, так як ця реакція відноситься до числа зовнішніх сил, які діють на залишену (верхню) частину стержня.

Поздовжнє зусилля $N_{(D)} = N_0$ є найбільше і

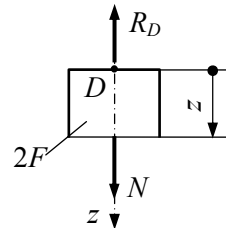


Рисунок 2.4 – Відсічена верхня частина стержня

дорівнює реакції R_D в закріпленні стержня (рис. 2.2, а). За результатами розрахунку будемо графік, що показує, як змінюється поздовжня сила по довжині стержня. Для цього проведемо вертикальну лінію паралельно осі стержня і відкладемо в довільно вибраному масштабі (наприклад, 1 кН=10мм) значення поздовжніх сил в точках 5, 4, 3, 2, 1, 0. Додатну силу N (розтягання) відкладаємо вправо від вертикальної лінії. Побудований графік називають *епюрою поздовжніх сил* (рис. 2.2, б).

Епюру прийнято штрихувати перпендикулярно осі стержня. Кожна лінія штриховки (ордината графіка) в даному масштабі виражає значення поздовжньої сили у відповідному (розташованому проти нього) поперечному перерізі стержня.

На всіх ділянках маємо рівняння похилих до осі стержня прямих. Проте, оскільки площі поперечних перерізів на ділянках різні, нахил епюри на ділянках AB та CD неоднаковий, а на ділянках AB і CD похилі прямі повинні бути паралельними (рис. 2.2, б).

В точках дії зосереджених зовнішніх сил на епюрі мають бути “стрибки”, розмір яких дорівнює величині діючої сили (точка C , рис. 2.2, б).

2.2.3 Побудова епюри переміщень

В загальному вигляді переміщення при розтяганні (стисканні) визначаються за формулою

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z)dz}{EF} \quad (2.2)$$

Якщо стержень має декілька силових ділянок, то формула (2.2) набуває вигляду

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N(z)dz}{EF_i}, \quad (2.3)$$

де EF_i – жорсткість поперечного перерізу стержня на i -й ділянці;
 l_i – довжина i -ї ділянки;
 n – кількість ділянок.

Зважаючи на те, що в межах кожної ділянки жорсткість поперечного перерізу є величина стала, а інтегрування функції $N(z)=f(z)$ зводиться до обчислення площі епюри поздовжніх сил на кожній ділянці, то формулу для визначення переміщень запишемо так

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{N(i)}}{EF_i}, \quad (2.4)$$

де $\omega_{N(i)}$ – площа епюри N на i -й ділянці.

Початкове переміщення визначається за граничними умовами, тобто вибирається такий переріз, де воно відоме. Для нашого прикладу це є жорстке закріплення, точка D (рис. 2.2, a).

В жорсткому закріпленні $\Delta l_{(D)}=0$. Далі визначимо переміщення в позначених точках C, B, A

$$\begin{aligned} \Delta l_{(C)} &= \Delta l_{(D)} + \frac{\omega_{N(DC)}}{E \cdot 2F} = 0 + \frac{0,5(N_0 + N_1) \cdot a}{E \cdot 2F} = \\ &= \frac{0,5(2,7288 + 2,0424) \cdot 10^{-3} \cdot 2,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 6,5604 \cdot 10^{-6} \text{ м.} \end{aligned}$$

Для зручності побудови епюри переміщень переведемо метри в мікрометри, тобто визначене переміщення помножимо на 10^6 . Тоді

$$\Delta l_{(C)} = 6,5604 \text{ мкм;}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_{(B)} &= \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(CB)}}{E \cdot F} = 6,5604 + \frac{0,5(N_2 + N_3) \cdot b}{E \cdot F} = \\ &= 6,5604 + \frac{0,5(0,8424 + 0,3744) \cdot 10^{-3} \cdot 3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^6 = \\ &= 6,5604 + 4,563 = 11,123 \text{ мкм;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta l_{(A)} &= \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(BA)}}{E \cdot 2F} = 11,123 + \frac{0,5(N_4 + N_5) \cdot c}{E \cdot 2F} = \\
 &= 11,123 + \frac{0,5(0,3744 + 0) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^6 = \\
 &= 11,123 + 0,2808 = 11,404 \text{ мкм.}
 \end{aligned}$$

За результатами розрахунку будемо епюру переміщень, яка змінюється по довжині стержня за законом квадратичної параболи (рис. 2.2, в).

Масштаб переміщень: 1 мкм = 1 мм.

[1, С. 42–43, 123–128; 3, С. 22–31, 52].

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО- ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ №2

3 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

3.1 Умова задачі

Сталевий вал навантажений трьома крутними моментами M_1 , M_2 , M_3 та попередньо невідомим моментом X .

Необхідно:

- а) визначити значення моменту X при умові, що кут закручування правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю;
- б) з урахуванням визначеного моменту X побудувати епюру крутних моментів;
- в) за умовою міцності визначити діаметр валу і округлити його до найближчого більшого або меншого значення стандартного ряду діаметрів (ГОСТ 6636-69)² в межах розбіжності по напруженням $\pm 5\%$;
- г) побудувати епюру кутів закручування;
- д) визначити найбільший відносний кут закручування.

Модуль пружності другого роду прийняти рівним $G=8 \cdot 10^4$ МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 3.1 та в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

№ рядка	Схема	Довжина, м			Моменти, кН·м			[τ], МПа
		a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	I	1,1	1,5	2,0	1,1	1,6	2,0	35
2	II	1,2	1,6	1,9	1,2	1,7	1,9	40
3	III	1,3	1,7	1,8	1,3	1,8	1,8	45
4	IV	1,4	1,8	1,7	1,4	1,9	1,7	50
5	V	1,5	1,9	2,6	1,5	2,0	1,6	55
6	VI	1,6	2,0	1,5	1,6	1,1	1,5	60
7	VII	1,7	1,1	1,4	1,7	1,2	1,4	65
8	VIII	1,8	1,2	1,3	1,8	1,3	1,3	70
9	IX	1,9	1,3	1,2	1,9	1,4	1,2	75
0	X	2,0	1,4	1,1	2,0	1,5	1,1	80
	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>в</i>

² При округленні дотримуватись діаметрів кратних числу 5.

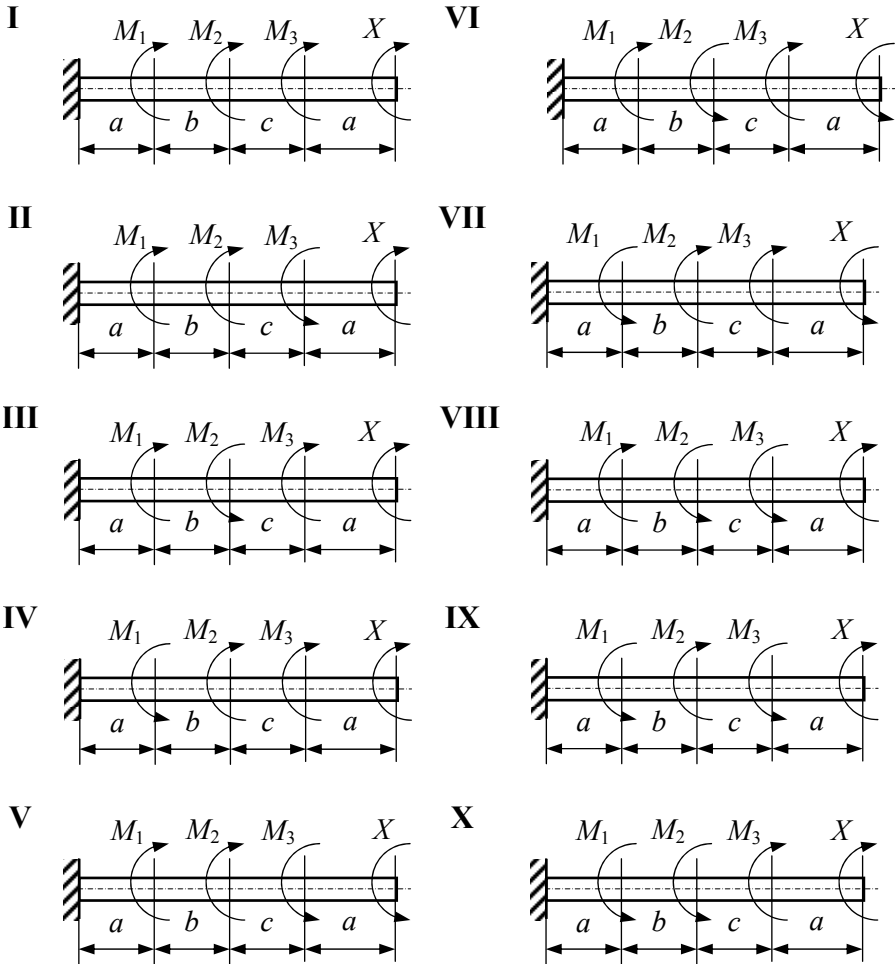


Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми

3.2 Приклад розрахунку

Вихідні данні: $a=2$ м; $b=1$ м; $c=0,5$ м; $M_1=2,5$ кН·м;
 $M_2=2,0$ кН·м; $M_3=3,0$ кН·м; $[\tau]=70$ МПа.

За відповідним варіантом креслимо в певному масштабі розрахункову схему (рис. 3.2, а).

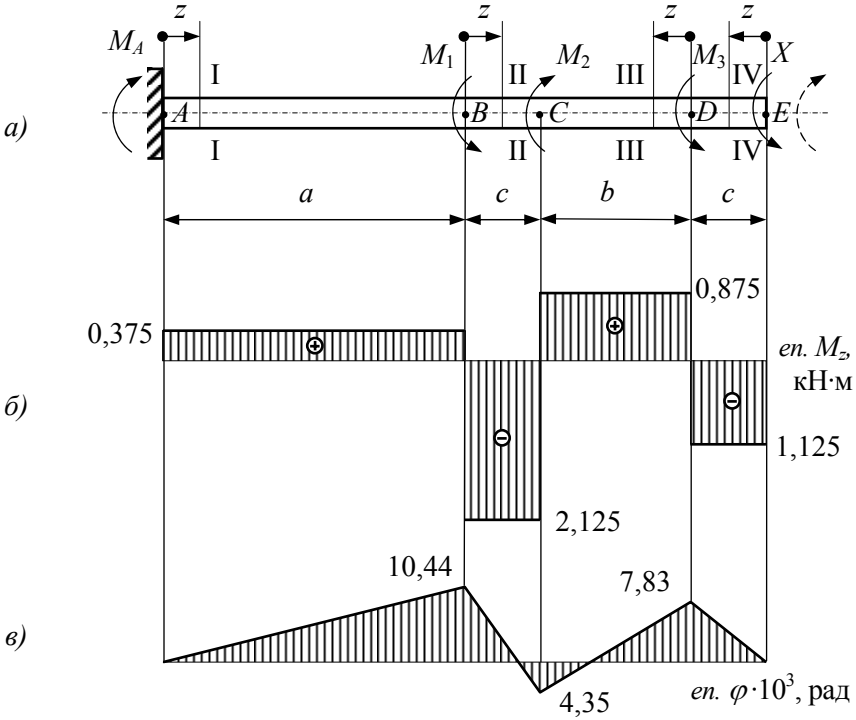


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема і епюри крутних моментів та кутів закручування

3.2.1 Визначення невідомого моменту X

Для визначення моменту X запишемо рівняння, яке задовольняє умові, що сума кутів закручування кінцевого перерізу вала (точка E , рис. 3.2, а) від трьох моментів ($\varphi_{(E),\Sigma M}$) і моменту X ($\varphi_{(E),X}$) дорівнює нулю, тобто

$$\varphi_{(E),\Sigma M} + \varphi_{(E),X} = 0. \quad (3.1)$$

За законом Р. Гука при крученні залежність між крутним моментом і кутом закручування має такий вид

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p},$$

де l – довжина вала (або його ділянка), яка піддається закручуванню;

$G \cdot J_p$ – жорсткість поперечного перерізу при крученні.

Вважаємо, що кут закручування моменту X додатний. Тоді, уявляючи, що на вал діє тільки момент X , потім тільки M_3 , за ним – M_2 і на решті – M_1 , запишемо рівняння (3.1) в розгорнутому вигляді

$$\frac{X \cdot (a + b + 2c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_3 \cdot (a + b + c)}{G \cdot J_p} - \frac{M_2 \cdot (a + c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot J_p} = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} X &= \frac{M_2 \cdot (a + c) - M_3 \cdot (a + b + c) - M_1 \cdot a}{a + b + 2c} = \\ &= \frac{3 \cdot (2 + 0,5) - 2 \cdot (2 + 1 + 0,5) - 2,5 \cdot 2}{2 + 1 + 2 \cdot 0,5} = -1,125 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Знак мінус вказує на те, що напрям моменту X (пунктир) є протилежним показаному на розрахунковій схемі.

Тепер визначимо реактивний момент в закріпленні (M_A), для чого запишемо рівняння рівноваги крутних моментів відносно осі вала

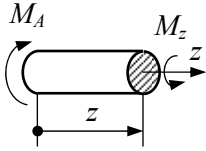
$$\begin{aligned} \sum M_{кр} &= 0; \quad M_A - M_1 + M_2 - M_3 + X = 0; \\ M_A &= M_1 - M_2 + M_3 - X = 2,5 - 3 + 2 - 1,125 = 0,375 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Знак плюс вказує на те, що попередній напрям M_A співпадає з дійсним.

3.2.2 Побудова епюри крутних моментів M_z

Розрахункова схема має чотири силових ділянки: AB , BC , CD , ED . Крутний момент в перерізі будемо вважати додатним, якщо він діє проти годинникової стрілки, якщо дивитись з боку перерізу.

Ділянка AB (переріз I–I): $0 \leq z \leq a$



Рівняння рівноваги для відсіченої частини

$$M_z + \sum m_{z,z} = 0;$$

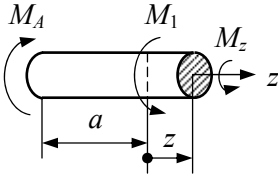
$$M_z - M_A = 0.$$

Звідси $M_z = M_A = 0,175 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Так як крутний момент на ділянці AB додатний і не залежить від координати z , то епюра M_z окреслена прямою, паралельною осі вала (рис. 3.2, б).

Аналогічно складаємо рівняння рівноваги і визначаємо крутні моменти на інших ділянках.

Ділянка BC (переріз II–II): $0 \leq z \leq c$



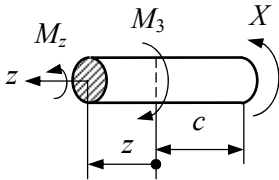
$$M_z + M_1 - M_A = 0;$$

$$M_z = M_1 - M_A = -2,5 + 0,375 =$$

$$= -2,125 \text{ кН}\cdot\text{м} = \text{const} -$$

момент від'ємний.

Ділянка CD (переріз III–III): $0 \leq z \leq b$



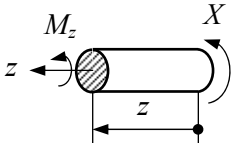
$$M_z - M_3 + X = 0;$$

$$M_z = M_3 - X = 2 - 1,125 =$$

$$= 0,875 \text{ кН}\cdot\text{м} = \text{const} -$$

момент додатний.

Ділянка DE (переріз IV–IV): $0 \leq z \leq b$



$$M_z + X = 0;$$

$$M_z = -X = -1,125 \text{ кН}\cdot\text{м} = \text{const} -$$

момент від'ємний.

Остаточна епюра крутних моментів показана на рис. 3.2, б.

Для перевірки правильності побудови епюри M_z необхідно дотримуватись наступних правил:

- на ділянках, де розподілений момент відсутній ($m=0$), крутний момент є величиною сталою ($M_z=const$), а епюра окреслена прямою, паралельною осі вала;
- на ділянках, де діє рівномірно розподілений крутний момент ($m=const$), крутний момент змінюється за лінійним законом ($M_z=f(z)$), а епюра окреслена прямою, нахиленою до осі вала;
- в перерізах (точках), де прикладені зосереджені моменти, на епюрі M_z мають місце стрибки (розриви) на величину цих моментів.

3.2.3 Визначення діаметру вала

Аналіз епюри M_z дає можливість виявити небезпечний переріз, де крутний момент за модулем є найбільший, тобто максимальний.

Для нашого прикладу це є ділянка BC , де $M_{zmax}=|2,125|$ кН·м.

Умову міцності при крученні записуємо за формулою

$$\tau_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_p} \leq [\tau],$$

де $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ – полярний момент опру для круглого поперечного перерізу.

Якщо підставити значення W_p в умову міцності, будемо мати

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{zmax}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,125 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 70}} = 0,05368 = 53,68 \text{ мм.}$$

Приймаємо стандартний діаметр $d=55$ мм.

3.2.4 Побудова епюри кутів закручування

Кут закручування φ визначаємо за відомою формулою

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_z dz}{G \cdot J_p},$$

де l_i – довжина i -ї ділянки.

Так як на кожній ділянці жорсткість поперечного перерізу вала є величина стала ($G \cdot J_p = \text{const}$), то процедуру інтегрування можна замінити процедурою обчислення площі епюри M_z на кожній ділянці, тобто

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \sum_{i=1}^n \omega_{M_z(i)}$$

де $\omega_{M_z(i)}$ – площа епюри M_z на i -й ділянці, яка у нашому прикладі має форму прямокутника (рис. 3.2, б).

Починати обчислення, необхідно з тієї ж точки (перерізу), де кут закручування відомий, із умови закріплення (граничні умови).

В нашому прикладі це може бути точка A (жорстке закріплення, $\varphi_{(A)}=0$) або точка E (за умовою задачі $\varphi_{(E)}=0$).

Спочатку визначимо жорсткість поперечного перерізу вала

$$G \cdot J_p = 8 \cdot 10^4 \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \frac{3,14 \cdot 0,055^4}{32} = 0,07183 \text{ мН} \cdot \text{м}^2.$$

Тепер визначимо послідовно кут закручування в точках B, C, D, E , починаючи від жорсткого закріплення.

$$\varphi_{(B)} = \varphi_{(A)} + \frac{\omega_{M_z(AB)}}{G \cdot J_p} = 0 + \frac{0,375 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{0,07183} = 10,44 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

де $\omega_{M_z(AB)}$ – площа епюри M_z на ділянці AB , додатна;

$$\begin{aligned}\varphi(C) &= \varphi(B) + \frac{\omega_{M_z(BC)}}{G \cdot J_p} = 10,44 \cdot 10^{-3} + \frac{-2,125 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{0,07183} = \\ &= -4,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}\end{aligned}$$

де $\omega_{M_z(BC)}$ – площа епюри M_z на ділянці BC , від’ємна;

$$\begin{aligned}\varphi(D) &= \varphi(C) + \frac{\omega_{M_z(CD)}}{G \cdot J_p} = -4,35 \cdot 10^{-3} + \frac{0,875 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0,07183} = \\ &= 7,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}\end{aligned}$$

де $\omega_{M_z(CD)}$ – площа епюри M_z на ділянці CD , додатна;

$$\varphi(E) = \varphi(D) + \frac{\omega_{M_z(DE)}}{G \cdot J_p} = 7,83 \cdot 10^{-3} + \frac{-1,125 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{0,07183} \cong 0 \text{ рад,}$$

де $\omega_{M_z(DE)}$ – площа епюри M_z на ділянці DE , від’ємна.

За результатами обчислення будемо епюру кутів закручування (рис. 3.2, в), яка окреслена прямими, нахиленими до осі вала.

3.2.5 Визначення максимального відносного кута закручування Θ_{max}

$$\Theta_{max} = \frac{M_{zmax}}{GJ_p} = \left| \frac{2,125 \cdot 10^{-3}}{0,07183} \right| = 0,0296 \text{ рад/м.}$$

[1, С. 206–214; 3, С. 169–181].

4 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ ПРЯМИХ БАЛОК

4.1 Умова задачі

Для заданої схеми балки необхідно:

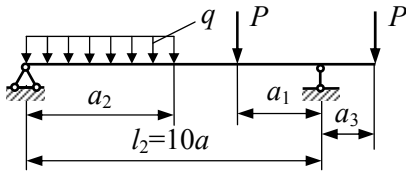
- а) написати вирази поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x для кожної ділянки в загальному вигляді;
- б) побудувати епюри Q_y та M_x ;
- в) знайти абсолютне значення максимального моменту $M_{x_{max}}$ і визначити розміри двотаврового перерізу при $[\sigma]=160$ Мпа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 4.1 і в таблиці 4.1.

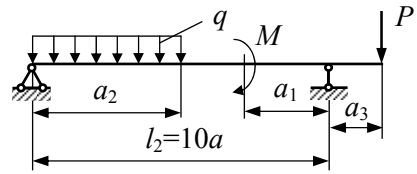
Таблиця 4.1 – Вихідні дані

№ рядка	Схема	l_2 , м	Відстань в долях прогону			M , кН·м	P , кН	q , кН/м
			a_1/a	a_2/a	a_3/a			
1	I	6	1	9	1	20	10	10
2	II	7	2	8	2	10	9	20
3	III	3	3	7	3	3	8	9
4	IV	4	4	6	4	4	7	8
5	V	5	5	5	5	5	6	7
6	VI	6	6	6	1	6	5	6
7	VII	7	7	7	2	7	4	5
8	VIII	8	8	8	3	8	3	4
9	IX	9	9	9	4	9	10	3
0	X	10	2	10	5	10	20	10
	e	e	z	δ	e	z	δ	e

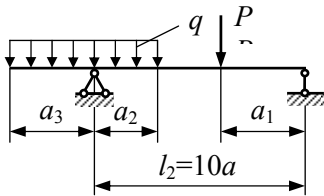
I



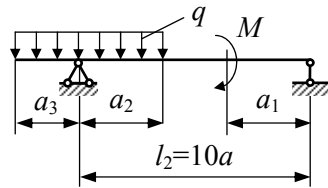
VI



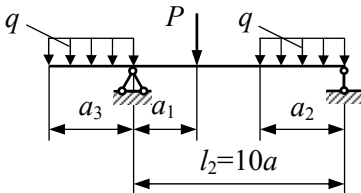
II



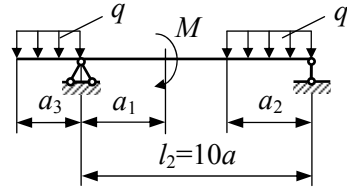
VII



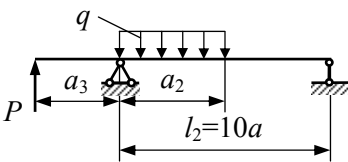
III



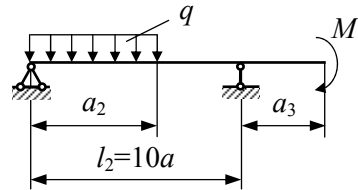
VIII



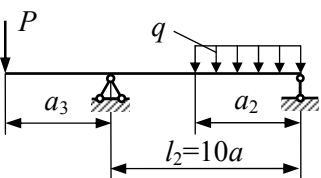
IV



IX



V



X

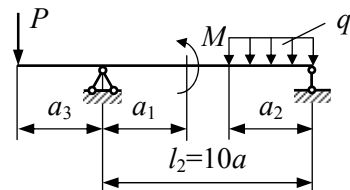


Рисунок 4.1 – Розрахункові схеми

4.2 Приклад розрахунку на міцність двохопорної балки

Вихідні данні: $l_2=10$ м; $a_1/a=4$; $a_2/a=8$; $a_3/a=2$;

$M=30$ кН·м; $P=15$ кН; $q=8$ кН/м.

Згідно з варіантом креслимо в масштабі розрахункову схему (рис. 4.2, а), визначивши при цьому довжини a_1 , a_2 , a_3

$l_2=10 \cdot a=10$ м; $a=1$ м; $a_1=4 \cdot a=4$ м; $a_2=8 \cdot a=8$ м; $a_3=2 \cdot a=2$ м.

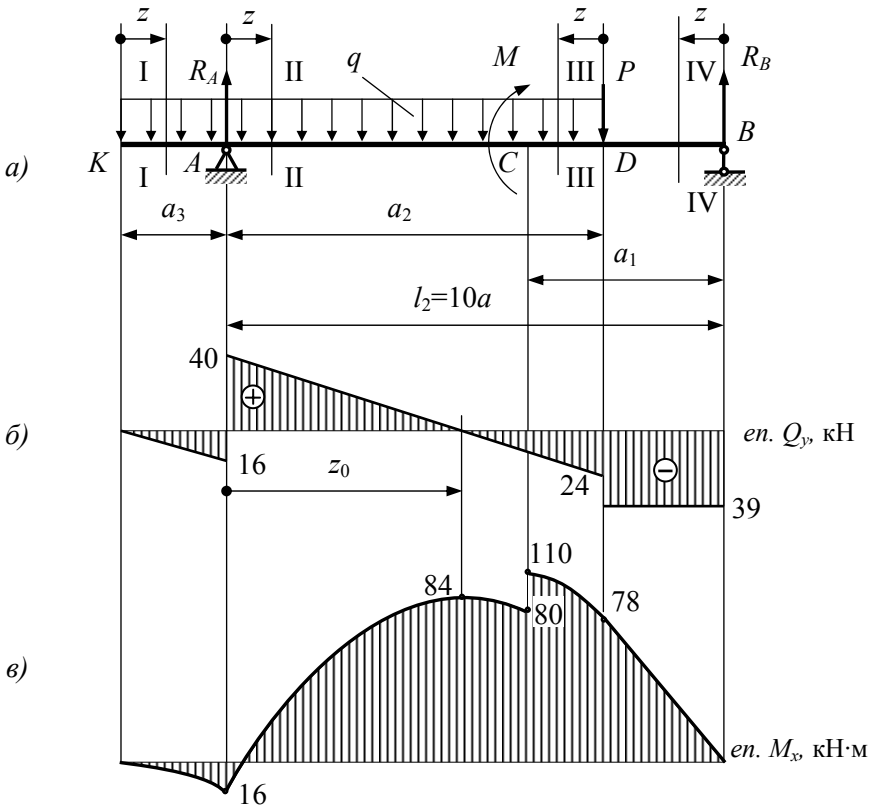


Рисунок 4.2 – Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

З розрахункової схеми видно, що вона має чотири силові ділянки: AK , AC , CD і BD .

Перед побудовою епюр Q_y і M_x необхідно визначити реактивні зусилля R_A і R_B , склавши рівняння моментів відносно опори A та B

$$\sum M_{(A)}=0; \quad R_B \cdot l_2 - P \cdot a_2 - M - q \cdot a_2 \cdot a_2 / 2 + q \cdot a_3 \cdot a_3 / 2 = 0,$$

звідки

$$R_B = \left(P \cdot a_2 + M + q \frac{a_2^2}{2} - q \frac{a_3^2}{2} \right) / l_2 = (15 \cdot 8 + 30 + 8 \cdot 8^2 / 2 - 8 \cdot 2^2 / 2) / 10 = 39 \text{ кН};$$

$$\sum M_{(B)}=0; \quad R_A \cdot l_2 - q(a_2+a_3)[(a_2+a_3)/2+l_2-a_2]+M-P(l_2-a_2)=0;$$

$$\begin{aligned} R_A &= \{q(a_2+a_3) [l_2-(a_2-a_3)/2]+P(l_2-a_2)-M\} / l_2 = \\ &= \{8(8+2) [10-(8-2)/2]+15(10-8)-30\} / 10 = 56 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Правильність визначення реакцій перевіряємо рівнянням рівноваги у вигляді суми проєкцій усіх зусиль на вертикальний напрям (вісь y), тобто

$$\sum P_y=0; \quad R_A+R_B-q(a_2+a_3)-P=0;$$

$$56+39-8 \cdot (8+2)-15=0.$$

Для побудови епюр Q_y і M_x розглянемо по черговою силі ділянки і запишемо рівняння рівноваги для кожної відсіченої частини, які мають наступний загальний вид:

Ділянка AK (переріз I-I):

$$Q_y + \sum P_y = 0; \quad M_x + \sum m_x = 0;$$

$$0 \leq z \leq a_3 = 2 \text{ м}$$

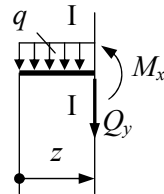
$$Q_y + q \cdot z = 0; \quad Q_y = -q \cdot z; \quad \rightarrow \text{похила лінія};$$

$$M_x + q \cdot z \cdot z / 2 = 0; \quad M_x = -q \cdot z^2 / 2 \quad \rightarrow \text{квадратична парабола.}$$

$$z=0; \quad M_x=0; \quad Q_y=0; \quad - \text{точка } K.$$

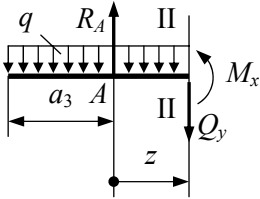
$$z=a_3; \quad Q_y = -q \cdot a_3 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН};$$

$$M_x = -q \cdot \frac{a_3^2}{2} = -8 \cdot 2^2 / 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad - \text{точка } A \quad \rightarrow \text{момент від'ємний.}$$



Ділянка AC (переріз II-II):

$$0 \leq z \leq l_2 - a_1 = 6 \text{ м}$$



$$Q_y - R_A + q(a_3 + z) = 0;$$

$$M_x - R_A \cdot z + q(a_3 + z)^2 / 2 = 0,$$

звідки $Q_y = R_A - q(a_3 + z);$

$$M_x = R_A \cdot z - q(a_3 + z)^2 / 2.$$

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AC

$$z=0; \quad Q_y = R_A - q \cdot a_3 = 56 - 8 \cdot 2 = 40 \text{ кН};$$

$$M_x = -q \cdot \frac{a_3^2}{2} = -8 \cdot 2^2 / 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{точка A.}$$

$$z = l_2 - a_1 = 6 \text{ м}; \quad Q_y = R_A - q(a_3 + 6) = 56 - 8(2 + 6) = -8 \text{ кН};$$

$$M_x = R_A \cdot 6 - 8(a_3 + 6)^2 / 2 = 56 \cdot 6 - 8(2 + 6)^2 / 2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{точка C.}$$

Визначимо координату z_0 точки перетину епюри Q_y з базовою лінією при $z = z_0, Q_y = 0$, де згинальний момент має екстримальне значення, тобто

$$Q_y = R_A - q(a_3 + z_0) = 0; \quad z_0 = \frac{R_A - q \cdot a_3}{q} = \frac{56 - 8 \cdot 2}{8} = 5 \text{ м};$$

Тоді $M_x = R_A \cdot z_0 - q(a_3 + z_0)^2 / 2 = 56 \cdot 5 - 8(2 + 5)^2 / 2 = 84 \text{ кН} \cdot \text{м} \rightarrow$ момент додатний.

$$Q_y + R_B - P - q \cdot z = 0; \quad Q_y = P - R_B + q \cdot z;$$

$$M_x - R_B(l_2 - a_2 + z) - P \cdot z - q \cdot z \cdot z / 2 = 0;$$

$$M_x = R_B(l_2 - a_2 + z) + P \cdot z + q \cdot z^2 / 2.$$

$$z=0;$$

$$Q_y = P - R_B = 15 - 39 = -24 \text{ кН} - \text{точка D};$$

$$M_x = R_B(l_2 - a_2) = 39(10 - 8) = 78 \text{ кН} \cdot \text{м} -$$

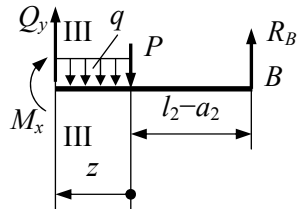
точка D.

$$z = a_1 + a_2 - l_2 = 2 \text{ м};$$

$$Q_y = -24 + 8 \cdot 2 = -8 \text{ кН} - \text{точка C};$$

Ділянка DC (переріз III-III):

$$0 \leq z \leq a_1 + a_2 - l_2 = 2 \text{ м}$$



$$M_x = R_B(l_2 - a_2 + 2) - P \cdot 2 - q \cdot 2^2 / 2 = 39(10 - 8 + 2) - 15 \cdot 2 - 8 \cdot 4 / 2 = 110 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{точка } C.$$

Ділянка BD (переріз $IV-IV$): $Q_y + R_B = 0$; $Q_y = -R_B = -39 \text{ кН} = \text{const}$;

$$0 \leq z \leq l_2 - a_2 = 2 \text{ м}$$

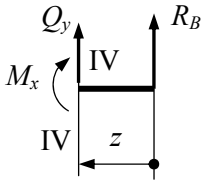
$$M_x - R_B \cdot z = 0; \quad M_x = R_B \cdot z.$$

$$z = 0; \quad M_x = 0 - \text{точка } B.$$

$$z = l_2 - a_2 = 2 \text{ м};$$

$$M_x = R_B \cdot 2 = 39 \cdot 2 = 78 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{точка } D.$$

За результатами обчислення будуть епюри Q_y і M_x (рис. 4.2, б, в).



Для перевірки правильності побудови епюр необхідно дотримуватись наступних правил:

- на ділянках, де не має розподіленого навантаження ($q=0$), епюра Q_y (рис. 4.2, б) окреслена прямою, паралельною базі, а епюра M_x – похилою прямою (рис. 4.2, в – ділянка BD);
- на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження ($q=\text{const}$), епюра Q_y обмежується похилою прямою, а епюра M_x – квадратичною параболою (рис. 4.2, б, в – ділянка AK, AC, CD)³;
- у перерізах, де $Q_y=0$ (змінює знак), на епюрі M_x має місце екстремум, а дотична до епюрі M_x – паралельна базі (рис. 4.2, б, в);
- у перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили на епюрі Q_y будуть стрибки на значення прикладених сил у напрямі їх дії (рис. 4.2, б, точки A, B, D), а на епюрі M_x будуть переломи, при чому, вістря перелому напрямлене проти дії сили (рис. 4.2, в, точка A);
- у перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти на епюрі M_x мають місце стрибки на значення цих моментів, а на епюрі Q_y ніяких змін не буде (рис. 4.2, б, в, точка C)⁴.

³ Оскільки епюру M_x будемо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії навантаження q .

Після побудови епіюр Q_y і M_x знаходимо небезпечний переріз там, де діє максимальний за абсолютною величиною згинальний момент.

Найбільший згинальний момент (небезпечний переріз) має місце в точці C з боку ділянки DC , тобто $M_{x_{max}}=110$ кН·м (рис. 4.2, в).

Виберемо переріз двотаврової балки з умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max}=M_{x_{max}}/W_x \leq [\sigma],$$

звідки

$$W_x=M_{x_{max}}/[\sigma]=\frac{110 \cdot 10^{-3}}{160}=0,6875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3=687,5 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту вибираємо двотавр №36, для якого $W_{x_{таб}}=743$ см³, а $J_x=13380$ см⁴.

Тоді максимальні напруження в двотаврі будуть такими

$$\sigma_{max}=\frac{110 \cdot 10^{-3}}{0,743 \cdot 10^{-3}}=148,05 \text{ МПа},$$

що менше за допустиме напруження на 7,5%. Це відхилення відрізняється від норми, при чому, в сторону збільшення коефіцієнту запасу. Нормативна розбіжність між допустимими і максимальними напруженнями знаходиться в межах $\pm 5\%$.

[1, С. 237–255; 3, С. 220–231; 267].

⁴ Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Опір матеріалів. Підручник /Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задачи для студентов-заочников всех специальностей высших учебных заведений. / А. В. Дарков, Б. Н. Кутуков. – М.: Высш. шк., 1985. – 56 с.
3. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов: Учебник для техн. вузов. – 5-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.

