

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ПРАКТИКУМ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(частина 1)

для студентів інженерно-фізичного
та транспортного факультетів
усіх форм навчання

2018

Практикум з вищої математики (частина 1) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 74 с.

Укладачі:	Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н. Н. М. Антоненко, к. ф.-м.н.
Відповідальний за випуск:	Н. М. Антоненко, к. ф.-м.н.
Комп'ютерна верстка:	Н. М. Антоненко, к. ф.-м.н.
Експерти спеціальностей:	О.Ф. Кузькін, доцент, к.т.н. О.В. Климов, доцент, к.т.н.
Рецензент:	В.П. П'янков, доцент, к.ф.-м.н.

Рекомендовано до видання НМК
інженерно-фізичного факультету ЗНТУ
Протокол № 9 від 26.12.2017

Рекомендовано до видання НМК
транспортного факультету ЗНТУ
Протокол № 40 від 26.12.2017

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
ЗНТУ
Протокол № 3 від 29.11.2017

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	5
2 Векторна алгебра	13
3 Аналітична геометрія на площині.	18
4 Аналітична геометрія у просторі.	30
5 Границя функції. Похідна функції та її застосування.	35
6 Функції багатьох змінних.	45
7 Інтеграли та їх застосування.	48
8 Ряди.	58
Література	66
Додаток А. Рівняння та графіки кривих другого порядку зі зміщеним центром.	68
Додаток Б. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку та їх графіки.	69
Додаток В. Таблиця похідних.	71
Додаток Г. Таблиця основних інтегралів	72
Додаток Д. Розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій.	74

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання протягом семестру практичних розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропонований практикум зі зразками виконання розрахунково-графічних завдань відповідає курсу „Вища математика”, який читається для студентів транспортного та інженерно-фізичного факультетів як денної, так і скороченої та заочної форм навчання у першому семестрі двосеместрового курсу. Даний практикум також може використовуватись для студентів інших технічних спеціальностей, на яких вивчається вища математика в обсязі двосеместрового курсу.

Даний практикум охоплює практично всі основні розділи даного курсу; тут містяться необхідні теоретичні відомості, методичні вказівки до виконання завдань, наведені приклади розв'язання задач з детальним поясненням. Крім того, наведений список рекомендованої літератури. Також у посібнику міститься необхідний довідковий матеріал (таблиці тощо). З метою полегшення користування даним посібником нумерація прикладів відповідає нумерації задач у збірці розрахунково-графічних завдань [24].

Розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру, що забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Матеріали даного практикуму можна розглядати як частину конспекту лекцій з вищої математики, в якій на практичних прикладах ілюструються теоретичні положення курсу. З огляду на це матеріали даного посібника можуть бути використані не тільки при виконанні розрахунково-графічних завдань, але і при підготовці до іспиту.

1 МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Завдання 1.1. Розв'язати рівняння
$$\begin{vmatrix} 4 & -x & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ x & -7 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання.

Правило трикутника для обчислення визначників третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Розкриємо заданий визначник за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 4 & -x & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ x & -7 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot (-2) + (-x) \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot (-7) \cdot (-1) - \\ - (-1) \cdot 4 \cdot x - 4 \cdot 1 \cdot (-7) - (-x) \cdot 1 \cdot (-2) = -x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно змінної x :

$$-x^2 + 2x + 3 = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Завдання 1.2. Виконати дії над матрицями $C \cdot (M^T - 4B)$, де

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Операції над матрицями

1. Добуток матриці на число. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B_{m \times n} = (k a_{ij})$.

2. Додавання та віднімання матриць. Ці операції вводяться лише для матриць однакових розмірностей. **Сумою (різницею)** $C = A + B$ ($C = A - B$) двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ ($C_{m \times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$), елементи якої утворені попарним додаванням (відніманням) відповідних елементів заданих матриць.

3. Добуток двох матриць. Перемножити дві матриці можна лише тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. **Добутком матриці** $A_{m \times k} = (a_{il})$ **на матрицю** $B_{k \times n} = (b_{lj})$ називається така матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто $c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

4. Транспонування матриць. Матриця, отримана із заданої заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається **матрицею, транспонованою до заданої**.

$$I \text{ дія. Знайдемо } M^T : M^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 дія. Знайдемо $4 \cdot B$: $4 \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 \\ -4 & 16 & 8 \\ 0 & -8 & 20 \\ 12 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

3 дія. Знайдемо $R = M^T - 4 \cdot B$ (віднімемо від елементів матриці M^T відповідні елементи матриці $4 \cdot B$):

$$R = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 \\ -4 & 16 & 8 \\ 0 & -8 & 20 \\ 12 & 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -10 & -5 \\ 8 & -15 & -6 \\ 5 & 8 & -13 \\ -12 & -17 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 дія. Обчислимо $Z = C \cdot R$.

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 & -10 & -5 \\ 8 & -15 & -6 \\ 5 & 8 & -13 \\ -12 & -17 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -20 + 8 + 0 - 48 & -20 - 15 + 0 - 68 & -10 - 6 + 0 + 12 \\ 0 + 24 + 5 + 12 & 0 - 45 + 8 + 17 & 0 - 18 - 13 - 3 \\ 10 + 32 + 25 + 0 & 10 - 60 + 40 + 0 & 5 - 24 - 65 + 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -60 & -103 & -4 \\ 41 & -20 & -34 \\ 67 & -10 & -84 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -60 & -103 & -4 \\ 41 & -20 & -34 \\ 67 & -10 & -84 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Нехай задано систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.1)$$

де a_{ij} – коефіцієнти системи, x_j – невідомі, b_j – вільні члени, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$.

Матрична форма запису СЛАР (1.1):

$$AX = B, \quad (1.2)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця системи, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – вектор-

стовпець вільних членів, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець невідомих.

Розв'язок СЛАР (1.2), знаходять за формулою: $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1} – обернена матриця до матриці A .

Формула для знаходження оберненої матриці: $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$,

де $\det A \neq 0$, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ – приєднана матриця,

елементами якої є алгебраїчні доповнення матриці,

транспонованої до матриці A .

Запишемо задану систему в матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \cdot 3 - \\ - 3 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) - (-5) \cdot (-3) \cdot 2 = -6 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(6 + 5) = -11;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 + 9) = -11;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 9) = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Запишемо приєднану матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} -19 & -11 & -1 \\ -11 & -7 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Обернена матриця має вигляд: $A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -19 & -11 & -1 \\ -11 & -7 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -19 & -11 & -1 \\ -11 & -7 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} (-19) \cdot (-4) + (-11) \cdot 9 + (-1) \cdot (-5) \\ (-11) \cdot (-4) + (-7) \cdot 9 + 1 \cdot (-5) \\ 7 \cdot (-4) + 5 \cdot 9 + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -18 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$.

Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$.

Завдання 1.4. Знайти всі розв'язки системи методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання.

**Метод Гауса (метод послідовного виключення невідомих)
розв'язання СЛАР**

Метод Гауса складається з двох частин: прямого та зворотного ходів. На практиці зручно працювати не з системою, а

з її розширеною матрицею (*розширена матриця системи* – матриця, яка складається з матриці системи до якої приєднано справа стовпець вільних членів). **Прямий хід:** СЛАР записують у вигляді розширеної матриці системи та зводять її до верхньотрикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці. **Зворотний хід:** отриману матрицю записують у вигляді системи, яку розв'язують, починаючи з останнього рівняння.

Для перевірки на сумісність СЛАР використовується теорема Кронекера-Капеллі.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб СЛАР була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків, які залежать від $n-r$ параметрів (n – кількість невідомих, r – ранг матриці системи).

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 10 & 18 \\ 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right).$$

Зведемо її до верхньотрикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці. Спочатку переставимо місцями перший та другий рядки розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 10 & 18 \\ 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 2 & 1 & 4 & 10 & 18 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right).$$

Перетворимо на нулі всі елементи першого стовпця, крім першого елемента. Для цього до другого рядка додамо перший, помножений на

(-2) , до третього – перший, помножений на (-3) , до четвертого – перший, помножений на 2, отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 2 & 1 & 4 & 10 & 18 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -16 & -32 \\ 0 & 3 & 6 & 12 & 24 \end{array} \right).$$

Далі додамо до третього рядка другий рядок, помножений на (-4) , а до четвертого рядка – другий, помножений на 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -16 & -32 \\ 0 & 3 & 6 & 12 & 24 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right).$$

Як бачимо, ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу матриці системи $r = 2$. Отже, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, задана система сумісна та має безліч розв'язків, які залежать від $n - r = 4 - 2 = 2$ параметрів.

Задаана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 13, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4 + 8. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -(-2x_3 - 4x_4 + 8) - 3x_3 - 7x_4 + 13, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4 + 8. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 4x_4 - 8 - 3x_3 - 7x_4 + 13, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4 + 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 3x_4 + 5, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4 + 8. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -x_3 - 3x_4 + 5, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4 + 8. \end{cases}$

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Задані координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$: $M_1(-6;3;1)$, $M_2(-2;2;-9)$, $M_3(-3;1;-9)$, $M_4(-8;5;-3)$. Виконати наступні завдання.

Завдання 2.1. Знайти кут між ребрами M_1M_2 та M_1M_4 .

Завдання 2.2. Знайти проекцію вектора $\overline{M_1M_3}$ на вектор $\overline{M_1M_4}$.

Завдання 2.3. Знайти площу грані $M_1M_2M_3$.

Завдання 2.4. Знайти довжину висоти піраміди, проведену з вершини M_4 , попередньо знайшовши об'єм піраміди.

Завдання 2.5. Встановити орієнтацію трійки векторів $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ і $\overline{M_1M_4}$.

Розв'язання.

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ знаходиться в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець у точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то **координати вектора $\overline{AB}$** обчислюються за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Знайдемо координати векторів $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$, на яких побудована піраміда:

$$\overline{M_1M_2} = (-2 - (-6); 2 - 3; -9 - 1) = (4; -1; -10);$$

$$\overline{M_1M_3} = (-3 - (-6); 1 - 3; -9 - 1) = (3; -2; -10);$$

$$\overline{M_1M_4} = (-8 - (-6); 5 - 3; -3 - 1) = (-2; 2; -4).$$

Завдання 2.1.

Довжина (модуль) вектора $\vec{a}(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Косинус кута $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ між векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Знайдемо косинус кута між ребрами M_1M_2 та M_1M_4 :

$$\begin{aligned} \cos(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_4}) &= \frac{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_4}}{|\overline{M_1M_2}| \cdot |\overline{M_1M_4}|} = \\ &= \frac{4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + (-10) \cdot (-4)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-10)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{24}} = \\ &= \frac{30}{\sqrt{9 \cdot 13} \cdot \sqrt{4 \cdot 6}} = \frac{30}{3\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{78}} = \frac{5\sqrt{78}}{78}. \end{aligned}$$

Кут між ребрами M_1M_2 та M_1M_4 дорівнює $\arccos\left(\frac{5\sqrt{78}}{78}\right)$.

Завдання 2.2.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Знайдемо проекцію вектора $\overline{M_1M_3}$ на вектор $\overline{M_1M_4}$:

$$\begin{aligned} np_{\overline{M_1 M_4}} \overline{M_1 M_3} &= \frac{\overline{M_1 M_3} \cdot \overline{M_1 M_4}}{|\overline{M_1 M_4}|} = \frac{3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 + (-10) \cdot (-4)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \\ &= \frac{30}{\sqrt{24}} = \frac{30}{\sqrt{4 \cdot 6}} = \frac{30}{2\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Завдання 2.3.

Векторний добуток векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площа трикутника, побудованого на неколінеарних векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, обчислюється за формулою

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площа грані $M_1 M_2 M_3$ дорівнює $S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3}|$.

Спочатку знайдемо векторний добуток $\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3}$:

$$\begin{aligned} \overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -10 \\ 3 & -2 & -10 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 30\vec{j} - 8\vec{k} + 3\vec{k} - \\ &\quad - 20\vec{i} + 40\vec{j} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}. \end{aligned}$$

Знайдемо модуль векторного добутку $\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3}$:

$$|\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3}| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + (-5)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Обчислимо площу грані $M_1 M_2 M_3$:

$$S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5 \text{ (кв. од.)}.$$

Завдання 2.4.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, віднесених до спільного початку, обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Об'єм піраміди $M_1 M_2 M_3 M_4$ можна обчислити за формулою

$$V_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \frac{1}{6} |\overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 M_3} \cdot \overline{M_1 M_4}|. \text{ Спочатку знайдемо мішаний}$$

добуток векторів $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_1 M_3}$, $\overline{M_1 M_4}$:

$$\begin{aligned} \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 M_3} \cdot \overline{M_1 M_4} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 3 & -2 & -10 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 32 - 20 - 60 + \\ &+ 40 - 12 + 80 = 60. \end{aligned}$$

$$V_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10 \text{ (куб. од.)}.$$

Відомо, що $V_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \frac{1}{3} S_{\Delta M_1 M_2 M_3} \cdot H$. З останньої формули

отримуємо:

$$H = \frac{3V_{M_1 M_2 M_3 M_4}}{S_{\Delta M_1 M_2 M_3}} = \frac{3 \cdot 10}{7,5} = 4 \text{ (лін. од.)}.$$

Завдання 2.5.

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють **праву трійку**, а якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, то **ліву**.

Оскільки мішаний добуток $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} \cdot \overline{M_1M_4} = 60 > 0$ (мішаний добуток векторів $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$ обчислено у Завданні 2.4), то вектори $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$ утворюють праву трійку векторів.

Відповідь: завдання 2.1. $\arccos\left(\frac{5\sqrt{78}}{78}\right)$;

завдання 2.2. $np_{\overline{M_1M_4}} \overline{M_1M_3} = 5\sqrt{6}/2$;

завдання 2.3. 7,5 кв. од.;

завдання 2.4. 4 лін. од.;

завдання 2.5: вектори $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$ утворюють праву трійку векторів.

3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Трикутник $M_1M_2M_3$ задано координатами його вершин: $M_1(1;-2)$, $M_2(3;4)$, $M_3(-5;1)$. Зробити креслення та виконати наступні завдання.

Завдання 3.1. Знайти довжину і рівняння сторони M_2M_3 .

Завдання 3.2. Знайти довжину та рівняння висоти, проведеної до сторони M_2M_3 .

Завдання 3.3. Знайти рівняння прямої l , що проходить через точку M_1 паралельно стороні M_2M_3 .

Завдання 3.4. Знайти кут α при вершині M_1 .

Розв'язання. Побудуємо трикутник за координатами його вершин (рис. 3.1).

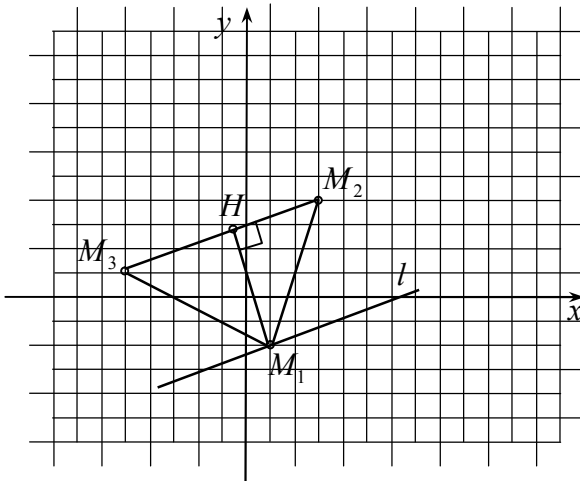


Рисунок 3.1

Завдання 3.1.

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ обчислюється за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Використовуючи формулу для обчислення відстані між двома точками, обчислимо довжину сторони M_2M_3 :

$$\begin{aligned} M_2M_3 &= \sqrt{(x_{M_3} - x_{M_2})^2 + (y_{M_3} - y_{M_2})^2} = \\ &= \sqrt{(-5 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{73}. \end{aligned}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b,$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, α – кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox . b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має заданий кутовий коефіцієнт:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

де $M(x_0; y_0)$ – точка, яка належить прямій, k – кутовий коефіцієнт прямої.

Щоб знайти рівняння сторони M_2M_3 , скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - x_{M_2}}{x_{M_3} - x_{M_2}} = \frac{y - y_{M_2}}{y_{M_3} - y_{M_2}},$$

$$\frac{x - 3}{-5 - 3} = \frac{y - 4}{1 - 4},$$

$$-3(x - 3) = -8(y - 4),$$

$$\frac{x - 3}{-8} = \frac{y - 4}{-3},$$

$$3x - 8y + 23 = 0$$

(рівняння M_2M_3 у загальному вигляді) або

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{23}{8}$$

(рівняння M_2M_3 з кутовим коефіцієнтом).

Завдання 3.2. Із завдання 3.1 кутовий коефіцієнт прямої M_2M_3 дорівнює $k_{M_2M_3} = \frac{3}{8}$. Кутовий коефіцієнт висоти M_1H знайдемо з умови перпендикулярності прямих M_1H та M_2M_3 :

$$k_{M_2M_3} \cdot k_{M_1H} = -1, \quad \frac{3}{8} \cdot k_{M_1H} = -1, \quad k_{M_1H} = -\frac{8}{3}.$$

1 спосіб. Використовуючи рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, отримуємо:

$$y = k_{M_1H}x + b, \quad y = -\frac{8}{3}x + b.$$

Оскільки $M_1 \in M_1H$, то $-2 = -\frac{8}{3} \cdot 1 + b$, $b = \frac{2}{3}$. Отже,

рівняння M_1H має вигляд: $y = -\frac{8}{3}x + \frac{2}{3}$.

2 спосіб. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має заданий кутовий коефіцієнт, отримуємо:

$$y - y_{M_1} = k_{M_1H}(x - x_{M_1}),$$

$$y - (-2) = -\frac{8}{3}(x - 1), \quad y + 2 = -\frac{8}{3}x + \frac{8}{3}, \quad y = -\frac{8}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Довжина висоти M_1H – це відстань від точки M_1 до прямої M_2M_3 .

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої l , заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.1)$$

Використовуючи формулу (3.1) для обчислення відстані від точки до прямої, обчислимо довжину висоти M_1H :

$$d = M_1H = \frac{|A \cdot x_{M_1} + B \cdot y_{M_1} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) + 23|}{\sqrt{3^2 + (-8)^2}} = \frac{42}{\sqrt{73}} = \frac{42\sqrt{73}}{73}.$$

Завдання 3.3. Оскільки пряма l паралельна прямій M_2M_3 , то з умови паралельності прямих випливає, що їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_l = k_{M_2M_3} = \frac{3}{8}$.

1 спосіб. Використовуючи рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, отримуємо:

$$y = k_l x + b, \quad y = \frac{3}{8}x + b.$$

Знайдемо b : $M_1 \in l$, тому $-2 = \frac{3}{8} \cdot 1 + b$, $b = -\frac{19}{8}$. Отже, рівняння l

має вигляд: $y = \frac{3}{8}x - \frac{19}{8}$ (рівняння прямої l з кутовим коефіцієнтом).

2 спосіб. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має заданий кутовий коефіцієнт, отримуємо:

$$y - y_{M_1} = k_l(x - x_{M_1}),$$

$$y - (-2) = \frac{3}{8}(x - 1), \quad y + 2 = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}, \quad y = \frac{3}{8}x - \frac{19}{8}.$$

Завдання 3.4.

Нехай прямі l_1 та l_2 задані рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. **Кут φ між прямими l_1 та l_2** обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (3.2)$$

де k_1 – коефіцієнт прямої, яку повертають проти руху стрілки годинника до збігу з другою прямою.

Для обчислення кута α при вершині M_1 скористаємося формулою (3.2): $tg\alpha = \frac{k_{M_1M_3} - k_{M_1M_2}}{1 + k_{M_1M_3} \cdot k_{M_1M_2}}$. Спочатку знайдемо кутові коефіцієнти прямих M_1M_2 та M_1M_3 . Для цього знайдемо рівняння прямих M_1M_2 та M_1M_3 . Для побудови рівняння прямої M_1M_2 скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - x_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{y - y_{M_1}}{y_{M_2} - y_{M_1}},$$

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - (-2)}{4 - (-2)}, \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{6}, \quad y = 3x - 5.$$

Отже, $k_{M_1M_2} = 3$. Аналогічно знайдемо рівняння прямої M_1M_3 та її кутовий коефіцієнт:

$$\frac{x - x_{M_1}}{x_{M_3} - x_{M_1}} = \frac{y - y_{M_1}}{y_{M_3} - y_{M_1}}, \quad \frac{x - 1}{-5 - 1} = \frac{y - (-2)}{1 - (-2)},$$

$$\frac{x - 1}{-6} = \frac{y + 2}{3}, \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Отже, $k_{M_1M_3} = -\frac{1}{2}$. Остаточню отримуємо:

$$tg\alpha = \frac{-\frac{1}{2} - 3}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3} = 7, \quad \alpha = \arctg 7.$$

Відповідь: завдання 3.1: $\sqrt{73}$, $3x - 8y + 23 = 0$;

завдання 3.2: $y = -\frac{8}{3}x + \frac{2}{3}$, $\frac{42\sqrt{73}}{73}$;

завдання 3.3: $y = \frac{3}{8}x - \frac{19}{8}$;

завдання 3.4: $\alpha = \arctg 7$.

Завдання 3.5, 3.6. Задані рівняння кривих другого порядку $a_i x^2 + b_i y^2 + c_i x + d_i y + k_i = 0$, $i = 1, 2$. Встановити їх вид, знайти центр, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис, координати фокусів, а для гіперболи – рівняння асимптот. Зробити креслення. Дані наведені в таблиці.

№	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	k_1	k_2
1	4	9	25	-16	-24	18	50	96	-39	-279

Розв'язання.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$. Величини a та b називаються **великою** та **малою півосями** еліпса відповідно.

Координати фокусів еліпса: $F_{1,2}(\pm c; 0)$ ($a > b$) або $F_{1,2} = (0; \pm c)$ ($a < b$).

Ексцентриситет еліпса: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($a > b$) або $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ($a < b$),
 $0 \leq \varepsilon < 1$.

Рівняння директрис: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ ($a > b$) або $x = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ ($a < b$).

1) При $i = 1$ з таблиці, заданої в умові завдання, отримуємо $4x^2 + 25y^2 - 24x + 50y - 39 = 0$. Виділимо повні квадрати при змінних x та y :

$$4((x^2 - 6x + 9) - 9) + 25((y^2 + 2y + 1) - 1) - 39 = 0,$$

$$4((x - 3)^2 - 9) + 25((y + 1)^2 - 1) - 39 = 0,$$

$$4(x - 3)^2 + 25(y + 1)^2 - 100 = 0,$$

$$4(x - 3)^2 + 25(y + 1)^2 = 100,$$

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1.$$

Отримали рівняння еліпса $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

(див. додаток А) з півосями $a=5$, $b=2$. Центр кривої – точка $O_1(3, -1)$. Виконаємо паралельне перенесення системи координат Oxy в точку $O_1(3, -1)$ за формулами $X = x - 3$, $Y = y + 1$. У системі координат O_1XY рівняння еліпса має вигляд: $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$.

Для обчислення ексцентриситету треба знати параметр c . Знайдемо параметр c : $c = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} = \sqrt{21}$.

Обчислимо ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Рівняння директрис: $X = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, тобто $X = \frac{25\sqrt{21}}{21}$ і

$$X = -\frac{25\sqrt{21}}{21}.$$

Координати фокусів еліпса: $F_{1,2}(\pm \sqrt{21}; 0)$.

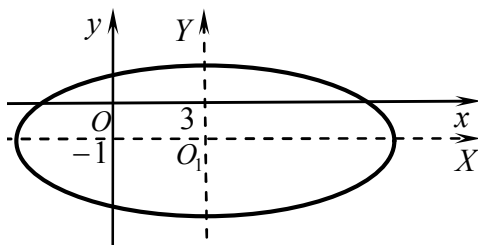


Рисунок 3.2

Використовуючи формули переходу $X = x - 3$, $Y = y + 1$, одержимо рівняння директрис та координати фокусів еліпса у системі координат Oxy :

рівняння директрис $x = 3 + \frac{25\sqrt{21}}{21}$ і $x = 3 - \frac{25\sqrt{21}}{21}$;

координати фокусів $F_{1,2}(3 \pm \sqrt{21}; -1)$.

Еліпс зображений на рис. 3.2.

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де

$b^2 = c^2 - a^2$. Величини a та b називаються **дійсною** та **уявною півосями** гіперболи відповідно.

Координати фокусів еліпса: $F_{1,2}(\pm c; 0)$ (якщо a – дійсна вісь) або $F_{1,2}(0; \pm c)$ (якщо b – дійсна вісь).

Ексцентриситет гіперболи: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (якщо a – дійсна вісь) або $\varepsilon = \frac{c}{b}$ (якщо b – дійсна вісь), $\varepsilon > 1$.

Рівняння директрис гіперболи: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ (якщо a – дійсна вісь) або $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ (якщо b – дійсна вісь).

Рівняння асимптот гіперболи: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

2) При $i = 2$ з таблиці, заданої в умові завдання, отримуємо $9x^2 - 16y^2 + 18x + 96y - 279 = 0$. Виділимо повні квадрати при змінних x та y :

$$\begin{aligned} 9x^2 - 16y^2 + 18x + 96y - 279 &= 0, \\ 9((x^2 + 2x + 1) - 1) - 16((y^2 - 6y + 9) - 9) - 279 &= 0, \\ 9((x + 1)^2 - 1) - 16((y - 3)^2 - 9) - 279 &= 0, \\ 9(x + 1)^2 - 16(y - 3)^2 - 144 &= 0, \\ 9(x + 1)^2 - 16(y - 3)^2 &= 144, \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)^2}{4^2} - \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1.$$

Отримали рівняння гіперболи $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

(див. додаток А) з півосями $a = 4$, $b = 3$. Центр кривої – точка $O_1(-1, 3)$. Виконаємо паралельне перенесення системи координат Oxy в точку $O_1(-1, 3)$ за формулами $X = x + 1$, $Y = y - 3$. У системі координат O_1XY рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{X^2}{4^2} - \frac{Y^2}{3^2} = 1$.

Для обчислення ексцентриситету треба знати параметр c . Знайдемо параметр c : $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Обчислимо ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Рівняння директрис: $X = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, тобто $X = \frac{16}{5}$ і $X = -\frac{16}{5}$.

Рівняння асимптот: $Y = \pm \frac{b}{a} X$, тобто $Y = \pm \frac{3}{4} X$.

Координати фокусів гіперболи: $F_{1,2}(\pm 5; 0)$.

Використовуючи формули переходу $X = x + 1$, $Y = y - 3$, одержимо рівняння директрис та асимптот і координати фокусів гіперболи в системі координат Oxy .

Рівняння директрис: $x = \frac{11}{5}$ і $x = -\frac{21}{5}$.

Рівняння асимптот: $y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$ та $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

Координати фокусів гіперболи: $F_1(4; 3)$, $F_2(-6; 3)$.

Гіпербола зображена на рис. 3.3.

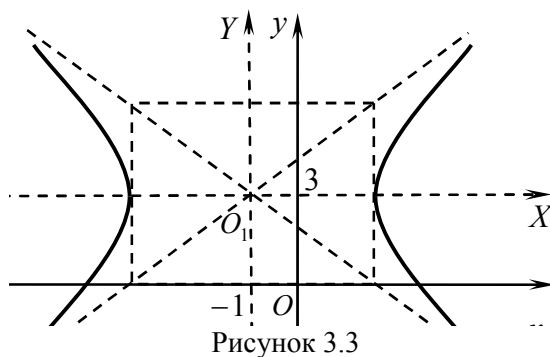


Рисунок 3.3

Відповідь: 1) еліпс $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$; центр $O_1(3, -1)$;

півосі: $a = 5$, $b = 2$; рівняння директрис: $x = 3 + \frac{25\sqrt{21}}{21}$ і

$x = 3 - \frac{25\sqrt{21}}{21}$; координати фокусів: $F_{1,2}(3 \pm \sqrt{21}; -1)$; рис. 3.2;

2) гіпербола $\frac{(x+1)^2}{4^2} - \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$; центр $O_1(-1, 3)$;

півосі: $a = 4$, $b = 3$; рівняння директрис: $x = \frac{11}{5}$ і $x = -\frac{21}{5}$; рівняння

асимптот: $y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$ та $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$; координати фокусів $F_1(4; 3)$, $F_2(-6; 3)$; рис. 3.3.

Завдання 3.7. Встановити, що рівняння $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ визначає параболу. Знайти координати її вершини, рівняння осі симетрії, значення параметра, координати фокуса, рівняння директриси. Зробити креслення. Дані наведено в таблиці.

№	a	b	c	d	k
1	0	2	3	12	12

Розв'язання.

Канонічне рівняння параболі: $y^2 = 2px$, де p – параметр параболі, $p > 0$.

Вершина параболі – точка $O(0;0)$.

Рівняння директриси: $x = -\frac{p}{2}$.

Вісь симетрії: $y = 0$.

Координати фокуса: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p > 0$) також визначають параболі [9, 16] (див. Додаток А).

За умовою $2y^2 + 3x + 12y + 12 = 0$. Виділимо повний квадрат при змінній y :

$$2((y^2 + 6y + 9) - 9) + 3x + 12 = 0,$$

$$2(y + 3)^2 - 18 + 3x + 12 = 0,$$

$$2(y + 3)^2 = -3(x - 2),$$

$$(y + 3)^2 = -\frac{3}{2}(x - 2).$$

Отримали рівняння параболі $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ (див. додаток А). Вершина параболі – точка $O_1(2, -3)$.

Виконаємо паралельне перенесення системи координат Oxy в точку $O_1(2, -3)$ за формулами $X = x - 2$, $Y = y + 3$. У системі координат O_1XY рівняння параболі має вигляд: $Y^2 = -\frac{3}{2}X$.

Рівняння осі симетрії параболі: $Y = 0$. У системі координат Oxy : $y + 3 = 0$, $y = -3$ – вісь симетрії.

Знайдемо параметр p : $2p = \frac{3}{2}$, $p = \frac{3}{4}$.

Координати фокусу параболи: $F\left(\frac{3}{8}; 0\right)$. У системі координат O_1XY координати фокуса мають вигляд $F\left(\frac{19}{8}; -3\right)$.

Рівняння директриси параболи: $X = -\frac{3}{8}$. У системі координат O_1XY рівняння директриси має вигляд $x = \frac{13}{8}$.

Парабола зображена на рис. 3.4

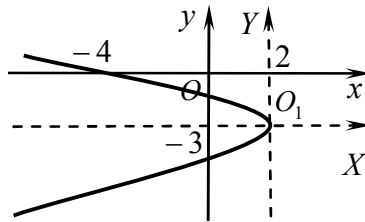


Рисунок 3.4

Відповідь: парабола $(y + 3)^2 = -\frac{3}{2}(x - 2)$; вершина $O_1(2, -3)$;

вісь симетрії $y = -3$, параметр $p = \frac{3}{4}$; координати фокуса

$F\left(\frac{19}{8}; -3\right)$; рівняння директриси $x = \frac{13}{8}$; рис. 3.4.

4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

Задано точки $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;4;2)$, $M_3(2;-1;-3)$, $M_4(-1;2;1)$.

Виконати наступні завдання.

Завдання 4.1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку M_4 паралельно прямій M_1M_2 .

Завдання 4.2. Знайти рівняння площини $M_1M_2M_3$.

Завдання 4.3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку M_4 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$.

Розв'язання.

Завдання 4.1.

Канонічні рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (4.1)$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, що належить прямій, $\vec{S} = (m; n; p)$ – напрямний вектор прямої.

Нехай l_1 – шукана пряма, яка проходить через точку M_4 паралельно прямій M_1M_2 .

Оскільки $l_1 \parallel M_1M_2$, то напрямні вектори цих прямих колінеарні, тому в якості напрямного вектора прямої l_1 можна взяти напрямний вектор прямої M_1M_2 :

$$\vec{S}_{l_1} = \vec{S}_{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_2} = (3-1; 4-(-2); 2-3) = (2; 6; -1).$$

Використовуючи канонічні рівняння прямої, складемо рівняння прямої l_1 :

$$\frac{x - (-1)}{2} = \frac{y - 2}{6} = \frac{z - 1}{-1},$$

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{6} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Завдання 4.2.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальний вектор площини, A, B, C, D – дійсні числа.

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Підставимо координати заданих точок M_1, M_2, M_3 у рівняння площини (4.2), отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - (-2) & z - 3 \\ 3 - 1 & 4 - (-2) & 2 - 3 \\ 2 - 1 & -1 - (-2) & -3 - 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо отриманий визначник за правилом трикутника:

$$\begin{aligned} & (x - 1) \cdot 6 \cdot (-6) + (y + 2) \cdot 1 \cdot (-1) + (z - 3) \cdot 1 \cdot 2 - (z - 3) \cdot 6 \cdot 1 - \\ & - (x - 1) \cdot 1 \cdot (-1) - (y + 2) \cdot 2 \cdot (-6) = 0, \\ & -35x + 11y - 4z + 69 = 0, \\ & 35x - 11y + 4z - 69 = 0. \end{aligned}$$

Отже, $35x - 11y + 4z - 69 = 0$ – загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$.

Завдання 4.3. Нехай l_2 – шукана пряма, яка проходить через точку M_4 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$. Із умови перпендикулярності прямої та площини випливає, що напрямний вектор прямої l_2 та нормальний вектор площини $M_1M_2M_3$ колінеарні, тому в якості напрямного вектора шуканої прямої можна

взяти нормальний вектор площини $M_1M_2M_3$. Із завдання 4.2 $\bar{n} = \bar{S}_{l_2} = (35; -11; 4)$.

За формулами (4.1) отримуємо канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - (-1)}{35} = \frac{y - 2}{-11} = \frac{z - 1}{4},$$

$$\frac{x + 1}{35} = \frac{y - 2}{-11} = \frac{z - 1}{4}.$$

Відповідь: завдання 4.1: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{-1}$;

завдання 4.2: $35x - 11y + 4z - 69 = 0$;

завдання 4.3: $\frac{x+1}{35} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-1}{4}$.

Завдання 4.4. Звести рівняння поверхонь до канонічного вигляду, визначити їх тип та зробити схематичне креслення:

1) $9x^2 + 4z^2 - 54x - 72y + 16z - 11 = 0$;

2) $16x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 64x - 18y - 24z - 35 = 0$.

Розв'язання.

1) Виділимо повні квадрати при змінних x та z :

$$9x^2 + 4z^2 - 54x - 72y + 16z - 11 = 0,$$

$$9((x^2 - 6x + 9) - 9) + 4((z^2 + 4z + 4) - 4) - 72y - 11 = 0,$$

$$9((x - 3)^2 - 9) + 4((z + 2)^2 - 4) - 72y - 11 = 0,$$

$$9(x - 3)^2 + 4(z + 2)^2 = 72y + 108.$$

Поділимо останнє рівняння на 36:

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(z + 2)^2}{9} = 2y + 3,$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(z + 2)^2}{9} = 2\left(y + \frac{3}{2}\right).$$

Отримали рівняння еліптичного параболоїда з віссю симетрії Oy та вершиною $O_1\left(3; -\frac{3}{2}; -2\right)$ (див. додаток Б). Зробимо паралельне

перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1\left(3; -\frac{3}{2}; -2\right)$ за

формулами: $X = x - 3$, $Y = y + \frac{3}{2}$, $Z = z + 2$. У системі координат

O_1XYZ рівняння еліптичного параболоїда матиме вигляд:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Z^2}{9} = 2Y.$$

На рис. 4.1 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

2) Виділимо повні квадрати при змінних x , y , z :

$$16x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 64x - 18y - 24z - 35 = 0,$$

$$16((x^2 + 4x + 4) - 4) + 9((y^2 - 2y + 1) - 1) + 4((z^2 - 6z + 9) - 9) - 35 = 0,$$

$$16((x + 2)^2 - 4) + 9((y - 1)^2 - 1) + 4((z - 3)^2 - 9) - 35 = 0,$$

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 + 4(z - 3)^2 - 144 = 0,$$

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 + 4(z - 3)^2 = 144.$$

Поділимо останнє рівняння на 144:

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{16} + \frac{(z - 3)^2}{36} = 1.$$

Отримали рівняння еліпсоїда з центром у точці $O_1(-2; 1; 3)$ та півосями $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$ (див. додаток Б).

Виконаємо паралельне перенесення системи координат $Oxyz$ в точку $O_1(-2; 1; 3)$ за формулами: $X = x + 2$, $Y = y - 1$, $Z = z - 3$. У системі координат O_1XYZ рівняння еліпсоїда має вигляд:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} + \frac{Z^2}{36} = 1.$$

На рис. 4.2 зроблено рисунок цієї поверхні в системі координат O_1XYZ .

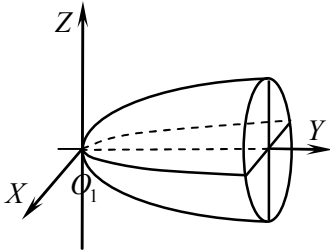


Рисунок 4.1

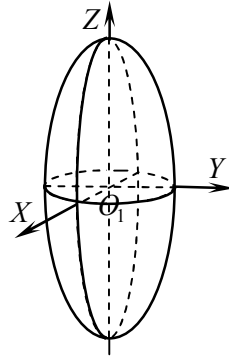


Рисунок 4.2

Відповідь: 1) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(z+2)^2}{9} = 2\left(y + \frac{3}{2}\right)$, еліптичний

параболоїд, рис. 4.1;

2) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(z-3)^2}{36} = 1$, еліпсоїд, рис. 4.2.

5 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 5.1. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 12x - 28}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 2$ границі чисельника та знаменника дорівнюють нулю, тому маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Щоб розкрити цю невизначеність, розкладемо чисельник та знаменник дробу, який стоїть під знаком границі, на множники.

Формула розкладу квадратного тричлена на множники:
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена, які обчислюються за формулами $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
 $D = b^2 - 4ac$.

Одержуємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 12x - 28} &= \left[\frac{3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2}{2^2 + 12 \cdot 2 - 28} = \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \left(x + \frac{1}{3} \right) (x - 2)}{(x + 14)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{x + 14} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2 + 14} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{7}{16}$.

Завдання 5.2. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 10x + 4}{7x^2 + 6x + 9}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник дробу прямують до нескінченості, тобто маємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Для того, щоб розкрити цю невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу, який стоїть під знаком границі, на старший степінь змінної x , тобто на x^2 . Отримаємо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 10x + 4}{7x^2 + 6x + 9} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{10x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{9}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2}}{7 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{5 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{5}{7}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{5}{7}$.

Завдання 5.3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{9x^2}$.

Розв'язання. Для обчислення даної границі перетворимо чисельник дробу, який стоїть під знаком границі, за формулою

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

та скористаємося наслідком з

першої важливої границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$. Отримуємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{9x^2} &= \left[\frac{\cos 0 - \cos 0}{0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{7x + 3x}{2} \sin \frac{7x - 3x}{2}}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin 2x}{9x^2} = \\ &= -\frac{2}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = -\frac{2}{9} \cdot 5 \cdot 2 = -\frac{20}{9} = -2\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Відповідь: $-2\frac{2}{9}$.

Завдання 5.4. Продиференціювати функцію $y = \frac{\sqrt{sh(7x)}}{\arccos^3(x^2)}$.

Розв'язання.

Правила диференціювання. Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовні функції, тоді

$$\begin{aligned} 1) (u \pm v)' &= u' \pm v'; & 2) (uv)' &= u'v + uv'; \\ 3) (Cu)' &= Cu', \text{ де } C = \text{const}; & 4) \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0. \end{aligned}$$

Похідна складеної функції. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x , а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x , яка обчислюється за формулою $y'_x = y'_u u'_x$.

Використовуючи правило диференціювання частки функцій 4), таблицю похідних елементарних функцій (див. додаток В) та правило диференціювання складеної функції, отримуємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sqrt{sh(7x)})' \arccos^3(x^2) - \sqrt{sh(7x)} (\arccos^3(x^2))'}{(\arccos^3 x^2)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{sh(7x)}} (sh(7x))' \arccos^3(x^2) - \sqrt{sh(7x)} \cdot 3 \arccos^2(x^2) (\arccos x^2)'}{\arccos^6 x^2} = \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{sh(7x)}} ch(7x)(7x)' \cdot \arccos^3(x^2) - \sqrt{sh(7x)} \cdot 3 \arccos^2(x^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \right) \cdot (x^2)' \right] \cdot \frac{1}{\arccos^6 x^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{7ch(7x)\arccos^3(x^2)}{2\sqrt{sh(7x)}} + \frac{\sqrt{sh(7x)} \cdot 3\arccos^2(x^2) \cdot 2x}{\sqrt{1-x^4}} \\
&= \frac{\arccos^6(x^2)}{\arccos^6(x^2)} = \\
&= \frac{7ch(7x)}{2\sqrt{sh(7x)}\arccos^3(x^2)} + \frac{6x\sqrt{sh(7x)}}{\sqrt{1-x^4}\arccos^4(x^2)}. \\
&\text{Відповідь: } \frac{7ch(7x)}{2\sqrt{sh(7x)}\arccos^3(x^2)} + \frac{6x\sqrt{sh(7x)}}{\sqrt{1-x^4}\arccos^4(x^2)}.
\end{aligned}$$

Завдання 5.5. Знайти y'_x для функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{2}, \\ y = \sqrt{4-t^2}. \end{cases}$$

Розв'язання.

Якщо функція задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $x(t)$ та $y(t)$ – диференційовні функції, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (5.1)$$

Спочатку знайдемо x'_t , y'_t :

$$\begin{aligned}
x'_t &= \left(\arcsin \frac{t}{2} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}} \cdot \left(\frac{t}{2} \right)' = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \\
y'_t &= \left(\sqrt{4-t^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-t^2}} \cdot (4-t^2)' = -\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}
\end{aligned}$$

$$\text{За формулою (5.1) отримуємо: } y'_x = \frac{-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}} = -t.$$

Відповідь: $y'_x = -t$.

Завдання 5.6. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \sin^3(\pi x/4)}{2 + x}$,

використовуючи правило Лопіталя.

Розв'язання.

Правило Лопіталя (для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Якщо для функцій $f(x)$ та $g(x)$ виконуються умови:

- 1) функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовні в околі точки a , за винятком, можливо, самої точки a , $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$);
- 3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

тоді існує границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ і вона дорівнює

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \sin^3(\pi x/4)}{2 + x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(1 + \sin^3(\pi x/4))'}{(2 + x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{4} \cdot \cos \frac{\pi x}{4} \cdot \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \sin^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{4} = \\ &= \frac{3 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 0}{4} = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: 0.

Завдання 5.7. Провести повне дослідження функції

$$y = \frac{x^3}{9(x-2)^2} \text{ та побудувати її графік.}$$

Розв'язання.

Загальна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
3. Дослідити функцію на періодичність, парність та непарність.
4. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
5. Знайти інтервали опуклості графіка функції та точки перегину.
6. Знайти асимптоти графіка функції, якщо вони існують.
7. Зробити додаткові дослідження (при необхідності). Побудувати графік функції.

1. $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Точка перетину графіка функції з осями координат: $O(0;0)$.

3. Функція неперіодична. Оскільки

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{9(-x-2)^2} = -\frac{x^3}{9(x+2)^2} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases},$$

то функція не є ні парною, ні непарною.

4. Знайдемо похідну функції:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3}{9(x-2)^2} \right)' = \frac{1}{9} \left(\frac{x^3}{(x-2)^2} \right)' = \frac{1}{9} \frac{(x^3)'(x-2)^2 - x^3((x-2)^2)'}{((x-2)^2)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{9(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2) - 2x)}{9(x-2)^4} = \frac{x^2(x-6)}{9(x-2)^3}. \end{aligned}$$

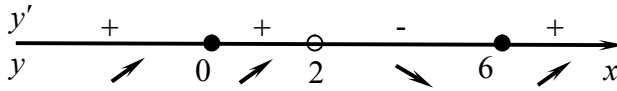
Знайдемо критичні точки функції:

$$y'(x) = 0, \text{ якщо } x^2(x-6) = 0, \text{ тобто } x_1 = 0, x_2 = 6;$$

$$y'(x) \text{ не існує, якщо } 9(x-2)^3 = 0, \text{ тобто } x-2 = 0 \quad x_3 = 2.$$

Отже, маємо три критичні точки: $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 2$.

Визначимо знаки y' на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції.



Інтервали монотонності:

$y' > 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$, тому задана функція на цих інтервалах зростає;

$y' < 0$ при $x \in (2; 6)$, тому задана функція спадає на цьому інтервалі.

Точки екстремуму:

$$x = 6 - \text{точка локального мінімуму}; y_{\min} = y(6) = \frac{6^3}{9(6-2)^2} = 1,5.$$

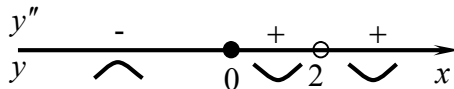
5. Для знаходження проміжків опуклості графіка знайдемо другу похідну заданої функції:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^2(x-6)}{9(x-2)^3} \right)' = \frac{1}{9} \left(\frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3} \right)' = \\ &= \frac{(x^3 - 6x^2)'(x-2)^3 - (x^3 - 6x^2)((x-2)^3)'}{9(x-2)^6} = \\ &= \frac{(3x^2 - 12x)(x-2)^3 - (x^3 - 6x^2)3(x-2)^2}{9(x-2)^6} = \\ &= \frac{3x(x-2)^2((x-4)(x-2) - (x^2 - 6x))}{9(x-2)^6} = \frac{8x}{3(x-2)^4}. \end{aligned}$$

Знайдемо критичні точки другої похідної: $y'' = 0$, при $x = 0$.
 y'' не існує при $x = 2$.

Отже, маємо дві критичні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Визначаємо знак другої похідної на проміжках, на які ці точки розбивають область визначення функції.



Інтервали опуклості графіка функції:

$y'' < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, тому задана функція на цьому інтервалі опукла догори;

$y'' > 0$ при $x \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$, тому функція на цих інтервалах опукла донизу.

Оскільки при переході через $x = 0$ друга похідна y'' змінює знак, то точка $O(0; 0)$ є точкою перегину заданої функції.

Пряма l називається **асимптотою** кривої, якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M , рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Існують три види асимптот: вертикальні, похилі та горизонтальні.

Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою** функції $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Якщо для кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$, існують скінченні границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx), \quad (5.2)$$

то пряма $y = kx + b$ є **похилою асимптотою** кривої $y = f(x)$, при $k = 0$ $y = b$ є **горизонтальною асимптотою** кривої.

6. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{9(x-2)^2} = \infty$, то пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота заданої функції.

Знайдемо похилі асимптоти. За формулами (5.2) отримуємо:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{9x(x-2)^2} = \frac{1}{9},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{9(x-2)^2} - \frac{1}{9}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 4x}{9(x-2)^2} = \frac{4}{9}.$$

Отже, графік даної функції має похилу асимптоту $y = \frac{x}{9} + \frac{4}{9}$.

7. Будемо графік функції $y = \frac{x^3}{9(x-2)^2}$ (рис. 5.1).

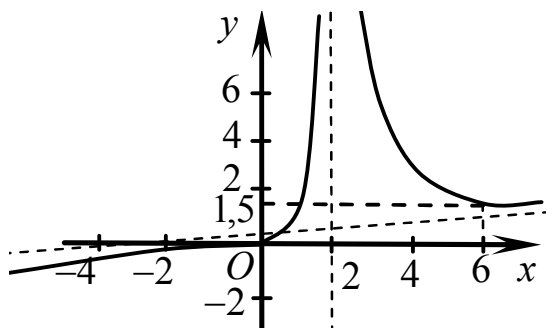


Рисунок 5.1

Відповідь: рис. 5.1.

Завдання 5.8. Від прямокутного аркуша картону довжиною 48 см та шириною 30 см відрізають на кутах однакові квадрати. Із частини аркуша, що залишилась, склеюють відкриту прямокутну коробку. Якою повинна бути довжина сторони відрізаних квадратів, щоб об'єм коробки був найбільшим?

Розв'язання. Нехай x см – довжина сторони відрізаного квадрата ($0 \leq x \leq 15$).

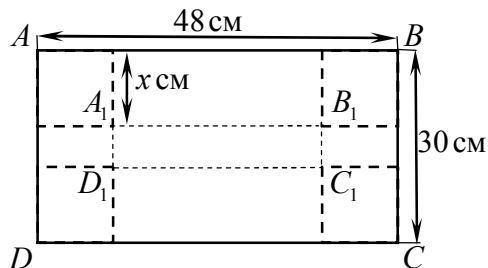


Рисунок 5.2

Коробка матиме форму прямокутного паралелепіпеда з основою $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.2). Виразимо об'єм коробки як функцію змінної x :

$$V(x) = (30 - 2x)(48 - 2x)x.$$

Знайдемо критичні точки функції $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440.$$

$$x^2 - 26x + 120 = 0;$$

$$x_1 = 20; x_2 = 6.$$

Оскільки $0 \leq x \leq 15$, то маємо лише одну критичну точку $x = 6$.

При $x = 6$ функція $V(x)$ досягає максимуму, оскільки $V''(x) = 24x - 312$, $V''(6) = -168 < 0$ (за другою достатньою ознакою локального екстремуму). Отже, при $x = 6$ об'єм коробки буде найбільшим.

Відповідь: 6 см.

6 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 6.1. Знайти повний диференціал функції
 $z = \sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3$.

Розв'язання.

Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то її **повний диференціал** існує та обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (6.1)$$

Спочатку знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3} \cdot (10x + 2y) = \frac{5x + y}{\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3} \cdot (-8y + 2x) = \frac{-4y + x}{\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3}.$$

Підставляємо знайдені частинні похідні в формулу (6.1), отримуємо:

$$dz = \frac{5x + y}{\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3} dx + \frac{-4y + x}{\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3} dy.$$

Відповідь:

$$dz = \frac{5x + y}{\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3} dx + \frac{-4y + x}{\sqrt{5x^2 - 4y^2 + 2xy} - 3} dy.$$

Завдання 6.2. Знайти екстремуми функції
 $z = x^3 + 6y^2 + 6xy - 21x - 6y + 7$.

Розв'язання.

Теорема 6.1 (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінним x та y дорівнюють нулю або

не існують.

Точки, в яких частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$ дорівнюють нулю, називаються її **стаціонарними точками**.

Для функції $z = f(x, y)$ введемо позначення: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,
 $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\Delta = A \cdot C - B^2$.

Теорема 6.2 (достатні умови екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$ і деякому її околі функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, тоді:

якщо $\Delta(M_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум при $\Delta(M_0) < 0$ і мінімум при $\Delta(M_0) > 0$;

якщо $\Delta(M_0) < 0$, то в точці M_0 функція $z = f(x, y)$ екстремуму не має;

якщо $\Delta(M_0) = 0$, то питання про наявність екстремуму в точці M_0 потребує додаткових досліджень.

Знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y - 21, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12y + 6x - 6.$$

Знаходимо стаціонарні точки заданої функції з системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6y - 21 = 0, \\ 12y + 6x - 6 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 7, \\ 2y + x = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 7, \\ x = 1 - 2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - 2y)^2 + 2y = 7, \\ x = 1 - 2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4y + 4y^2 + 2y = 7, \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - y - 3 = 0, \\ x = 1 - 2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1, \\ y_2 = 1,5, \\ x = 1 - 2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -1, \\ x_2 = -2 \\ y_2 = 1,5. \end{cases}$$

Отримали дві стаціонарні точки: $M_1(3;-1)$ та $M_2(-2;1,5)$.

Знаходимо A , B , C та Δ для заданої функції:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12,$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 72x - 36.$$

$\Delta(M_1) = 72 \cdot 3 - 36 = 180 > 0$, тому в точці $M_1(3;-1)$ задана функція має екстремум. Оскільки $A(M_1) = 18 > 0$, то за теоремою 6.2 точка $M_1(3;-1)$ є точкою локального мінімуму:

$$z_{\min} = z(3;-1) = 3^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 3 \cdot (-1) - 21 \cdot 3 - 6 \cdot (-1) + 7 = -35.$$

$\Delta(M_2) = 72 \cdot (-2) - 36 = -180 < 0$, тому в точці $M_2(-2;1,5)$ екстремуму немає.

Відповідь: $z_{\min} = z(3;-1) = -35$.

7 ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 7.1. Обчислити невизначені інтеграли:

$$1) \int \left(5x^4 + 8x^4\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x} \right) dx;$$

$$2) \int \left(\frac{4}{7\sqrt{16-x^2}} + \frac{3}{\sin^2 x} + 7^x \right) dx.$$

Розв'язання. Обчислимо задані інтеграли методом безпосереднього інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають **безпосереднім інтегруванням**.

Властивості невизначених інтегралів:

$$1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$2) \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$3) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k - const;$$

$$4) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$5) \text{ якщо } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ і } u = \varphi(x) - \text{довільна функція, що має неперервну похідну, то } \int f(u) du = F(u) + C;$$

$$6) \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{тоді}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C, \quad a, b - const.$$

$$1) \int \left(5x^4 + 8x^4\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(5x^4 + 8x^{\frac{5}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-4} + \frac{2}{x} \right) dx = \\
&= 5 \cdot \frac{x^5}{5} + 8 \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 5 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2\ln|x| + C = \\
&= x^5 + \frac{32}{9}x^{\frac{9}{4}} + 6x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}x^{-3} + 2\ln|x| + C = \\
&= x^5 + \frac{32}{9}x^{2\frac{1}{4}}\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + \frac{5}{3x^3} + 2\ln|x| + C.
\end{aligned}$$

$$2) \int \left(\frac{4}{7\sqrt{16-x^2}} + \frac{3}{\sin^2 x} + 7^x \right) dx = \frac{4}{7} \arcsin \frac{x}{4} - 3 \operatorname{ctg} x + \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

Відповідь: 1) $x^5 + \frac{32}{9}x^{2\frac{1}{4}}\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + \frac{5}{3x^3} + 2\ln|x| + C$;

2) $\frac{4}{7} \arcsin \frac{x}{4} - 3 \operatorname{ctg} x + \frac{7^x}{\ln 7} + C$.

Завдання 7.2. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 dx}{8+x^4}$;

2) $\int \frac{dx}{5+9x^2}$;

3) $\int e^{-6 \sin x} \cos x dx$.

Розв'язання. Задані інтеграли можна обчислити методом заміни змінної або методом введення під знак диференціала частини виразу, що стоїть під знаком інтеграла.

Метод заміни змінної (метод підстановки). Якщо функція $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то в заданому невизначеному інтегралі $\int f(x)dx$ можна перейти до змінної t за формулою

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (7.1)$$

потім обчислити інтеграл в правій частині формули (7.1) та повернутися до початкової змінної x .

$$\begin{aligned} 1) \text{ І спосіб. } \int \frac{x^3 dx}{8+x^4} &= \left| \begin{array}{l} t = 8+x^4, \\ dt = 4x^3 dx, \\ \frac{1}{4} dt = x^3 dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln|t| + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln|8+x^4| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ спосіб. } \int \frac{x^3 dx}{8+x^4} &= \left| \begin{array}{l} (8+x^4)' = 4x^3, \\ d(8+x^4) = 4x^3 dx, \\ \frac{1}{4} d(8+x^4) = x^3 dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{d(8+x^4)}{8+x^4} = \frac{1}{4} \ln|8+x^4| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ І спосіб. } \int \frac{dx}{5+9x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{5})^2 + (3x)^2} = \left| \begin{array}{l} t = 3x, \\ dt = 3dx, \\ \frac{1}{3} dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(\sqrt{5})^2 + t^2} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3x}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{5}x}{5} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \text{ ncoci}\delta. \int \frac{dx}{5+9x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{5})^2 + (3x)^2} = \left| \begin{array}{l} (3x)' = 3, \\ d(3x) = 3 dx, \\ \frac{1}{3} d(3x) = dx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{(\sqrt{5})^2 + (3x)^2} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3x}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{5}x}{5} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) 1 \text{ ncoci}\delta. \int e^{-6 \sin x} \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} t = -6 \sin x, \quad dt = -6 \cos x dx, \\ -\frac{1}{6} dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\
 &= -\frac{1}{6} \int e^t dt = -\frac{1}{6} e^t + C = -\frac{1}{6} e^{-6 \sin x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \text{ ncoci}\delta. \int e^{-6 \sin x} \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} (-6 \sin x)' = -6 \cos x, \\ d(-6 \sin x) = -6 \cos x dx, \\ -\frac{1}{6} d(-6 \sin x) = \cos x dx \end{array} \right| = \\
 &= -\frac{1}{6} \int e^{-6 \sin x} d(-6 \sin x) = -\frac{1}{6} e^{-6 \sin x} + C.
 \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{4} \ln|8+x^4| + C$;

2) $\frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{5}x}{5} + C$;

3) $-\frac{1}{6} e^{-6 \sin x} + C$.

Завдання 7.3. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int (5x+4) \cos 7x dx$;

$$2) \int x \cdot 5^{-7x} dx ;$$

$$3) \int \arccos x dx .$$

Розв'язання. Для обчислення заданих інтегралів скористаємося методом інтегрування частинами.

Інтегрування частинами виконується за формулою

$$\int u dv = uv - \int v du ,$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні та диференційовні функції.

Деякі види інтегралів, які обчислюються цим методом:

1. $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)a^{kx} dx$, $\int P(x)\sin(kx)dx$,
 $\int P(x)\cos(kx)dx$, де $P(x)$ – многочлен, a , k – дійсні числа. У цих інтегралах за u слід взяти $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився разом з dx ;

2. $\int P(x)\arcsin(kx)dx$, $\int P(x)\arccos(kx)dx$,
 $\int P(x)\arctg(kx)dx$, $\int P(x)\text{arcctg}(kx)dx$, $\int P(x)\ln(kx)dx$,
 $\int P(x)\log_a(kx)dx$, де $P(x)$ – многочлен, a , k – дійсні числа. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)dx$, а за u – вираз, що залишився;

3. $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)dx$, $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)dx$, $\int a^{\alpha x} \cos(\beta x)dx$,
 $\int a^{\alpha x} \sin(\beta x)dx$, де a , α , β – дійсні числа. За u можна взяти $e^{\alpha x}$, а за dv – вираз, що залишився разом з dx .

$$\begin{aligned} 1) \int (5x+4)\cos 7x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 5x+4, \quad du = 5dx \\ dv = \cos 7x dx, \quad v = \frac{1}{7}\sin 7x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{7}(5x+4)\sin 7x - \frac{5}{7} \int \sin 7x dx = \frac{1}{7}(5x+4)\sin 7x + \frac{5}{49}\cos 7x + C . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int x \cdot 5^{-7x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 5^{-7x} dx, \quad v = -\frac{5^{-7x}}{7 \ln 5} \end{array} \right| = -\frac{x \cdot 5^{-7x}}{7 \ln 5} - \\
 &- \int \left(-\frac{5^{-7x}}{7 \ln 5} \right) dx = -\frac{x \cdot 5^{-7x}}{7 \ln 5} + \frac{1}{7 \ln 5} \int 5^{-7x} dx = -\frac{x \cdot 5^{-7x}}{7 \ln 5} + \\
 &+ \frac{1}{7 \ln 5} \cdot \left(-\frac{5^{-7x}}{7 \ln 5} \right) + C = -\frac{x \cdot 5^{-7x}}{7 \ln 5} - \frac{5^{-7x}}{49 \ln^2 5} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \arccos x dx &= \left| \begin{array}{l} du = \arccos x, \quad u = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x - \\
 &- \int x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x + \\
 &+ \left(-\frac{1}{2} \right) \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{7}(5x+4)\sin 7x + \frac{5}{49}\cos 7x + C$;

2) $-\frac{x \cdot 5^{-7x}}{7 \ln 5} - \frac{5^{-7x}}{49 \ln^2 5} + C$;

3) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

Завдання 7.4. Обчислити площу області, обмеженої кривими $y = x^3$, $y = x^2 + 2x$.

Розв'язання.

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a; b]$, $F(x)$ – її первісна на $[a; b]$, тоді

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Нехай на відрізьку $[a; b]$ задано неперервну невід'ємну функцію

$y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$). Фігура, обмежена графіком цієї функції, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, називається **криволінійною трапецією** (рис. 7.1). Її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \geq 0.$$

Якщо $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні на проміжку $[a; b]$ функції і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, тоді **площу фігури**, зображеної на рис. 7.2, обчислюють за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (7.2)$$

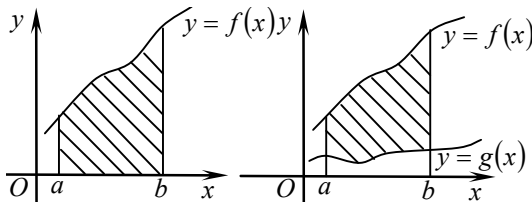


Рисунок 7.1

Рисунок 7.2

Визначимо абсиси точок перетину заданих ліній:

$$x^3 = x^2 + 2x, \quad x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2.$$

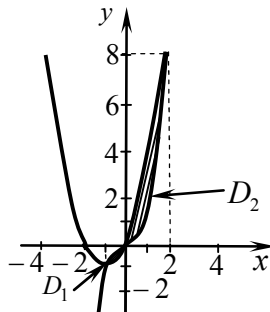


Рисунок 7.3

Зобразимо дані криві в одній декартовій системі координат (рис. 7.3).

Площу фігури, обмежену даними лініями, знайдемо як суму площ областей D_1 та D_2 . Використовуючи формулу (7.2), обчислимо площі фігур D_1 та D_2 :

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{5}{12} \text{ (кв. од.)},$$

$$S_2 = \int_0^2 (x^2 + 2x - x^3) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{8}{3} + 4 - \frac{16}{4} - 0 = \frac{8}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Отже, площа всієї області, обмеженої даними лініями:

$$S = S_1 + S_2 = 3 \frac{1}{12} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $3 \frac{1}{12}$ кв. од.

Завдання 7.5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, яка обмежена вказаними кривими навколо заданої осі координат:

1) $y = 4\sqrt{x}$, $y = 2x$, Ox ;

2) $y = \sqrt{x-2}$, $y = x^2 + 1$, $y = 1$, $y = 2$, Oy .

Розв'язання.

Об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$) (рис. 7.4), обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (7.3)$$

Об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $x = g(y)$ ($g(y) \geq 0$), віссю ординат та прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$)

(рис. 7.5), обчислюється за формулою:

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy. \quad (7.4)$$

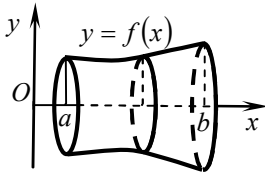


Рисунок 7.4

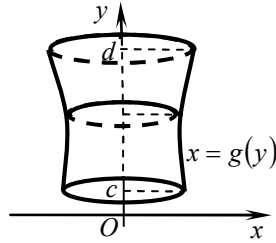


Рисунок 7.5

1) Утворена даними лініями фігура $OABC$ (рис. 7.6) при обертанні утворює тіло, об'єм якого можна обчислити як різницю об'ємів тіл, утворених обертанням навколо осі абсцис трапецій $OABD$ і $OCBD$.

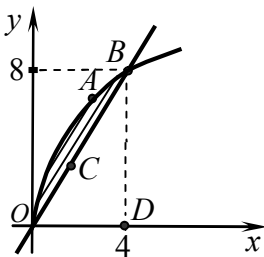


Рисунок 7.6

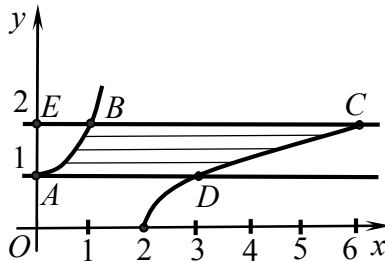


Рисунок 7.7

За формулою (7.3) знайдемо об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції $OABD$ навколо осі Ox :

$$V_1 = \pi \int_0^4 (4\sqrt{x})^2 dx = 16\pi \int_0^4 x dx = 8\pi x^2 \Big|_0^4 = 8\pi \cdot 4^2 - 0 = 128\pi \text{ (куб.од.)}$$

Аналогічно обчислюємо об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції $OCBD$ навколо осі Ox :

$$V_2 = \pi \int_0^4 (2x)^2 dx = 4\pi \int_0^4 x^2 dx = 4\pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 4\pi \left(\frac{4^3}{3} - 0 \right) = \frac{256\pi}{3} \text{ (куб.од.)}$$

$$\text{Шуканий об'єм } V = V_1 - V_2 = 128\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{128\pi}{3} \text{ (куб. од.)}.$$

2) Утворена даними лініями фігура $ABCD$ (рис. 7.7) при обертанні утворює тіло, об'єм якого можна обчислити як різницю об'ємів тіл, утворених обертанням навколо осі Oy трапецій $AECD$ і AEB . За формулою (7.4) знайдемо об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції $AECD$ навколо осі Oy :

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^2 (y^2 + 2)^2 dy = \pi \int_1^2 (y^4 + 4y^2 + 4) dy = \pi \left(\frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3} + 4y \right) \Big|_1^2 = \\ &= \pi \left(\frac{2^5}{5} + \frac{4 \cdot 2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{4 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right) \right) = \frac{293}{15} \pi \text{ (куб.од.)}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюємо об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції AEB навколо осі Oy :

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_1^2 (\sqrt{y-1})^2 dy = \pi \int_1^2 (y-1) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{2^2}{2} - 2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (куб.од.)}. \end{aligned}$$

$$\text{Шуканий об'єм: } V = V_1 - V_2 = \frac{293\pi}{15} - \frac{\pi}{2} = \frac{571\pi}{30} \text{ (куб.од.)}.$$

Відповідь: 1) $128\pi/3$ (куб.од.);

2) $571\pi/30$ (куб.од.).

8 РЯДИ

Завдання 8.1, 8.2. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{6^n \cdot n!};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{4n+3} \right)^{2n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(5n+3)}{5n+3};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 2}{7n^5 + 4n^4 - n}.$$

Розв'язання.

1) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємось ознакою Даламбера.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то цей ряд при $l < 1$ збіжний, при $l > 1$ розбіжний, при $l = 1$ – для дослідження на збіжність необхідно застосовувати іншу ознаку.

Маємо:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8^n}{6^n \cdot n!}, \quad a_{n+1} = \frac{8^{n+1}}{6^{n+1} \cdot (n+1)!}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8^{n+1}}{6^{n+1} \cdot (n+1)!} : \frac{8^n}{6^n \cdot n!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8^{n+1}}{6^{n+1} (n+1)!} \cdot \frac{6^n n!}{8^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6(n+1)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Отже, за ознакою Даламбера заданий ряд збіжний.

2) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємось радикальною ознакою Коші.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то цей ряд при $l < 1$ збіжний, при $l > 1$ розбіжний, при $l = 1$ – для дослідження на збіжність необхідно застосовувати іншу ознаку.

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } a_n &= \left(\frac{4n-5}{4n+3} \right)^{2n^2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-5}{4n+3} \right)^{2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(4n+3)-3-5}{4n+3} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{4n+3} \right)^{2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{8}{4n+3} \right) \right)^{-\frac{4n+3}{8}} \right]^{-\frac{8}{4n+3} \cdot 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{16n}{4n+3}} = e^4 = \frac{1}{e^4} < 1. \end{aligned}$$

Отже, за радикальною ознакою Коші заданий ряд збіжний.

3) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємось інтегральною ознакою Коші.

Інтегральна ознака Коші. Нехай задано ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, де $f(x)$ – неперервна додатна монотонно спадна функція на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді заданий ряд збіжний, якщо збіжний невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

$$\text{Маємо: } f(x) = \frac{\ln^2(5x+3)}{5x+3},$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\ln^2(5x+3)}{5x+3} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\ln^2(5x+3)}{5x+3} dx = \\
&= \frac{1}{5} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \ln^2(5x+3) d(\ln(5x+3)) = \frac{1}{5} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln^3(5x+3)}{3} \Big|_1^A \right) = \\
&= \frac{1}{5} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln^3(5A+3)}{3} - \frac{\ln^3 8}{3} \right) = \infty.
\end{aligned}$$

Невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2(5x+3)}{5x+3} dx$ розбіжний, тому за інтегральною ознакою Коші заданий ряд також розбіжний.

4) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємося граничною ознакою порівняння. Порівняємо заданий ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, який є збіжним (як узагальнений гармонічний з показником $\alpha = 3 > 1$).

Гранична ознака порівняння. Нехай задано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ ($k \neq 0$, $k \neq \infty$), тоді характери збіжності цих рядів однакові.

За граничною ознакою порівняння отримуємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 2}{7n^5 + 4n^4 - n} : \frac{1}{n^3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 2}{7n^5 + 4n^4 - n} \cdot \frac{n^3}{1} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 - 2n^3}{7n^5 + 4n^4 - n} = \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

Отже, за граничною ознакою порівняння характери збіжності заданого та порівнюваного ряду однакові, тобто заданий ряд збіжний.

Відповідь: 1) збіжний;

2) збіжний;

- 3) розбіжний;
4) збіжний.

Завдання 8.3. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{9^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+3}{n(n+4)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5n}{3n+7} \right)^n.$$

Розв'язання.

Нехай задано довільний знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (8.1)$$

Складемо ряд із модулів його членів

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (8.2)$$

Теорема 8.1 (ознака збіжності знакозмінних рядів). Якщо ряд (8.2) збіжний, то ряд (8.1) збіжний.

Знакозмінний ряд (8.1) називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд (8.2), складений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо знакозмінний ряд (8.1) збіжний, а ряд, складений з модулів його членів (8.2), розбіжний, то ряд (8.1) називається **умовно збіжним**.

Якщо знаки знакозмінного ряду строго чергуються, то він називається **знакопочередним**.

$$a_1 - a_2 + a_2 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (8.3)$$

де $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$

Ознака Лейбніца (достатня ознака збіжності знакопочередних рядів). Знакопочередний ряд (8.3) збіжний, якщо виконуються умови: 1) $a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого члена.

1) Складемо ряд із модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{9^n}$.

Порівняємо отриманий ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ (збіжний, як геометрична прогресія зі знаменником $q = \frac{1}{9} < 1$). Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{9^n}}{\frac{1}{9^n}} = \pi, \text{ то за граничною ознакою порівняння ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{9^n}$$

збіжний. Отже, за теоремою 8.1 заданий ряд є абсолютно збіжним.

2) Складемо ряд із модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+4)}$.

Порівняємо отриманий ряд із гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{n(n+4)} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+3)n}{n(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3n}{n^2+4n} = 5.$$

За граничною ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+4)}$ розбіжний.

Оскільки ряд, складений із модулів членів заданого ряду, розбіжний, то заданий ряд не є абсолютно збіжним.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца для заданого ряду:

$$1) \frac{8}{5} > \frac{13}{12} > \frac{18}{21} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{n(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{n^2+4n} = 0.$$

За ознакою Лейбніца заданий знакопочережний ряд є збіжним.

Отже, заданий ряд є умовно збіжним.

3) Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n}{3n+7} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n = \infty \neq 0$, то не

виконується необхідна умова збіжності.

Необхідна ознака збіжності числового ряду. Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ збіжний, то } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Отже, заданий ряд є розбіжним.

Відповідь: 1) абсолютно збіжний;
2) умовно збіжний;
3) розбіжний.

Завдання 8.4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$.
Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

1) $f(x) = 5^{-x^3};$

2) $f(x) = \frac{5}{1-7x}.$

Розв'язання.

1) Запишемо задану функцію у вигляді $f(x) = 5^{-x^3} = e^{-x^3 \ln 5}$. У відомому ряді Маклорена (див. додаток Д)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad \text{покладемо}$$

$t = -x^3 \ln 5$, отримаємо

$$\begin{aligned} 5^{-x^3} &= 1 + (-x^3 \ln 5) + \frac{(-x^3 \ln 5)^2}{2!} + \frac{(-x^3 \ln 5)^3}{3!} + \dots + \frac{(-x^3 \ln 5)^n}{n!} + \dots = \\ &= 1 - \ln 5 \cdot x^3 + \frac{\ln^2 5}{2!} \cdot x^6 - \frac{\ln^3 5}{3!} \cdot x^9 + \dots + (-1)^n \frac{\ln^n 5}{n!} x^{3n} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n 5}{n!} x^{3n}. \end{aligned}$$

Область збіжності заданого ряду $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Запишемо задану функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{5}{1-7x} = 5 \cdot \frac{1}{1-7x}. \quad \text{У відомому ряді Маклорена}$$

$$(\text{див. додаток Д}) \quad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1; 1),$$

покладемо $t = 7x$, отримаємо

$$\frac{1}{1-7x} = 1 + 7x + (7x)^2 + (7x)^3 + \dots + (7x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n.$$

$$\text{Остаточнo маємо } f(x) = 5 \cdot \frac{1}{1-7x} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n.$$

Знайдемо область збіжності заданого ряду. Область збіжності ряду $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ $t \in (-1; 1)$, тобто $|t| < 1$. Для заданого ряду $t = 7x$,

$$\text{тому } |7x| < 1, \quad |x| < \frac{1}{7}, \quad \text{тобто } x \in \left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right).$$

$$\textbf{Відповідь:} \quad 1) \quad 5^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n 5}{n!} x^{3n}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$2) \quad \frac{5}{1-7x} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right).$$

Завдання 8.5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл $\int_0^{0.25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Користуючись відомим рядом Маклорена для функції $\ln(1+x)$ (див. додаток Д), розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена. У розвиненні функції

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots \quad \text{покладемо } t = \sqrt{x}, \text{ маємо:}$$

$$\ln(1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5} - \dots$$

Проінтегруємо отриманий вираз в межах від 0 до $1/4$:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x}) dx &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{15} - \frac{x^3}{12} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{35} - \dots \Big|_0^{1/4} = \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{64} + \frac{1}{240} - \frac{1}{768} + \frac{1}{2240} - \dots \end{aligned}$$

Для подальшого обчислення скористаємося тим фактом, що для знакопозначеного ряду має місце наступна властивість: при заміні суми ряду частинною сумою похибка не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду.

Оскільки п'ятий член ряду $\frac{1}{2240} \approx 0,0004 < 0,001$, то для обчислення інтеграла з точністю до 0,001 достатньо взяти суму перших чотирьох членів ряду.

Остаточно маємо:

$$\int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x}) dx \approx 0,0833 - 0,0156 + 0,0042 - 0,0013 = 0,071.$$

Відповідь: 0,071.

ЛІТЕРАТУРА

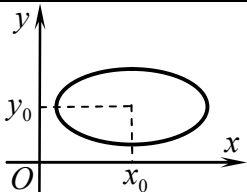
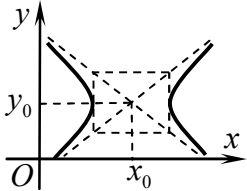
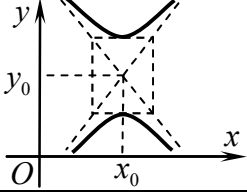
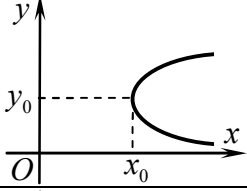
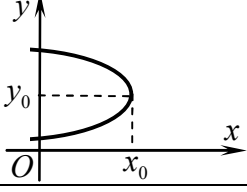
1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука. – 2005. – 416 с.
3. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 432 с.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах / Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. – М.: Физматлит, 2001
5. Вища математика: підруч.: у 2 кн. Кн.1. Основні розділи / Призва Г.Й., Плахотник В.В, Гординський Л.Д. та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
6. Вища математика: збірник задач: у 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення./ Гаврильченко Х.І., Полушкін С.П., Кропив'янський П.С. та ін.; за заг. ред. П.П. Овчинникова – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 1. – 2003. – 416 с.
8. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 2. – 2003. – 415 с.
9. Дубовик В.П. Вища математика: навчальний посібник. 3-х частинах. Ч. 1 / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Харків: Веста, 2008. – 200с.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – М.: Наука, 1999.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – М.: Наука, 1999.
12. Кузнецов Л.А. Сборник зада по высшей математике (типовые расчёты) / Кузнецов Л.А. – М.: Высшая школа, 1983. – 175с.

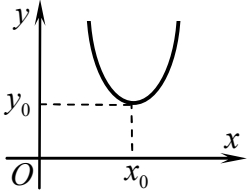
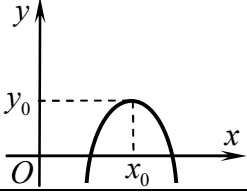
13. Кулініч Г.Л. Вища математика : основні означення, приклади і задачі : [навч. посібник]. Кн.1 / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К. : Либідь, 1994. – 312 с.
14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 1985. – 526 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 576 с.
16. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
17. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И.В. – М.: Наука, 1984.
18. Сборник задач по математике для вузов/под ред. А.Е.Ефимова, В.П. Демидовича. М.: Высш. Шк., 1978. – ч.1,2.
19. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.П. Специальные разделы математического анализа / под ред. В.А. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – 615с.
20. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 1 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – 271с.
21. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 2 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1991. – 352с.
22. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 3 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1991. – 288 с..
23. Шкіль М.І. Вища математика. Кн. 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 280 с
24. Розрахунково-графічні завдання з вищої математики (частина 1) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018 – 46 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

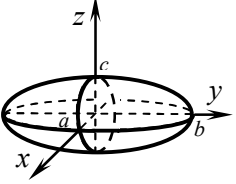
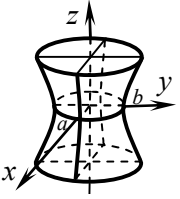
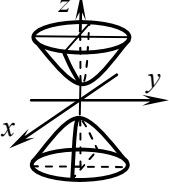
Рівняння та графіки кривих другого порядку
зі зміщеним центром

	Тип кривої	Рівняння	Графік
1	Еліпс	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	
2	Гіпербола	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	
		$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$	
3	Парабола	$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$	
		$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$	

		$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	
		$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$	

Додаток Б

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку
та їх графіки

	Тип кривої	Рівняння	
1	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
2	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
3	Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	

4	Конус другого порядку	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
5	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	
6	Гіперболіч- ний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	
7	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
8	Гіперболі- чний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
9	Параболі- чний циліндр	$x^2 = 2py$	

Додаток В
Таблиця похідних

В таблиці $u = u(x)$ – дифенційовна функція

1. $(C)' = 0, C = const;$	11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
2. $(x)' = 1;$	12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$	13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$	14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a = const;$	15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u';$	16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$	17. $(shu)' = chu \cdot u';$
8. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$	18. $(chu)' = shu \cdot u';$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$	19. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$	20. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'.$

Додаток Г
Таблиця основних інтегралів

В таблиці $u = u(x)$ – диференційовна функція

1. $\int du = u + C;$	13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C;$
2. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $\alpha \neq -1;$	14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C;$
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$	15. $\int shu du = chu + C;$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C;$	16. $\int chu du = shu + C;$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$	17. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$	18. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + C;$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C;$	19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
8. $\int \cos u du = \sin u + C;$	20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C;$
9. $\int \operatorname{tgu} du = -\ln \cos u + C;$	21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} =$ $= \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C;$

10. $\int \operatorname{ctgu} du = \ln \sin u + C ;$	22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C ;$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C ;$	23. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du =$ $= \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C ;$
12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C ;$	24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du =$ $= \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2} a^2 \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C .$

Додаток Д

Розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty),$$

$$3. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty),$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

$$x \in (-1; 1),$$

$$5. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in \begin{cases} [-1; 1], & \alpha \geq 0, \\ (-1; 1], & -1 < \alpha < 0, \quad \alpha \in R; \\ (-1, 1), & \alpha \leq -1. \end{cases}$$

$$6. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1),$$

$$7. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1).$$