

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛИТИ З ТЕПЛОІЗОЛЬОВАНОЮ НИЖНЬОЮ МЕЖЕЮ ТА НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Розглядається двовимірна задача теплопровідності для двошарової плити з теплоізолюованою нижньою межею та неідеальним тепловим контактом між шарами. У кожному шарі плити введено локальну декартову систему координат $O_k x z_k$, $k=1,2$, осі $O_k x$ лежать на верхніх межах шарів, а осі $O z_k$ спрямовані вглиб шарів.

Крайові умови:

$$T_1(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial T_2}{\partial z}(x, h_2) = 0.$$

На спільній межі шарів виконуються умови неідеального теплового контакту:

$$k_{T,1} \frac{\partial T_1}{\partial z}(x, h_1) = \frac{1}{R} [T_2(x, 0) - T_1(x, h_1)], \quad k_{T,2} \frac{\partial T_2}{\partial z}(x, 0) = k_{T,1} \frac{\partial T_1}{\partial z}(x, h_1),$$

де R – коефіцієнт теплового опору.

Задача розв'язується з допомогою одномірного інтегрального перетворення Фур'є. У аналітичному вигляді отримано вирази, які дозволяють знаходити температуру в будь-якій точці плити:

$$T_k(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-pz} + \tilde{d}_k \operatorname{sh} pz) \eta_k(\xi) e^{-i\xi x} d\xi,$$

$$\text{де} \quad \tilde{d}_2 = \frac{e^{-p_2}}{C_2}, \quad \tilde{d}_1 = \frac{(\Delta + Lp - 1 - \tilde{d}_2(Lp - 1))e^{-p_1}}{\Delta C_1 + S_1 + LpC_1 - \tilde{d}_2(S_1 + LpC_1)}, \quad \eta_1 = \bar{f}(\xi),$$

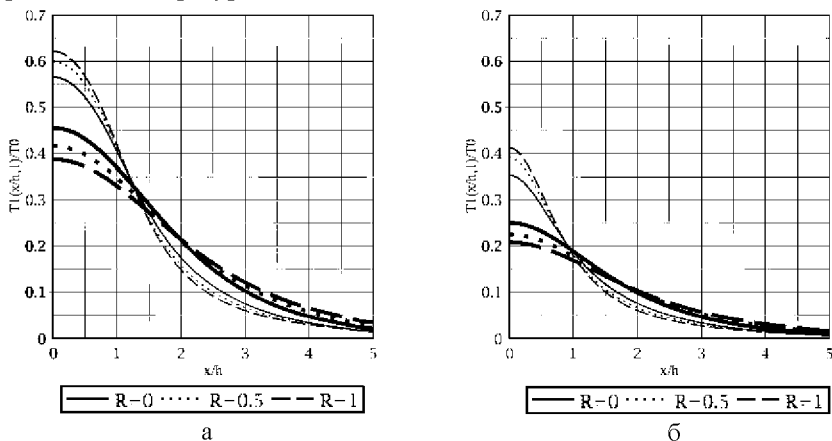
$$\eta_2(\xi) = ((1 - Lp)e^{-p_1} + \tilde{d}_1(S_1 + LpC_1))\eta_1(\xi), \quad \Delta = \frac{k_{T,1}}{k_{T,2}}, \quad L = k_{T,1}R,$$

$$C_k = \operatorname{ch} p_k, \quad S_k = \operatorname{sh} p_k, \quad p_k = ph_k, \quad k=1,2.$$

Чисельні розрахунки проведено для плити, що складається з двох шарів, що мають однакові товщини та рівні коефіцієнти теплопровідності. Розглянуто два випадки крайових умов:

$$1) T_1(x,0) = \begin{cases} T_0, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h, \end{cases} \quad 2) T_1(x,0) = T_0 \delta(x).$$

На рис. 1 наведено графіки розподілу температури в точках нижньої межі верхнього шару плити (тонкі лінії) та в точках верхньої межі нижнього шару плити (товсті лінії), які ілюструють вплив коефіцієнта теплового опору на розподіл температури.



а – крайова умова типу 1); б – крайова умова типу 2).

Рисунок 1 – Графіки розподілів температури в точках нижньої межі верхнього шару плити (тонкі лінії) та в точках верхньої межі нижнього шару плити (товсті лінії).