

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет «Запорізька політехніка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до практичних занять та самостійної роботи  
з дисципліни

**„ФІЗИКА НАПІВПРОВІДНИКІВ“**

для студентів спеціальності  
176 „Мікро- та наносистемна техніка“,  
освітня програма: „Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“  
денної й заочної форм навчання

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни „Фізика напівпровідників“ для студентів спеціальності 176 „Мікро- та наносистемна техніка“, освітня програма „Мікро- та нанoeлектронні прилади і пристрої“ денної й заочної форм навчання / Укл.: Андрій КОРОТУН, Ніна НАГОРНА, Ніна СМІРНОВА, Валентин ПОГОСОВ, Ігор Тітов. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 83 с.

Укладачі: Андрій КОРОТУН, проф., канд. фіз.-мат. наук,  
Ніна НАГОРНА, ст. викладач,  
Ніна СМІРНОВА, ст. викладач,  
Валентин ПОГОСОВ, проф., д-р фіз.-мат. наук,  
Ігор ТІТОВ, завідувач лабораторіями

Рецензент: Валерій КУРБАЦЬКИЙ, доц., канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний за випуск: Андрій КОРОТУН, проф., канд. фіз.-мат. наук

Затверджено  
на засіданні кафедри  
інформаційної безпеки та  
нанoeлектроніки

Протокол №1  
від “ 08 “ серпня 2024 р.

на засіданні НМК ФІБЕК  
Протокол №1  
від “ 15 “ серпня 2024 р.

## ЗМІСТ

|                                                                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Умовні позначення. . . . .                                                                                | 4         |
| <b>1 Статистика електронів і дірок у напівпровідниках. . . . .</b>                                        | <b>8</b>  |
| 1.1 Основні формули та визначення. . . . .                                                                | 8         |
| 1.2 Приклади розв'язування задач. . . . .                                                                 | 15        |
| 1.3 Задачі для самостійного розв'язування. . . . .                                                        | 20        |
| <b>2 Кінетичні явища в напівпровідниках. . . . .</b>                                                      | <b>24</b> |
| 2.1 Основні формули та визначення. . . . .                                                                | 24        |
| 2.2 Приклади розв'язування задач. . . . .                                                                 | 27        |
| 2.3 Задачі для самостійного розв'язування. . . . .                                                        | 34        |
| <b>3 Генерація й рекомбінація, дифузія та дрейф носіїв заряду в напівпровідниковому кристалі. . . . .</b> | <b>38</b> |
| 3.1 Основні формули та визначення. . . . .                                                                | 38        |
| 3.2 Приклади розв'язування задач. . . . .                                                                 | 45        |
| 3.3 Задачі для самостійного розв'язування. . . . .                                                        | 50        |
| <b>4 Оптичні та фотоелектричні явища у напівпровідниках. . . . .</b>                                      | <b>53</b> |
| 4.1 Основні формули та визначення. . . . .                                                                | 53        |
| 4.2 Приклади розв'язування задач. . . . .                                                                 | 59        |
| 4.3 Задачі для самостійного розв'язування. . . . .                                                        | 71        |
| Рекомендована література. . . . .                                                                         | 76        |
| Додаток А Властивості напівпровідників. . . . .                                                           | 77        |
| Додаток Б Параметри рекомбінаційних домішок в кремнії і германії. . . . .                                 | 80        |
| Додаток В Енергетичні рівні домішок в <i>Ge</i> , <i>Si</i> , <i>GaAs</i> . . . . .                       | 81        |
| Додаток Г Енергія йонізації легуючої домішки в напівпровідниках. . . . .                                  | 82        |

### Умовні позначення

|               |                                                                    |
|---------------|--------------------------------------------------------------------|
| $A$           | – робота виходу; постійна величина                                 |
| $a$           | – стала кристалічної ґратки; радіус борівської орбіти; прискорення |
| $a_0$         | – радіус першої борівської орбіти                                  |
| $B$           | – модуль вектора магнітної індукції; постійна величина             |
| $b$           | – ширина                                                           |
| $D$           | – коефіцієнт дифузії                                               |
| $E$           | – енергія мікрочастинки                                            |
| $E_F$         | – енергія Фермі                                                    |
| $E_c$         | – дно зони провідності                                             |
| $E_t$         | – енергетичний рівень рекомбінаційної домішки                      |
| $E_v$         | – стеля валентної зони                                             |
| $\Delta E_a$  | – енергія йонізації акцепторної домішки                            |
| $\Delta E_d$  | – енергія йонізації донорної домішки                               |
| $\Delta E_g$  | – ширина забороненої зони                                          |
| $e$           | – заряд електрона                                                  |
| $e$           | – основа натуральних логарифмів                                    |
| $\mathcal{E}$ | – напруженість електричного поля                                   |
| $f$           | – функція розподілу                                                |
| $\Delta f_t$  | – зміна ймовірності заповнення пастки електроном                   |
| $G$           | – швидкість генерації                                              |
| $g$           | – фактор виродження домішкового рівня; ймовірність поглинання      |
| $h$           | – товщина                                                          |
| $I$           | – сила струму                                                      |
| $i$           | – уявна одиниця                                                    |
| $j$           | – густина струму                                                   |
| $\mathbf{k}$  | – хвильовий вектор носія заряду                                    |
| $k$           | – модуль хвильового вектора                                        |
| $k_B$         | – стала Больцмана                                                  |
| $L$           | – лінійний розмір; дифузійна довжина                               |
| $L_n$         | – дифузійна довжина електронів                                     |

|            |                                                                     |
|------------|---------------------------------------------------------------------|
| $L_p$      | – дифузійна довжина дірок                                           |
| $l$        | – довжина                                                           |
| $m_e$      | – маса електрона                                                    |
| $m^*$      | – ефективна маса мікрочастинки                                      |
| $m_n^*$    | – ефективна маса електрона                                          |
| $m_{dn}^*$ | – ефективна маса густини станів електронів в зоні провідності       |
| $m_p^*$    | – ефективна маса дірки                                              |
| $m_{dp}^*$ | – ефективна маса густини станів дірок у валентній зоні              |
| $M$        | – молярна маса                                                      |
| $N$        | – число частинок; густина квантових станів                          |
| $N_A$      | – стала Авогадро                                                    |
| $N_a$      | – концентрація акцепторів                                           |
| $N_c$      | – ефективна густина квантових станів у зоні провідності             |
| $N_d$      | – концентрація донорів                                              |
| $N_s$      | – густина поверхневих станів                                        |
| $N_t$      | – концентрація рекомбінаційної домішки                              |
| $N_v$      | – ефективна густина квантових станів у валентній зоні               |
| $\aleph$   | – уявний показник заломлення                                        |
| $n$        | – концентрація частинок; концентрація електронів в зоні провідності |
| $n_0$      | – рівноважна концентрація електронів                                |
| $n_i$      | – власна концентрація носіїв заряду                                 |
| $n_n$      | – концентрація електронів у $n$ -області $p$ - $n$ -переходу        |
| $n_p$      | – концентрація дірок у $n$ -області $p$ - $n$ -переходу             |
| $\bar{n}$  | – дійсний показник заломлення середовища                            |
| $\Delta n$ | – концентрація надлишкових електронів                               |
| $P$        | – імпульс електрона                                                 |
| $p$        | – концентрація дірок                                                |
| $p_0$      | – рівноважна концентрація дірок                                     |
| $p_n$      | – концентрація електронів у $p$ -області $p$ - $n$ -переходу        |

|               |                                                                   |
|---------------|-------------------------------------------------------------------|
| $p_p$         | – концентрація дірок у $p$ - області $p$ - $n$ -переходу          |
| $\Delta p$    | – концентрація надлишкових дірок                                  |
| $R$           | – електричний опір; швидкість рекомбінації; коефіцієнт відбивання |
| $R_n$         | – швидкість рекомбінації електронів у напівпровіднику $p$ -типу   |
| $R_p$         | – швидкість рекомбінації дірок у напівпровіднику $n$ -типу        |
| $R_H$         | – стала Холла                                                     |
| $r$           | – радіус; параметр розсіяння                                      |
| $S$           | – площа; переріз захоплювання                                     |
| $S_n$         | – переріз захоплювання електронів                                 |
| $S_p$         | – переріз захоплювання дірок                                      |
| $s$           | – швидкість звуку; швидкість поверхневої рекомбінації             |
| $s_n$         | – швидкість поверхневої рекомбінації електронів                   |
| $s_p$         | – швидкість поверхневої рекомбінації дірок                        |
| $T$           | – температура; коефіцієнт пропускання                             |
| $T_i$         | – температура переходу до власної провідності                     |
| $T_s$         | – температура виснаження домішки                                  |
| $t$           | – час                                                             |
| $U$           | – потенціальна енергія; висота потенціального бар'єру; напруга    |
| $V$           | – об'єм кристала                                                  |
| $v$           | – дрейфова швидкість                                              |
| $v_D$         | – дифузійна швидкість                                             |
| $v_g$         | – групова швидкість                                               |
| $v_{ph}$      | – фазова швидкість                                                |
| $W$           | – імовірність                                                     |
| $w$           | – густина ймовірності                                             |
| $\alpha$      | – коефіцієнт захоплювання                                         |
| $\gamma$      | – густина речовини; коефіцієнт рекомбінації                       |
| $\gamma_B$    | – коефіцієнт випромінювальної рекомбінації                        |
| $\varepsilon$ | – відносна діелектрична проникність                               |

|                 |                                                                                           |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varepsilon_0$ | – діелектрична стала вакууму                                                              |
| $\eta$          | – зведений рівень Фермі; квантовий вихід фотойонізації                                    |
| $\kappa$        | – число атомів в елементарній комірці                                                     |
| $\lambda$       | – довжина хвилі; довжина вільного пробігу                                                 |
| $\mu_n$         | – рухливість електронів                                                                   |
| $\mu_p$         | – рухливість дірок                                                                        |
| $\nu$           | – частота; число зіткнень                                                                 |
| $\xi$           | – енергія, відрахована від $E_c$ ; коефіцієнт температурної зміни ширини забороненої зони |
| $\rho$          | – питомий опір; густина заряду                                                            |
| $\sigma$        | – питома електропровідність; ефективний переріз                                           |
| $\sigma_i$      | – власна провідність напівпровідника                                                      |
| $\tau$          | – час життя; час релаксації                                                               |
| $\tau_M$        | – максвеллівський час релаксації                                                          |
| $\tau_n$        | – час життя електронів                                                                    |
| $\tau_p$        | – час життя дірок                                                                         |
| $\tau_S$        | – час життя носіїв заряду на поверхні                                                     |
| $\tau_V$        | – час життя носіїв заряду в об'ємі                                                        |
| $\chi$          | – показник поглинання                                                                     |
| $\Phi$          | – світловий потік                                                                         |
| $\Phi_K$        | – контактна різниця потенціалів                                                           |
| $\Psi$          | – координатна хвильова функція                                                            |
| $\omega$        | – циклічна частота                                                                        |

# 1 СТАТИСТИКА ЕЛЕКТРОНІВ І ДІРОК У НАПІВПРОВІДНИКАХ

## 1.1 Основні формули та визначення

У стані термодинамічної рівноваги за будь-якої температури існує певний розподіл електронів за квантовими станами. В результаті в кристалі напівпровідника встановлюється певна концентрація вільних електронів  $n$  у зоні провідності та концентрація вільних дірок  $p$  у валентній зоні. Крім того, у кристалі, що містить локальні рівні енергії (домішкові атоми і структурні дефекти), можуть бути ще негативно заряджені акцептори й позитивно заряджені донори, на яких у кожній одиниці об'єму можуть знаходитися зв'язані електрони й дірки.

Обчислення концентрацій вільних і зв'язаних носіїв заряду є основна задача статистики електронів і дірок у кристалах. Задача розпадається на дві частини: чисто квантовомеханічну – знаходження числа можливих квантових станів у зонах – і статистичну – визначення фактичного розподілу електронів за цими квантовими станами при термодинамічній рівновазі.

Число квантових станів в інтервалі енергій  $dE$ , розраховане на одиницю об'єму  $V$  кристала,  $dZ$ , а  $N(E) = \frac{dZ}{dE}$  – це густина станів у цьому інтервалі енергій.

Для  $k$ -простору  $dZ$  дорівнює

$$dZ = \frac{dV_k}{8\pi^3}, \quad (1.1)$$

де  $dV_k = 4\pi k^2 dk$ .

Для сферичної ізоенергетичної поверхні з  $E_{\min}$  у центрі зони Бриллюєна:

$$E(k) = E_c + \frac{(\hbar k)^2}{2m^*} = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}; \quad (1.2)$$

для напівпровідника  $n$ -типу:

$$N(E) = 2\pi \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E - E_c}; \quad (1.3)$$

для напівпровідника  $p$ -типу:

$$N(E) = 2\pi \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_v - E}. \quad (1.4)$$

**Сферичні ізоенергетичні поверхні з мінімумом енергії в точках  $k_0$ :**

$$E(k) = E_c + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m^*}; \quad (1.5)$$

для  $n$ -типу:

$$N(E) = 2\pi \kappa \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E - E_c}; \quad (1.6)$$

для  $p$ -типу:

$$N(E) = 2\pi \kappa \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_v - E}, \quad (1.7)$$

де  $\kappa$  – число сфер.

**Еліпсоїдальні ізоенергетичні поверхні:**

$$E(k) = E_c + \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{k_x^2}{m_1^*} + \frac{k_y^2}{m_2^*} + \frac{k_z^2}{m_3^*} \right); \quad (1.8)$$

для  $n$ -типу:

$$N(E) = \frac{2\pi}{h^3} \kappa \sqrt{8m_1^* m_2^* m_3^*} \sqrt{E - E_c}; \quad (1.9)$$

$\kappa$  – кількість сфер (для Ge  $\kappa = 4$ ; для Si  $\kappa = 6$ );  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ ,  $m_3^*$  – компоненти маси (у головних осях).

Ефективна маса для густини станів:

$$M^2(m_1^*, m_2^*, m_3^*) = m_d^{*3}.$$

**Концентрація електронів і дірок:**

$$n = 2 \int_{E_c}^{\infty} f_0(E, T) N(E) dE = \frac{2N_c}{\sqrt{\pi}} \Phi_{\frac{1}{2}}(\xi), \quad (1.10)$$

де  $f_0(E, T)$  – **функція Фермі – Дірака** для рівноважних станів, яка дорівнює: для електронів

$$f_{0_n}(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}; \quad (1.11)$$

для дірок:

$$f_{0_p}(E, T) = 1 - f_{0_n}(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E_F-E}{k_B T}} + 1}; \quad (1.12)$$

### Ефективна густина станів

у зоні провідності:

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_{dn}^* k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad (1.13 a)$$

у валентній зоні:

$$N_v = 2 \left( \frac{2\pi m_{dp}^* k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad (1.13 б)$$

**інтеграл Фермі:**

$$\Phi_{\frac{1}{2}}(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{\xi^{\frac{1}{2}} d\xi}{e^{\xi-\eta} + 1}; \quad (1.14)$$

$$\xi = \frac{E - E_c}{k_B T}; \quad \eta = -\frac{E_c - E_F}{k_B T}. \quad (1.15)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2}}(\eta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\eta}, & -\infty < \eta < -1; \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{0,25 + e^{-\eta}}, & -1 < \eta < 5; \\ \frac{2}{3} \eta^{\frac{3}{2}}, & 5 < \eta < \infty. \end{cases} \quad (1.16)$$

Область  $-\infty < \eta < -1$  відповідає статистиці Больцмана, напівпровідник є **невиродженим**, рівень Фермі лежить у забороненій зоні, нижче дна зони провідності не менше ніж на  $k_B T$ .

Якщо рівень Фермі лежить у зоні провідності вище  $E_c$  більше ніж на  $5k_B T$ , то такий напівпровідник цілком **вироджений**. Це відповідає області  $5 < \eta < \infty$ .

Область  $-1 < \eta < 5$  відповідає перехідному випадку. Для неvirодженого напівпровідника  $n$ -типу:

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} = 2 \left( \frac{2\pi m_{dn}^* k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}. \quad (1.17)$$

Для виродженого напівпровідника  $n$ -типу:

$$n = \frac{2N_c}{\sqrt{\pi}} \Phi_{\frac{1}{2}}(\eta) = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m_{dn}^*}{h} \right)^{\frac{3}{2}} (E_F - E_c)^{\frac{3}{2}} \quad (1.18)$$

і ця концентрація не залежить від температури.

Вирази для  $n$  і  $p$  обчислюються, якщо відоме положення рівня Фермі. Для обчислення рівня  $E_F$  використовують рівняння електро-нейтральності. За наявності в напівпровіднику донорної й акцепторної домішки  $N_d$  і  $N_a$ , при її йонізації створюється деяка кількість вільних електронів і дірок. Сумарний заряд усіх заряджених частинок кристала має дорівнювати нулю – це й є *умова електронейтральності*.

Негативний заряд створюють вільні електрони й негативно заряджені йони акцепторів. Позитивний заряд створюють вільні дірки і позитивно заряджені йони донорів.

Електрони в зоні провідності виникають за рахунок йонізації донорної домішки та атомів основної речовини. Вільні дірки у валентній зоні виникають за рахунок переходу електронів з валентної зони на атоми акцепторної домішки та в зону провідності.

Якщо позначити через  $n_d$  і  $p_d$ ,  $n_a$  і  $p_a$  – число електронів і дірок, що знаходяться на донорному й акцепторному рівнях, а

$$N_d = n_d + p_d, \quad N_a = n_a + p_a,$$

то рівняння електронейтральності запишеться у вигляді:

$$n + n_d - p - p_a = N_d - N_a; \quad (1.19)$$

де  $N_d$  і  $N_a$  – концентрація донорної й акцепторної домішки,  $n_d$  і  $p_a$  – йони цих домішок.

Для визначення кількості електронів або дірок, які перебувають на домішковому рівні, необхідно знати функцію розподілу електронів за домішковими станами:

$$f_{0_{n_i}}(E, T) = \frac{1}{\frac{1}{g_i} e^{\frac{E_i - E_F}{k_B T}} + 1}, \quad (1.20)$$

де  $g_i$  – ступінь виродження  $i$ -го домішкового стану

Враховуючи, що для донорної домішки  $g_i = 2$ , а для акцепторної  $g_i = \frac{1}{2}$ , матимемо

$$n_d = \frac{N_d}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{k_B T}} + 1}; \quad p_a = \frac{N_a}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_F - E_a}{k_B T}} + 1}. \quad (1.21)$$

У власному напівпровіднику:

$$N_d = N_a = 0, \quad n = p.$$

**Концентрація електронів:**

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}; \quad (1.22)$$

**концентрація дірок:**

$$p = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}}; \quad (1.23)$$

**концентрація власних носіїв заряду:**

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}}. \quad (1.24)$$

**Положення рівня Фермі** визначається величиною енергії  $E_F$  :

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3k_B T}{4} \ln \frac{m_{p_d}^*}{m_{n_d}^*}. \quad (1.25)$$

Домішковий (донорний) напівпровідник:  
рівняння електронейтральності:

$$n = p + p_d. \quad (1.26)$$

За низьких температур  $p \ll n$ , тоді  $n = p_d$ ,  
**а рівень Фермі:**

$$E_F = k_B T \ln \left\{ \frac{1}{4} e^{\frac{E_d}{k_B T}} \left( \sqrt{1 + \frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{E_d}{k_B T}}} - 1 \right) \right\}; \quad (1.27)$$

область йонізації домішки:

$$E_F = \frac{E_a + E_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2N_c}. \quad (1.28)$$

Область збіднення домішки:

$$E_F = E_c + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c}; \quad n = N_d. \quad (1.29)$$

За високих температур:

$$n = N_d + p; \quad (1.30)$$

область власної провідності:

$$E_F = E_c + k_B T \ln \left\{ \frac{N_d}{2N_c} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2}} \right) \right\}. \quad (1.31)$$

Співвідношення для обчислення температур насичення домішкової провідності  $T_s$ , температур переходу від домішкової провідності до власної  $T_i$ , концентрацій рівноважних носіїв заряду  $n_0$ ,  $p_0$  і рівня Фермі  $E_F$  в домішкових напівпровідниках приведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Формули для розрахунку параметрів домішкових напівпровідників

| Напівпровідник $n$ -типу                                                                                                                            | Напівпровідник $p$ -типу                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_s = \frac{\Delta E_d}{k_B \ln \frac{N_c}{N_d}}$ $T_i = \frac{\Delta E_g(T_i)}{k_B \ln \frac{N_c N_v}{N_d^2}}$                                    | $T_s = \frac{\Delta E_a}{k_B \ln \frac{N_v}{N_a}}$ $T_i = \frac{\Delta E_g(T_i)}{k_B \ln \frac{N_c N_v}{N_a^2}}$                                    |
| $T \leq T_s$ (низькі температури)                                                                                                                   |                                                                                                                                                     |
| $n_0 = \sqrt{\frac{N_d N_c}{g}} e^{-\frac{\Delta E_d}{2k_B T}}$ $p_0 = \frac{n_i^2}{n_0}$ $E_F = \frac{E_c + E_d}{2} - k_B T \ln \frac{g N_c}{N_d}$ | $p_0 = \sqrt{\frac{N_a N_c}{g}} e^{-\frac{\Delta E_a}{2k_B T}}$ $n_0 = \frac{n_i^2}{p_0}$ $E_F = \frac{E_v + E_a}{2} - k_B T \ln \frac{g N_v}{N_a}$ |
| $T_s < T < T_i$                                                                                                                                     |                                                                                                                                                     |
| $n_0 = N_d$ $p_0 = \frac{N_c N_v}{N_d} e^{-\frac{\Delta E_g}{k_B T}}$ $E_F = E_c - k_B T \ln \frac{N_c}{N_d}$                                       | $p_0 = N_a$ $n_0 = \frac{N_c N_v}{N_a} e^{-\frac{\Delta E_g}{k_B T}}$ $E_F = E_v - k_B T \ln \frac{N_v}{N_a}$                                       |
| $T \geq T_i$ (високі температури)                                                                                                                   |                                                                                                                                                     |
| $n_0 = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}},$ $p_0 = n_0$ $E_F = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_n^*}{m_p^*}$          |                                                                                                                                                     |

Примітки до табл. 1.1:

1.  $\Delta E_d = E_c - E_d$ ,  $\Delta E_a = E_a - E_v$  – енергії йонізації донорної та акцепторної домішок (додаток В).

2. Ширина забороненої зони напівпровідника має таку температурну залежність:  $\Delta E_g(T) = \Delta E_g(T_0) + \gamma(T - T_0)$ , причому  $T_0$  вибирається на лінійній ділянці залежності  $\Delta E_g(T)$ .

3. Концентрація носіїв у власному напівпровіднику

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}}.$$

4.  $g$  – фактор виродження домішкового рівня (додаток А).

## 1.2 Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Ширина забороненої зони власного силіцію  $\Delta E_g = 1,12$  еВ. Розрахуйте ймовірність заповнення електроном енергетичного рівня поблизу дна зони провідності у власному силіції за температури  $T = 0$  К і  $T = 300$  К. Як зміниться ця ймовірність за даних температур, якщо на напівпровідник буде діяти електромагнітне випромінювання з довжинами хвиль  $\lambda = 0,6$  та  $2,0$  мкм? Вважайте, що за  $T = 300$  К  $E - E_F = \frac{\Delta E_g}{2}$ .

### Розв'язання

Функція розподілу Фермі – Дірака має вигляд:

$$f_0(E) = \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{k_B T}} + 1}.$$

Якщо  $P(E)$  – імовірність того, що електрон має енергію  $E$ , то

$P(E) = f_0(E)$ . За температури  $T = 0$  К  $E > E_F$ ,  $e^{\frac{E - E_F}{k_B T}} \rightarrow \infty$  і  $f_0(E) = 0$ . Тому енергія електрона не перевищує  $E_F$ .

Імовірність того, що за температури  $T = 300$  К електрон має енергію  $E$  дорівнює

$$P(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{0,562 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} + 1} = \frac{1}{e^{21,6} + 1} = 1,921 \cdot 10^{-5}.$$

Якщо на напівпровідник діє випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6$  мкм, енергія кванта цього випромінювання

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,6 \cdot 10^{-6}} = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,1 \text{ еВ}.$$

Внаслідок того, що  $E > \Delta E_g$ , імовірність знаходження електрона в зоні провідності збільшується як при 0 К, так і при 300 К.

Якщо на напівпровідник діє випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 2,0$  мкм, то

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,0 \cdot 10^{-6}} = 0,993 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,62 \text{ еВ}.$$

Внаслідок того, що  $E < \Delta E_g$  ніякої зміни ймовірності знаходження електрона в зоні провідності не відбувається як при 0 К, так і при 300 К.

*Відповідь:* 0 та  $4 \cdot 10^{-10}$ .

**Приклад 2.** Знайдіть положення рівня Фермі у власному германії за температури  $T = 300$  К, якщо відомо, що ширина його забороненої зони  $\Delta E_g = 0,665$  еВ, а ефективні маси густини станів  $m_{dp}^* = 0,388 m_e$ ,  $m_{dn}^* = 0,55 m_e$ .

### Розв'язання

Положення рівня Фермі у власному напівпровіднику визначається виразом (1.25):

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} = E_i + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c},$$

де  $E_i$  – рівень, що відповідає середині забороненої зони;

$$N_v = \frac{2(2\pi m_{dp}^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}; \quad N_c = \frac{2(2\pi m_{dn}^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$$

– ефективна густина станів для дірок валентної зони і для електронів зони провідності відповідно. В нашому випадку

$$N_v = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,388 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^{\frac{3}{2}}}{(6,63 \cdot 10^{-34})^3} = 6,04 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3},$$

$$N_c = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,55 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^{\frac{3}{2}}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} = 1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Отже,

$$E_F - E_i = \frac{8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{2} \ln \frac{6,04 \cdot 10^{24}}{1,02 \cdot 10^{25}} = -6,78 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

або

$$\begin{aligned} E_F - E_v &= E_i - E_v + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} = \frac{\Delta E_g}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} \\ &= \frac{0,665}{2} - 6,78 \cdot 10^{-3} = 0,326 \text{ eV}, \end{aligned}$$

тобто рівень Фермі у власному германії за кімнатної температури знаходиться на 6,78 меВ нижче середини забороненої зони, але на 326 меВ вище стелі валентної зони. Результати свідчать про те, що зі зростанням температури рівень Фермі наближається до тієї зони, яка має меншу густину станів і тому заповнюється швидше.

*Відповідь:*  $E_F - E_i = -6,78 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ , або  $E_F - E_v = 0,326 \text{ eV}$ .

**Приклад 3.** Розрахуйте ширину забороненої зони напівпровідника, що містить  $n_1 = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  електронів за  $T_1 = 400 \text{ К}$  і  $n_2 = 5,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  за  $T_2 = 300 \text{ К}$ . Ширина забороненої зони змінюється з температурою за лінійним законом.

### **Розв'язання**

Відношення концентрацій за температур  $T_1$  і  $T_2$  дорівнює:

$$\frac{n_1}{n_2} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E_g^0}{2k_B} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)},$$

звідки

$$\begin{aligned} \Delta E_g^0 &= \frac{2k_B T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \left( \frac{n_1 T_1^{\frac{3}{2}}}{n_2 T_2^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{2 \cdot 8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 400 \cdot 300}{400 - 300} \cdot \ln \left( \frac{1,5 \cdot 10^{16} \cdot 400^{\frac{3}{2}}}{5,5 \cdot 10^{15} \cdot 300^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= 0,297 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\Delta E_g^0 = 0,297 \text{ eV}$ .

**Приклад 4.** Концентрація електронів у власному напівпровіднику за температури  $T = 400 \text{ K}$  дорівнює  $1,38 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ . Знайдіть значення добутку ефективних мас електрона і дірки, якщо ширина забороненої зони змінюється за законом

$$\Delta E_g = \Delta E_g^0 - \xi T = 0,785 - 4 \cdot 10^{-4} T \text{ eV}.$$

#### **Розв'язання**

З урахуванням температурної зміни ширини забороненої зони концентрація електронів у власному напівпровіднику

$$n = 2 \left( \frac{2\pi \sqrt{m_n^* m_p^*} k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\xi}{2k_B}} e^{-\frac{\Delta E_g^0}{2k_B T}},$$

де  $\Delta E_g = \Delta E_g^0 - \xi T$ . Звідси отримуємо

$$2 \left( \frac{2\pi k_B \sqrt{m_n^* m_p^*}}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\xi}{2k_B}} = n T^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E_g^0}{2k_B T}}.$$

Отже,

$$\frac{m_n^* m_p^*}{m_e^2} = \left( \frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^2 \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{2(\Delta E_g^0 - \xi T)}{3k_B T}} =$$

$$= \left( \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400} \right)^2 \cdot \left( \frac{1,38 \cdot 10^{-21}}{2} \right)^{\frac{4}{3}} \cdot e^{-\frac{2(0,785 - 4 \cdot 10^{-4} \cdot 400)}{3 \cdot 8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 400}} = 0,21.$$

Відповідь:  $\frac{m_n^* m_p^*}{m_e^2} = 0,21.$

**Приклад 5.** Обчисліть власну концентрацію носіїв заряду в силіції за температури  $T = 300$  К, якщо ширина його забороненої зони  $\Delta E_g = 1,12$  еВ, а ефективні маси густини станів  $m_{dn} = 1,05 m_e$ ,  $m_{dp} = 0,56 m_e$ .

### Розв'язання

Власну концентрацію носіїв заряду можна знайти за допомогою формули (1.24):

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}}.$$

Ефективна густина станів для електронів у зоні провідності

$$N_c = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot T)^{\frac{3}{2}}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} = 2,69 \cdot 10^{25} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ м}^{-3}.$$

Ефективна густина станів для дірок у валентній зоні

$$N_v = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,56 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot T)^{\frac{3}{2}}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} = 1,05 \cdot 10^{25} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ м}^{-3}.$$

Звідси випливає, що за  $T = 300$  К власна концентрація

$$n_i = 10^{25} \cdot \sqrt{2,69 \cdot 1,05} e^{-\frac{1,12}{2 \cdot 8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 300}} \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Відповідь:  $n_i \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$

**Приклад 6.** Знайдіть положення рівня Фермі відносно середини забороненої зони за температури  $T = 300$  К для германію, що містить  $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомів фосфору.

### **Розв'язання**

Внаслідок того, що атоми домішки повністю іонізовані,  
 $n = N_d = 5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ .

Ефективна густина станів зони провідності:

$$N_c = \frac{2(2\pi m_{dn} k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,55 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^{\frac{3}{2}}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} =$$

$$= 1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Положення рівня Фермі відносно дна зони провідності

$$E_c - E_F = kT \ln \frac{N_c}{n} = 8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \cdot \ln \frac{1,02 \cdot 10^{25}}{5 \cdot 10^{22}} = 0,137 \text{ еВ}.$$

За  $T = 300$  К  $\Delta E_g = 0,67 \text{ еВ}$ , а  $\frac{\Delta E_g}{2} = 0,335 \text{ еВ}$ ,

$$E_F - \frac{\Delta E_g}{2} = 0,335 - 0,137 = 0,198 \text{ еВ}.$$

*Відповідь:*  $E_F - \frac{\Delta E_g}{2} = 0,198 \text{ еВ}.$

### **1.3 Задачі для самостійного розв'язування**

- 1.3.1. Визначте ефективну густина енергетичних станів у зоні провідності –  $N_c$  та у валентній зоні  $N_v$  у германії.
- 1.3.2. Який вигляд буде мати функція розподілу Фермі – Дірака для дірок  $f_p(E)$ , якщо  $f_n(E) + f_p(E) = 1$ ?
- 1.3.3. Яка ймовірність знайти електрон на нижньому рівні зони провідності у власному германії (ширина забороненої зони  $\Delta E_g = 0,72 \text{ еВ}$ ), якщо температура зразка дорівнює: а) 30 К; б) 300 К; в) температурі плавлення 937 °С?

- 1.3.4. Ширина забороненої зони напівпровідника дорівнює 1 еВ. Яка ймовірність заповнення електроном рівня поблизу дна зони провідності за температури 290 К? Чи збільшиться ця ймовірність, якщо напівпровідник піддати дії електромагнітного випромінювання з довжиною хвилі 1 мкм; 3,4 мкм?
- 1.3.5. Визначте ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня, розташованого на  $10k_B T$  вище рівня Фермі. Як зміниться ймовірність заповнення цього рівня електронами, якщо температуру збільшити вдвічі?
- 1.3.6. Виведіть формулу для енергії Фермі для власного напівпровідника, враховуючи, що  $n_i = p_i$ .
- 1.3.7. Знайдіть вигляд температурної залежності концентрації носіїв заряду у власному напівпровіднику, виходячи з закону діючих мас.
- 1.3.8. Доведіть, що рівень Фермі у власному напівпровіднику дійсно розташований посередині забороненої зони за умови, що  $m_n^* = m_p^*$ .
- 1.3.9. За якої температури концентрація власних носіїв  $n_i$  у силіції буде дорівнювати концентрації власних носіїв у германії за  $T = 300$  К.
- 1.3.10. Обчисліть значення енергії Фермі для власного напівпровідника – германію. На скільки електрон-вольт рівень Фермі зміщений відносно середини забороненої зони? В якому напрямку?
- 1.3.11. Знайдіть положення рівня Фермі у власному напівпровіднику відносно середини забороненої зони за кімнатної температури ( $T = 300$  К), якщо ефективна маса електрона у 2 рази більша ефективної маси дірки.
- 1.3.12. Знайдіть ширину забороненої зони і положення рівня Фермі для власного напівпровідника, в якому концентрація електронів провідності за температури  $T = 300$  К дорівнює  $1,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а стала  $G = 4,83 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \cdot \text{К}^{-\frac{3}{2}}$ .

- 1.3.13. Як зміниться концентрація електронів у власному напівпровіднику при зміні температури від 200 К до 300 К, якщо  $\Delta E_g = 0,785 - \xi T$  еВ, де  $\xi = 0,0004 \frac{\text{еВ}}{\text{К}}$ ?
- 1.3.14. Обчисліть власні концентрації електронів і дірок у германії і кремнії за  $T = 300$  К. Ефективні маси густини станів у валентній зоні  $m_{dp}$  прийміть рівною  $0,362m_e$  для Ge і  $0,595m_e$  – для Si. Ширина забороненої зони за  $T = 300$  К складає 0,66 еВ у Ge і 1,1 еВ у Si.
- 1.3.15. Рівень Фермі у кремнії за  $T = 300$  К розташований на 0,1 еВ нижче дна зони провідності. Розрахуйте рівноважну концентрацію електронів і дірок у цьому напівпровіднику, якщо  $\Delta E_g = 1,12$  еВ, а ефективні маси густини станів  $m_v = 0,56m_e$ ,  $m_c = 1,05m_e$ .
- 1.3.16. Обчисліть власну концентрацію носіїв заряду в арсеніді галію за  $T = 300$  К і  $T = 500$  К, якщо ефективні густини станів  $m_v = 0,48m_e$ ,  $m_c = 0,067m_e$ , а температурна зміна ширини забороненої зони підпорядковується виразу
- $$5. \quad \Delta E_g(T) = 1,522 - \frac{5,8 \cdot 10^{-4} T^2}{T + 300}.$$
- 1.3.17. Яким аналітичним виразом можна описати температурну залежність концентрації електронів у напівпровіднику  $p$ -типу на ділянці збіднення акцепторів?
- 1.3.18. Знайдіть положення рівня Фермі відносно середини забороненої зони за температури  $T = 300$  К для кристалу силіцію, який містить  $10^{17}$  атомів бору в  $1 \text{ см}^3$ .
- 1.3.19. Обчисліть положення рівня Фермі відносно дна зони провідності за температури  $T = 300$  К для кристала германію, який містить  $10^{17}$  атомів стибію і  $5 \cdot 10^{16}$  атомів індію в  $1 \text{ см}^3$ .
- 1.3.20. Визначте відносне положення рівня Фермі в силіцієвому напівпровіднику  $p$ -типу і концентрацію неосновних носіїв заряду, якщо концентрація акцепторної домішки  $N_a = 10^6 \text{ см}^{-3}$ , а температура навколишнього середовища  $T = 343$  К.

- 1.3.21. В кристалі германію  $n$ -типу на кожні  $10^6$  атомів германію приходить один атом донорної домішки. Вважаючи, що ефективна маса електрона  $m_n^*$  дорівнює  $\frac{1}{2}$  маси спокою електрона, знайдіть положення рівня Фермі відносно дна зони провідності за кімнатної температури.
- 1.3.22. Обчисліть за якої концентрації донорної домішки рівень Фермі співпадає з дном зони провідності, якщо в кристалі германію  $n$ -типу на кожні  $10^3$  атомів германію приходить один атом донорної домішки.
- 1.3.23. У кристалі силіцію  $p$ -типу на кожні  $10^8$  атомів силіцію приходить один атом акцепторної домішки. Знайдіть положення рівня Фермі за кімнатної температури ( $T = 300 \text{ K}$ ) відносно валентної зони.
- 1.3.24. Маємо кристал германію  $p$ -типу за кімнатної температури ( $T = 300 \text{ K}$ ). За якої концентрації акцепторної домішки рівень Фермі буде співпадати зі стелею валентної зони, якщо  $m_{dp}^* = 0,4m_e$ ?
- 1.3.25. Ширина забороненої зони в силіції за нормальної температури ( $T = 300 \text{ K}$ ) дорівнює  $1,1 \text{ eV}$ . Визначте концентрацію донорної домішки, потрібну для зміщення рівня Фермі на межу зони провідності.

## 2 КІНЕТИЧНІ ЯВИЩА В НАПІВПРОВІДНИКАХ

### 2.1 Основні формули та визначення

**Питому провідність напівпровідників** визначають за формулою:

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = en\mu_n + ep\mu_p = e(n\mu_n + p\mu_p), \quad (2.1)$$

де  $e$  – заряд електрона;

$n$ ,  $p$  – концентрація відповідно електронів і дірок;

$\mu_n$ ,  $\mu_p$  – рухливість електронів і дірок.

У власних напівпровідниках концентрації електронів  $n_i$  і дірок  $p_i$  за будь-якої температури однакові, тобто  $n_i = p_i$ , значить

$$\sigma = en_i(\mu_n + \mu_p). \quad (2.2)$$

У домішковому напівпровіднику  $n$ -типу **концентрацію основних носіїв заряду** визначають за формулою:

$$n_n = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{N_d^2 + 4n_i^2} + N_d \right], \quad (2.3)$$

а в домішковому напівпровіднику  $p$ -типу – за формулою:

$$p_p = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{N_a^2 + 4n_i^2} + N_a \right], \quad (2.4)$$

де  $N_d$  – концентрація донорних атомів;

$N_a$  – концентрація акцепторних атомів.

**Концентрацію неосновних носіїв заряду** визначають за законом діючих мас:

$$np = n_i^2. \quad (2.5)$$

У випадку, коли виконується наближення невластного напівпровідника (тобто  $N \gg n_i$ ), розрахунок концентрацій  $n$  і  $p$  спрощується:

для напівпровідників  $n$ -типу:

$$n_n = N_d, \quad (2.6)$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n}; \quad (2.7)$$

для напівпровідників  $p$ -типу:

$$p_p = N_a, \quad (2.8)$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p}; \quad (2.9)$$

Оскільки в домішкових напівпровідниках концентрація основних носіїв заряду, як правило, на  $5 \dots 10$  і більше порядків перевищує концентрацію неосновних носіїв, то за таких умов у напівпровіднику  $n$ -типу визначальною буде електронна складова провідності (домішкова провідність) і замість формули (2.1) можна записати

$$\sigma = \sigma_n = en_n\mu_n = eN_d\mu_n; \quad (2.10)$$

аналогічно в напівпровідниках  $p$ -типу домінуючою буде діркова складова провідності, і формула для  $\sigma$  набуває вигляду

$$\sigma = \sigma_p = ep_p\mu_p = eN_a\mu_p. \quad (2.11)$$

**Ефект Холла** – виникнення поперечної різниці потенціалів при спільній дії електричного  $\mathbf{E}$  і магнітного  $\mathbf{B}$  полів у речовині. Ефект Холла може виникати як у газоподібному, так і твердотілому середовищах.

**Електрорушійна сила (ЕРС) Холла:**

$$U_H = -a\mathcal{E}_y = \frac{n\mu_n^2 - p\mu_p^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2} ajB, \quad (2.12)$$

де  $a$  – відстань між електродами;  $j$  – густина струму;  $B$  – індукція магнітного поля;  $n$ ,  $p$  – концентрація електронів та дірок;  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  – їх рухливості.

Вираз (2.12) зазвичай записують у вигляді

$$U_H = R_H ajB. \quad (2.13)$$

Коефіцієнт  $R_H = \frac{n_e\mu_n^2 - n_i\mu_i^2}{e(n_e\mu_n + n_i\mu_i)^2}$  називають *сталю Холла*.

Величина і знак сталої Холла залежать від співвідношення концентрацій і рухливості носіїв заряду.

При розрахунку сталої Холла для напівпровідників необхідно враховувати, що носіями заряду є електрони зони провідності та дірки валентної зони, тому вираз для сталої Холла запишемо у вигляді

$$R_H = A \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}, \quad (2.14)$$

де  $A$  – множник, який враховує максвеллівський розподіл за енергіями електронів зони провідності й дірок валентної зони невинроджених напівпровідників, а також залежності довжини вільного пробігу  $\lambda_e$  ( $\lambda_p$ ) від енергії носіїв заряду. Чисельне значення множника  $A$  залежить від механізму розсіювання носіїв заряду. При розсіюванні на теплових коливаннях ґратки  $A \approx 1,18$ , при розсіюванні на іонах домішки  $A = 1,93$ .

Для *електронних напівпровідників* в області температур, що відповідає домішковій електропровідності,  $n \gg p$  і

$$R_H = -\frac{A}{en}. \quad (2.15)$$

Для *діркових напівпровідників* в області температур, що відповідають домішковій електропровідності,

$$R_H = \frac{A}{ep}. \quad (2.16)$$

Для напівпровідників зі *змішаною електропровідністю*, як видно з (2.14), стала Холла, за інших однакових умов, менше, ніж для напівпровідників з одним родом домішок. При цьому, в залежності від співвідношення доданків у чисельнику рівняння (2.14), стала Холла може мати той чи інший знак. Більше того, при різних концентраціях і енергіях іонізації донорної й акцепторної домішок стала Холла може змінити знак при зміні температури напівпровідника.

Для власних і домішкових напівпровідників у температурному діапазоні власної електропровідності  $n = p = n_i$ . З урахуванням цієї рівності з рівняння (2.14) отримуємо

$$R_H = \frac{A}{en_i} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}. \quad (2.17)$$

Оскільки зазвичай рухливість електронів зони провідності більша від рухливості дірок валентної зони, стала Холла в таких напівпровідниках має від'ємне значення.

## 2.2 Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Обчисліть концентрацію електронів і дірок у германії  $p$ -типу з питомим опором  $\rho = 0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  за температури  $T = 300 \text{ К}$ . Власна концентрація носіїв заряду  $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ , рухливості електронів і дірок  $\mu_n = 0,39 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ ,  $\mu_p = 0,19 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .

### Розв'язання

Питомий опір пов'язаний з концентрацією електронів і дірок рівнянням

Для концентрації дірок отримуємо квадратне рівняння:

$$p^2 - \frac{\rho}{e\mu_p} + \frac{n_i^2 \mu_n}{\mu_p} = 0.$$

Підставляючи вихідні дані, маємо

$$p^2 - 6,58 \cdot 10^{20} p + 9,03 \cdot 10^{38} = 0,$$

звідки  $p = 6,565 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ .

Другий розв'язок квадратного рівняння відкидаємо, тому що він відповідає провідності  $n$ -типу. Концентрація неосновних носіїв заряду (електронів)

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{(2,1 \cdot 10^{19})^2}{6,565 \cdot 10^{20}} = 6,72 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}.$$

**Відповідь:**  $p = 6,565 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ;  $n = 6,72 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$ .

**Приклад 2.** Питома провідність силіцієвого зразка при нагріванні від температури  $t_1 = 0^\circ \text{C}$  до температури  $t_2 = 18^\circ \text{C}$  збільшилася в 4,24 рази. Визначте ширину забороненої зони силіцію.

**Розв'язання**

Питома провідність власних напівпровідників

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}},$$

де  $\sigma_0$  – стала, характерна для даного напівпровідника;  $\Delta E_g$  – ширина забороненої зони.

Тоді

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T_2}}}{e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T_1}}} = e^{\frac{\Delta E_g}{2k_B} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}$$

або прологарифмувавши

$$\ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E_g}{2k_B} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

звідки шукана ширина забороненої зони

$$\begin{aligned} \Delta E_g &= \frac{2k_B T_1 T_2 \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{T_2 - T_1} = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 291 \cdot \ln 4,24}{291 - 273} \\ &= 1,76 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 1,1 \text{ еВ}. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $\Delta E_g = 1,1 \text{ еВ}$ .

**Приклад 3.** Градієнт потенціалу в зразку кремнію власної провідності складає  $\mathcal{E} = 400 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ , а рухливості електронів і дірок відповідно дорівнюють  $\mu_n = 0,12 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$  і  $\mu_p = 0,025 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . Визначте для цього зразка швидкості дрейфу електронів  $v_n$  і дірок  $v_p$ , питомий опір кремнію власної провідності  $\rho_i$ , якщо концентрація власних носіїв струму дорівнює  $n_i = 2,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ , та повний дрейфовий струм через площу поперечного перерізу зразка  $S = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ .

### Розв'язання

За визначенням швидкості дрейфу електронів і дірок відповідно дорівнюють

$$v_n = \mu_n \mathcal{E} = 48 \frac{\text{М}}{\text{с}} \quad \text{та} \quad v_p = \mu_p \mathcal{E} = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}};$$

питомий опір силіцію із власною провідністю становить

$$\rho_i = \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{n_i e (\mu_n + \mu_p)} = 1,73 \cdot 10^3 \text{ Ом} \cdot \text{м},$$

а повний дрейфовий струм складає

$$I = jS = n_i e (v_n + v_p) S = 0,70 \text{ мкА}.$$

Відповідь:  $v_n = 48 \frac{\text{М}}{\text{с}}$ ;  $v_p = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}}$ ;  $\rho_i = 1,73 \cdot 10^3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ;  $I = 0,70 \text{ мкА}$ .

**Приклад 4.** Зразок легованого силіцію  $p$ -типу має такі лінійні розміри: довжина  $l = 5 \text{ мм}$ , ширина  $b = 2 \text{ мм}$  і товщина  $h = 1 \text{ мм}$ . Обчисліть концентрацію домішок у зразку та опір зразка, якщо на  $7,1 \cdot 10^7$  атомів кремнію припадає один атом акцептора. Визначте електронну й діркову провідності та їх відношення. Рухливість електронів дорівнює  $\mu_n = 0,12 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ , а дірок –  $\mu_p = 0,025 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ ; концентрація власних носіїв складає  $n_i = 2,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ .

### Розв'язання

Чистий кристалічний силіцій містить в  $1 \text{ м}^3$

$$n = \frac{\gamma}{M} N_A \text{ атомів},$$

де  $M$  – молярна маса;  $\gamma$  – густина;  $N_A$  – число Авогадро. Отже, для кремнію маємо

$$N = 4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

За умовою задачі концентрація акцепторів, а отже, й дірок дорівнює

$$p_p = \frac{N}{7,1 \cdot 10^7} = 6,24 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

За визначенням концентрація електронів у  $p$ -напівпровіднику буде

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = 10^{11} \text{ м}^{-3}.$$

Отже, електронна провідність дорівнює

$$\sigma_n = n_p e \mu_n = 1,92 \cdot 10^{-9} \frac{\text{См}}{\text{м}},$$

а діркова провідність

$$\sigma_p = p_p e \mu_p = 25 \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Відношення діркової провідності до електронної:

$$k = \frac{\sigma_p}{\sigma_n} = 1,3 \cdot 10^{10}.$$

Опір зразка при цьому буде дорівнювати

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma_p} \frac{l}{bh} = 100 \text{ Ом}.$$

*Відповідь:*  $p_p = 6,24 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}; \quad n_p = 10^{11} \text{ м}^{-3}; \quad \sigma_n = 1,92 \cdot 10^{-9} \frac{\text{См}}{\text{м}};$   
 $\sigma_p = 25 \frac{\text{См}}{\text{м}}; \quad k = 1,3 \cdot 10^{10}; \quad R = 100 \text{ Ом}.$

**Приклад 5.** Кристал силіцію  $n$ -типу за температури  $T = 300 \text{ К}$  має питомий опір  $\rho = 0,1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Визначте, за якої температури в цьому матеріалі починає домінувати власна електропровідність, якщо температурна зміна рухливості носіїв заряду в напівпровіднику визнача-

ється співвідношеннями:  $\mu_n = 0,14 \left( \frac{T}{300} \right)^{-\frac{3}{2}}$ ;  $\mu_p = 0,05 \left( \frac{T}{300} \right)^{-\frac{3}{2}}$ , а ширина забороненої зони – виразом  $\Delta E_g = 1,205 - 2,84 \cdot 10^{-4} T$ . Ефективні маси густини станів  $m_{dn}^* = 1,05 m_e$ ,  $m_{dp}^* = 0,56 m_e$ .

### ***Розв'язання***

Будемо вважати, що за  $T = 300$  К усі донори повністю іонізовані, тому концентрація домішок:

$$N_d = \frac{1}{\text{ре}\mu_n} = \frac{1}{0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,14} = 4,464 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Оскільки на ділянці виснаження донорів концентрація носіїв заряду не змінюється, температурну зміну питомої провідності визначають за рівнянням

$$\sigma = e N_d \mu_n = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,464 \cdot 10^{20} \cdot 0,14 \left( \frac{T}{300} \right)^{-\frac{3}{2}} = 5,2 \cdot 10^4 \left( \frac{T}{300} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Питома провідність власного напівпровідника

$$\begin{aligned} \sigma_i &= e n_i (\mu_n + \mu_p) = e \sqrt{N_c N_v} (\mu_n + \mu_p) e^{\frac{\Delta E_g^0 - \xi T}{2 k_B T}} = \\ &= e \sqrt{N_c N_v} (\mu_n + \mu_p) e^{\frac{\xi}{2 k_B}} e^{-\frac{\Delta E_g^0}{2 k_B T}}. \end{aligned}$$

Ефективна густина станів для електронів і дірок

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{2 \left( 2 \pi m_{dn}^* k_B T \right)^{\frac{3}{2}}}{h^3} = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot T)^{\frac{3}{2}}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} = \\ &= 2,69 \cdot 10^{25} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ м}^{-3}; \end{aligned}$$

$$N_v = \frac{2(2\pi m_{dp}^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} = \frac{2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,56 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot T)^{\frac{3}{2}}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} =$$

$$= 1,05 \cdot 10^{25} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ м}^{-3}.$$

Розрахуємо питому провідність власного напівпровідника за довільної температури  $T$

$$\sigma_i = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{25} \cdot \sqrt{2,69 \cdot 1,05} \cdot (0,14 + 0,05) \cdot \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times e^{\frac{2,84 \cdot 10^{-4}}{2,8,625 \cdot 10^{-5}}} \cdot e^{-\frac{1,205}{2,8,625 \cdot 10^{-5} T}} = 2,65 \cdot 10^6 e^{\frac{6985}{T}}.$$

Шукану температуру знаходимо з умови  $\sigma = \sigma_i$ , з якої випливає трансцендентне рівняння

$$5,2 \cdot 10^4 \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} = 2,65 \cdot 10^6 e^{\frac{6985}{T}}.$$

Після спрощення і логарифмування цього рівняння маємо

$$\ln \frac{1}{T} = 1,138 - \frac{2022}{T}.$$

Чисельний розв'язок цього рівняння дає

$$\frac{1}{T} = \frac{1,9}{10^3} \frac{1}{\text{К}},$$

тобто при  $T > 523 \text{ К}$  у цьому зразку буде переважати власна електропровідність.

*Відповідь:* власна електропровідність буде домінувати за умови, що  $T > 523 \text{ К}$ .

**Приклад 6.** Зразок напівпровідника довжиною 30 мм, шириною 5 мм і товщиною 1 мм має опір 500 Ом. При внесенні його в магнітне поле з індукцією  $B = 0,5 \text{ Тл}$ , перпендикулярне площині пластини, на гранях зразка виникає ЕРС Холла 5 мВ при струмі через зразок 10 мА.

Визначте рухливість Холла і концентрацію носіїв заряду в напівпровіднику, вважаючи, що він є напівпровідником  $p$ -типу.

До якого значення зміниться ЕРС Холла, якщо в теж саме поле внести зразок міді таких самих розмірів і з таким самим струмом? Концентрація електронів провідності в міді  $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

### ***Розв'язання***

Питома провідність напівпровідника

$$\sigma = \frac{l}{RS} = ep\mu_{\text{H}},$$

де  $l$  – довжина напівпровідника;  $S$  – площа поперечного перерізу;  $\mu_{\text{H}}$  – рухливість Холла. Коефіцієнт Холла

$$R_{\text{H}} = \frac{1}{ep} = \frac{U_{\text{H}}h}{IB},$$

де  $U_{\text{H}}$  – ЕРС Холла;  $h$  – товщина зразка. Звідси концентрація дірок

$$p = \frac{IB}{ehU_{\text{H}}} = \frac{10^{-2} \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 6,25 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Рухливість Холла

$$\mu_{\text{H}} = \frac{l}{eRS\rho} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,25 \cdot 10^{21}} = 0,012 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Відмітимо, що для тих самих значень розмірів зразка, індукції магнітного поля і струму ЕРС Холла пропорційна зворотному значенню концентрації носіїв заряду. Тому ЕРС Холла в мідному зразку

$$U_{\text{H}_{\text{Cu}}} = \frac{U_{\text{H}}}{\frac{1}{p}} = \frac{pU_{\text{H}}}{n} = \frac{6,25 \cdot 10^{21} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^{28}} = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ В} = 0,37 \text{ нВ}.$$

**Відповідь:**  $p = 6,25 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ;  $\mu_{\text{H}} = 0,012 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ ;  $U_{\text{H}_{\text{Cu}}} = 0,37 \text{ нВ}$ .

### 2.3 Задачі для самостійного розв'язування

- 2.3.1. Питомий опір власного германію за температури  $T = 300 \text{ K}$   
 $\rho = 0,43 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Рухливості електронів і дірок у германії дорівнюють відповідно  $0,39$  і  $0,19 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . Визначте власну концентрацію електронів і дірок.
- 2.3.2. Визначте питомий опір напівпровідника  $n$ -типу, якщо концентрація електронів провідності в ньому дорівнює  $10^{22} \text{ м}^{-3}$ , а їх рухливість  $\mu_n = 0,5 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .
- 2.3.3. За напруженості електричного поля  $E = 100 \frac{\text{В}}{\text{м}}$  густина струму через напівпровідник  $j = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ . Визначте концентрацію електронів провідності в напівпровіднику, якщо їх рухливість  $\mu_n = 0,375 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . Дірковою складовою струму знехтувати.
- 2.3.4. Обчисліть відношення повного струму через напівпровідник до струму, зумовленого дірковою складовою: а) у власному германії; б) в германії  $p$ -типу з питомим опором  $\rho = 0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Прийміть власну концентрацію носіїв заряду за кімнатної температури  $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ , рухливість електронів  $\mu_n = 0,39 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ , рухливість дірок  $\mu_p = 0,19 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .
- 2.3.5. До стрижня з арсеніду галію завдовжки  $50 \text{ мм}$  прикладена напруга  $50 \text{ В}$ . За який час електрон пройде через весь зразок, якщо рухливість електронів  $\mu_n = 0,9 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ ?
- 2.3.6. Питомий опір власного кремнію за температури  $T = 300 \text{ K}$  дорівнює  $\rho_i = 2000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , власна концентрація носіїв заряду  $n_i = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Чому дорівнює за цієї температури питомий опір силіцію  $n$ -типу з концентрацією електронів  $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ? Вважайте, що рухливість електронів втричі більше за рухли-

вість дірок і що це співвідношення залишається в силі як для власного, так і для домішкового напівпровідника із заданим ступенем легування.

- 2.3.7. Епітаксiальний шар арсенiду галiю, легований сiркою, має за кiмнатної температури питомий опiр  $\rho = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Визначте концентрацiю донорiв у шарi, якщо рухливiсть електронiв

$$\mu_n = 0,8 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

- 2.3.8. Через пластину кремнiю з питомим опором  $\rho = 0,01 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  проходить електричний струм густиною  $j = 10 \frac{\text{мА}}{\text{мм}^2}$ . Знайдiть

середнi швидкостi дрейфу електронiв i дiрок, якщо їх рухливостi 0,14 i  $0,05 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$  вiдповiдно.

- 2.3.9. Обчислiть вiдношення власної питомої провiдностi до мiнiмальної за  $T = 300 \text{ К}$  для антимоноiду iндiю, що має такі параметри:

$$n_i = 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}; \mu_n = 7,8 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}; \mu_p = 0,075 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

- 2.3.10. Визначте струм крiзь зразок кремнiю прямокутної форми  $5 \times 2 \times 1 \text{ мм}$ , якщо вздовж зразка прикладена напруга 10 В. Вiдомо, що концентрацiя електронiв у напiвпровiднику

$$n = 10^{21} \text{ м}^{-3}, \text{ їх рухливiсть } \mu_n = 0,14 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

- 2.3.11. Обчислiть питомий опiр кристалiв арсенiду галiю, легованих хромом до концентрацiї  $N_a = 2 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$  за температури  $T = 300 \text{ К}$ , якщо енергiя йонiзацiї атомiв хрому

$$\Delta E_a = 790 \text{ меВ}, \text{ а рухливiсть дiрок } \mu_p = 0,04 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}. \text{ Ефективна}$$

маса дiрок  $0,48 m_e$ .

- 2.3.12. На скiльки збiльшиться питома провiднiсть германiю порiвняно з власною провiднiстю при змiнi температури вiд 20 до 21 °С, якщо температурна залежнiсть ширини забороненої зони (еВ) має вигляд  $\Delta E_g(T) = 0,782 - 3,9 \cdot 10^{-4} T$ .

- 2.3.13. Зразок кремнію містить як домішку фосфор з концентрацією атомів  $2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ . Яку потрібно створити концентрацію атомів галію в цьому напівпровіднику, щоб тип електропровідності змінився на протилежний, а питомий опір став рівним  $\rho = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ? При розрахунках вважати, що рухливість дірок

$$\mu_p = 0,05 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Виразіть потрібну концентрацію галію в масо-

вих частках, якщо густина силіцію  $\gamma = 2,328 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

- 2.3.14. Оцініть максимальну питому провідність, яку може мати домішковий силіцій за кімнатної температури. Які фактори обмежують її значення?

- 2.3.15. Кристали арсеніду галію  $n$ -типу мають питомий опір

$$\rho = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}, \text{ рухливість електронів } \mu_n = 0,2 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \text{ і як ос-}$$

новну легуючу домішку містять силіцій у кількості  $10^{-2} \text{ ат.}\%$ . Вважаючи, що всі атоми силіцію електрично активні, визначте, скільки їх знаходиться у вузлах арсену. Густина матеріалу  $\gamma = 5,32 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

- 2.3.16. Зразок германію містить  $10^{20} \text{ м}^{-3}$  донорних атомів і  $7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$  акцепторних домішкових атомів. За даної температури питомий опір власного германію дорівнює  $\rho_i = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Визначте рівноважні концентрації електронів і дірок, а також густину дрейфового струму, що буде проходити крізь зразок під дією електричного поля напруженістю  $\mathcal{E} = 200 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$  Рухливість елек-

тронів і дірок відповідно дорівнює  $\mu_n = 0,39 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$  і

$$\mu_p = 0,19 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

- 2.3.17. Зразок власного кремнію має питомий опір  $\rho_i = 2000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  за кімнатної температури й концентрацію електронів провідності

$n_i = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Визначте питомий опір зразка, легованого акцепторною домішкою з концентрацією  $10^{21} \text{ м}^{-3}$  і  $10^{23} \text{ м}^{-3}$ . Вважайте, що рухливість дірок залишається однаковою як для власного, так і для домішкового силіцію й дорівнює  $\mu_p = 0,25\mu_n$ .

- 2.3.18. Визначте: а) яка концентрація атомів-акцепторів (на  $1 \text{ см}^3$ ) потрібна для того, щоб отримати в германії питому провідність  $\sigma = 1 \frac{\text{мСм}}{\text{см}}$  за  $T = 300 \text{ К}$ ; б) яке при цьому відношення атомів акцепторної домішки до атомів германію; в) яка буде питома провідність, якщо германій містить в такій же пропорції атоми донорної домішки?
- 2.3.19. Обчисліть, при якому співвідношенні концентрацій електронів і дірок в кремнії ЕРС Холла обертається в нуль, якщо їх рухливості дорівнюють відповідно 0,14 і 0,05  $\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .
- 2.3.20. Напівпровідник у вигляді тонкої пластини завширшки  $b = 1 \text{ см}$  і довжиною  $l = 10 \text{ см}$  вміщений в однорідне магнітне поле індукцією  $B = 0,2 \text{ Тл}$ . Вектор магнітної індукції перпендикулярний площині пластини. До кінців пластини (за напрямком  $l$ ) прикладена постійна напруга  $U = 300 \text{ В}$ . Визначте холлівську різницю потенціалів  $U_H$  на гранях пластини, якщо стала Холла  $R_H = 0,1 \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}$ , питомий опір  $\rho = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

### 3 ГЕНЕРАЦІЯ Й РЕКОМБІНАЦІЯ, ДИФУЗІЯ ТА ДРЕЙФ НОСІЇВ ЗАРЯДУ В НАПІВПРОВІДНИКОВОМУ КРИСТАЛІ

#### 3.1 Основні формули та визначення

За наявності в напівпровіднику рекомбінаційної домішки, яка створює в забороненій зоні глибокі енергетичні рівні, рекомбінація й генерація нерівноважних носіїв заряду протікає в основному через ці глибокі рівні – локальні центри рекомбінації, тобто рекомбінаційні пастки. Неглибокі рівні створюють лише центри прилипання (багато-кратного захоплювання і звільнення носіїв) – пастки захоплювання носіїв заряду.

Швидкості рекомбінації  $R_n$  і  $R_p$  при механізмі рекомбінації через рекомбінаційні центри мають вигляд

$$R_n = -\frac{\Delta n}{\tau_n}; \quad R_p = -\frac{\Delta p}{\tau_p}.$$

Надлишкові концентрації носіїв заряду  $\Delta n$  і  $\Delta p$  при даному механізмі рекомбінації пов'язані співвідношенням

$$\Delta n + N_t \Delta f_t = \Delta p,$$

де  $\Delta f_t$  – зміна ймовірності заповнення пастки електроном;

$N_t$  – концентрація рекомбінаційної домішки.

**Час життя нерівноважних носіїв заряду** ( $\tau_n$ ,  $\tau_p$ ) – це середній проміжок часу від моменту генерації нерівноважних носіїв заряду до моменту їх зникнення в результаті рекомбінації.

Часи життя нерівноважних носіїв заряду визначають за співвідношеннями

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{\Delta n [C_n (n + n_1) + C_p (p + p_1)]}{C_n C_p (np - n_1 p_1)}, \\ \tau_p &= \frac{\Delta p [C_n (n + n_1) + C_p (p + p_1)]}{C_n C_p (np - n_1 p_1)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При рівності концентрацій надлишкових носіїв заряду (що відповідає йонізації атомів ґратки) часи життя носіїв заряду, як впливає з (3.1), також рівні:

$$\tau_n = \tau_p, \quad \text{якщо} \quad \Delta n = \Delta p. \quad (3.2)$$

На основі (3.2) шляхом виконання проміжних дій можна одержати вираз для часу життя нерівноважних носіїв заряду при рекомбінації через рекомбінаційні пастки:

$$\tau = \tau_{p0} \frac{n_0 + n_1 + \Delta n}{n_0 + p_0 + \Delta n} + \tau_{n0} \frac{p_0 + p_1 + \Delta p}{n_0 + p_0 + \Delta p}. \quad (3.3)$$

Параметри, що входять в (3.3), визначають за формулами

$$\begin{aligned} \tau_{n0} &= \frac{1}{C_n} = \frac{1}{N_t \alpha_n} = \frac{1}{N_t S_n v_n}, & \tau_{p0} &= \frac{1}{C_p} = \frac{1}{N_t \alpha_p} = \frac{1}{N_t S_p v_p}, \\ n_1 &= N_c e^{-\frac{E_c - E_t}{k_B T}}, & p_1 &= N_v e^{-\frac{E_t - E_v}{k_B T}}, \\ N_c &= \frac{2(2\pi m_{dn}^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}, & N_v &= \frac{2(2\pi m_{dp}^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}. \end{aligned}$$

У наведених вище формулах використані наступні позначення:

$E_t$  – енергетичний рівень рекомбінаційної домішки, [Дж], [еВ];

$\tau_{n0}$ ,  $\tau_{p0}$  – параметри, на величину яких значно впливає природа глибоких рівнів, [с];

$n_0$ ,  $p_0$  – рівноважні концентрації електронів і дірок, визначувані відповідно до табл. 1.1, [м<sup>-3</sup>];

$n_1$ ,  $p_1$  – рівноважна концентрація електронів (дірок) в зоні провідності (у валентній зоні) у разі, коли рівень Фермі співпадає з рівнем пастки, [м<sup>-3</sup>];

$S_n$ ,  $S_p$  – перерізи захоплювання електронів і дірок рекомбінаційним центром, [м<sup>2</sup>];

$\alpha_n$ ,  $\alpha_p$  – коефіцієнти захоплювання електронів і дірок, [м<sup>3</sup>·с<sup>-1</sup>];

$v_n, v_p$  – теплова швидкість вільних носіїв заряду (електронів і дірок);  $v_n = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_n^*}}$ ;  $v_p = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_p^*}}$ , [м·с<sup>-1</sup>];

$N_c, N_v$  – ефективна густина квантових станів у зоні провідності та у валентній зоні відповідно, [см<sup>-3</sup>];

$m_n^*, m_p^*$  – ефективні маси електронів і дірок (в довідниках приводяться у відносних одиницях); для отримання  $m_n^*, m_p^*$  в абсолютних одиницях необхідно домножити їх на масу вільного електрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;

$h$  – стала Планка ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с).

Практично реалізовуваним випадком є випадок малого рівня збудження (малого рівня інжекції), при якому  $\Delta n = \Delta p \ll n_0 + p_0$ . Тоді відповідно до (3.3) час життя

$$\tau = \tau_{p0} \frac{n_0 + n_1}{n_0 + p_0} + \tau_{n0} \frac{p_0 + p_1}{n_0 + p_0}. \quad (3.4)$$

Концентрації  $n_1, p_1$  тотожні виразам:

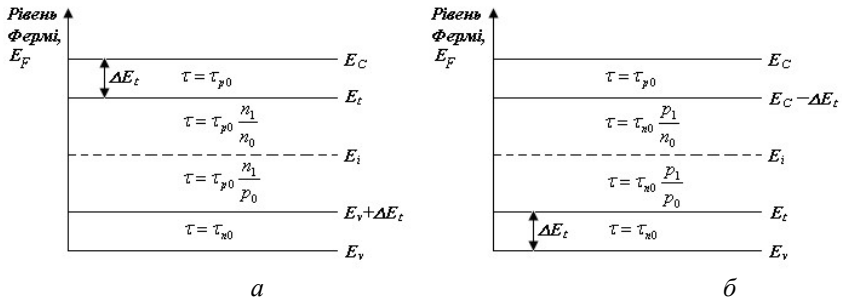
$$n_1 \equiv n_i e^{\frac{E_i - E_f}{k_B T}}, \quad p_1 \equiv p_i e^{-\frac{E_i - E_f}{k_B T}}.$$

З формули (3.4) видно, що  $\tau$  залежить від  $\tau_{p0}$  і  $\tau_{n0}$ , а отже, і від положення рівня Фермі.

Діаграми, що показують співвідношення для визначення часу життя нерівноважних носіїв заряду залежно від положення рівня Фермі, наведені на рис. 3.1.

Наприклад, якщо необхідно розрахувати  $\tau$  для випадку, коли рівень рекомбінаційної домішки знаходиться нижче середини забороненої зони ( $E_i < E_g$ ) і рівень Фермі знаходиться між  $E_i$  і  $E_g - \Delta E_i$ , то

використовується формула  $\tau = \tau_{n0} \frac{p_1}{n_0}$ .



а –  $E_i > E_i$ ; б –  $E_i < E_i$

Рисунок 3.1 – Спрощені співвідношення для визначення часу життя нерівноважних носіїв заряду при малому рівні інжекції

Рекомбінаційна домішка може утворювати декілька рекомбінаційних рівнів з різними перерізами захвату носіїв заряду (додаток Б). Для вибору одного з них розраховуються функції розподілу електронів і дірок на рекомбінаційних рівнях:

$$f_{tn} = \frac{1}{1 + \frac{e^{\frac{E_t - E_F}{k_B T}}}{g}}; \quad f_{tp} = 1 - f_{tn}.$$

Величина  $f_{tp}$  характеризує ймовірність того, що на пастці немає електрона, тобто вона вільна.

Далі визначаємо добутки  $N_t f_{tp} S_n$  і  $N_t f_{tn} S_p$ .

Слід вибрати той рівень, для якого добуток буде максимальним, тому що визначальну роль в процесах рекомбінації виконують рівні, для яких добуток концентрації центрів рекомбінації на переріз захоплення ними неосновних носіїв заряду максимальний (швидкість рекомбінації зазвичай лімітується захопленням неосновних носіїв заряду).

Протягом часу життя нерівноважних носіїв заряду їх надлишкова концентрація зменшується в  $e$  разів (за умови, що стороннє джерело припиняє дію при  $t = 0$ ):

$$\Delta n(t) = \Delta n(0) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.5)$$

**Нескомпенсований заряд**, що виникає від дії стороннього джерела в момент часу  $t = 0$ , змінюється за законом

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau_M}}, \quad (3.6)$$

де  $\tau_M$  – максвеллівський час релаксації, що дорівнює  $\tau_M = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{en\mu_n}$ ;  $n$  – концентрація електронів;  $\mu_n$  – рухливість електронів (аналогічно і для дірок);  $\rho_0 \equiv \rho(0)$ .

**Співвідношення Ейнштейна** для коефіцієнтів дифузії та рухливості носіїв заряду

$$D_n = \frac{k_B T}{e} \mu_n, \quad D_p = \frac{k_B T}{e} \mu_p. \quad (3.7)$$

**Закон зміни надлишкової концентрації** носіїв заряду з відстанню

$$\Delta n(x) = \Delta n(0) e^{-\frac{x}{L_n}}, \quad \Delta p(x) = \Delta p(0) e^{-\frac{x}{L_p}} \quad (3.8)$$

де  $L_n$ ,  $L_p$  – дифузійна довжина<sup>1</sup> електронів і дірок.

**Співвідношення між дифузійною довжиною й часом життя**

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}, \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}. \quad (3.9)$$

**Рівняння неперервності** в одновимірному випадку в умовах малої інжекції (коли концентрація інжектованих носіїв набагато менша від рівноважних концентрацій основних носіїв струму) в напівпровідниках  $p$ - і  $n$ -типу відповідно:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = G_n - \frac{n_p - n_{p0}}{\tau_n} + \mu_n \frac{\partial(\mathcal{E} \cdot n_p)}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n_p}{\partial x^2}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = G_p - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} - \mu_p \frac{\partial(\mathcal{E} \cdot p_n)}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2}, \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup> Дифузійна довжина – це відстань, протягом якої концентрація надлишкових носіїв зменшується в  $e$  разів.

де  $G_n, G_p$  – швидкості генерації електронів і дірок в одиниці об'єму  $[\text{см}^{-3}/\text{с}]$ ;

$R_n = -\frac{n_p - n_{p0}}{\tau_n} = -\frac{\Delta n_p}{\tau_n}$  – швидкість рекомбінації електронів у напівпровіднику  $p$ -типу  $[\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}]$ ;

$R_p = -\frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} = -\frac{\Delta p_n}{\tau_p}$  – швидкість рекомбінації дірок у напівпровіднику  $n$ -типу  $[\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}]$ ;

$D_n \frac{\partial^2 n_p}{\partial x^2}, D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2}$  – доданки, обумовлені дифузійними процесами;

$\mu_n \frac{\partial(\mathcal{E} \cdot n_p)}{\partial x}, \mu_p \frac{\partial(\mathcal{E} \cdot p_n)}{\partial x}$  – доданки, зумовлені процесами дрейфу електронів і дірок під дією електричного поля напруженістю  $\mathcal{E}$ .

На поверхні напівпровідника існує деяка концентрація дефектів, що характеризується наявністю рекомбінаційних центрів.

Струми в напівпровіднику мають дві складові: дрейфову і дифузійну.

Струми, зумовлені дифузією електронів, пропорційні градієнту їх концентрації (**закон Фіка**):

$$j_{nD} = eD_n \frac{dn}{dx}, \quad j_{pD} = -eD_p \frac{dp}{dx}, \quad (3.12)$$

де знак мінус вказує на те, що дифузійний струм дірок направлений протилежно градієнту їхньої концентрації.

**Повні струми електронів і дірок** дорівнюють:

$$j_n = e \left[ n\mu_n \mathcal{E} + D_n \frac{dn}{dx} \right]; \quad (3.13)$$

$$j_p = e \left[ p\mu_p \mathcal{E} - D_p \frac{dp}{dx} \right]. \quad (3.14)$$

Електричне поле  $\mathcal{E}$ , що виникає в об'ємі напівпровідника, зумовлене різноманітними зарядами, визначають з **рівняння Пуассона**:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} [p - n + N_d - N_a], \quad (3.15)$$

де  $N_a$  і  $N_d$  – розподіли в об'ємі акцепторів і донорів відповідно.

**Швидкість поверхневої рекомбінації**  $s$  – це відношення числа актів рекомбінації в одиницю часу на одиниці площі до концентрації надлишкових носіїв.

Поверхнева рекомбінація може істотно змінити час життя носіїв, оскільки  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_V} + \frac{1}{\tau_S}$ , де  $\tau_V$  – час життя носіїв в об'ємі;  $\tau_S = \frac{d}{2s}$  – час життя носіїв на поверхні ( $d$  – товщина зразка).

**Час життя нерівноважних електронів і дірок при міжзонній випромінювальній рекомбінації** (коли кожен елементарний рекомбінаційний акт супроводжується випромінюванням фотона) при малому рівні інжекції ( $\Delta n \ll n_0 + p_0$ )

$$\tau_n = \tau_p = \frac{1}{\gamma_B (n_0 + p_0)}, \quad (3.16)$$

де  $\gamma_B$  – **коефіцієнт випромінювальної рекомбінації** – ймовірність рекомбінації носіїв заряду з випромінюванням фотона.

Для напівпровідника  $n$ -типа  $\tau_n = \frac{1}{\gamma_B n_0}$ , так як  $n_0 \gg p_0$ .

Для напівпровідника  $p$ -типа  $\tau_p = \frac{1}{\gamma_B p_0}$ , так як  $p_0 \gg n_0$ .

**Час життя носія заряду при міжзонній ударній рекомбінації** (Отже-рекомбінації, за якої надлишкова енергія при рекомбінації електрона й дірки передається третьому носію – електрону або дірці):

$$\tau = \frac{2\tau_i n_i^2}{(n_0 + p_0 + \Delta n)[n_0 + \Delta n + \beta(p_0 + \Delta n)]},$$

де  $\tau_i = \frac{1}{2\alpha_{n_0 p_0}}$  – час життя при ударній рекомбінації у власному

напівпровіднику ( $n_0 = p_0 = n_i$ );

$$\beta = \frac{\alpha_{p0} n_0}{\alpha_{n0} p_0}; \quad \alpha_{n0}, \alpha_{p0} - \text{коефіцієнти захоплювання електронів і}$$

дірок в умовах термодинамічної рівноваги.

$$\text{Для малого рівня інжекції} \quad \tau = \frac{2\tau_i n_i^2}{(n_0 + p_0)(n_0 + \beta p_0)}.$$

$$\text{Якщо } n_0 \gg p_0 \text{ (напівпровідник } n\text{-типу)}, \text{ то } \tau = 2\tau_i \frac{n_i^2}{n_0^2}.$$

$$\text{Якщо } p_0 \gg n_0 \text{ (напівпровідник } p\text{-типу)}, \text{ то } \tau = 2\tau_i \frac{n_i^2}{\beta p_0^2}.$$

### 3.2 Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Розрахуйте дифузійну довжину електронів у германії  $p$ -типу і дірок у германії  $n$ -типу, якщо час життя неосновних носіїв заряду  $\tau_n = \tau_p = 10^{-4}$  с, коефіцієнт дифузії для германію  $p$ -типу

$$D_n = 9,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \text{ і для германію } n\text{-типу } D_p = 4,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

#### *Розв'язання*

Дифузійна довжина електронів

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} = \sqrt{9,9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}} = 0,99 \text{ мм}.$$

Дифузійна довжина дірок

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{4,7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}} = 0,69 \text{ мм}.$$

*Відповідь:*  $L_n = 0,99 \text{ мм}$ ;  $L_p = 0,69 \text{ мм}$ .

**Приклад 2.** На відстані 0,48 мм від освітленої поверхні власного силіцію концентрація нерівноважних носіїв заряду спадає у три рази. Визначте час життя нерівноважних носіїв заряду, якщо температура силіцію  $T = 300$  К, а рухливість електронів і дірок за цієї температури

$$\mu_n = 0,15 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, \mu_p = 0,05 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, \text{ а власна концентрація } n_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

### Розв'язання

Час життя нерівноважних носіїв заряду визначимо зі співвідношення

$$L = \sqrt{D_{eff} \tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L^2}{D_{eff}}.$$

Дифузійна довжина знаходиться з виразу (3.8):

$$\Delta n(x) = \Delta n(0) e^{-\frac{x}{L}},$$

звідки

$$L = \frac{x}{\ln \frac{\Delta n(0)}{\Delta n(x)}} = \frac{4,8 \cdot 10^{-4}}{\ln 3} = 4,37 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Коефіцієнт дифузії електронів і дірок:

$$D_n = \frac{k_B T}{e} \mu_n = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 0,15 = 3,88 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}};$$

$$D_p = \frac{k_B T}{e} \mu_p = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 0,05 = 1,29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Для власного напівпровідника ( $n = p = n_i$ ) коефіцієнт амбіполярої дифузії

$$D_{eff} = \frac{2D_n D_p}{D_n + D_p} = \frac{2 \cdot 3,88 \cdot 10^{-3} \cdot 1,29 \cdot 10^{-3}}{3,88 \cdot 10^{-3} + 1,29 \cdot 10^{-3}} = 1,94 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Час життя нерівноважних носіїв заряду:

$$\tau = \frac{L^2}{D_{eff}} = \frac{(4,37 \cdot 10^{-4})^2}{1,94 \cdot 10^{-3}} = 9,84 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Відповідь:  $\tau = 9,84 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ .

**Приклади 3.** В момент часу  $t_1 = 10^{-4} \text{ с}$  після вимкнення рівномірної за об'ємом генерації електронно-діркових пар нерівноважна концентрація дірок виявилась у 10 разів більша, ніж у момент  $t_2 = 10^{-3} \text{ с}$ .

Визначте час життя нерівноважних дірок  $\tau_p$ , якщо рівень збудження невеликий і рекомбінація йде через прості дефекти.

### Розв'язання

Відповідно до умов даного прикладу в рівнянні (3.10) відсутні доданки, які відображають процеси генерації, дифузії і дрейфу. В цьому випадку надлишкова концентрація неосновних носіїв пропорційна швидкості рекомбінації

$$\frac{d}{dt} \Delta p_n = -\frac{\Delta p_n}{\tau_p},$$

звідки (з урахуванням того, що інжекція вимикається в момент  $t = 0$ )

$$\Delta p_n(t) = \Delta p_n(0) e^{-\frac{t}{\tau_p}},$$

$$\frac{\Delta p_n(t_1)}{\Delta p_n(t_2)} = e^{\frac{t_2 - t_1}{\tau_p}},$$

$$\tau_p = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{\Delta p_n(t_1)}{\Delta p_n(t_2)}} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{\ln 10} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{2,31} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Відповідь:  $\tau_p \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$

**Приклад 4.** У зразку силіцію  $n$ -типу за температури  $T = 300 \text{ К}$  час життя неосновних носіїв заряду  $\tau_p = 5 \text{ мкс}$ , їх рухливість  $\mu_p = 0,04 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . В одну з площин зразка вводиться й підтримується незмінною в часі надлишкова концентрація дірок  $\Delta p_0 = 10^{19} \text{ м}^{-3}$ . Визначте густину дифузійного струму в безпосередній близькості від цієї площини. На якій глибині надлишкова концентрація дірок буде складати  $\Delta p_1 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ ? Вважати, що товщина зразка значно більша за дифузійну довжину носіїв заряду.

### Розв'язання

Зі співвідношення Ейнштейна (3.7) знайдемо коефіцієнт дифузії дірок:

$$D_p = \frac{k_B T}{e} \mu_p = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 0,04 = 1,03 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Дифузійна довжина неосновних носіїв заряду (3.9):

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{1,03 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 7,19 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 72 \text{ мкм}.$$

Розподіл дірок за товщиною зразка при одновимірній дифузії характеризується рівнянням  $\Delta p(x) = \Delta p(0) e^{-\frac{x}{L_p}}$ , де  $x$  – відстань від поверхні. Густина дифузійного струму при одновимірній дифузії

$$j_p = -e D_p \frac{d\Delta p}{dx} = \frac{e D_p}{L_p} \Delta p(x).$$

Для  $x = 0$  (тобто в безпосередній близькості від поверхні)

$$j_p = \frac{e D_p}{L_p} \Delta p(0) = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,03 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{19}}{7,2 \cdot 10^{-5}} = 23 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Глибина  $x_1$ , на якій досягається задана концентрація неосновних носіїв заряду,

$$x_1 = -L_p \ln \frac{\Delta p_1}{\Delta p(0)} = -72 \ln \frac{10^{18}}{10^{19}} = 166 \text{ мкм}.$$

Відповідь:  $j_p = 23 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ ;  $x_1 = 166 \text{ мкм}$ .

**Приклад 5.** У  $n$ -Ge є центри рекомбінації з концентрацією рекомбінаційної домішки  $N_t = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$  і енергетичним рівнем  $E_t = \frac{E_c + E_v}{2}$ . За температури  $T = 300 \text{ К}$  переріз захоплення електронів і дірок однаковий, при малих відхиленнях від рівноваги час життя носіїв заряду  $\tau = 10^{-4} \text{ с}$ , питомий опір  $n$ -Ge складає  $\rho = 5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Знайдіть переріз захоплення  $S$ .

### Розв'язання

Відповідно до заданої умови  $E_t = E_i$ . Тоді можна припустити, що  $\tau_{p_0} = \tau_{n_0}$ . З формули (3.4) для слабкого збудження за умови  $\tau_{p_0} = \tau_{n_0}$ :

$$\tau = \frac{1}{N_i \alpha} \frac{n_0 + n_i + p_0 + p_i}{n_0 + p_0}. \quad (1)$$

Обчислимо концентрації, які входять у формулу (1).

Припустимо, що  $T_s < T < T_i$ . Тоді відповідно до формул з табл. 1.1 і параметрів германію, що приводяться у додатку А:

$$\begin{aligned} n_0 = N_d &= \frac{1}{\text{ре}\mu_n} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39} = 3,2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}; \\ p_0 &= \frac{N_C N_V}{N_d} e^{\frac{\Delta E_g}{k_B T}} = \frac{1,04 \cdot 10^{25} \cdot 6,1 \cdot 10^{24}}{3,2 \cdot 10^{20}} e^{\frac{0,72 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = \\ &= 1,629 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}. \\ n_i = p_i = n_i &= 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}. \end{aligned}$$

Справедливість нерівності  $T_s < T < T_i$  можна оцінити за допомогою графіка залежності температури початку власної провідності напівпровідника  $T_i$  від ступеня легування (додаток А) і з формул табл. 1.1, припустивши, наприклад, що основною електронною домішкою германію є селен, енергія активації якого наведена в додатку В. Тоді

$$\begin{aligned} T_i &\approx 342 \text{ К}; \\ T_s &= \frac{\Delta E_d}{k_B \ln \frac{N_C}{N_d}} = \frac{0,14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \ln \frac{1,04 \cdot 10^{25}}{3,2 \cdot 10^{20}}} \approx 156 \text{ К}. \end{aligned}$$

Відповідно до (3.12) коефіцієнт захоплювання

$$\alpha = \frac{1}{\tau N_i} \frac{n_0 + p_0 + 2n_i}{n_0 + p_0} \approx 2,312 \cdot 10^{-15} \frac{\text{м}^3}{\text{с}};$$

і переріз захоплювання

$$S = \frac{\alpha}{v_T} = \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_n^*}}} = \frac{2,312 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,55 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}}} \approx 1,59 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2.$$

Відповідь:  $S \approx 1,59 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$ .

### 3.3 Задачі для самостійного розв'язування

- 3.3.1. Обчисліть дифузійну довжину дірок у германії  $n$ -типу, якщо час життя неосновних носіїв заряду  $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$ , а коефіцієнт дифузії  $D_p = 4,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .
- 3.3.2. Розрахуйте коефіцієнти дифузії електронів і дірок у невідроджених германії і силіції за  $T = 300 \text{ К}$ .
- 3.3.3. Визначте швидкість дрейфу електронів і дірок за  $T = 300 \text{ К}$ , якщо до зразка прикладене електричне поле з напруженістю  $\mathcal{E} = 10, 100, 1000 \frac{\text{В}}{\text{м}}$  для: а) германію; б) силіцію.
- 3.3.4. Визначте час життя й рухливість електронів у невідродженому германії за температури  $T = 300 \text{ К}$ , якщо дифузійна довжина електронів  $L_n = 1,5 \text{ мм}$ , коефіцієнт дифузії  $D_n = 9,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .
- 3.3.5. Визначте дифузійну довжину й коефіцієнт дифузії дірок в невідродженому кремнії за кімнатної температури, якщо час життя дірок  $\tau_p = 400 \text{ мкс}$ , а їх рухливість  $\mu_p = 0,05 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .
- 3.3.6. Визначте коефіцієнти дифузії електронів і дірок у силіції  $n$ -типу за температури  $T = 300 \text{ К}$ , якщо концентрація донорної домішки  $N_d = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ .
- 3.3.7. Крізь одну з граней зразка силіцію  $n$ -типу провідності у формі куба зі стороною  $1 \text{ мм}$  і питомим опором  $\rho = 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$  за те-

температури  $T = 300 \text{ К}$  інжектують  $5 \cdot 10^{21} \frac{\text{електронів}}{\text{м}^{-3}}$ . Концентрація вільних електронів змінюється за лінійним законом. Визначте максимальне значення дифузійного струму електронів, який проходить через зразок.

3.3.8. Зразок германію містить  $10^{20} \text{ м}^{-3}$  донорних домішок і  $7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$  – акцепторних. До зразка прикладене електричне поле напруженістю  $\mathcal{E} = 200 \frac{\text{В}}{\text{см}}$ . Розрахуйте густину дрейфового струму.

3.3.9. Концентрація донорів у германії становить  $N_d = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , а час життя електронів  $\tau_n = 50 \text{ нс}$ . Визначте концентрацію неосновних носіїв заряду і дифузійну довжину електронів за  $T = 300 \text{ К}$ .

3.3.10. У германії  $n$ -типу за  $T = 300 \text{ К}$  дифузійна довжина електронів становить  $L_n = 0,15 \text{ см}$ , а коефіцієнт дифузії  $D_n = 93 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ . Визначте час життя і рухливість електронів.

3.3.11. Визначте дифузійну довжину  $L_n$  і коефіцієнт дифузії  $D_n$  електронів у силіції за температури  $T = 300 \text{ К}$ , якщо час їх життя  $\tau_n = 5 \text{ нс}$ , а рухливість  $\mu_n = 0,135 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .

3.3.12. Визначте час життя дірок  $\tau_p$  за температури  $T = 300 \text{ К}$  у силіції  $p$ -типу з концентрацією акцепторної домішки  $N_a = 10^{20} \text{ м}^{-3}$  за умови, що дифузійна довжина дірок у силіції  $L_p = 100 \text{ мкм}$ .

3.3.13. Знайдіть дифузійний струм у стрижні з розмірами  $l = 5 \text{ мм}$  і  $S = 1 \text{ мм}^2$ , якщо концентрація електронів на одному кінці стрижня дорівнює  $10^{25} \text{ м}^{-3}$ , а на іншому –  $10^{22} \text{ м}^{-3}$ .

3.3.14. У кристалі силіцію  $n$ -типу з концентрацією донорної домішки  $N_d = 10^{18} \text{ м}^{-3}$  напруженість електричного поля складає

$\varepsilon = 500 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ , рухливості електронів і дірок – відповідно

$\mu_n = 0,135 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$  і  $\mu_p = 0,048 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . Площа поперечного перерізу

$S = 10^{-6} \text{ м}^2$ . Обчисліть швидкості дрейфу електронів і дірок, питомий опір зразка й дрейфовий струм.

3.3.15. Дрейфовий струм густиною  $j = 10 \frac{\text{мА}}{\text{см}^2}$  тече крізь силіцій  $n$ -типу з питомим опором  $\rho = 5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Розрахуйте дрейфову швидкість дірок і електронів.

3.3.16. На скільки зміниться коефіцієнт дифузії електронів у невідродженому напівпровіднику з підвищенням температури на 10%, якщо рухливість електронів змінюється пропорційно  $T^{-\frac{3}{2}}$ ?

3.3.17. В кристалі під дією світла створюється рівноважний розподіл надлишкових носіїв заряду  $\Delta n$ . Рівноважна концентрація неосновних носіїв заряду становить  $2,5 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ , а початкова швидкість зменшення концентрації  $2,8 \cdot 10^{24} \text{ с}^{-1}$ . Розрахуйте: а) час життя неосновних носіїв заряду; б) значення  $\Delta n$  через 2 мс після вимкнення джерела світла.

3.3.18. В однорідний напівнескінченний напівпровідник  $n$ -типу в площині  $x = 0$  неперервно інжектуються дірки, так що  $\Delta p_0 = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ . Обчисліть надлишкову концентрацію дірок на відстані  $x = 2 \text{ мм}$  від поверхні, якщо  $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$ ;

$$D_p = 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

3.3.19. Обчисліть час життя неосновних носіїв заряду в напівпровіднику, якщо їх концентрація, що встановилася під впливом джерела збудження, складає  $10^{20} \text{ м}^{-3}$ , а початкова швидкість зменшення надлишкової концентрації при відключенні джерела  $7,1 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ . Знайдіть надлишкову концентрацію  $\Delta n$  через час  $t = 2 \text{ мс}$  після вимикання джерела збудження.

3.3.20. Концентрація електронів у зразку однорідного слаболегованого кремнію  $n$ -типу за кімнатної температури змінюється лінійно від  $10^{17} \text{ см}^{-3}$  при  $x=0$  до  $6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  при  $x=2 \text{ мкм}$ . У зразок інjektуються електрони так, щоб весь час зберігалася ця концентрація. Розрахуйте густину електронного струму в кремнії за відсутності електричного поля, якщо  $\mu_n = 1000 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$  та  $T = 300 \text{ К}$ .

## 4 ОПТИЧНІ ТА ФОТОЕЛЕКТРИЧНІ ЯВИЩА У НАПІВПРОВІДНИКАХ

### 4.1 Основні формули та визначення

Під *оптичними й фотоелектричними явищами* в напівпровідниках розуміють зміни, що відбуваються під дією падаючого випромінювання – зміна інтенсивності випромінювання й зміна провідності напівпровідника.

**Оптичні явища.** Оптичний діапазон електромагнітного випромінювання знаходиться в області від 0,01 до 1 000 мкм і поділяється на три піддіапазони:

- ❖ ультрафіолетовий (від 0,01 мкм до 0,38 мкм);
- ❖ видимий (від 0,38 мкм до 0,78 мкм);
- ❖ інфрачервоний (від 0,78 мкм до 1 000 мкм).

Поширення випромінювання в напівпровіднику може бути описано за допомогою розв'язку рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}; \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

де  $\sigma$  – питома електропровідність.

Вектор напруженості електричного поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (4.2)$$

Квадрат швидкості поширення світла у вакуумі:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0};$$

для напівпровідників в оптичному діапазоні  $\mu \approx 1$ .

Фазова швидкість:

$$v = \frac{k}{\omega} = \frac{c}{N}, \quad (4.3)$$

де комплексний показник заломлення

$$N = \bar{n} - i\kappa, \quad (4.4)$$

де  $\bar{n}$  – дійсний показник заломлення;  $\kappa$  – показник поглинання або коефіцієнт екстинції.

Групова швидкість:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}; \quad \bar{n}^2 - \kappa^2 = \epsilon_1(\omega); \quad 2\bar{n}\kappa = \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} = \epsilon_2(\omega);$$

$\epsilon_1(\omega)$  і  $\epsilon_2(\omega)$  – оптичні константи речовини.

**Інтенсивність світла** – число фотонів, що падають в одиницю часу на одиницю поверхні.

Інтенсивність  $J$  випромінювання, що проходить крізь тверде тіло (без урахування механізму відбивання випромінювання від поверхні) зменшується за експоненціальним законом (законом Бугера – Ламберта):

$$J(x) = J(0)e^{-\gamma x}, \quad (4.5)$$

де  $\gamma$  – **коефіцієнт поглинання** – кількість поглиненої енергії з пучка одиничної інтенсивності в шарі одиничної товщини

$$\gamma = \frac{2\omega\kappa}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0 c n}. \quad (4.6)$$

Коефіцієнт поглинання при власному поглинанні (при поглинанні світла валентними електронами основної речовини з утворенням пар електрон – дірка) достатньо великий:  $\gamma \approx 10^3 \dots 10^5 \text{ см}^{-1}$ . Коефіцієнт поглинання при домішковому поглинанні (з іонізацією домішки)  $\gamma_{\text{дом}} \approx 10^{-16} N_{\text{дом}}$ . Коефіцієнт  $\gamma_{\text{дом}} \approx 0,1 \dots 100 \text{ см}^{-1}$  при  $N_{\text{дом}} \approx 10^{15} \dots 10^{18} \text{ см}^{-3}$ .

Коли пучок монохроматичного випромінювання проходить через речовину, то внаслідок відбивання від поверхні й поглинання в об'ємі його інтенсивність зменшується.

Нехай частка енергії, що відбилася на межі тіла, складає величину  $R$ , яку називають **коефіцієнтом відбивання**. Якщо інтенсивність падаючого світла  $J_0$ , а відбитого  $J_R$ , то

$$R = \frac{J_R}{J_0}. \quad (4.7)$$

Залежність коефіцієнта відбивання від енергії падаючого світла  $R(h\nu)$  або від довжини хвилі  $R(\lambda)$  називають **спектром відбивання**.

Співвідношення для **коефіцієнта пропускання**  $T$ , що виражає собою відношення інтенсивності світла

$$J = \frac{(1-R)^2 e^{-\gamma x}}{1-R^2 e^{-2\gamma x}} J_0,$$

яке пройшло крізь зразок товщиною  $x$  до інтенсивності падаючого світла  $J_0$ , має вигляд

$$T = \frac{J}{J_0} = \frac{(1-R)^2 e^{-\gamma x}}{1-R^2 e^{-2\gamma x}}. \quad (4.8)$$

Якщо в напівпровіднику є поглинаючі центри різної природи (кількістю  $N_i$ ), що характеризуються ефективним перерізом  $\sigma_i$ , то повний коефіцієнт поглинання речовини буде дорівнювати

$$\gamma = \sum_i \sigma_i N_i = \sum_i \gamma_i ,$$

тобто він дорівнює сумі парціальних коефіцієнтів. Отже, повний спектр поглинання речовини складається зі спектрів поглинання різних поглинаючих центрів.

На межі поділу двох середовищ з різними показниками заломлення  $n_1 = 1$  і  $n_2 = n$  відбувається поділ падаючої хвилі на відбиту й заломлену. Амплітуда падаючої  $\mathcal{E}_0$  і відбитої  $\mathcal{E}_R$  хвиль пов'язані з кутом падіння  $\theta_0$  і заломлення  $\theta_2$  **формулами Френеля**:

$$\mathcal{E}_R^N = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} E_0^N ; \quad \mathcal{E}_R^p = -\frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} E_0^p . \quad (4.9)$$

Ці формули отримані в припущенні, що магнітна проникність середовищ  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Вони справедливі у випадку комплексного по-

казника заломлення, коли  $\bar{n} - i\kappa = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_2}$ , причому в цьому випадку

кут заломлення є також комплексною величиною.

Коефіцієнти відбивання

$$R_N = \left| \frac{\mathcal{E}_R^N}{\mathcal{E}_0^N} \right|^2 \quad \text{або} \quad R_p = \left| \frac{\mathcal{E}_R^p}{\mathcal{E}_0^p} \right|^2 ,$$

як впливає з формул Френеля, складним чином залежать від кута падіння, орієнтації  $\mathcal{E}$  (відносно площин  $N$  і  $p$ ), оптичних констант  $n$  і  $\kappa$ . При нормальному падінні ( $\theta_0 = \theta_2 = 0$ ) зв'язок коефіцієнта відбивання з оптичними константами спрощується:

$$R = R_N = R_p = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} . \quad (4.10)$$

Поглинання світла ґраткою відбувається внаслідок взаємодії фотона із фононами (коливаннями ґратки). При поглинанні світла ґраткою має виконуватися закон збереження квазіімпульсу, тобто повинні поглинатися лише такі фотони, імпульс яких дорівнює імпульсу фо-

нона. Оскільки імпульс фотона набагато менший за імпульс фонона, то для виконання закону повинні бути випущені два або більше фотонів. Це обумовлює складну структуру спектра поглинання, що знаходиться в ІЧ-діапазоні (7...50 мкм).

На основі поглинання працюють всі фотоприймачі.

**Фотопровідність** – додаткова провідність, зумовлена носіями заряду, створеними випромінюванням

$$\sigma_{\phi} = e(\Delta n \mu_n + \Delta p \mu_p), \quad (4.11)$$

де стаціонарні концентрації електронів і дірок дорівнюють відповідно:

$$\Delta n = G_n \tau_n = \frac{\gamma \eta J \tau_n}{\hbar \omega}; \quad (4.12)$$

$$\Delta p = G_p \tau_p = \frac{\gamma \eta J \tau_p}{\hbar \omega}, \quad (4.13)$$

де  $G_n$ ,  $G_p$  – швидкість оптичної генерації електронів і дірок;  $\tau_n$  і  $\tau_p$  – час життя відповідно електронів і дірок.

### Швидкість оптичної генерації

$$G(x) = \eta \gamma J(x) = \eta \gamma J(0) e^{-\gamma x}, \quad (4.14)$$

де  $\eta$  – **квантовий вихід фотойонізації** – число пар носіїв заряду (або число носіїв заряду при домішкковій фотопровідності), утворюваних одним поглиненим фотоном.

**Стаціонарна фотопровідність** дорівнює:

$$\sigma_{\phi \text{ ст}} = e \eta \gamma (\mu_n \tau_n + \mu_p \tau_p) \frac{J}{\hbar \omega}. \quad (4.15)$$

Відношення фотопровідності  $\sigma_{\phi}$  до інтенсивності світла  $J$  означає **питому фоточутливість** напівпровідника:

$$S_{\phi} = \frac{\sigma_{\phi}}{J}. \quad (4.16)$$

**Закон зміни інтенсивності випромінювання** після припинення збудження при низькому рівні збудження

$$J(t) = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4.17)$$

де  $J_0$  – інтенсивність випромінювання в момент вимкнення збудження;  $\tau$  – час життя електрона в збудженому стані.

**Фотовольтаїчні ефекти.** Фотовольтаїчні ефекти полягають у виникненні фото-ЕРС при освітленні напівпровідника. подібні ефекти реалізуються за наявності неоднорідності матеріалу або фотозбудження. Розглянемо найбільш важливі фотовольтаїчні ефекти.

**Ефект Дембера** – виникнення в освітленому напівпровіднику об'ємної ЕРС, внаслідок відмінності в коефіцієнтах дифузії електронів та дірок

$$U_D = \frac{k_B T}{e} \frac{b-1}{b+1} \ln \left[ 1 + \frac{(b+1)\Delta n}{bn_0 + p_0} \right], \quad (4.18)$$

де  $b \equiv \frac{\mu_n}{\mu_p}$ .

**Фотоелектромагнітний ефект (ФЕМ-ефект)** – виникнення поперечної ЕРС у нерівномірно освітленому напівпровіднику, поміщеному в магнітне поле

$$U_{\text{ФЕМ}} = \frac{ear\mathcal{B}D_{\text{eff}}(\mu_n + \mu_p)\Delta n(0)}{l\sigma_0 + e(\mu_n + \mu_p)\Delta n(0)L}, \quad (4.19)$$

де  $D_{\text{eff}}$  – коефіцієнт амбіполярної дифузії;  $L$  – амбіполярна дифузійна довжина;  $a$  і  $l$  – розміри зразка;  $r$  – холл-чинник;  $\mathcal{B}$  – магнітна індукція;  $\sigma_0$  – темнова провідність.

За **низького рівня збудження**, коли  $\Delta n \ll (n_0 + p_0)$ :

$$U_{\text{ФЕМ}} = ear\mathcal{B}D_{\text{eff}}(\mu_n + \mu_p) \frac{\Delta n(0)}{l\sigma_0}. \quad (4.20)$$

За високого рівня збудження, коли  $\Delta n \gg (n_0 + p_0)$ :

$$U_{\text{ФЕМ}} = \frac{ar\mathcal{B}D_{\text{eff}}}{L}. \quad (4.21)$$

#### 4.2 Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Зразок GaAs товщиною  $h = 0,5$  мкм освітлюють монохроматичним світлом з енергією фотона  $h\nu = 2$  еВ. Потужність світла, що падає на поверхню зразка складає  $\mathcal{P}_0 = 10$  мВт. Визначте темп генерації  $G$  (кількість електронно-діркових пар, що генеруються за 1 с в  $1 \text{ см}^2$ ). Вважайте, що квантовий вихід фотопровідності  $\eta = 1$  (кількість пар, що генеруються при поглинанні одного фотона), а площа поверхні  $S = 1 \text{ см}^2$ .

*Розв'язок*

Кількість фотонів  $N_\phi$ , що поглинаються зразком за 1 с:

$$N_\phi = \frac{\mathcal{P}_0}{h\nu} = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,8 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$

При об'ємі зразка  $V$  темп генерації складатиме:

$$G = \frac{\eta N_\phi}{V} = \frac{\eta N_\phi}{Sh} = \frac{1 \cdot 2,8 \cdot 10^{16}}{1 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 5,6 \cdot 10^{20} \frac{\text{пар}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}.$$

*Відповідь:*  $G = 5,6 \cdot 10^{20} \frac{\text{пар}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}.$

**Приклад 2.** Покажіть, що при взаємодії електрона і фотона (без участі третьої частинки) можливі лише прямі оптичні переходи.

*Розв'язок*

При взаємодії електрона і фотона закони збереження енергії та імпульсу мають вигляд:

$$h\nu = \Delta E_g ;$$

$$p_\phi = \hbar \Delta k_e .$$

Імпульс фотона  $p_\phi = \frac{h\nu\bar{n}}{c}$ , де  $\bar{n}$  – показник заломлення;  $\hbar\Delta k_e$  – зміна квазіімпульсу електрона в межах зони Бриллюена. Максимальне значення квазіімпульсу електрона в межах зони Бриллюена  $p_e^{\max} = \frac{\pi\hbar}{a}$ , де  $a$  – стала кристалічної ґратки.

$$\frac{\Delta p_e}{p_e^{\max}} = \frac{\hbar\Delta k_e}{p_e^{\max}} = \frac{\frac{h\nu\bar{n}}{c}}{\frac{\pi\hbar}{a}} = \frac{2\Delta E_g a\bar{n}}{hc} .$$

Для оцінки підставимо в останнє співвідношення значення величин, типових для найбільш поширених напівпровідників:  $\Delta E_g = 2$  еВ ;  $\bar{n} = 4$  ;  $a = 2 \cdot 10^{-10}$  м . При цьому

$$\frac{\Delta p_e}{p_e^{\max}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \cdot 4}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 0,002 \quad \text{або} \quad 0,2\% .$$

За таких умов можливі лише прямі оптичні переходи.

Відповідь:  $\frac{\Delta p_e}{p_e^{\max}} = 0,002 .$

**Приклад 3.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda = 100$  мкм відбивається напівпровідником з коефіцієнтом відбивання  $R = 0,36$  . Коефіцієнт пропускання плівки з такого ж матеріалу товщиною  $h = 1$  мм становить  $T = 0,17$  . Визначте коефіцієнт поглинання  $\gamma$  .

*Розв'язання*

Показник поглинання

$$\varkappa = \frac{\gamma \lambda}{4\pi} \ll \bar{n}.$$

Використаємо цю умову для знаходження показника заломлення:

$$R = \frac{(\bar{n} - 1)^2}{(\bar{n} + 1)^2},$$

звідки  $\bar{n} = 4$ .

Аналогічно для коефіцієнта пропускання:

$$T = \frac{(1 - R)^2 e^{-\gamma h}}{1 - R^2 e^{-2\gamma h}}.$$

Позначимо  $x = e^{-\gamma h}$ , тоді

$$(1 - R)^2 x = T - TR^2 x^2;$$

$$TR^2 x^2 + (1 - R)^2 x - T = 0;$$

$$x \approx 0,45.$$

Звідки

$$\gamma = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{1}{x} \right) \approx 7,9 \text{ см}^{-1},$$

$$\varkappa = 6,3 \cdot 10^{-3} \ll \bar{n}.$$

*Відповідь:*  $\gamma \approx 7,9 \text{ см}^{-1}$ .

**Приклад 4.** Показник заломлення для  $\lambda_0 = 0,5 \text{ мкм}$  (у вакуумі) визначається виразом  $\varkappa = 3,47 - 1,40i$ . Розрахуйте:

а) коефіцієнт відбивання від полірованої поверхні германію за нормального падіння;

- б) фазовий зсув  $\varphi_n$ , що виникає внаслідок відбивання за нормального падіння;  
 в) глибину проникнення плоскої хвилі в германій, на якій її інтенсивність спадає до 0,001 від інтенсивності падаючого випромінювання.

*Розв'язок*

Показник заломлення германію в комплексній формі має вигляд (4.4):

$$\aleph = \bar{n} - i\kappa.$$

Коефіцієнт відбивання для світлової амплітуди є комплексною величиною

$$\aleph = R_n e^{i\varphi} = \frac{\aleph - 1}{\aleph + 1} = \frac{\bar{n} - i\kappa - 1}{\bar{n} - i\kappa + 1}.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт відбивання

$$R = \aleph \aleph^* = \frac{(\bar{n} - 1)^2 + \kappa^2}{(\bar{n} + 1)^2 + \kappa^2} = \frac{(3,47 - 1)^2 + (1,40)^2}{(3,47 + 1)^2 + (1,40)^2} = 0,37$$

і фазове випередження відбитої хвилі

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{2\kappa}{1 - \bar{n}^2 - \kappa^2} = \frac{2 \cdot 1,40}{1 - (3,47)^2 - (1,40)^2} = -0,216.$$

Зменшення інтенсивності світла як функція глибини його проникнення  $x$  описується законом Бугера – Ламберта (4.5)

$$J = J_0 e^{-\gamma x},$$

де

$$\gamma = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0}.$$

Звідси

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\frac{4\pi\kappa x}{\lambda_0}};$$

$$\frac{4\pi\kappa x}{\lambda_0} = \ln \frac{J_0}{J};$$

$$x = \frac{\lambda_0}{4\pi\kappa} \ln \frac{J_0}{J} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,40} \cdot \ln 10^3 \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,2 \text{ мкм}.$$

*Відповідь:*  $R = 0,37$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_n = -0,216$ ;  $x = 0,2 \text{ мкм}$ .

**Приклад 4.5.** У кристалі InSb ( $n$ -типу) концентрація електронів  $n_e = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Припустимо, що ефективна маса електрона дорівнює  $0,015m_e$  і не залежить від величини енергії (тобто зона провідності має ідеальну параболічну форму). Визначте плазмову частоту та довжину хвилі, за якої у відбивальній здатності з'являється відповідний мінімум. Концентрацію електронів можна вважати постійною. Діелектрична проникність ґратки  $\varepsilon_L = 16$ .

#### *Розв'язок*

Плазмова частота  $\omega_p$  дорівнює

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m^* \varepsilon_L \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{10^{24} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{0,015 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 16 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,15 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

Мінімум у відбивальній здатності з'являється коли коефіцієнт заломлення  $n = 1$ , тобто

$$\varepsilon_L \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (R=0)} \right) = 1.$$

Тому

$$\omega(R=0) = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_L}}} = \frac{1,15 \cdot 10^{14}}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}} = 1,19 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1};$$

$$\lambda(R=0) = \frac{2\pi c}{\omega(R=0)} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8}{1,19 \cdot 10^{14}} = 15,8 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 15,8 \text{ мкм}.$$

Відповідь:  $\omega_p = 1,15 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda(R=0) = 15,8 \text{ мкм}$ .

**Приклад 4.6.** Напівпровідник типу германію має у межі зони Бриллюєна практично ізотропну оптично дозовану ширину забороненої зони  $\Delta E_g$ , внаслідок чого у цього напівпровідника присутнє сильне поглинання. Діелектрична проникність у близькій інфрачервоній області матеріалу  $\varepsilon_L = 12$ , а параметр ґратки  $a = 5,42 \text{ Å}$ . Оцініть величину  $\Delta E_g$ .

#### Розв'язок

Довгохвильова діелектрична проникність для напівпровідника з ізотропною шириною забороненої зони приблизно дорівнює

$$\varepsilon_L = 1 + \left( \frac{E_p}{\Delta E_g} \right)^2, \quad (1)$$

де  $E_p$  – плазмова енергія валентних електронів, яка дорівнює

$$E_p = \hbar \omega_p = \hbar \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (2)$$

Тут  $n_e$  – концентрація валентних електронів. У цього матеріалу на атом припадає  $z = 4$  валентних електрона, а на елементарну комірку –  $n_0 = 8$  атомів, тому

$$n_e = zn = \frac{zn_0}{a^3} = \frac{4 \cdot 8}{(5,42 \cdot 10^{-9})^3} = 2,01 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

і

$$E_p = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{2,01 \cdot 10^{29} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{31}}} = 15,8 \text{ eВ};$$

Отже,

$$\Delta E_g = \frac{E_p}{\sqrt{\epsilon_L - 1}} = \frac{15,8}{\sqrt{12 - 1}} \approx 4,75 \text{ eВ}$$

Відповідь:  $\Delta E_g \approx 4,75 \text{ eВ}$ .

**Приклад 4.7.** Знайдіть концентрацію нерівноважних носіїв заряду на поверхні  $n$ -Ge (рис. 4.2), якщо оптична генерація пар рівномірна за об'ємом; швидкість генерації  $G_0 = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ , час життя дірок  $\tau_p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ , швидкість поверхневої рекомбінації  $s = 500 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,

$$D_p = 49 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$$

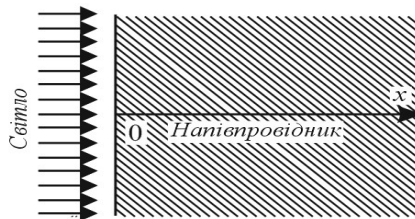


Рисунок 4.1 – Освітлюваний напівнескінченний напівпровідник

## Розв'язок

Рівняння неперервності за стаціонарних умов з урахуванням процесів генерації, дифузії й рекомбінації нерівноважних носіїв (на основі формули (4.11)):

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + G_0 - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0.$$

В умовах рівноваги, коли струм через поверхню дорівнює нулю, дифузійні потоки електронів і дірок рівні один одному, а також рівні числу носіїв, що рекомбінують, на одиниці площі в одиницю часу. Тоді гранична умова для поверхні напівпровідника

$$D_p \left. \frac{d\Delta p}{dx} \right|_{x=0} = s \Delta p|_{x=0}.$$

При нескінченному збільшенні координати  $x$  процесами поверхневої рекомбінації можна нехтувати, із чого випливає друга гранична умова

$$\Delta p \rightarrow G_0 \tau_p \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Розв'язок рівняння має вигляд:

$$\Delta p(x) = G_0 \tau_p + C_1 e^{-\frac{x}{L_p}} + C_2 e^{\frac{x}{L_p}}.$$

З граничних умов  $C_2 = 0$ , тоді

$$-\frac{D_p C_1}{L_p} = s(C_1 + G_0 \tau_p), \quad C_1 = -\frac{G_0 \tau_p^2 s}{L_p + s \tau_p},$$

отже

$$\Delta p(x) = G_0 \tau_p \frac{\tau_p s \left( 1 - e^{-\frac{x}{L_p}} \right) + L_p}{L_p + s \tau_p}$$

та

$$\Delta p(0) = \frac{G_0 \tau_p L_p}{L_p + s \tau_p} = 0,88 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

Відповідь:  $\Delta p(0) = 0,88 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ .

**Приклад 4.8.** Знайдіть концентрацію нерівноважних дірок на освітленій поверхні  $n$ -Ge, якщо  $s = 5 \cdot 10^2 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ , густина потоку квантів  $J = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , квантовий вихід  $\eta = 1$ , коефіцієнт поглинання світла  $\gamma = 10^3 \text{ см}^{-1}$ ,  $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$ ,  $D_p = 49 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ .

*Розв'язок*

Рівняння неперервності для даного випадку

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 e^{-\gamma x} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad g_0 = J\eta,$$

Граничні умови

$$D_p \left. \frac{d\Delta p}{dx} \right|_{x=0} = s\Delta p|_{x=0}, \quad \Delta p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$\Delta p(x) = -\frac{g_0 \tau_p e^{-\gamma x}}{L_p^2 \gamma^2 - 1} + C_1 e^{-\frac{x}{L_p}} + C_2 e^{\frac{x}{L_p}}.$$

Константи  $C_1$  і  $C_2$  визначаються з граничних умов. Тоді

$$\Delta p(x) = \frac{g_0 \tau_p}{L_p^2 \gamma^2 - 1} \left[ \frac{\gamma L_p^2 + s \tau_p}{L_p + s \tau_p} e^{-\frac{x}{L_p}} - e^{-\gamma x} \right],$$

$$\Delta p(0) = \frac{g_0 \tau_p L_p}{(L_p \gamma + 1)(L_p + s \tau_p)} \approx \frac{g_0 \tau_p}{\gamma(L_p + s \tau_p)}$$

за умови прикладу  $L_p \gamma \gg 1$  (сильне поглинання світла). Тоді

$$\Delta p(0) = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

*Відповідь:*  $\Delta p(0) = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

**Приклад 4.9.** На германій  $n$ -типу довжиною 1 см, площею поперечного перерізу  $1 \text{ мм}^2$ , питомим опором  $0,2 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  і часом життя неосновних носіїв заряду  $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$  падає монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,546 \text{ мкм}$ . На цій довжині хвилі світловий потік в 1 лм еквівалентний  $0,0016 \text{ Вт}$ . Падаюче світло витрачається на генерацію електронно-діркових пар. Квантовий вихід дорівнює одиниці. Розрахуйте світловий потік, який повинен падати на бокову поверхню зразка, щоб зменшити його опір вдвічі?

*Розв'язок*

Питома провідність становить:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = e(n\mu_n + p\mu_p) = e\left(n\mu_n + \frac{n_i^2 \mu_p}{n}\right). \quad (1)$$

Для германію (додаток А) концентрація власних носіїв заряду  $n_i = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ . Підставляючи це значення у вираз (1), отримаємо

$$\frac{1}{0,2} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39n + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,25 \cdot 10^{38} \cdot \frac{0,19}{n}. \quad (2)$$

Після перетворень вираз (2) можна записати

$$1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39n^2 - 5n + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,25 \cdot 10^{38} \cdot 0,19 = 0.$$

Звідки  $n \approx 7,6 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ .

Під дією світла  $\Delta n = \Delta p$ , тобто:

$$\sigma = 2 \cdot 5 = e(\Delta n + 7,6 \cdot 10^{19}) \cdot \mu_n + e(\Delta n + 8,2 \cdot 10^{19}) \cdot \mu_p.$$

Звідки  $\Delta n = 5,4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$  – динамічна рівноважна величина під час неперервного світлового випромінювання. В об'ємі зразка  $V = Sl = 10^{-6} \cdot 10^{-2} = 10^{-8} \text{ м}^3$  має бути надлишкова кількість електронів:  $5,4 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-8} = 5,4 \cdot 10^{11}$  і така ж сама кількість дірок. Ця надлишкова кількість носіїв заряду згідно з умовою задачі зникає зі швидкістю  $\frac{5,4 \cdot 10^{11}}{10^{-4}} = 5,4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Для того, щоб підтримувати необхідну динамічну рівновагу, на поверхню зразка має надходити  $5,4 \cdot 10^{15}$  фотонів за 1 с.

Визначимо світловий потік:

$$\Phi = \frac{N h \nu}{0,0016} = \frac{N h c}{0,0016 \lambda} = \frac{5,4 \cdot 10^{15} \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,0016 \cdot 546 \cdot 10^{-9}} = 1,2 \text{ лм}.$$

*Відповідь:*  $\Phi = 1,2 \text{ лм}.$

**Приклад 4.10.** Визначте швидкість оптичної генерації  $G$  нерівноважних носіїв заряду в пластині кремнію на глибині 100 мкм від освітлюваної поверхні при фото збудженні монохроматичним випромінюванням інтенсивністю  $J_0 = 10^{20} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , якщо коефіцієнт поглинання матеріалу на довжині хвилі випромінювання  $\gamma = 5 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$ , а коефіцієнт відбивання випромінювання  $R = 0,3$ .

*Розв'язок*

Швидкість оптичної генерації, тобто число носіїв заряду, що збуджуються світлом в одиницю часу в одиниці об'єму напівпровідника, залежить від показника поглинання й інтенсивності випромінювання на заданій глибині  $x$ . Зміна інтенсивності випромінювання описується законом Бугера – Ламберта

$$J(x) = J_0 (1 - R) e^{-\gamma x}.$$

Число квантів, що поглинаються в шарі одиничної площі товщиною  $dx$ , визначається виразом

$$dJ = \gamma J(x) dx.$$

Швидкість оптичної генерації

$$G(x) = \frac{dJ}{dx} = \gamma J_0 (1 - R) e^{-\gamma x} = 5 \cdot 10^4 \cdot 10^{20} \cdot (1 - 0,3) \cdot e^{-5 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = \\ = 2,36 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Відповідь:  $G(x) = 2,36 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Приклад 4.11.** Зразок германію  $n$ -типу за  $T = 300 \text{ К}$  освітлюється

так, що в середній частині  $\Delta\sigma = 20 \frac{\text{См}}{\text{м}}$ , а поза нею

$\Delta\sigma = 0$ . За відсутності освітлення питомий опір у перерізі А  $\rho_{0A} = 0,15 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , а в перерізі В –  $\rho_{0B} = 0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Розрахуйте фото-ЕРС.

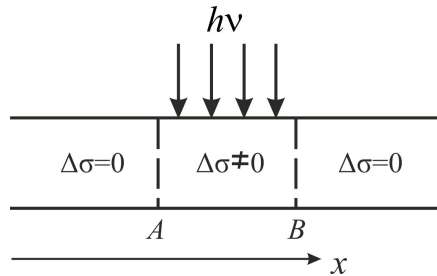


Рисунок 4.2 – До розрахунку фото-ЕРС при неоднорідному збудженні

*Розв'язок*

Розрахуємо спочатку вентильну фото-ЕРС  $U_{\phi}^1$ :

$$\begin{aligned}
 U_{\Phi}^1 &= \frac{k_B T}{e} \int_A^B \frac{b+1}{bn_0 + (b+1)\Delta n} \frac{\Delta n}{n_0} \frac{dn_0}{dx} dx = \frac{k_B T}{e} \Delta n \frac{b+1}{b} \int_A^B \frac{\frac{dn_0}{n_0}}{n_0 + (b+1)\frac{\Delta n}{b}} = \\
 &= \frac{k_B T}{e} \ln \frac{1 + (b+1) \frac{\Delta n}{bn_{0A}}}{1 + (b+1) \frac{\Delta n}{bn_{0B}}} = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{1 + \frac{\Delta \sigma}{\Delta \sigma_{0A}}}{1 + \frac{\Delta \sigma}{\Delta \sigma_{0B}}},
 \end{aligned}$$

$$\text{де } b = \frac{\mu_n}{\mu_p}.$$

Другий доданок розрахуємо за двома ділянками малої ширини  $2\varepsilon$  поблизу А і В, де  $\frac{d\Delta n}{dx} \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 U_{\Phi}^2 &= -\frac{k_B T}{e} \frac{b-1}{b+1} \left[ \int_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + \frac{bn_0}{b+1}} + \int_{B-\varepsilon}^{B+\varepsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + \frac{bn_0}{b+1}} \right] = -\frac{k_B T}{e} \times \\
 &\times \frac{b-1}{b+1} \left[ \ln \frac{\Delta n + \frac{bn_{0A}}{b+1}}{\frac{bn_{0A}}{b+1}} + \ln \frac{\frac{bn_{0A}}{b+1}}{\Delta n \frac{bn_{0A}}{b+1}} \right] = -\frac{k_B T}{e} \frac{b-1}{b+1} \ln \frac{1 + \frac{(b+1)\Delta n}{bn_{0A}}}{\Delta n + \frac{(b+1)\Delta n}{bn_{0A}}}.
 \end{aligned}$$

Додаючи  $U_{\Phi 1}$  і  $U_{\Phi 2}$ , знайдемо

$$\begin{aligned}
 U_{\Phi} &= U_{\Phi}^1 + U_{\Phi}^2 = \frac{2}{b+1} \frac{k_B T}{e} \ln \frac{1 + \Delta \sigma \rho_{0A}}{1 + \Delta \sigma \rho_{0B}} = \frac{2}{2,1+1} \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \times \\
 &\times \ln \frac{1 + 20 \cdot 0,15}{1 + 20 \cdot 0,05} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $U_{\Phi} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$

### 4.3 Задачі для самостійного розв'язування

- 4.3.1. Обчисліть енергію фотонів для червоного випромінювання ( $\lambda = 700$  нм). Вкажіть, які напівпровідники прозорі для цього випромінювання, а які поглинають його.
- 4.3.2. Обчисліть мінімальну довжину світлової хвилі, для якої арсенід галію, що має ширину забороненої зони  $\Delta E_g = 1,43$  еВ за температури  $T = 300$  К, є оптично прозорим. Як буде змінюватися ця гранична довжина хвилі з підвищенням температури?
- 4.3.3. За температури  $T = 300$  К для монохроматичного випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 1$  мкм показник поглинання силіцію  $\gamma = 10^4$  м<sup>-1</sup>, а коефіцієнт відбивання випромінювання  $R = 0,3$ . Визначте, яка частка потоку випромінювання  $\Phi(h)$  пройде крізь пластину силіцію товщиною  $h = 300$  мкм за нормального падіння променів.
- 4.3.4. Напівпровідниковий кристал об'ємом  $1$  мм<sup>3</sup> легований  $10^{22}$  атомами донора в  $1$  м<sup>3</sup>, щоб його можна було використовувати як детектор інфрачервоного випромінювання з величиною  $\lambda^{-1} = 10^4$  м<sup>-1</sup> за рахунок перекидання носіїв крізь енергетичну щілину величиною  $0,01$  еВ. Час життя носіїв дорівнює  $10^{-2}$  с, детектор охолоджується до  $4$  К. Оцініть, у скільки разів зміниться опір напівпровідника при опроміненні його потужністю  $10^{-2}$  Вт. Вважати, що в детекторі падаюче випромінювання повністю поглинається.
- 4.3.5. Довгохвильовій межі зовнішнього фотоефекту сурм'яно-цезієвого фотокатоду за температури поблизу абсолютного нуля відповідає довжина хвилі  $\lambda_1 = 0,65$  мкм, а поріг провідності в цьому матеріалі спостерігається за  $\lambda_2 = 2,07$  мкм. Визначте положення дна зони провідності даного напівпровідника відносно енергетичного рівня вакууму.
- 4.3.6. У рівномірно освітленому кристалі Si  $n$ -типу генеруються нерівноважні пари носіїв з постійною швидкістю

$G_0 = 10^7 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ . Визначте нерівноважні концентрації носіїв у такому кристалі, якщо відомо, що концентрація донорної домішки  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а час життя неосновних носіїв  $\tau_p = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ .

- 4.3.7. Знайдіть концентрацію нерівноважних дірок на освітленій поверхні товстого зразка  $n$ -Ge при сильному поглинанні світла ( $L_p \gamma \gg 1$ ), якщо густина потоку квантів  $J = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , квантовий вихід  $\eta = 1$ , швидкість поверхневої рекомбінації  $s = 500 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,  $D_p = 49 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ .

- 4.3.8. Знайдіть швидкість поверхневої рекомбінації  $s_0$  на нижній грані плоскопаралельної пластини напівпровідника  $n$ -типу товщиною  $d = 7 \text{ мм}$  (рис. 4.3) за умов рівномірної за об'ємом генерації світлом, якщо швидкість поверхневої рекомбінації на верхній грані  $s_d = 100 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ , концентрації нерівноважних носіїв заряду на верхній і нижній гранях дорівнюють відповідно  $\Delta p(d) = 7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$  і  $\Delta p(0) = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$   $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$ ;  
 $D_p = 49 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ .

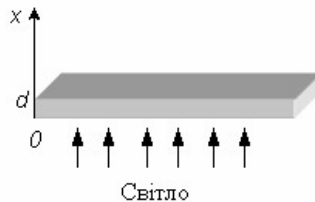


Рисунок 4.3

- 4.3.9. Довгохвильовий край смуги поглинання чистого германію лежить поблизу довжини хвилі  $\lambda_0 = 19 \text{ мкм}$ . Оцініть звідси ширину забороненої зони германію (в eV).

- 4.3.10. Якою має бути товщина зразків GaAs, щоб виміряти коефіцієнт поглинання  $\gamma = 10^5 \text{ см}^{-1}$ , якщо апаратура дозволяє вимірювати інтенсивність випромінювання, зменшену при поглинанні у  $10^3$  разів? Які можливі похибки при визначенні ширини забороненої зони з краю власного поглинання при таких товщинах?
- 4.3.11. Випромінювання лазера потужністю 150 мВт з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6328 \text{ мкм}$  сфокусовано на зразках GaAs товщиною 1 мм. Коефіцієнт поглинання для такої довжини хвилі становить  $3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ . Знайдіть кількість фотонів, що поглинаються у зразку за 1 с. Яка енергія перетвориться на тепло?
- 4.3.12. Ширина забороненої зони прямо зонного напівпровідника з ізотропними ефективними масами  $\Delta E_g = 1,43 \text{ еВ}$ . При  $\lambda = 0,866 \text{ мкм}$  коефіцієнт поглинання, пов'язаний з прямими переходами, становить  $\gamma_1 = 8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ . Обчисліть значення коефіцієнта поглинання для  $\lambda = 0,866 \text{ мкм}$ .
- 4.3.13. Розрахуйте потік фотонів при довжині хвилі  $5000 \text{ \AA}$  для світлового потоку  $100 \frac{\text{мВт}}{\text{см}^2}$ .
- 4.3.14. Брусок напівпровідника з монополярною рівноважною провідністю n-типу освітлюється вузьким світловим зондом так, що в освітленій області  $\Delta n = \Delta p$ . Надлишкові носії дифундують уздовж зразка в обидва боки від місця генерації ( $x = 0$ ). Накресліть координатний розподіл носіїв для одномірного випадку при різних значеннях дифузійної довжини. Покажіть на зонній діаграмі, як змінюється положення квазірівнів Фермі для дірок і електронів відносно рівня Фермі.
- 4.3.15. В умовах термодинамічної рівноваги  $p_0 n_0 = n_i^2$ . Отримайте вираз для добутку  $pn$  в умовах освітлення.
- 4.3.16. Брусок напівпровідника збуджують світловим імпульсом у точці  $x = 0$  у момент  $t = 0$ . Пакет нерівноважних носіїв дифундує вздовж зразка. Покажіть, що в одномірному випадку фор-

ма пакету у довільній точці  $x$  у момент часу  $t$  описується гауссіаною, якщо знехтувати рекомбінацією

$$\Delta p(x, t) = \frac{\Delta p_0}{2\sqrt{\pi D_p t}} e^{-\frac{x^2}{4D_p t}},$$

де  $\Delta p_0$  – кількість носіїв на одиницю площі, які генеруються в момент  $t = 0$ .

- 4.3.17. Однорідний напівнескінченний у напрямку  $x > 0$  зразок напівпровідника  $n$ -типу освітлюється світлом, що поглинається на поверхні і генерує концентрацію дірок  $\Delta p(0) = 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ . Знайдіть нерівноважну концентрацію дірок на відстані  $x = 0,5 \text{ см}$  від поверхні, якщо  $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$ , а  $D_p = 40 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ .
- 4.3.18. Напівпровідник  $n$ -типу в певній точці освітлюється світловим зондом. Знайдіть дифузійну довжину для дірок, якщо на відстані  $x_1 = 0,2 \text{ см}$  від точки збудження концентрація дірок становить  $10^{14} \text{ см}^{-3}$ , а на відстані  $x_2 = 0,4 \text{ см}$  концентрація дірок зменшується на порядок. Вважайте задачу одномірною.
- 4.3.19. Знайдіть концентрацію нерівноважних носіїв заряду на поверхні товстого зразка  $n$ -типу при однорідній оптичній генерації пар по об'єму з темпом генерації  $G = 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ , якщо час життя дірок становить  $\tau_p = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ , швидкість поверхневої рекомбінації  $s = 700 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ , а  $D_p = 49 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ .
- 4.3.20. Чи можна вважати рівень фотозбудження високим при темпі генерації  $10^{20} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$  для зразка кремнію, легованого бором до концентрації  $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , якщо час життя нерівноважних носіїв становить  $\tau_p = \tau_n = 5 \text{ мкс}$ ?
- 4.3.21. Зразок кремнію  $n$ -типу з концентрацією рівноважних носіїв  $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  освітлюється світлом, що генерує пари носіїв зі

швидкістю  $10^{19} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ . Час життя нерівноважних носіїв становить  $\tau_p = \tau_n = 1 \text{ мкс}$ . До якого типу рівнів (рекомбінації чи прилипання) можна віднести домішковий рівень, розміщений на  $0,2 \text{ еВ}$  нижче зони провідності з відношення коефіцієнтів захоплення  $\frac{\alpha_p}{\alpha_n} = 10^2$  за кімнатної температури і  $77 \text{ К}$ ?

- 4.3.22. Знайдіть відносну зміну провідності при освітленні зразка кремнію  $p$ -типу з концентрацією рівноважних носіїв  $p_0 = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ , якщо інтенсивність світла така, що забезпечує швидкість генерації пар  $10^{20} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ , а  $\tau_p = \tau_n = 5 \text{ мкс}$ ,  $T = 300 \text{ К}$ .

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Третьяк, О. В. Основи фізики напівпровідників [Текст] / О. В. Третьяк, В. З. Лозовський. – К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет“, 2009. – 383 с. – (Основи фізики напівпровідників: в 2 т. / О. В. Третьяк, В. З. Лозовський; т. 2).
2. Поплавко, Ю. М. Напівпровідники [Текст] / Ю. М. Поплавко, В. І. Ільченко, С. О. Воронов, Ю. І. Якименко. – К.: НТУУ „КПІ“, 2011. – 336 с. – (Фізичне матеріалознавство: в 4 ч. / Ю. М. Поплавко, В. І. Ільченко, С. О. Воронов, Ю. І. Якименко; ч. 4).
3. Находкін, М. Г. Фізичні основи мікро- та наноелектроніки / М. Г. Находкін, Д. І. Шека. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 2005. – 431 с.
4. Grundmann, M. The Physics of Semiconductors. An Introduction including Devices and Nanophysics [Text] / M. Grundmann. – Springer, 2010. – 900 p.
5. Пека, Г. П. Збірник задач з фізики напівпровідників і напівпровідникових приладів [Текст] / Г. П. Пека, О. В. Третьяк, В. В. Кислюк. – К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет“, 2002. – 89 с.
6. Аркуша, Ю. В. Задачі з твердотілої електроніки [Текст] / Ю. В. Аркуша, М. І. Білецький, Е. Д. Прохоров. – Х.: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2005. – 148 с.
7. Прищепа, М. М. Мікроелектроніка. Елементи мікросхем. Збірник задач [Текст] / М. М. Прищепа, В. П. Погребняк. – К.: Вища школа, 2005. – 167 с.

## Додаток А

### Властивості напівпровідників

Таблиця А.1 – Властивості напівпровідників

| <i>Параметр</i>                                                                                       | <i>Si</i>                                   | <i>Ge</i>                                   | <i>GaAs</i>                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Атомний номер                                                                                         | 14                                          | 32                                          | 31/33                                      |
| Кристалічна структура, тип                                                                            | алмазу                                      |                                             | цинкової обманки                           |
| Кількість атомів, $\text{м}^{-3}$                                                                     | $5,0 \cdot 10^{28}$                         | $4,42 \cdot 10^{28}$                        | $4,42 \cdot 10^{28}$                       |
| Атомна маса                                                                                           | 28,08                                       | 72,6                                        | 144,63                                     |
| Стала ґратки, <i>нм</i>                                                                               | 0,543                                       | 0,565                                       | 0,565                                      |
| Густина, $10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$                                                          | 2,328                                       | 5,3267                                      | 5,32                                       |
| Відносна діелектрична проникність                                                                     | 11,8                                        | 16                                          | 10,9                                       |
| Точка плавлення, °С                                                                                   | 1 412                                       | 937                                         | 1 238                                      |
| Питома теплота, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$                                          | 700                                         | 310                                         | 350                                        |
| Теплопровідність, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$                                         | 1 450                                       | 640                                         | 460                                        |
| Температурний коефіцієнт лінійного розширення, $\frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}, \text{К}^{-1}$ | $2,6 \cdot 10^{-6}$                         | $5,8 \cdot 10^{-6}$                         | $5,9 \cdot 10^{-6}$                        |
| Спорідненість до електрона, eV                                                                        | 4,05                                        | 4,0                                         | 4,07                                       |
| Власна концентрація, $\text{м}^{-3}$                                                                  | $1,6 \cdot 10^{16}$                         | $2,5 \cdot 10^{19}$                         | $1,1 \cdot 10^{13}$                        |
| Ефективна густина станів, $\text{м}^{-3}$<br>в зоні провідності $N_c$<br>у валентній зоні $N_v$       | $2,8 \cdot 10^{25}$<br>$1,02 \cdot 10^{25}$ | $1,04 \cdot 10^{25}$<br>$6,1 \cdot 10^{24}$ | $4,7 \cdot 10^{23}$<br>$7,0 \cdot 10^{24}$ |
| Ефективні маси для густини станів, в. о.<br><br>електронів $\frac{m_{dn}^*}{m_e}$                     | 1,08                                        | 0,56                                        | 0,068                                      |

|                                                                                                 |                                             |                                            |                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| дірок $\frac{m_{dp}^*}{m_e}$                                                                    | 0,56                                        | 0,35                                       | 0,5                                         |
| Ширина забороненої зони $\Delta E_g$<br>при 300 К, еВ<br>при 0 К, еВ                            | 1,11<br>1,182                               | 0,66<br>0,777                              | 1,43<br>1,559                               |
| Температурний коефіцієнт ширини забороненої зони $\xi, \frac{\text{еВ}}{\text{К}}$              | $-2,4 \cdot 10^{-4}$                        | $-3,9 \cdot 10^{-4}$                       | $-4,3 \cdot 10^{-4}$                        |
| Час життя неосновних носіїв, с                                                                  | $2,5 \cdot 10^{-3}$                         | $10^{-3}$                                  | $10^{-8}$                                   |
| Рухливість, $\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$<br>електронів $\mu_n$<br>дірок $\mu_p$ | 0,15<br>0,06                                | 0,39<br>0,19                               | 0,85<br>0,04                                |
| Коефіцієнт дифузії, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$<br>електронів $D_n$<br>дірок $D_p$            | $3,5 \cdot 10^{-3}$<br>$1,31 \cdot 10^{-3}$ | $9,3 \cdot 10^{-3}$<br>$4,4 \cdot 10^{-3}$ | $2,22 \cdot 10^{-2}$<br>$1,1 \cdot 10^{-3}$ |
| Питомий опір власного напівпровідника $\rho$ , Ом · м                                           | 0,47                                        | $2,3 \cdot 10^3$                           | $10^6$                                      |
| Фактор виродження домішкового рівня $g$<br>донорна домішка<br>акцепторна домішка                | 2<br>4                                      | 2<br>4                                     | 2<br>2                                      |
| Дебаївська температура, $\Theta_D$ , К                                                          | 645                                         | 406                                        | 344                                         |
| Швидкість звука, $s, \frac{\text{м}}{\text{с}}$                                                 | $9,15 \cdot 10^3$                           | $5,4 \cdot 10^3$                           |                                             |
| Енергія раманівських фононів $E_R$ , еВ                                                         | 0,063                                       | 0,037                                      | 0,035                                       |

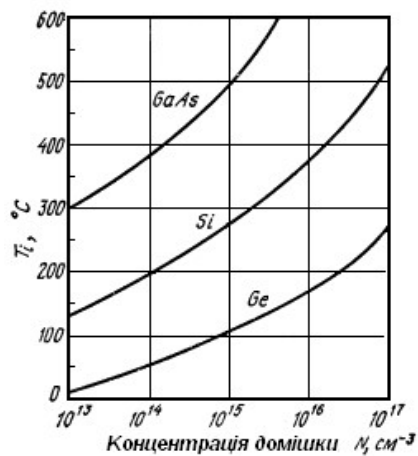


Рисунок А.1 – Залежність температури початку власної провідності напівпровідника  $T_i$  від ступеня легування

**Додаток Б**  
**Параметри рекомбінаційних домішок в кремнії і германії**

| Домішка         | Положення рівня | Зарядовий стан домішки | Перетин захвата, м <sup>2</sup>                                | Зарядовий стан домішки | Перетин захвата, м <sup>2</sup>  |
|-----------------|-----------------|------------------------|----------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------|
| <b>Кремній</b>  |                 |                        |                                                                |                        |                                  |
| <i>Au</i>       | 0,36            | <i>Au</i> <sup>+</sup> | $3 \cdot 10^{-21}$<br>(300 K)                                  | <i>Au</i> <sup>0</sup> | $2 \cdot 10^{-21}$<br>(80-300 K) |
|                 | 0,57            | <i>Au</i> <sup>0</sup> | $5 \cdot 10^{-22}$<br>(80-300 K)                               | <i>Au</i> <sup>-</sup> | $10^{-21}$<br>(300 K)            |
| <i>Zn</i>       | 0,30            | <i>Zn</i> <sup>0</sup> | $10^{-21}$<br>(80-200 K)                                       | <i>Zn</i> <sup>-</sup> | $10^{-19}$<br>(80-200 K)         |
|                 | 0,57            | <i>Zn</i> <sup>-</sup> | $10^{-22}$<br>(80-200 K)                                       | <i>Zn</i> <sup>=</sup> | $>10^{-19}$                      |
| <b>Германій</b> |                 |                        |                                                                |                        |                                  |
| <i>Au</i>       | 0,05            | <i>Au</i> <sup>+</sup> |                                                                | <i>Au</i> <sup>0</sup> | $10^{-20}$<br>(20 K)             |
|                 | 0,15            | <i>Au</i> <sup>0</sup> | $10^{-22}$<br>(80-300 K)                                       | <i>Au</i> <sup>-</sup> | $10^{-19}$<br>(80 K)             |
|                 | 0,47            | <i>Au</i> <sup>-</sup> | $2 \cdot 10^{-22}$<br>(300 K)                                  | <i>Au</i> <sup>=</sup> | $10^{-20}$<br>(300 K)            |
|                 | 0,63            | <i>Au</i> <sup>=</sup> | $2 \cdot 10^{-25}$<br>(10-30 K)                                | <i>Au</i> <sup>=</sup> |                                  |
| <i>Cu</i>       | 0,04            | <i>Cu</i> <sup>0</sup> | $10^{-22}$<br>(85 K)                                           | <i>Cu</i> <sup>-</sup> | $10^{-19}$<br>(24 K)             |
|                 | 0,32            | <i>Cu</i> <sup>-</sup> | $5 \cdot 10^{-23}$<br>(300 K)<br>$5 \cdot 10^{-24}$<br>(200 K) | <i>Cu</i> <sup>=</sup> | $4 \cdot 10^{-24}$<br>(300 K)    |
|                 | 0,41            | <i>Cu</i> <sup>=</sup> | $4 \cdot 10^{-24}$<br>(250 K)                                  | <i>Cu</i> <sup>=</sup> | $10^{-22}$<br>(300 K)            |



**Додаток Г**  
**Енергія йонізації легуючої домішки в напівпровідниках**

| Домішка | Si     | Ge      | Домішка | GaAs   |
|---------|--------|---------|---------|--------|
| Sb      | -0,039 | -0,0096 | Si      | -0,002 |
| P       | -0,045 | -0,12   | Te      | -0,003 |
| As      | -0,049 | -0,0127 | Cu      | 0,023  |
| B       | 0,045  | 0,0104  | Zn      | 0,008  |
| Al      | 0,057  | 0,0102  | Cd      | 0,021  |
| Ga      | 0,065  | 0,0108  | Hg      | 0,012  |

Прийнято, що енергія йонізації донорної домішки від'ємна ( $\epsilon_d - \epsilon_c$ ), а акцепторної – позитивна ( $\epsilon_a - \epsilon_v$ ).