ВЫВОДЫ

Проведенный анализ современных инженерно-конструкторских систем автоматизированного проектирования показывает, что на сегодняшний день одним из эффективных способов построения специализированной САПР является модернизация универсальной системы. С целью упрощения задачи, снижения стоимости и сроков выполнения работ целесообразно применять семантическую модель, построенную в соответствии со стандартом IDEF1X.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Альперович Т.А., Барабанов В.В., Давыдов А.Н, Сергеев С.Н., Судов Е. В., Черпаков Б. И. Компьютеризированные интегрированные производства и CALS-технологии в машиностроении. М.: ВИМИ, 1999. 512с.
2. Ракович А.Г. САПР станочных приспособлений. М.: Машиностроение, 1986. 212 с.
3. Бойко В.В., Савинков В.М. Проектирование баз данных информационных систем. М.: Финансы и статистика, 1989. 352 с.
4. Вендров А.М. Один из подходов к выбору средств проектирования баз данных и приложений. "СУБД", 1995,№ 3.

Надійшла 23.03.04

Автоматизація проектування технологічного оснащення дозволяє суттєво скоротити затрати часу та коштів на технологічну підготовку виробництва. В статті розглянуто семантичну модель інформаційного забезпечення САПР оснащення, яка може бути використана в процесі програмної реалізації алгоритму проектування технологічного пристосування.

Automation of designing of technological equipment allows essentially reducing time and explicit costs to technological preparation of manufacture. In the article it is considered semantic model of information support of computer-aided design of equipment that may be used during program realization of designing algorithm of production device.

УДК 519.65

Н.А. Нечипоренко, Н.И. Белая

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

На основе приближения функций интерполяционным параболическим сплайном строятся алгоритмы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций для двух классов функций. Для приведенных алгоритмов получены оценки погрешности и доказано, что они являются оптимальными по порядку.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих классов задач таких, как статистическая обработка экспериментальных данных, решение краевых задач для уравнений в частных производных, задач цифровой фильтрации и других, возникает необходимость в вычислении интегралов вида

$$I_1(\omega) = \int_a^b f(x)\sin\omega x dx, \tag{1}$$

$$I_2(\omega) = \int_a^b f(x)\cos\omega x dx, \tag{2}$$

где $f(x)$ принадлежит некоторому классу F, ω - произвольное вещественное число.

Оптимальные по точности алгоритмы решения задач (1), (2) для некоторых классов функций приводятся в работах [1], [2].

В настоящей работе построены оптимальные по порядку точности алгоритмы решения задач (1), (2) для следующих классов функций:

- $C_{2,L,N}$ - класс определенных на [a, b] функций $f(x)$, которые имеют непрерывные первые и ограниченные по модулю константой L вторые производные и удовлетворяют условию $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{1,N}$, где x_i - узлы произвольной сетки $\Delta=\{a=x_1<x_2<\ldots<x_N=b\}$, и y_i - заданные действительные числа;

- $V_{2,L,N}$ - класс функций $f(x)\in C_{2,L,N}$, для которых заданы области выпуклости, то есть для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ известен вид функции: выпуклая вверх, выпуклая вниз или содержит точку перегиба.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Предлагаемые алгоритмы вычисления интегралов (1), (2) основаны на замене подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным параболическим сплайном, который является решением задачи (3)

$$\inf_{f\in F}\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \tag{3}$$

В случае $F\equiv C_{2,L,N}$ решением задачи (3) является интерполяционный параболический сплайн $S^*(x)$

$$S^*(x)=\begin{cases} y_i + y_i'(x-x_i) + \\ +\dfrac{A_i^{(1)}}{2}(x-x_i), & \text{если} \quad x_i \le x \le \overline{x}_i, \\ y_{i+1} + y_{i+1}'(x-x_{i+1}) + \\ +\dfrac{A_i^{(2)}}{2}(x-x_{i+1}), & \text{если} \quad \overline{x}_i < x \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$$A_i^{(1)} = \frac{1}{\Delta x_i}(\Delta y_i' - \frac{\overline{\Delta y_i'}}{t_i}),$$

где $$A_i^{(2)} = \frac{1}{\Delta x_i}(\Delta y_i' + \frac{\overline{\Delta y_i'}}{1-t_i}), \tag{4}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i' = y_{i+1}' - y_i'$$

$$\overline{\Delta y_i'} = y_{i+1}' + y_i' - 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \qquad \Delta y_{i+1} - y_i,$$

$$t_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{\Delta y_i'} = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } \overline{\Delta y_i'} \neq 0, \\ & \Delta y_i' = 0, \\ \frac{(1 + \Delta_i - \sqrt{1+\Delta_i^2}\, sign \Delta_i)}{2}, & \text{если } \overline{\Delta y_i'} \neq 0, \\ & \Delta y_i' \neq 0, \end{cases}$$

$$\Delta_i = \frac{\overline{\Delta y_i'}}{\Delta y_i'}, \quad \overline{x_i} = (1-t_i)x_i + t_i \cdot x_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Значения производных y_i', $i = \overline{1, N}$, в узлах сетки Δ определяются согласно алгоритму, приведенному в [3].

В случае $F \equiv L_{2,L,N}$ решением задачи (3) является интерполяционный параболический сплайн $P^*(x)$ [4]

$$P^*(x) = \begin{cases} y_i + y_i'(x - x_i) + \\ + \frac{B_i^{(1)}}{2}(x - x_i)^2, & \text{если } x_i \le x \le \overline{x_i}, \\ y_{i+1} + y_{i+1}'(x - x_{i+1}) + \\ + \frac{B_i^{(2)}}{2}(x - x_{i+1})^2, & \text{если } \overline{x_i} \le x \le x_{i+1}, \end{cases}$$

где

а) если функция $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ выпуклая вниз и $y_i' + y_{i+1}' \le 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, или функция $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ выпуклая вверх и $y_i' + y_{i+1}' > 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, то (5)

$$\overline{x_i} = \frac{1}{\Delta y_i'}[2\Delta y_{i+1}' \cdot x_{i+1} - 2\Delta y_i - x_i(\Delta y_i' + \Delta y_{i+1}')],$$

$$B_i^{(1)} = \frac{(\Delta y_i')^2}{2\Delta x_i(y_{i+1}' - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})}, \quad B_i^{(2)} = 0,$$

если $\Delta y_i' \neq 0$, $\overline{x_i} = x_i$, $B_i^{(1)} = B_i^{(2)} = 0$, если $\Delta y_i' = 0$;

б) если функция $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ выпуклая вниз и $y_i' + y_{i+1}' 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, или функция $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ выпуклая вверх и $y_i' + y_{i+1}' \le 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, то

$$\overline{x_i} = -\frac{1}{\Delta y_i'}[2y_i' \cdot x_i - 2\Delta y_i - x_{i+1}(y_i' + y_{i+1}')],$$

$$B_i^{(2)} = \frac{(\Delta y_i')^2}{2\Delta x_i(y_i' - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})}, \quad B_i^{(1)} = 0, \text{ если } \Delta y_i' \neq 0,$$

$$\overline{x_i} = x_{i+1}, \quad B_i^{(1)} = B_i^{(2)} = 0, \text{ если } \Delta y_i' = 0;$$

в) если функция $f(x)$ не является выпуклой на $[x_i, x_{i+1}]$, то

$$B_i^{(1)} = A_i^{(1)}, \qquad B_i^{(2)} = A_i^{(2)}, \tag{6}$$

где $A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \overline{x_i}$ определяются по приведенным выше формулам (4).

Значения производных y_i', $i = \overline{1, N}$, определяются согласно алгоритму, приведенному в [4].

Пусть

$$\psi(x) = \begin{cases} y_i + y_i'(x - x_i) + \\ + \frac{C_i^{(1)}}{2}(x - x_i)^2, & \text{если } x_i \le x \le \overline{x_i}, \\ y_{i+1} + y_{i+1}'(x - x_{i+1}) + \\ + \frac{C_i^{(2)}}{2}(x - x_{i+1})^2, & \text{если } \overline{x_i} \le x \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, N}$,

где x_i - узлы сетки Δ, $y_i = f(x_i)$.

Тогда, учитывая аналитический вид сплайнов $S^*(x)$ и $P^*(x)$, получим $S^*(x) \equiv \psi(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $1 \le i \le N-1$, если $C_i^{(1)} = A_i^{(1)}, C_i^{(2)} = A_i^{(2)}$ и параметры $\overline{x_i}, y_i', A_i^{(1)}, A_i^{(2)}$ вычисляются по формулам (4) для случая $F \equiv C_{2,L,N}$; $P^*(x) \equiv \psi(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $1 \le i \le N-1$, если $C_i^{(1)} = B_i^{(1)}$ $C_i^{(2)} = B_i^{(2)}$ и параметры $\overline{x_i}, y_i', B_i^{(1)}, B_i^{(2)}$ вычисляются по формулам (5)-(7) для случая $F \equiv L_{2,L,N}$;.

Таким образом, вычислив $\int_a^b f(x) \sin \omega x dx$ и $\int_a^b f(x) \cos \omega x dx$ получим формулы R_1 и R_2 приближенного вычисления интегралов I_1 и I_2 соответственно для $f \in C_{2,L,N}$ или $f \in V_{2,L,N}$

$$R_1(\omega) = \int_a^b \psi(x) \sin \omega x dx = \sum_{i=1}^{N-1} R_{1,i}, \tag{7}$$

$$R_{1,i} = (\cos \omega \overline{x_i} - \cos \omega x_i) \cdot (\frac{C_i^{(1)}}{\omega^3} - \frac{y_i}{\omega}) +$$
$$+ (\cos \omega x_{i+1} - \cos \omega \overline{x_i}) \cdot (\frac{C_i^{(2)}}{\omega^3} - \frac{y_{i+1}}{\omega}) +$$
$$+ \cos \omega \overline{x_i} \cdot [\frac{y_{i+1}'}{\omega}(\overline{x_i} - x_{i+1}) - \frac{y_i'}{\omega}(\overline{x_i} - x_i) -$$
$$- \frac{C_i^{(1)}}{2\omega}(\overline{x_i} - x_i)^2 + \frac{C_i^{(2)}}{2\omega}(\overline{x_i} - x_{i+1})^2] +$$

$$+\sin\omega\overline{x_i}\Big[\frac{C_i^{(1)}}{\omega^2}(\overline{x_i}-x_i)+\frac{C_i^{(2)}}{\omega^2}(\overline{x_i}-x_{i+1})\Big]+$$

$$+\frac{y_i'}{\omega^2}(\sin\omega\overline{x_i}-\sin\omega x_i)+\frac{y_{i+1}'}{\omega^2}(\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega\overline{x_i});$$

$$R_2(\omega)=\int_a^b\psi(x)\cos\omega x dx=\sum_{i=1}^{N-1}R_{2,i}, \qquad (8)$$

$$R_{2,i}=(\sin\omega\overline{x_i}-\sin\omega x_i)\cdot\Big(\frac{y_i}{\omega}-\frac{C_i^{(1)}}{\omega^3}\Big)+$$

$$+(\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega\overline{x_i})\cdot\Big(\frac{y_{i+1}}{\omega}-\frac{C_i^{(2)}}{\omega^3}\Big)+$$

$$+\sin\omega\overline{x_i}\cdot\Big[\frac{y_i'}{\omega}(\overline{x_i}-x_i)-\frac{y_{i+1}'}{\omega}(\overline{x_i}-x_{i+1})+$$

$$+\frac{C_i^{(1)}}{2\omega}(\overline{x_i}-x_i)^2-\frac{C_i^{(2)}}{2\omega}(\overline{x_i}-x_{i+1})^2\Big]+$$

$$+\cos\omega\overline{x_i}\cdot\Big[\frac{C_i^{(1)}}{\omega^2}(\overline{x_i}-x_i)-\frac{C_i^{(2)}}{\omega^2}(\overline{x_i}-x_{i+1})\Big]+$$

$$+\frac{y_i'}{\omega^2}(\cos\omega\overline{x_i}-\cos\omega x_i)+\frac{y_{i+1}'}{\omega^2}(\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega\overline{x_i});$$

где параметры $\overline{x_i}$, y_i', $C_i^{(1)}$, $C_i^{(2)}$ определяются указанным выше способом для каждого из классов $C_{2,L,N}$ или $V_{2,L,N}$.

Отличительной особенностью приведенных алгоритмов вычисления интегралов I_1 и I_2 является тот факт, что они не используют значение априорной константы L, которая, как правило, точно не известна и может быть весьма завышенной.

Теорема 1. Квадратурные формулы (1), (2) являются оптимальными по порядку точности на рассматриваемых классах функций. Погрешность каждой из формул может превосходить минимально возможную на классе не более, чем в два раза (даже в случае точно заданной константы L).

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из того, что $S^*(x)\in C_{2,L,N}$ [3] и $P^*(x)\in V_{2,L,N}$ [4].

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Теорема 2. Пусть $f(x)\in C_{2,L,N}$. Тогда $|R_k(\omega)-I_k(\omega)|\le$ $\le\frac{L}{4}\sum_{i=1}^{N-1}(\Delta x_i)^3$, $\quad k=1,2.$

Доказательство. Для формулы $R_1(\omega)$ имеем

$$\left|\int_a^b(f(x)-S^*(x))\sin\omega x dx\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{N-1}\left|f(x)-S^*(x)\right|\cdot\left|\sin\omega x\right|dx\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{N-1}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f(x)-S^*(x)\right|\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sin\omega x\right|dx\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{N-1}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f(x)-S^*(x)\right|\cdot\Delta x.$$

Учитывая оценку [3] $\left|f(x)-S^*(x)\right|\le\frac{L}{4}(\Delta x_i)^2$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$, получим требуемое неравенство.

Такая же оценка, очевидно, справедлива и для формулы $R_2(\omega)$.

Теорема 3. Пусть $f(x)\in V_{2,L,N}$. Тогда $|R_k(\omega)-I_k(\omega)|\le$ $\le\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{N-1}D_i(\Delta x_i)^3$, $\quad k=1,2,$

где $D_i=2L$, если функция $f(x)$ имеет на $[x_i, x_{i+1}]$ точку перегиба, и $D_i=L$, если $f(x)$ выпуклая на $[x_i, x_{i+1}]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 с учетом оценки [4]: $\left|f(x)-P^*(x)\right|\le$ $\le\frac{1}{8}D_i(\Delta x_i)^2$, $\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$.

В ряде случаев могут оказаться полезными следующие оценки погрешности формул (8), (9) для случая $N\ll|\omega|\frac{b-a}{\pi}$, что соответствует сильной осцилляции подынтегральной функции.

Теорема 4. Пусть $f(x)\in C_{2,L,N}$. Тогда при $N\ll|\omega|\frac{b-a}{\pi}$ справедливо соотношение $\left|R_1(\omega)-I_1(\omega)\right|\le\frac{D_N}{\omega^2}\left|\sin\omega b\right|+$

$$+\frac{D_1}{\omega^2}\left|\sin\omega a\right|+\frac{1}{|\omega|^3}\sum_{i=1}^{N-1}V_i,$$

где $V_i=(L+|A_i^{(1)}|)\cdot\left|\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_i\right|$, если на $[x_i, x_{i+1}]$ нет нулей функции $\sin\omega x$;

$V_i=(L+|A_i^{(1)}|)\cdot(\left|\cos\omega x_{i1}-\cos\omega x_i\right|+\left|\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_{i1}\right|)$, если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется только один нуль функции $\sin\omega x$;

$$V_i=2k_iL+2\left|A_i^{(1)}\right|-$$

$$-A_i^{(1)}\operatorname{sign}\sin\omega\frac{x_{i1}+x_{i2}}{2}(1+(-1)^{k_i})+$$

$$+(L+\left|A_i^{(1)}\right|)\cdot(\left|\cos\omega x_{i1}-\cos\omega x_i\right|+$$

$$+\left|\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_{ik_i+1}\right|),$$

если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется k_i+1 нуль функции $\sin\omega x$;

$$D_j=\max\left(\left|y'^{+}(x_j)-y_j'\right|,\left|y'^{-}(x_j)-y_j'\right|\right),\qquad j=\overline{1,N},$$

$y'^{\pm}(x_1)$, $y'^{\pm}(x_N)$ - наибольшее и наименьшее значения производных функций класса $C_{2,L,N}$ [3] в крайних точках сетки Δ; y_i', $A_i^{(1)}$ - параметры сплайна $S^*(x)$, x_{ik}, $k=\overline{1,k_i+1}$, нули функции $\sin\omega x$, принадлежащие отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.

Аналогично может быть доказана теорема 5.

Теорема 5. Пусть $f(x)\in C_{2,L,N}$. Тогда при $N<<|\omega|\frac{b-a}{\pi}$ справедливо соотношение

$$|R_2(\omega)-I_2(\omega)| \le \frac{D_N}{\omega^2}|\cos\omega b| + \frac{D_1}{\omega^2}|\cos\omega a|+\frac{1}{|\omega|^3}\sum_{i=1}^{N-1}V_i,$$

где $V_i=(L+|A_i^{(1)}|)\cdot|\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega x_i|$, если на $[x_i,x_{i+1}]$ нет нулей функции coswx;

$$V_i=(L+|A_i^{(1)}|)\cdot(|\sin\omega x_{i1}-\sin\omega x_i|+|\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega x_{i1}|),$$

если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется только один нуль функции $\cos\omega x$;

$$V_i=2k_iL+2|A_i^{(1)}|-A_i^{(1)}\operatorname{sign}\cos\omega\frac{x_{i1}+x_{i2}}{2}(1+(-1)^{k_i})+(L+|A_i^{(1)}|)\cdot(|\sin\omega x_{i1}-\sin\omega x_i|+|\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega x_{ik_i+1}|),$$

если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется k_i+1 нуль функции $\cos\omega x$;

x_{ik}, $k=\overline{1,k_i+1}$ - нули функции $\cos\omega x$, принадлежащие отрезку $[x_i, x_{i+1}]$;

D_j, $y'^{\pm}(x_1)$, $y'^{\pm}(x_N)$, y'_i, $A_i^{(1)}$ определяются так же, как в теореме 4.

Теорема 6. Пусть $f(x)\in L_{2,L,N}$. Тогда при $N<<|\omega|\frac{b-a}{\pi}$ справедливо соотношение $|R_1(\omega)-I_1(\omega)|\le\frac{D_N}{\omega^2}|\sin\omega b|+\frac{D_1}{\omega^2}|\sin\omega a|+\frac{1}{|\omega|^3}\sum_{i=1}^{N-1}W_i$,

где

а) в случае выпуклой на $[x_i, x_{i+1}]$ функции $f(x)$:

$W_i=E_i\cdot|\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_i|$, если на $[x_i, x_{i+1}]$ нет нулей функции $\sin\omega x$;

$W_i=E_i\cdot|\cos\omega x_{i1}-\cos\omega x_i|+H_i\cdot|\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_{i1}|$, если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется только один нуль функции $\sin\omega x$;

$$W_i=2\cdot[\frac{k_i}{2}]\cdot L+2|A_i|-(-1)^s(L-A_i)\cdot\frac{(1-(-1)^{k_i})}{2}\times(\operatorname{sign}\sin\omega\frac{x_{i1}+x_{i2}}{2}+(-1)^s)+E_i\cdot(|\cos\omega x_{i1}-\cos\omega x_i|+H_i\cdot|\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_{ik_i+1}|),$$

если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется k_i+1 нуль функции $\sin\omega x$;

$$E_i=\frac{(-1)^s}{2}\cdot L\cdot(\operatorname{sign}\sin\omega x_i+(-1)^s)-\frac{(-1)^s}{2}\cdot A_i\cdot(\operatorname{sign}\sin\omega x_i-(-1)^s);$$

$$H_i=\frac{(-1)^s}{2}\cdot L\cdot(\operatorname{sign}\sin\omega x_{i+1}+(-1)^s)-\frac{(-1)^s}{2}\cdot(\operatorname{sign}\sin\omega x_{i+1}-(-1)^s);$$

$$A_i=\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|P^{*''}(x)|;$$

S=0, если функция f(x) выпуклая вверх; S=1, если функция f(x) выпуклая вниз;

[z] - целая часть числа z;

б) если на $[x_i, x_{i+1}]$ функция f(x) имеет точку перегиба, то $W_i=V_i$, V_i определяются согласно теореме 4;

$$D_j=\max\left(|y'^{+}(x_N)-y'_j|,|y'^{-}(x_j)-y'_j|\right),\quad j=\overline{1,N},$$

$y'^{\pm}(x_1)$, $y'^{\pm}(x_N)$ - наибольшее и наименьшее значения производных функций класса $V_{2,L,N}$ [3] в крайних точках сетки Δ;

x_{ik}, $k=\overline{1,k_i+1}$ - нули функции $\sin\omega x$, принадлежащие отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.

Аналогично можно получить оценку погрешности формулы (9) приближенного вычисления интеграла $I_2(\omega)$.

Теорема 7. Пусть $f(x)\in V_{2,L,N}$. Тогда для $R_2(\omega)$ при $N<<|\omega|\frac{b-a}{\pi}$ справедливо соотношение $|R_2(\omega)-I_2(\omega)|\le\frac{D_N}{\omega^2}|\cos\omega b|+\frac{D_1}{\omega^2}|\cos\omega a|+\frac{1}{|\omega|^3}\sum_{i=1}^{N-1}W_i$,

где

а) в случае выпуклой на $[x_i, x_{i+1}]$ функции $f(x)$:

$W_i=E_i\cdot|\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega x_i|$, если на $[x_i, x_{i+1}]$ нет нулей функции $\cos\omega x$;

$W_i=E_i\cdot|\sin\omega x_{i1}-\sin\omega x_i|+H_i\cdot|\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega x_{i1}|$, если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется только один нуль функции $\cos\omega x$;

$$W_i=2\cdot[\frac{k_i}{2}]\cdot L+2|A_i|+(-1)^s(L-A_i)\cdot\frac{(1-(-1)^{k_i})}{2}\times(\operatorname{sign}\cos\omega\frac{x_{i1}+x_{i2}}{2}+(-1)^s)+E_i\cdot(|\sin\omega x_{i1}-\sin\omega x_i|+H_i\cdot|\sin\omega x_{i+1}-\sin\omega x_{ik_i+1}|),$$

если на $[x_i, x_{i+1}]$ имеется k_i+1 нуль функции $\cos\omega x$;

$$E_i=\frac{(-1)^s}{2}\cdot L\cdot(\operatorname{sign}\cos\omega x_i+(-1)^s)-\frac{(-1)^s}{2}\cdot A_i\cdot(\operatorname{sign}\cos\omega x_i-(-1)^s);$$

$$H_i=\frac{(-1)^s}{2}\cdot L\cdot(\operatorname{sign}\cos\omega x_{i+1}+(-1)^s)-\frac{(-1)^s}{2}\cdot(\operatorname{sign}\cos\omega x_{i+1}-(-1)^s);$$

$$A_i = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left| P^{*''}(x) \right| ;$$

S=0, если функция f(x) выпуклая вверх; S=1, если функция f(x) выпуклая вниз;

б) если на $[x_i, x_{i+1}]$ функция f(x) имеет точку перегиба, то $W_i = V_i$, V_i определяются согласно теореме 5; D_1, D_N, x_{ik}, $k = \overline{1, k_i + 1}$ определяются так же, как в теореме 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение заметим, что алгоритмы построения сплайнов $S^*(x)$ и $P^*(x)$ существенным образом используют значение константы $\inf_{\varphi \in F} \sup_{a \le x \le b} |f''(x)|$, которая является глобальной характеристикой искомой функции f(x), $x \in [a,b]$. Поэтому эти сплайны могут обеспечить высокую точность восстановления в тех случаях, когда вариация второй производной функций рассматриваемого класса не велика. Если эта вариация является большой, то и фактическая погрешность восстановления сплайнами $S^*(x)$ и $P^*(x)$ может оказаться также большой.

Поэтому при восстановлении таких функций и функционалов от этих функций (по имеющейся априорной информации) необходимо каким-то образом учитывать изменение второй производной. Это в некоторой мере позволяют осуществить локальные параболические сплайны S (x) [5] и P (x) [4].

Алгоритм построения каждого из сплайнов S (x) и P (x) требует для своей реализации незначительных вычислительных затрат и заключается в том, что первоначально оцениваются значения производной интерполирующей функции в узлах сетки и, затем, используя эти оценки, по формулам (4) или (5)-(7) соответственно строится сплайн с наименьшей по модулю второй производной.

В случае $F \equiv C_{2,L,N}$ производные функции f(x) в узлах сетки Δ оценим по формулам

$$y_i' = \alpha_i \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + (1-\alpha)\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},$$

$$\alpha_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}, \quad i = \overline{2, N-1},$$

$$y_1' = 2\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - y_2', \quad y_N' = 2\frac{\Delta y_{N-1}}{\Delta x_{N-1}} - y_{N-1}'. \tag{9}$$

В случае $F \equiv V_{2,L,N}$ поступим следующим образом. Прежде всего заметим, что значение первой производной $f'(x_k) = y_k'$, $k = i, i+1$, любой функции $f(x) \in V_{2,L,N}$ согласованы с исходными данными следующим образом.

Для выпуклой вниз на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ функции должны выполняться соотношения

$$y_i' < \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad y_{i+1}' > \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \text{ или } y_i' = y_{i+1}' = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \tag{10}$$

для выпуклой вверх функции

$$y_i' > \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad y_{i+1}' < \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \text{ или } y_i' = y_{i+1}' = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}. \tag{11}$$

Оценим значения производных y_i', $i = \overline{1, N}$, по формулам (10) при условии $\alpha_i = \frac{1}{2}$, $i = \overline{2, N-1}$. Если такие оценки производных приводят к нарушениям на некотором интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \le i \le N-1$, условий согласованности (11) или (12), то положим

$$y_i' = y_{i+1}' = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}.$$

Легко видеть, что такая корректировка значений производных приводит к выполнению условий согласованности на $[x_i, x_{i+1}]$ и не нарушает их на соседних отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ или $[x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Поскольку сплайны S(x) и P(x) имеют тот же вид, что и $\psi(x)$, то справедливыми будут формулы (8) и (9) вычисления интегралов (1) и (2), в которые необходимо только подставить соответствующие параметры сплайнов S (x) и P (x). При этом останутся в силе также теоремы 4-7, если в условиях этих теорем положить $A_i = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |P''(x)|$, а вместо y_i' и $A_i^{(1)}$ использовать соответствующие параметры сплайнов S (x) и P (x).

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // ЖВМ и МФ. - 1978. - 18, № 2, - С.294-301.
2. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. - Киев: Наукова думка, 1983. - 216с.
3. Березовский А. И., Нечипоренко Н. А. К оптимальному по точности восстановлению функций и их производных // Вычислительная и прикладная математика. - 1985. - Вып. 56, - С. 57-61.
4. Белая Н.И., Нечипоренко Н.А. О восстановлении монотонной функции с линейными ограничениями на ее значения. - Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. НАН України. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова. - Київ, 2001, т 1. - С.320-328.
5. Березовский А. И., Нечипоренко Н. А. К восстановлению функций локальными параболическими сплайнами // Оптимизация вычислений и численные методы. - Киев: ИК АН УССР. - 1987. - С. 38-41.

Надійшла 17.02.04
Після доробки 30.03.04

На основі наближення функцій інтерполяційним параболічним сплайном будуються алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцілюючих функцій для двох класів функцій. Для наведених алгоритмів отримані оцінки погрішностей і доведено, що вони є оптимальними за порядком.

Algorithms on the base of approximation functions by parabolic splines are build for calculation of integrals of functions that oscillate quickly. Estimates of errors are received for these algorithms and are proofed that algorithms are optimal by order.