

---

УДК 539.3

Канд. фіз.-мат. наук М. І. Клименко, канд. техн. наук В. В. Мухін

Національний університет, м. Запоріжжя

## СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНА МЕТОДИКА МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРАХ

*У статті пропонується методика дослідження процесів розповсюдження вільних пружних хвиль у нескінченних багатошарових циліндрах. Застосування такої методики дозволяє на основі єдиного алгоритму розв'язувати такі задачі для циліндрів, складених з довільної кількості шарів без обмежень на їх геометричні характеристики. Побудовані та досліджені дисперсійні залежності між частотою та фазовою швидкістю невісесиметричних вільних хвиль для n-шарових циліндрів.*

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, нескінченний багатошаровий циліндр, вільні пружні хвилі, дисперсійна залежність.

## Вступ

Складові елементи конструкцій, моделями яких є багат шарові циліндри, знайшли широке застосування у машинобудуванні, зокрема в авіабудуванні, суднобудуванні, приладобудуванні, а також у будівництві. Задачі дослідження динамічних характеристик таких конструкцій виникають при проектуванні підземних і підводних місткостей, трубопроводів, облицювання тунелів метро, розробці елементів твердопаливних двигунів та у багатьох інших видах технічних розробок. Останнім часом моделювання динамічних процесів у багат шарових циліндрах пов'язується з потребами таких сучасних галузей техніки, як геоакустика, ультраакустична дефектоскопія, проектування апаратів для дослідження космосу. Із збільшенням швидкості руху підземного транспорту, літальних та плаваючих апаратів, розвитком техніки будівництва зростає роль динамічного розрахунку різноманітних елементів конструкцій та споруд, що застосовуються у цих галузях.

Відомо [1, 2], що багато закономірностей процесів розповсюдження вібрацій та взаємодії рухомих і акустичних навантажень з пружними тілами можна встановити на основі аналізу розповсюдження вільних хвиль у даних конструкціях. Це створює необхідність розробки ефективних методів їх моделювання. Моделі розповсюдження вільних хвиль у тришарових циліндричних оболонках розглядалися у дослідженні [2]. При цьому використовувалися як наближені рівняння, що ґрунтуються на застосуванні гіпотез про характер деформування окремих шарів, так і рівняння динамічної теорії пружності в поєднанні з рівняннями теорії тонких оболонок.

Складність реалізації подібних підходів у випадку великої кількості шарів створює необхідність розробки ефективної, зручної для реалізації на сучасній обчислювальної техніці, методики чисельного аналізу та розв'язування даного класу задач для систем, складених з довільної кількості циліндричних шарів. Така методика може бути реалізована на основі застосування методу скінчених елементів.

### Етапи реалізації скінченоелементної методики дослідження хвильових процесів

Підхід, орієнтований на використання розрахункових схем, що ґрунтуються на застосуванні МСЕ, який розглядається у даній роботі, дає можливість побудови чисельних алгоритмів розв'язування вказаних вище задач для довільних геометричних характеристик циліндричних шарів.

Застосування запропонованої у даній статті скінченоелементної методики вимагає реалізації наступних етапів.

1. Опис переміщень кожного шару за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності (рівнянь Ламе).
2. Редукція задачі до математичної моделі у вигляді сукупності систем звичайних диференціальних

рівнянь для окремих шарів нескінченного циліндра.

3. Застосування лінійної скінченно-елементної апроксимації невідомих функцій у даних рівняннях.

4. Розбиття одновимірної області розв'язування задачі, що отримуємо при цьому, на скінчене число елементів, у межах яких значення пружних сталей та густина матеріалу циліндричного шару залишаються постійними або змінюються за певними законами.

5. Формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень невідомих на окремому елементі.

6. Формування глобальної матриці системи алгебраїчних рівнянь для даного багат шарового циліндра з урахуванням умов сполучення між елементами.

7. Дослідження та розв'язування одержаної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

8. Аналіз отриманих результатів.

Використання для опису переміщень кожного шару рівнянь Ламе дозволяє уникнути застосування моделей, що ґрунтуються на гіпотезах про характер деформування шарів і тим самим уникнути додаткової похибки, обумовленої характером вибраної моделі. Використання лінійних рівнянь теорії пружності для опису переміщень точок циліндра є виправданим у межах лінійної зони деформації циліндрів, що є об'єктами дослідження.

Стационарний характер даних динамічних задач наперед визначає вид залежності переміщень від часу при розповсюдженні гармонічних хвиль. У випадках, коли відомий вид залежності переміщень від кутової координати, це дає можливість зведення задачі інтегрування сукупності систем рівнянь Ламе для окремих циліндричних шарів до задачі інтегрування сукупності систем звичайних диференціальних рівнянь щодо невідомих функцій амплітудних значень переміщень, які залежать тільки від радіальної координати.

Застосування МСЕ до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь для окремого шару (елементу) дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень невідомої функції на межах даного елемента. У результаті підсумовування матриць таких систем за елементами отримуємо глобальну матрицю системи щодо вузлових значень невідомих задачі (амплітуд переміщень), яка є симетричною і стрічковою.

Нехай у нескінченному багат шаровому циліндрі розповсюджується невісесиметрична гармонічна хвиля, переміщення точок якої можна представити у вигляді [2]:

$$\begin{aligned}U &= iu(r)\cos n\varphi \exp i(kz - \omega t); \\V &= iv(r)\sin n\varphi \exp i(kz - \omega t); \\W &= w(r)\cos n\varphi \exp i(kz - \omega t),\end{aligned}\quad (1)$$

де  $U$  – радіальне переміщення,  $V$  – тангенціальне переміщення,  $W$  – осьове переміщення точок циліндра,  $n$  – число хвиль в окружному напрямі,  $k = \frac{\omega}{c}$  – хвильове число,  $\omega$  – частота,  $c$  – фазова швидкість

пружної хвилі, що розповсюджується у циліндрі.

Поділимо циліндр по товщині на скінченну кількість шарів (елементів), у межах яких пружні сталі  $\lambda$  та  $\mu$ , а також густина  $\rho$  залишаються сталими.

Переміщення окремого шару циліндра будемо описувати динамічними рівняннями теорії пружності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} &= \frac{\rho \partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} &= \frac{\rho \partial^2 W}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} &= \frac{\rho \partial^2 V}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставляючи у ці рівняння формули закону Гука та вирази (1), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \lambda \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{nv}{r} + kw \right) + 2\mu \frac{du}{dr} \right) + \\ + \mu \left( \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2+n^2}{r^2} u + \frac{n}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{3n}{r^2} v + \right. \\ \left. k \frac{dw}{dr} - k^2 u \right) + \rho \omega^2 u = 0; \\ \mu \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} - ku \right) - \mu \left( \frac{k}{r} u + \frac{kn}{r} v - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \left( \frac{n^2}{r^2} + 2k^2 \right) w \right) - \\ - \lambda \left( k \frac{du}{dr} + k \frac{u}{r} + \frac{knv}{r} + k^2 w \right) + \rho \omega^2 w = 0; \\ \mu \frac{d}{dr} \left( \frac{dv}{dr} - \frac{dv}{r} - \frac{nu}{r} \right) - \lambda \left( \frac{n}{r} \frac{du}{dr} + \frac{n}{r^2} u + \frac{n^2}{r^2} v + \frac{knw}{r} \right) - \\ \mu \left( \frac{4nu}{r^2} + \frac{2(n^2+1)v}{r^2} + k^2 v - \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{knw}{r} \right) + \rho \omega^2 v = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Дана система описує амплітудні значення радіальних, тангенціальних і нормальних переміщень  $u(r)$ ,  $v(r)$  та  $w(r)$  на кожному шарі даного нескінченного циліндра.

Таким чином, задача дослідження розповсюдження вільних пружних невісесиметричних хвиль у багатшарових циліндрах зводиться до задачі інтегрування сукупності систем звичайних диференціальних рівнянь виду (3) за однорідних крайових умов. Для визначення дисперсійної залежності між частотою та фазовою швидкістю таких хвиль необхідно установити значення  $\omega$  та  $c$ , при яких дана задача має нетривіальні розв'язки.

Для реалізації скінченоелементної методики застосуємо на кожному елементі лінійну апроксимацію невідомих функцій  $u(r)$ ,  $v(r)$ ,  $w(r)$ :

$$\begin{aligned} u(r) &= u_1 N_1 + u_2 N_2, \\ v(r) &= v_1 N_1 + v_2 N_2, \\ w(r) &= w_1 N_1 + w_2 N_2. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Тут } N_1 = \frac{(r_2 - r)}{h}, N_2 = \frac{(r - r_1)}{h}, \quad h = r_2 - r_1,$$

$u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$  – відповідно радіальні, тангенціальні та осеві переміщення у вузлах  $r = r_1$  та  $r = r_2$ ,  $r_1$  та  $r_2$  – внутрішній та зовнішній радіуси елемента.

Для відшукування їх вузлових значень використаємо МСЕ у формі Гальоркіна [3], відповідно до якого помножимо обидві частини рівнянь (3) спочатку на  $N_1(r)dr$ , потім на  $N_2 r dr$  і виконаємо інтегрування отриманих виразів по товщині елемента.

Інтегруючи у кожному з цих виразів перші доданки частинами, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$([c]^e + \omega^2 [m]^e) \{q\}^e = \{f\}^e, \quad (5)$$

де  $\{q\}^{eT} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2\}$ ,

$$\{f\}^{eT} = \{\sigma_r^1 r_1, i\tau_{r\varphi}^1 r_1, -\tau_{rz}^1 r_1, i\sigma_r^2 r_2, -i\tau_{r\varphi}^2 r_2, \tau_{rz}^2 r_2\},$$

$\sigma_r^j, \tau_{r\varphi}^j, \tau_{rz}^j$  – граничні значення амплітудних множників у виразах для нормальних та дотичних напружень у елементі на його внутрішній ( $j = 1$ ) і зовнішній ( $j = 2$ ) поверхнях,  $[c]^e$  – матриця жорсткості на елементі,  $[m]^e$  – матриця маси на елементі. При обчисленні коефіцієнтів цих матриць використовувалось чисельне інтегрування за допомогою квадратурних формул Гаусса.

Складаючи послідовно три останні рівняння для кожного попереднього елемента з трьома першими для наступного і враховуючи, що внутрішня та зовнішня поверхні оболонки вільні від напружень, отримуємо:

$$[K] \{Q\} = \{0\}, \quad (6)$$

де  $[K] = [C] + \omega^2 [M]$ ,  $[C]$  – глобальна матриця жорсткості циліндра,  $[M]$  – глобальна матриця маси;  $\{Q\}^T = \{U_1, V_1, W_1, \dots, U_{n+1}, V_{n+1}, W_{n+1}\}$  – вектор вузлових переміщень циліндра, поділеного по товщині на  $N$  елементів.

Глобальні стрічкові матриці жорсткості і маси отримуємо підсумовуванням відповідних матриць для окремих елементів.

Для існування нетривіальних розв'язків однорідної системи (6) необхідно, щоб

$$\det[K] = 0. \quad (7)$$

Дисперсійне рівняння (7) визначає залежність фазової швидкості хвилі  $c$  від частоти  $\omega$ .

Для контролю результатів, отриманих за наведеним алгоритмом та перевірки адекватності запропонованої математичної моделі, визначено дисперсійні залежності для тонкої однорідної оболонки, вільні коливан-

ня якої описуються диференціальними рівняннями [3]:

При порівнянні дисперсійних кривих, побудованих з використанням даних рівнянь з аналогічними кривими, одержаними із застосуванням МСЕ, встановлено, що максимальне відносне відхилення їх точок приблизно дорівнює 0,8 %. Характерні значення фазової швидкості хвилі для відповідних частот, отримані аналітично та за допомогою методу скінчених елементів, наведені у таблиці 1. Тут визначалися характеристики дисперсійної залежності для тонкого сталевго циліндра.

Максимальна відносна похибка тут становить близько 1 %, що свідчить про високу точність застосування для даного випадку скінченоелементної методики.

Методика скінчено-елементного аналізу розповсюдження вільних гармонічних хвиль у багатошаровому циліндрі складається з послідовності таких кроків.

Крок 1. Визначення початкових даних. Тут визначаються початкове і кінцеве значення частоти розповсюдження хвилі, величина кроку її зміни, а також аналогічні параметри для діапазону зміни її фазової швидкості. Для кожного шару визначаються радіуси його внутрішньої і зовнішньої поверхонь, густина, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона для матеріалу шару. Задається також точність визначення коренів дисперсійного рівняння.

Крок 2. Формування глобальної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь для системи циліндричних шарів, що є об'єктом дослідження. У циклі за елементами формується матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь для кожного елемента. Компоненти одержаної матриці на елементі включаються в глобальну матрицю системи рівнянь.

Крок 3. Розв'язування дисперсійного рівняння (7). При фіксованих значеннях частоти  $\omega$  та фазової швидкості  $v$  обчислюється визначник глобальної матриці, побудованої на кроці 1. Для цього зводимо її до верхнього трикутного вигляду з урахуванням властивостей її стрічковості та симетричності. Визначник знаходимо шляхом перемножування діагональних елементів зведеної глобальної матриці. Переходимо до наступного значення фазової швидкості  $v_1 = v + \Delta v$  і повертаємося до кроку 1. Процес продовжується доти, поки не зміниться знак визначника глобальної системи.

Наближене значення фазової швидкості, при якому визначник глобальної системи дорівнює нулю, знаходимо шляхом послідовного уточнення зміни його

знаку. При цьому звужуємо інтервал зміни фазової швидкості до досягнення заданої точності  $\varepsilon$ . Після знаходження наближеного значення кореня дисперсійного рівняння збільшуємо значення фазової швидкості на заданий крок її зміни  $\Delta v$  і повертаємося до кроку 2 даного алгоритму.

Крок 4. Побудова дисперсійних кривих.

#### Побудова дисперсійних кривих для вільних невісесиметричних хвиль у п'ятишаровому циліндрі

Запропоновані розрахункові схеми, що ґрунтуються на використанні скінчено-елементної методики та матриць переходу через шар, реалізовані в задачі побудови кривих дисперсії для нескінченного п'ятишарового циліндра, складеного з трьох шарів великої щільності, розділених між собою двома шарами заповнювача. Даний циліндр характеризується співвідношеннями

$$\frac{E}{E_0} = 0,6 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,1, \quad \frac{v}{v_0} = 1,33,$$

$\frac{h}{H} = 0,2$ , де  $E, \rho, v$ , – фізико-механічні характеристики заповнювача (його модуль пружності, густина, коефіцієнт Пуассона),  $E_0, \rho_0, v_0$ , – відповідні характеристики для несучих шарів,  $h, H$  – відповідно товщини несучих шарів та заповнювача.

За запропонованою скінчено-елементною методикою були побудовані дисперсійні залежності перших п'яти форм для невісесиметричних хвиль, що розповсюджуються у п'ятишаровому циліндрі з вказаними вище параметрами.

При  $n = 0$  отримуємо дисперсійні криві для вісесиметричної задачі, отримані у [4]. На рис. 1 суцільною лінією зображені криві дисперсії при  $n = 1$ , пунктирною лінією – при  $n = 2$ .

З графіка видно, що істотна відмінність дисперсійних кривих першої моди має місце при значеннях частоти  $\omega^* < 1$ . Мінімальні значення фазової швидкості при  $n = 1$  та  $n = 2$  для першої форми співпадають з його величиною для вісесиметричної задачі. Тут  $C_{\min}^* \approx 0,17$ . Аналогічне явище має місце і для тришарової оболонки [2].

При  $n = 1$  для першої моди переважаючими на всьому розглянутому частотному інтервалі є радіальні переміщення, що залишаються сталими по товщині циліндра. Тангенціальні та осьові переміщення у межах кожного з шарів змінюються згідно з законом, близьким до лінійного.

**Таблиця 1** – Дисперсійні залежності для тонкого однорідного циліндра, отримані за допомогою рівнянь тонких оболонок та за допомогою МСЕ (8 елементів)

Частота, $10^3 \text{ c}^{-1}$	5	10	15	20	25	30
Фазова швидкість (рівняння тонких оболонок), $10^5 \text{ cm/c}$	3,652	3,485	2,612	1,219	0,781	0,694
Фазова швидкість (МСЕ), $10^5 \text{ cm/c}$	3,649	3,491	2,598	1,214	0,773	0,696

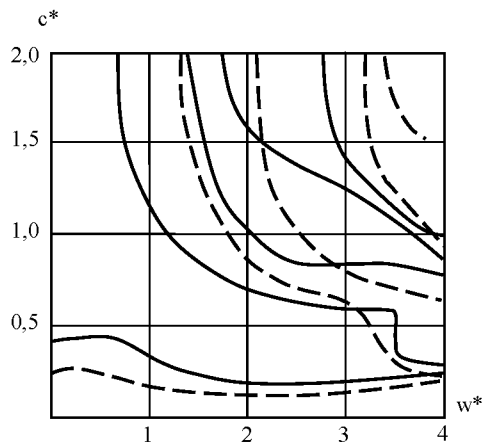


Рис. 1. Дисперсійні криві для невісесиметричних хвиль

Такий тип розподілу переміщень ілюструють наведені на рис. 2 залежності  $u(r)/u_0$ ,  $v(r)/v_0$  та  $w(r)/w_0$  для частоти  $\omega^* = 2,8$ . Тут  $u_0, v_0, w_0$  – амплітудні значення радіального, тангенціального та осевого переміщень зовнішньої поверхні циліндра.

Для даних залежностей має місце співвідношення  $|u_0/v_0| = 11,2$ ,  $|v_0/w_0| = 2,5 \cdot 10^{-2}$ . Кожній з дисперсійних кривих відповідає свій розподіл переміщень по товщині циліндра.

На частотах  $\omega_1^* = 1,1$  та  $\omega_2^* = 3,8$  залежності переміщень від радіальної координати показані відповідно кривими 1 та 2 на рис. 3, а) для другої форми і на рис. 3, б) для третьої форми хвиль.

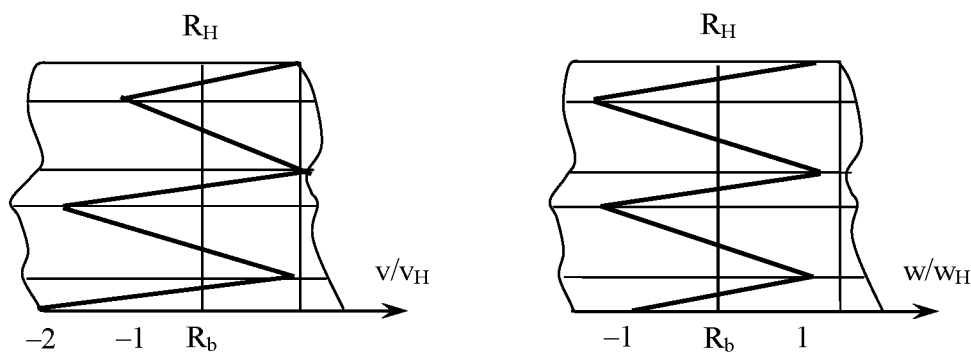
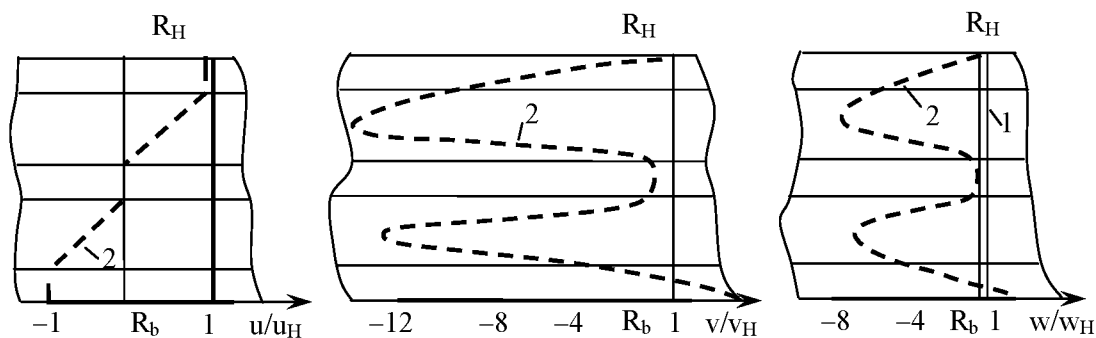
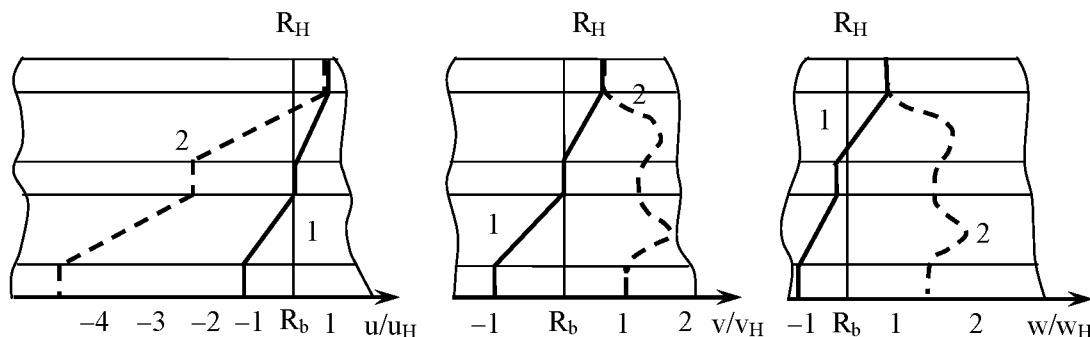


Рис. 2. Розподіл тангенціальних та осевих переміщень для першої форми дисперсійної кривої



а



б

Рис. 3. Розподіл нормальних, тангенціальних та осевих переміщень: а – друга форма дисперсійної кривої; б – третя форма дисперсійної кривої

Для другої форми на частоті  $\omega_1^* \left| \frac{u_0}{v_0} \right| = 0,7$ ,  $\left| \frac{v_0}{w_0} \right| = 2,18$ , на частоті  $\omega_2^*$  – ці співвідношення відповідно дорівнюють 14,3 та 19. Для третьої форми відповідні відношення дорівнюють 0,3 та 2,1 для  $\omega_1^*$ , 0,18 та 4,82 для  $\omega_2^*$ .

При  $n = 2$  даним формам відповідає приблизно такий же розподіл переміщень.

Деякі обчислювальні труднощі при застосуванні запропонованої методики можуть виникнути у низькочастотній ( $\omega^* < 0,3$ ) області через значну різницю у порядках елементів матриць  $[C]$  та  $\omega^2 [M]$ .

Запропонована у даному дослідженні методика, що ґрунтується на застосуванні МСЕ, дає також можливість для дослідження розповсюдження вільних хвиль у циліндрах, складених з неоднорідних за товщиною шарів. У цьому випадку пружні сталі  $\lambda$  та  $\mu$ , а також густина  $\rho$  матеріалу шару є функціями радіальної координати. Напруження та переміщення на кожному шарі задовольняють рівнянням (1), переміщення  $U$ ,  $V$ ,  $W$  визначаються формулами (2). Для визначення амплітудних множників  $U(r)$ ,  $V(r)$ ,  $W(r)$  отримуємо систему диференціальних рівнянь (3), де пружні сталі входять у рівняння в перші доданки, що диференціюються за змінною  $r$ . У результаті застосування МСЕ у формі Гальоркіна отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det[K] = 0,$$

де коефіцієнти матриці  $[K]$  співпадають з наведеними вище для випадку сталих величин  $\lambda$ ,  $\mu$  та  $\rho$ .

Використання чисельного інтегрування дозволяє визначати дисперсійні залежності для циліндрів з змінними механічними характеристиками шарів. Як приклад застосування скінчено-елементної методики для циліндрів даного типу побудовані дисперсійні криві для системи, що складається з трьох тонких шарів високої щільності, розділених між собою шарами заповнювача, пружні сталі та густина яких змінюються по лінійному закону:

$$\lambda = \lambda_0 \alpha, \quad \mu = \mu_0 \alpha, \quad \rho = \rho_0 \alpha.$$

Тут  $\alpha = r/R_1$ ,  $R_1$  – радіус внутрішньої поверхні циліндра,  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  та  $\rho_0$  відповідають аналогічним характеристикам матеріалу ПХВ.

Отримані дисперсійні залежності наведено на рис. 4. Криві, що показані суцільною лінією, відповідають значенню  $n = 0$ , пунктирні –  $n = 1$ .

Ці дисперсійні криві істотно не відрізняються від аналогічних кривих, побудованих для оболонки з постійними фізико-механічними характеристиками.

Значний практичний інтерес являє визначення мінімумів дисперсійних кривих. Знання цих мінімумів

дозволяє знаходити резонансні швидкості для задачі про деформування циліндра під дією навантаження, що рухається уздовж його осі з постійною швидкістю [5].

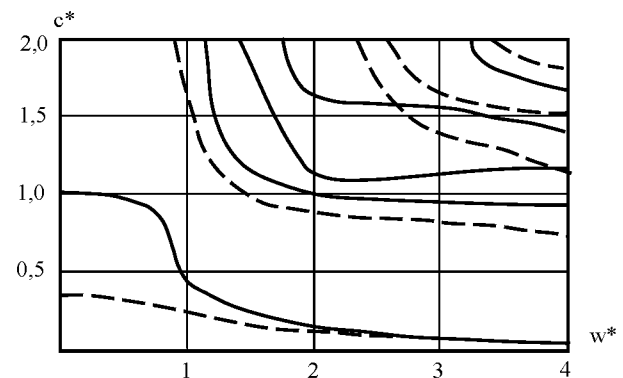


Рис. 4. Дисперсійні криві для невісесиметричних хвиль у циліндрі з неоднорідним по товщині заповнювачем

При використанні скінченоелементної методики точність розрахунків контролювалася шляхом зіставлення результатів, що були отримані при збільшенні числа елементів, яке варіювалося від 7 до 11.

Такі чисельні експерименти показали збіжність прийнятої лінійної апроксимації при довжині лінійного елемента  $h \rightarrow 0$ , що узгоджується з оцінкою енергетичної норми похибки для лінійних елементів, які використовуються при дискретизації одновимірної області [3]:

$$\|E\| \leq \frac{h^2}{12} \int_0^h R^2 dx,$$

де  $E$  – енергетична норма похибки апроксимації на елементі,  $R$  – нев'язка (похибка) апроксимації розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь, що є обмеженою на кожному елементі, що впливає з неперервності розв'язку на відрізьку інтегрування.

### Висновки

Таким чином, використання багат шарових циліндрів як складових елементів конструкцій визначає необхідність побудови математичних моделей, що адекватно відображають їх статичні та динамічні характеристики, а також дозволяють застосовувати для їх розрахунку ефективні чисельні методи. Застосування МСЕ дозволяє отримувати чисельний розв'язок для ряду задач динаміки багат шарових елементів конструкцій, у тому числі визначення характеристик розповсюдження хвильових процесів у шаруватих структурах.

Здійснене дослідження дозволяє зробити такі висновки:

- застосування математичної моделі, яка дозволяє звести задачу дослідження розповсюдження пружних невісесиметричних хвиль до задачі інтегрування сукупності систем звичайних диференціальних рівнянь,

дає можливість використання для її розв'язування чисельної методики, що ґрунтується на застосуванні одновимірних скінчених елементів;

- розв'язування задачі при збільшенні кількості скінчених елементів, що використовуються для дискретизації області, дозволяє стверджувати про практичну збіжність МСЕ для даного класу задач;

- запропонований скінчено-елементний алгоритм можна ефективно використовувати для дослідження дисперсійних залежностей у циліндрах з неоднорідними за товщиною шарами.

#### Список літератури

1. Голоскоков Е. Г. Упругоакустические задачи динамики трехслойных конструкций / Е. Г. Голоскоков, С. Н. Бешенков. – Х. : Вища школа, 1980. – 120 с.

2. Горшков А. Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Машиностроение, 1992. – 196 с.

3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

4. Бешенков С. Н. Осесимметричные свободные волны в многослойных цилиндрических оболочках / С. Н. Бешенков, М. И. Клименко // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 54. – С. 85–93.

5. Сисоев Ю. О. Дія вісесиметричного рухомого навантаження на багат шарову циліндричну оболонку / Ю. О. Сисоев, М. І. Клименко // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – №1. – С. 128–132.

Одержано 02.03.2011

#### **Клименко М.И., Мухин В.В. Конечноэлементная методика моделирования волновых процессов в многослойных цилиндрах**

*В статье предлагается методика исследования процессов распространения свободных упругих волн в бесконечных многослойных цилиндрах. Применение такой методики позволяет на основе единого алгоритма решать такие задачи для цилиндров, составленных из произвольного количества слоев без ограничений на их геометрические характеристики. Построены и исследованы дисперсионные зависимости между частотой и фазовой скоростью несимметричных свободных волн для пятислойных цилиндров.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, бесконечный многослойный цилиндр, свободные упругие волны, дисперсионная зависимость.

#### **Klimenko M., Muhin V. The finite elements method of wave processes design in multi-layers cylinders**

*The research method of free resilient waves in endless multilayer cylinders distribution processes is offered. The applied method allows to solve the tasks using one algorithm for cylinders built of layers arbitrary quantity without limitation of their geometrical characteristics. Dispersion dependences between the frequency and phase velocity of free waves nonsymmetrical to the axis for five-layer cylinders are built and researched.*

**Key words:** the finite elements method, infinite multi-layer cylinder, free resilient waves, dispersion dependences.

---