ВЛАСТИВІСТЬ ПОВНОТИ АБО КВАЗІПОВНОТИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ПРИ ЗБІЛЬШЕННІ КІЛЬКОСТІ КРИТЕРІЇВ

Терещенко Е.В., Рябенко А.Є.
elina_vt@ukr.net, rjabenkoae@gmail.com
Національний університет «Запорізька політехніка»

The authors conducted research on the influence of the dimension and composition of the criteria vector on the property of completeness / quasi-completeness of multi-criteria discrete optimization problems based on the assessment the cardinalities of sets of feasible solutions, the Pareto set, and a complete set of alternatives

В попередній роботі авторів [1] було доведено достатні умови наявності властивості повноти або квазіповноти двокритеріальних задач дискретної оптимізації задачі Z_{γ_1,γ_2}, де Z_{γ_1,γ_2} є двокритеріальною задачею на двозваженому n −вершинному m −реберному графі з мінімізуємими критеріями $F_{\gamma_i}(x) \to min,\ i = \overline{1,2}$ векторної цільової функції $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2})$. Індекси $\gamma_i,\ i = \overline{1,2}$ є індивідуальними номерами

критеріїв, та їхній порядок $F_{\gamma_i}(x)$, визначає порядок розв'язання задач Z_{γ_i}.

Багатокритеріальна задача Z є повною, якщо для множини допустимих рішень (МДР) $X = \{x\}$ існують такі параметри векторної цільової функції (ВЦФ) $F(x)$, при яких виконується рівність потужності множини допустимих рішень X^0, паретівської множини $\tilde{X}$, повної множини альтернатив X ,

тобто $X^0 = \tilde{X} = X$ [2].

Багатокритеріальна задача Z є квазіповною, якщо для множини допустимих рішень X^0, паретівської множини $\tilde{X}$, повної множини альтернатив X є справедливим співвідношення $X^0 = \tilde{X} < X$ [1].

Теорема 1. Для того щоб двохкритеріальна задача Z_{γ_1,γ_2} з ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2}) = (F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}))$ була повною, достатньо, щоб її МДР X_{γ_1,γ_2} містило такі й тільки такі підграфи $x_{\gamma_1,\gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})$, для яких виконується рівність матриць сміжності підграфів x_{γ_1}и x_{γ_2}: $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}), x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2}\}$, тобто $X_{\gamma_1,\gamma_2} = X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2}$. Потужність МДР, ПМ й ПМА двокритеріальної задачі Z_{γ_1,γ_2} дорівнює $|X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2}|$.

Теорема 2. Для того, щоб двокритеріальна задача Z_{γ_1,γ_2} с ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2}) = (F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}))$ була квазіповною, достатньо, щоб її МДР X_{γ_1,γ_2} містило такі й тільки такі підграфи x_{γ_1,γ_2}, для яких виконується відношення включення для підграфів x_{γ_1} та x_{γ_2}: $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2} : x_{\gamma_1,\gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}), x_{\gamma_1} \subset x_{\gamma_2}$ або $x_{\gamma_1} \supset x_{\gamma_2}\}$, де x_{γ_1}- допустимий розв'язок задачі Z_{γ_1}, x_{γ_2}- допустимий розв'язок задачі Z_{γ_2}.

Модельними задачами для дослідження властивості повноти слугували задачі з ваговими критеріями такі як «кістяк та гамільтоновий ланцюг» та інші. Для дослідження властивості квазіповноти слугували задачі з ваговими критеріями, в яких не співпадали кількості ребер x_{γ_1}та x_{γ_2}, наприклад «гамільтонів цикл та гамільтонів ланцюг». В [3] було доведено властивість квазіповноти для задачі «кістяк та екстремальне ребро».

Таким чином, відношення між розв'язками x_{γ_1}та x_{γ_2} за відповідними критеріями $F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2})$ є визначальним для властивості повноти та квазіповноти для двокритеріальних задач дискретної оптимізації.

Можна зробити припущення про існування аналогічних закономірностей для задач з вектором критеріїв більшого порядку ніж 2. Розглянемо клас трикритеріальних задач з набором критеріїв, що можуть бути ваговими, або екстремального ребра. Аналогічно [1] введемо символ задач дискретної оптимізації задачі $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$, де трикритеріальна

задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ на тризваженому n −вершинному m −реберному графі з мінімізуємими критеріями $F_{\gamma_i}(x) \to min,\ i = \overline{1,3}$ векторної цільової функції $F_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3})$. Індекси $\gamma_i,\ i = \overline{1,3}$ є індивідуальними номерами критеріїв, та їхній порядок $F_{\gamma_i}(x)$, визначає порядок розв'язання задач Z_{γ_i} на n -вершинному графі $G = (V, E),\ |E| = m$, кожному ребру $e_t \in E,\ t = \overline{1,m}$ якого надано трійка значень ваги $\omega_i(e_t)$, $i = \overline{1,3},\ t = \overline{1,m}$.

Перший варіант набору критеріїв буде повторювати ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2})$ будь- якої повної задачі з [1], який доповнюється таким критерієм, щоб виконувалася умова рівності матриць сміжності підграфів $x_{\gamma_1},\ x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}$, тобто розв'язком якої буде підграф $x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$: $X_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}), x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2} = x_{\gamma_3}\}$. Для оцінки потужності МДР, ПМ й ПМА трикритериальної задачі $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ застосуємо алгоритм, запропонований в [1] з застосуванням певного способу визначення ваг ребер. Ребра $e \in E$ перенумеруємо числами $t = t(e) = \overline{1,m},\quad m = |E|$. Для каждого ребра $e_t \in E$ визначимо ваги:

$$\omega_1(t) = 2^t + t,\ \omega_2(t) = 2^{m+1} - \omega_1(t) - \omega_3(t),\ \omega_3(t) = t,$$

що дозволяє стверджувати, що для всіх допустимих розв'язків $x_{\gamma_i},\ i = \overline{1,3}$ равенство $|E_{\gamma_i}| = C_0(n) = C_0 = const$ для трикритериальної задачі $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$, тобто

$$F_{\gamma_1}(x) + F_{\gamma_2}(x) + F_{\gamma_3}(x) = 2^{m+1}C_0 \quad \forall x_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i},\ i = \overline{1,3}.$$

Можно показати, що при такій нумерації ваговий критерій набуває однакових значень тільки при співпадінні множини ребер.

На першому етапі йде розв'язання однокритеріальної задачі за критерієм F_{γ_1}, далі на множині отриманих розв'язків X_{γ_1} розв'язується однокритеріальна задача за критерієм F_{γ_2} й отримаємо X_{γ_2}, далі виконаємо етап розв'язання за критерієм F_{γ_3}, що доводить справедливість

Теорема 3. Трикритеріальна задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ на тризваженому графі з ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3})$, що побудована додаванням третього критерію до ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2})$ повної двокритеріальної задачі, не змінює властивості повноти при умові рівності матриць сміжності підграфів x_{γ_1}, $x_{\gamma_2}, x_{\gamma_2}$, розв'язком якої буде підграф $x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$: $X_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}), x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2} = x_{\gamma_3}\}$, та потужності МДР, ПМ й ПМА

дорівнюють $X^0 = \tilde{X} = X = \left|X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2} \cap X_{\gamma_3}\right|$. Справедливо при довільній нумерації критеріїв.

Другий варіант набору критеріїв буде повторювати ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}\left(x_{\gamma_1,\gamma_2}\right)$ будь- якої повної задачі з [1] та доповнюватися таким критерієм, щоб виконувалася умова включення $x_{\gamma_3} \subset x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2}$, тобто розв'язком якої буде підграф $x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$: $X_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}), x_{\gamma_3} \subset x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2}\}$. Застосування запропонованого алгоритму показує, що на третьому етапі певні x_{γ_2} будуть мати однакові значення за третім критерієм, тобто справедливим є твердження, що потужності МДР, ПМ й ПМА відповідають співвідношенню $X^0 = \tilde{X} < X$.

Є важливим, що зміна послідовності критеріїв не вплине на структуру та потужності МДР, ПМ й ПМА. Справедливим є твердження

Теорема 4. Трикритеріальна задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ на тризваженому графі з ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}\left(x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}\right)$, що побудована додаванням третього критерію до ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}\left(x_{\gamma_1,\gamma_2}\right)$ повної двокритеріальної задачі, змінює властивість повноти на квазіповноту при умові включення $x_{\gamma_3} \subset x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2}$, тобто розв'язком буде підграф $x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$: $X_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}), x_{\gamma_3} \subset x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2}\}$. Потужності МДР, ПМ й ПМА відповідають співвідношенню $X^0 = \tilde{X} < X$, при цьому $X^0 = \tilde{X} = X_{\gamma_3}$. Справедливо при довільній нумерації критеріїв.

Побудуємо аналогічні експерименти для квазіповних задач з [1]. Третій варіант набору критеріїв сформуємо з критеріїв, для яких виконується умова включення $x_{\gamma_1} \subset x_{\gamma_2}$ або $x_{\gamma_1} \supset x_{\gamma_2}$ з додаванням критерію, що забезпечує відношення еквівалентності між деякими розв'язками за вже існуючими критеріями, тобто $x_{\gamma_1} = x_{\gamma_3}$ або $x_{\gamma_2} = x_{\gamma_3}$ при $x_{\gamma_1} \subset x_{\gamma_2}$ або $x_{\gamma_1} \supset x_{\gamma_2}$.

Четвертий варіант набору критеріїв сформуємо з критеріїв, для яких виконується умова включення $x_{\gamma_1} \subset x_{\gamma_2}$ або $x_{\gamma_1} \supset x_{\gamma_2}$ з додаванням критерію, що забезпечує аналогічну властивість. Проводячи аналіз, аналогічний попереднім варіантам наборів критеріїв, можемо стверджувати

Теорема 5. Трикритеріальна задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ на тризваженому графі з ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}\left(x_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}\right)$, що побудована додаванням третього критерію до ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2}\left(x_{\gamma_1,\gamma_2}\right)$ квазіповної двокритеріальної задачі, не змінює властивість квазіповноти як при умові відношення включення, так й відношення еквівалентності між розв'язками відповідних однокритеріальних задач. Справедливо при довільній нумерації критеріїв.

Справедливим є й узагальнення отриманих результатів на довільну кількість критеріїв та їхню послідовність.

Теорема 6. Багатокритеріальна задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N}$ на N-зваженому графі з ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N}(x_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N})$, є повною при умові виконання відношення еквівалентності між розв'язками відповідних однокритеріальних задач, тобто МДР, ПМ й ПМА дорівнюють $X^0 = \tilde{X} = X = \left|X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2} \cap \dots \cap X_{\gamma_N}\right|$, та квазіповною при умові виконання відношення включення між розв'язками відповідних однокритеріальних задач, тобто МДР, ПМ й ПМА задовольняють співвідношення $X^0 = \tilde{X} < X$, при цьому $X^0 = \tilde{X} = \min_i \left|X_{\gamma_i}\right|$. Справедливо при довільній нумерації критеріїв.

Наприклад, багатокритеріальна задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N}$, в наборі критеріїв якої будуть критерії «кістяк екстремальної ваги» та «екстремальне ребро» на n -вершинному графі $G = (V, E)$, $|E| = m$ з ВЦФ $F_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N}(x_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N})$, де

$$F_{\gamma_k} = \omega_{\gamma k}(x_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N}) = \omega_{\gamma k}(x_{\gamma k}) = \sum_{e\in E_{x\gamma k}} \omega_{\gamma k}(e) \to extr,$$

$$F_{\gamma_j} = \underset{e\in E_{\gamma_j}}{extr}\,\omega_{\gamma_j}(e) \to extr,\ 0 < j \le N, 0 < k \le N,$$

є квазіповною, тобто $X^0 = \tilde{X} < X$. При цьому $X^0 = \tilde{X} < m - (n-2)$. МДР не перевищує кількості кістяків в повному n -вершинному графі $|X| \le n^{n-2}$.

Література

5. Perepelisa, V. On complete and quasi-complete two-criteria optimization problems on graphs / V. Perepelisa, E. Tereschenko // Springer Science+Business Media, 2018. P. 385-390 https://doi.org/10.1007/s10559-018-0040-1

6. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах. — Saarbrücken :LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 337с.

7. Перепелица В.А. Квазиполнота класса задач на графах «вес-минимаксное ребро» / В.А.Перепелица, Э.В.Терещенко, А.Е.Рябенко // Питання прикладної математики та математичного моделювання – 2018. – С.139-147. https://doi: 10.15421/321814