

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

**Індивідуальні завдання
для розрахунково-графічної роботи
з розділу**

“Диференціальні рівняння”

для студентів всіх спеціальностей
денної форми навчання

2014

Індивідуальні завдання для розрахунково-графічної роботи з розділу “Диференціальні рівняння” для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання / Укладачі.: Зарубіна Т.В., Нечипоренко Н.О., Щербина О.А. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 62с.

Укладачі: Зарубіна Т.В., асистент
Нечипоренко Н.О., доцент, к.ф.-м.н.
Щербина О.А., асистент

Експерт: Кабак В.С., доцент, к.т.н.

Рецензент: Левада В.С., доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Зарубіна Т.В.

Затверджено на засіданні
кафедри прикладної математики
Протокол № 9 від 11.06.2014 р.

ЗМІСТ

	с.
Методи розв'язання диференціальних рівнянь	
1 Диференціальні рівняння першого порядку	4
2 Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку	14
3 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами	18
4 Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	29
5 Метод виключення для систем двох диференціальних рівнянь з двома невідомими	33
Індивідуальні завдання	35
Контрольні питання	60
Література	62

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Загальний вигляд: $f_1(x) \cdot f_2(y) dx + j_1(x) \cdot j_2(y) dy = 0$.

Розв'язання. Обидві частини рівняння поділимо на $f_2(y) \cdot j_1(x)$ (при $f_2(y) \cdot j_1(x) \neq 0$) та отримаємо рівняння

$$\frac{f_1(x)}{j_1(x)} dx + \frac{j_2(y)}{f_2(y)} dy = 0.$$

Тоді $\int \frac{f_1(x)}{j_1(x)} dx + \int \frac{j_2(y)}{f_2(y)} dy = C$ є загальним інтегралом рівняння.

ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0.$$

Розв'язання. Обидві частини рівняння поділимо на $\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1+x^2}$, та дістанемо

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0.$$

Зінтегрувавши обидві частини рівняння, отримаємо

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = C; \Rightarrow \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

Це й є загальний інтеграл рівняння.

ПРИКЛАД 2.

Відомо, що ізольований провідник внаслідок недосконалої ізоляції втрачає поданий йому заряд, причому швидкість втрати заряду пропорційна наявному заряду в даний момент.

У початковий момент провіднику подано заряд $q_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ (кулон). За перші $t_1 = 2$ хвилини провідник втрачає $\Delta q = 30 \cdot 10^{-6}$ (кулон)

Визначити, за який час заряд провідника дорівнюватиме $0,85q_0$.
Розв'язання. Нехай x – заряд провідника. Враховуючи, що швидкість

$\frac{dx}{dt}$ зміни x по відношенню до t пропорційна кількості заряду x в розглянутий момент часу, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Окремим розв'язком даного рівняння є $x=0$. Дійсно, якщо $x=0$, тоді

$$\frac{dx}{dt} = 0, \text{ отже } 0 = k \cdot 0.$$

Знайдемо загальне рішення рівняння при $x \neq 0$.

$$\frac{dx}{x} = k \cdot dt, \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = k \int dt + \ln c \Rightarrow \ln x = k \cdot t + \ln c \Rightarrow$$

$$\ln x - \ln c = k \cdot t \Rightarrow \ln \frac{x}{c} = k \cdot t \Rightarrow \frac{x}{c} = e^{kt} \Rightarrow$$

$$x = c \cdot e^{kt} - \text{загальний розв'язок рівняння.}$$

Знайдемо часткове рішення, яке задовольняє початковим умовам задачі. У початковий момент часу $t=0$ провіднику був наданий заряд $x = q_0 = 0,30 \cdot 10^{-3}$.

Підставимо початкові умови у загальне рішення і отримаємо значення константи c , яке відповідає даній початковій умові.

$$0,3 \cdot 10^{-3} = c \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow c = 0,3 \cdot 10^{-3}.$$

Тоді часткове рішення, яке задовольняє початковим умовам задачі $x(0) = 0,3 \cdot 10^{-3}$ буде мати вигляд

$$x = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{kt}.$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковими умовами. Відомо, що через $t_1 = 2$ хвилин заряд буде дорівнювати

$$x_1 = q_0 - \Delta q = 0,3 \cdot 10^{-3} - 30 \cdot 10^{-6} = 27 \cdot 10^{-5} \text{ (кулон)}.$$

Підставимо значення x_1 та t_1 в часткове рішення

$$27 \cdot 10^{-5} = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{2k} \Rightarrow e^{2k} = 0,9 \Rightarrow 2k = \ln 0,9 \Rightarrow k = -0,053.$$

Таким чином, загальний закон розглянутого процесу остаточно виражається співвідношенням

$$x = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,053t}.$$

Щоб визначити, за який час заряд провідника дорівнюватиме $x = 0,85 \cdot q_0 = 0,85 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} = 0,255 \cdot 10^{-3}$, підставимо в останнє рівняння отримане значення

$$0,85 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053t} = 0,85 \Rightarrow -0,053t = \ln 0,85$$

Остаточно будемо мати $t \approx 3(xв)$.

Отже, провідник, якому у початковий момент подано заряд $q_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ кулон та який за перші 2 хвилини втрачає $\Delta q = 30 \cdot 10^{-6}$ кулон, буде мати заряд $q = 0,255 \cdot 10^{-3}$ кулон приблизно через 3 хв.

ПРИКЛАД 3.

Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість обладнання дорівнює $S_0 = 49$ тисяч грошових одиниць.

Через один рік вартість обладнання становитиме $S_1 = 41,7$ тисяч грошових одиниць.

Обладнання використовувалося впродовж $t = 12$ років. Яка його вартість у теперішній час?

Розв'язання. Нехай $S(t)$ – вартість обладнання в момент t . Зміна вартості, тобто знецінювання, виражається різницею $S_0 - S(t)$. Тоді

швидкість знецінювання $\frac{d(S_0 - S(t))}{dt}$ пропорційна фактичній вартості $S(t)$ на даний момент. Таким чином, одержуємо рівняння

$$\frac{d(S_0 - S(t))}{dt} = k \cdot S(t) \quad \text{з початковою умовою } S(0) = S_0.$$

Відповідно до умови задачі рівняння має вигляд

$$\frac{d(49 - S(t))}{dt} = k \cdot S(t), \quad S(0) = 49.$$

Знайдемо похідну у лівій частині рівняння та дістанемо:

$$-\frac{dS}{dt} = k \cdot S \quad \text{— диференціальне рівняння з відокремлюваними}$$

змінними. Проінтегрувавши його, дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$\int \frac{dS}{S} = -\int k \cdot dt \Rightarrow$$

$$\ln|S| = -k \cdot t + \ln C \Rightarrow \ln\left|\frac{S}{C}\right| = -k \cdot t \Rightarrow S = C \cdot e^{-kt}$$

Для визначення довільної сталої C використовуємо початкову умову $S(0) = 49$. Тоді $49 = C \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow C = 49$.

Тобто, частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам, має вигляд $S = 49e^{-kt}$.

Враховуючи, що через один рік ($t=1$) вартість обладнання становитиме $S_1 = 41,7$ знайдемо значення коефіцієнта k .

$$41,7 = 49e^{-k \cdot 1} \Rightarrow e^{-k} = 0,85 \Rightarrow -k = \ln 0,85$$

$$\text{Тоді } S = 49e^{\ln 0,85 \cdot t} = 49 \cdot 0,85^t.$$

Таким чином, якщо обладнання використовувалося впродовж $t=12$ років, то вартість обладнання $S(12) = 49 \cdot 0,85^{12} \approx 6,97$ тисяч грошових одиниць.

1.2 Однорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд: $y' = j\left(\frac{y}{x}\right)$.

Розв'язання. Вводимо допоміжну функцію u , тобто зробимо заміну $\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = x \cdot u$, $y' = xu' + u$. Підставимо значення y та y' до заданого диференціального рівняння та отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$xu' + u = j(u);$$

$$x \frac{du}{dx} = j(u) - u;$$

$$\int \frac{du}{j(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Замість u після інтегрування підставимо $\frac{y}{x}$ та дістанемо загальний інтеграл рівняння.

ПРИКЛАД 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x}.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

Отримане рівняння є однорідним, вводимо підстановку $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u$, $y' = xu' + u$.

Дістанемо

$$\begin{aligned}
 xu' + u &= u \ln u \Rightarrow xu' = u \ln u - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = u \ln u - u \Rightarrow \\
 \frac{du}{u \ln u - u} &= x dx \Rightarrow \int \frac{du}{u \ln u - u} = \int x dx \Rightarrow \\
 \ln(\ln u - 1) &= \ln x + \ln C \Rightarrow \ln u - 1 = xC.
 \end{aligned}$$

Замість u підставимо $\frac{y}{x}$ та дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$\ln \frac{y}{x} = 1 + xC \Rightarrow y = xe^{1+Cx}.$$

1.3 Лінійні диференціальні рівняння

Загальний вигляд: $y' + P(x)y = Q(x)$, де $P(x), Q(x)$ - неперервні функції.

Розв'язання. Функцію u шукаємо як добуток двох, поки що невідомих функцій, які залежать від x . Тобто

$$u = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Підставимо значення u та y' до заданого диференціального рівняння та отримаємо

$$u'v + uv' + uvP(x) = Q(x).$$

Після групування дістанемо

$$u'v + u[v' + vP(x)] = Q(x).$$

Доберемо функцію $v(x)$ таким чином, щоб вона задовольняла рівняння

$$v' + vP(x) = 0.$$

Тоді функція $u(x)$ має задовольняти рівняння

$$u'v = Q(x),$$

де функція $v(x)$ вже знайдена.

Підставимо у вираз $y = u(x) \cdot v(x)$ замість $v(x)$ та $u(x)$ знайдені функції та отримаємо загальний розв'язок рівняння.

ПРИКЛАД 5. Розв'язати рівняння

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Розв'язання. Припустимо $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Підставимо значення y та y' до заданого диференціального рівняння та дістанемо

$$u'v + uv' + uv2x = 2xe^{-x^2},$$

$$u'v + u[v' + v2x] = 2xe^{-x^2}.$$

Знайдемо $v(x)$ з рівняння

$$v' + v2x = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2xdx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -2xdx \Rightarrow$$

$$\ln v = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}.$$

Функція $u(x)$ має задовольняти рівняння

$$u'v = 2xe^{-x^2}.$$

Так як $v = e^{-x^2}$, то маємо

$$u'e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow$$

$$\int du = \int 2xdx \Rightarrow u = x^2 + C.$$

Підставимо замість $v(x)$ та $u(x)$ знайдені функції та отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$y = u(x) \cdot v(x) = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

1.4 Рівняння Бернуллі

Загальний вигляд: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, де $n \neq 0, n \neq 1$,

$P(x), Q(x)$ - неперервні функції.

Розв'язання. Рівняння Бернуллі будемо розв'язувати, як і лінійне: зробимо заміну

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Підставимо значення y та y' до заданого диференціального рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + uvP(x) = Q(x)u^n v^n,$$

$$u'v + u[v' + vP(x)] = Q(x)u^n v^n.$$

Функцію $v(x)$ знайдемо з рівняння

$$v' + vP(x) = 0,$$

а функцію $u(x)$ з рівняння

$$u' = Q(x)u^n v^{n-1},$$

де функція $v(x)$ вже буде знайдена.

Підставимо замість $v(x)$ та $u(x)$ знайдені функції та отримаємо загальне розв'язок рівняння $y = u(x) \cdot v(x)$.

ПРИКЛАД 6. Розв'язати рівняння

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

Підставимо значення y та y' до заданого диференціального рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' - uvx = -u^3 v^3 e^{-x^2},$$

$$u'v + u[v' - vx] = -u^3 v^3 e^{-x^2}.$$

Знайдемо $v(x)$ з рівняння

$$v' - vx = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - xv = 0 &\Rightarrow \frac{dv}{dx} = xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = x dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int x dx \Rightarrow \\ \ln v = \frac{x^2}{2} &\Rightarrow v = e^{\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Знайдемо $u(x)$ з рівняння

$$u' = -u^3 v^2 e^{-x^2}.$$

Так як $v = e^{\frac{x^2}{2}}$, то маємо

$$\begin{aligned} u' = -u^3 e^{x^2} e^{-x^2} &\Rightarrow u' = -u^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -u^3 \Rightarrow -\frac{du}{u^3} = dx \Rightarrow \\ -\int \frac{du}{u^3} = \int dx &\Rightarrow \frac{1}{2u^2} = x + C \Rightarrow u^2 = \frac{1}{2(x + C)}. \end{aligned}$$

Підставимо замість $v(x)$ та $u(x)$ знайдені функції та отримаємо загальний розв'язок рівняння у такому вигляді:

$$y^2 = u^2(x) \cdot v^2(x) = \frac{e^{x^2}}{2(x+C)}.$$

1.5 Рівняння у повних диференціалах

Загальний вигляд: $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, при чому

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Розв'язання. Диференціал деякої функції $u(x, y)$ має вигляд

$$du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Тоді функцію $u(x, y)$ знайдемо із системи рівнянь
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Отже, $u(x, y) = C$ - загальний інтеграл рівняння.

ПРИКЛАД 7. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$e^{-y} dx + (1 - xe^{-y}) dy = 0.$$

Розв'язання. Для даного рівняння $P(x, y) = e^{-y}$, $Q(x, y) = 1 - xe^{-y}$.

Так як $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{-y}$, то задане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Функцію $u(x, y)$ знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - xe^{-y}. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \Rightarrow u(x, y) = \int e^{-y} dx + f(y) \Rightarrow u(x, y) = xe^{-y} + f(y).$$

Обчислимо частинну похідну по y від отриманої функції $u(x, y)$ та дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + f'(y).$$

Розв'яжемо друге рівняння системи

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - xe^{-y}.$$

Так як $\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + f'(y)$, то маємо

$$1 - xe^{-y} = -xe^{-y} + f'(y) \Rightarrow f'(y) = 1 \Rightarrow f(y) = \int 1 dy + C_1 \Rightarrow f(y) = y + C_1.$$

Отже, функція $u(x, y) = xe^{-y} + y + C_1$, тоді загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$xe^{-y} + y + C_1 = C_2, \quad \text{або } xe^{-y} + y = C \quad (\text{де } C = C_2 - C_1).$$

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

2.1 Диференціальні рівняння n -го порядку, до яких входить похідна n -го порядку невідомої функції y та функція $f(x)$

Загальний вигляд: $y^{(n)} = f(x)$.

Розв'язання. Функцію y отримаємо шляхом n послідовних інтегрувань, тобто

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\ y^{(n-2)} &= \int \left\{ \int f(x) dx + C_1 \right\} dx + C_2 = \int \left\{ \int f(x) dx \right\} dx + C_1 x + C_2; \\ &\dots\dots\dots \\ y &= \int \underbrace{\left\{ \int \right\}}_{n-1} f(x) dx \underbrace{\left\{ \right\}}_{n-1} dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\mathbf{K}}_{n-1} + C_{n-1} x + C_n. \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 8. Розв'язати рівняння

$$y''' = \cos x.$$

Розв'язання. Виконаємо три послідовних інтегрування

$$y'' = \int \cos x dx = \sin x + C_1;$$

$$y' = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int (-\cos x + C_1 x + C_2) dx = -\sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

$$y = -\sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \text{ - це й є загальний розв'язок рівняння.}$$

2.2 Диференціальні рівняння n -го порядку, до яких не входить невідома функція у та її похідні до $(n-2)$ -го порядку

Загальний вигляд: $F[x, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$.

Розв'язання. Вводимо нову функцію $z(x) = y^{(n-1)}$, тоді $z'(x) = y^{(n)}$. Після підстановки отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $F[x, z, z'] = 0$, де невідомою функцією є функція $z(x)$. Розв'яжемо отримане рівняння та знайдемо $z(x)$.

Функцію u знайдемо з рівняння

$$y^{(n-1)} = z(x).$$

Дістанемо

$$y = \int \underbrace{K}_{n-2} \left\{ \int z(x) dx \right\} \underbrace{K}_{n-2} dx + C_1 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + K + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

ПРИКЛАД 9. Розв'язати рівняння

$$y''' = (y'')^2.$$

Розв'язання. Вводимо нову функцію $z(x) = y''$, тоді $y''' = z'$.

Тепер дане рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} z' = z^2 &\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int dx \Rightarrow \\ -\frac{1}{z} = x + C_1 &\Rightarrow z = -\frac{1}{x + C_1}. \end{aligned}$$

Знайдемо функцію y з рівняння $y'' = z(x) \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x + C_1}$.

Виконавши послідовне інтегрування, дістанемо

$$y' = -\int \frac{1}{x + C_1} dx = -\ln(x + C_1) + C_2;$$

$$\begin{aligned} y &= -\int [\ln(x + C_1) + C_2] dx = \\ &= -(x + C_1) \ln(x + C_1) + x(C_2 + 1) + C_3 + C_1; \end{aligned}$$

замінивши $C_2 + 1$ на C_2 та $C_3 + C_1$ на C_3 , отримаємо

$$y = -(x + C_1) \ln(x + C_1) + xC_2 + C_3.$$

Це й є загальний розв'язок рівняння.

2.3 Диференціальні рівняння n -го порядку, до яких не входить явно незалежна змінна x

Загальний вигляд: $F[y, y', y'', \mathbf{K}, y^{(n)}] = 0$

Розв'язання. Вводимо нову функцію $y' = p(y) \Rightarrow$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p' \cdot p;$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) = p \left[p \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right] = p^2 p'' + p(p')^2.$$

Після підстановки отримаємо диференціальне рівняння $(n-1)$ -го порядку $F[y, p, p', \mathbf{K}, p^{(n-1)}] = 0$, де невідомою функцією є функція $p(y)$. Розв'яжемо отримане рівняння та знайдемо $p(y)$.

Функцію y знайдемо з рівняння $y' = p(y)$,

тобто

$$\frac{dy}{dx} = p(y) \Rightarrow \frac{dy}{p(y)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{p(y)} = \int dx + C.$$

ПРИКЛАД 10. Розв'язати рівняння

$$(1 + y^2) y y'' = (3y^2 - 1)(y')^2.$$

Розв'язання. Вводимо нову функцію $y' = p(y)$, $y'' = p' \cdot p$.

Тоді дане рівняння можна записати у вигляді

$$(1 + y^2) y p \frac{dp}{dy} = (3y^2 - 1)p^2.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{dp}{p} = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2) y} dy \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2) y} dy \Rightarrow$$

$$\ln p = 2 \ln(1 + y^2) - \ln y + \ln C_1 \Rightarrow \ln p = \ln(1 + y^2)^2 + \ln \frac{C_1}{y} \Rightarrow$$

$$\ln p = \ln \left(\frac{C_1}{y} (1 + y^2)^2 \right) \Rightarrow p = C_1 \frac{(1 + y^2)^2}{y}.$$

Функцію y знайдемо з рівняння

$$y' = p(y) \Rightarrow y' = C_1 \frac{(1 + y^2)^2}{y}.$$

Розв'яжемо отримане рівняння :

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{(1 + y^2)^2}{y} \Rightarrow \frac{y dy}{(1 + y^2)^2} = C_1 dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{y dy}{(1+y^2)^2} = \int C_1 dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d(1+y^2)}{(1+y^2)^2} = C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+y^2} = -2C_1 x + C_2.$$

Це й є загальний розв'язок рівняння.

З ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

3.1 Однорідні рівняння

Загальний вигляд: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо корні характеристичного рівняння

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

При цьому в залежності від дискримінанту D можливі три випадки:

Дискри мінант	Характер коренів характеристич- ного рівняння	Частинні розв'язки диференціального рівняння
1. $D > 0$	$k_1 \neq k_2$, дійсні	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$
2. $D = 0$	$k_1 = k_2$, дійсні	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_2 x}$
3. $D < 0$	$k_{1,2} = a \pm ib$	$y_1 = e^{a x} \cos b x, \quad y_2 = e^{a x} \sin b x$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

де y_1, y_2 - частинні розв'язки диференціального рівняння.

ПРИКЛАД 11. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо корні характеристичного рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Оскільки $D = 0$, то $k_1 = k_2 = 1$. Тоді $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ та загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

ПРИКЛАД 12.

Опір та провідність витoku кабелю на одиницю його довжини дорівнює відповідно $R=2$ та $G=0,0001$. Яка буде сила струму на кінці ділянки кабелю довжиною $x=10$, якщо на початку ($x=0$) ділянки сила струму $I_0=1000$, а ЕРС дорівнює $E_0=24$ та відомо, що інтенсивність зменшення сили струму дорівнює добутку провідності витoku на ЕРС, а інтенсивність зменшення ЕРС дорівнює добутку опору на величину струму?

Розв'язання Падіння сили струму описується рівнянням

$$\frac{dI}{dx} = -G \cdot E(x),$$

а різниця потенціалів описується рівнянням

$$\frac{dE}{dx} = -R \cdot I.$$

Знайдемо похідні по x від обох частин першого рівняння

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = -G \cdot \frac{dE}{dx} .$$

Тоді з другого рівняння отримаємо

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = -G(-R \cdot I) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - G \cdot R \cdot I = 0 .$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\text{У нашому випадку } \frac{d^2 I}{dx^2} - 10^{-4} \cdot 2 \cdot I = 0 .$$

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 10^{-4} \cdot 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,41 \cdot 10^{-2} , \quad k_2 = -1,41 \cdot 10^{-2} .$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$I = C_1 e^{1,41 \cdot 10^{-2} x} + C_2 e^{-1,41 \cdot 10^{-2} x} .$$

Використовуючи початкові умови $I(x_0) = 1000$; $E(x_0) = 24$,

знайдемо C_1 та C_2 . Так як $\frac{dI}{dx}(x_0) = -G \cdot E(x_0)$, то

$$\frac{dI}{dx}(0) = -10^{-4} \cdot 24 .$$

Використовуючи загальний розв'язок рівняння, отримаємо:

$$C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1000;$$

$$\frac{dI}{dx} = 1,41 \cdot 10^{-2} (C_1 \cdot e^{1,41 \cdot 10^{-2} \cdot x} - C_2 \cdot e^{-1,41 \cdot 10^{-2} \cdot x}) \Rightarrow$$

$$1,41 \cdot 10^{-2} (C_1 e^0 - C_2 e^0) = -10^{-4} \cdot 24.$$

Таким чином, знаходимо C_1 и C_2 із системи

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1000; \\ C_1 - C_2 = -0,17. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 499,9; C_2 = 500,1.$$

Тоді часткове рішення буде мати вигляд

$$I = 499,9 \cdot e^{1,41 \cdot 10^{-2} x} + 500,1 \cdot e^{-1,41 \cdot 10^{-2} x}.$$

Визначимо, яка буде сила струму на кінці ділянки кабелю довжиною $x=10$.

$$I(10) = 499,9 e^{0,141} + 500,1 e^{-0,141} = 575,92.$$

3.2 Неоднорідні рівняння

Загальний вигляд: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$

Розв'язання.: Загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сума частинного розв'язку (y_c) лінійного неоднорідного рівняння та загального розв'язку (y_o) відповідного лінійного однорідного рівняння, тобто $y = y_o + y_c$.

1. Знайдемо y_o , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

2. Знайдемо y_c методом невизначених коефіцієнтів, якщо права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд.

а) $f(x) = e^{a \cdot x} P(x)$, де $P(x)$ - многочлен n -ої степені.

Частинний розв'язок залежить від взаємозв'язку між a та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2 .

№	Взаємозв'язок між a та k_1 і k_2	Вигляд частинного розв'язку
1	$a \neq k_1 \neq k_2$	$y_u = e^{a \cdot x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$
2	$a = k_1$ або $a = k_2$	$y_u = x e^{a \cdot x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$
3	$a = k_1 = k_2$	$y_u = x^2 e^{a \cdot x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$

б) $f(x) = e^{a \cdot x} [P(x) \cos b x + Q(x) \sin b x]$, де $P(x)$ - многочлен степені m_1 , $Q(x)$ - многочлен степені m_2 .

$$n = \max(m_1, m_2) \quad \text{та} \quad z = a + ib.$$

Частинний розв'язок залежить від взаємозв'язку між z та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2 .

№	Взаємозв'язок між z та k_1 і k_2	Вигляд частинного розв'язку
1	$z \neq k_1 \neq k_2$	$y_u = e^{a \cdot x} [M(x) \cos b x + N(x) \sin b x],$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \mathbf{K} + B_n x^n$

2	$z = k_1$ або $z = k_2$	$y_{\varphi} = x e^{a \cdot x} [M(x) \cos b x + N(x) \sin b x],$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \mathbf{K} + B_n x^n$
---	-------------------------------	--

ПРИКЛАД 13. Розв'язати рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x.$$

Розв'язання.

1. Знайдемо y_o , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3 \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x} \Rightarrow y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Знайдемо y_{φ} , за спеціальною правою частиною $f(x)$.

$$f(x) = 13 \sin 3x = e^{0x} [0 \cdot \cos 3x + 13 \sin 3x] \Rightarrow$$

$P(x) = 0$, $Q(x) = 13$ - многочлени нульової степені ($n = 0$);

$$z = a + ib = 0 + 3i = 3i, \text{ при чому } z \neq k_1 \neq k_2.$$

За таблицею частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\varphi} = e^{0x} [A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x] = A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x,$$

де $M(x) = A_0$ та $N(x) = B_0$.

Знайдемо y'_{φ} та y''_{φ} :

$$y'_{\varphi} = -3A_0 \sin 3x + 3B_0 \cos 3x;$$

$$y''_{\varphi} = -9A_0 \cos 3x - 9B_0 \sin 3x.$$

Підставимо значення y_q , y'_q , y''_q до заданого диференціального рівняння та отримаємо тотожність

$$\begin{aligned} & -9A_0 \cos 3x - 9B_0 \sin 3x - 5(-3A_0 \sin 3x + 3B_0 \cos 3x) + \\ & + 6(A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x) \equiv 13 \sin 3x, \\ & -3(A_0 + 5B_0) \cos 3x + 3(5A_0 - B_0) \equiv 13 \sin 3x. \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\sin 3x$ та $\cos 3x$:

$$\left. \begin{aligned} \sin 3x: & -3(A_0 + 5B_0) = 0, \\ \cos 3x: & 3(5A_0 - B_0) = 13. \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_0 = \frac{5}{6}, \quad B_0 = -\frac{1}{6}.$$

Частинний розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y_q = \frac{5}{6} \cos 3x - \frac{1}{6} \sin 3x.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = y_o + y_q = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6} \cos 3x - \frac{1}{6} \sin 3x.$$

ПРИКЛАД 14.

Нехай попит $D(t)$ та пропозиція $S(t)$ на товар визначаються відповідними співвідношеннями :

$$D(t) = a_2 p'' + a_1 p' + a_0 p + m;$$

$$S(t) = c_2 p'' + c_1 p' + c_0 p + n;$$

де $p(t)$ - рівноважна ціна на товар,

$p'(t)$ - тенденція формування ціни,

$p''(t)$ - темп зміни ціни, t - час,

$$a_2 = 1, \quad a_1 = a_0 = -2, \quad m = 15, \quad c_2 = 2, \quad c_1 = 1, \quad c_0 = 0, \quad n = 5.$$

Виходячи з вимог відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу, якщо в початковий момент часу $t=0$ відома ціна $p_0 = p(0) = 6$ і тенденція формування ціни $p'_0 = p'(0) = 9$.

Розв'язання. З вимоги відповідності попиту пропозиції випливає $D(t) = S(t)$, тобто $p'' - 2p' - 2p + 15 = 2p'' + p' + 5 \Rightarrow p'' + 3p' + 2p = 10$ - неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо $p_{одн}$, розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$p'' + 3p' + 2p = 0 \Rightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2, \quad k_2 = -1.$$

Тоді $p_{одн} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$.

Знайдемо p_q за спеціальною правою частиною $p(t) = 10e^{0t}$.

Оскільки 10 – многочлен нульової степені, $a = 0 \neq k_1 \neq k_2 \Rightarrow p_q = A$

Для визначення A обчислимо p'_q, p''_q :

$$p'_q = p''_q = 0.$$

Підставимо значення p_q, p'_q, p''_q до неоднорідного рівняння та отримаємо тотожність $2A = 10 \Rightarrow A = 5$.

Частинний розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння має вигляд $p_q = 5$.

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння

$$p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + 5$$

Використовуючи початкові умови $p_0 = 6$, $p'_0 = 9$ знайдемо C_1 та

C_2 . Для цього підставимо початкові умови в загальний розв'язок та в

$p'(t) = -2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t}$ і одержуємо

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + 5 = 6; \\ -2C_1 e^0 - C_2 e^0 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ -2C_1 - C_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow C_1 = -10, C_2 = 11.$$

Тоді, частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам задачі буде мати вигляд $p(t) = -10e^{-2t} + 11e^{-t} + 5$.

3.3 Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

Загальний вигляд: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$

Розв'язання. Цей метод використовується, коли права частина рівняння $f(x)$ не є функцією спеціального вигляду. Метод Лагранжа ґрунтується на використанні відомого загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Припустимо, що загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має аналогічний вигляд, але довільні сталі C_1 та C_2 розглядаються як функції від x , тобто

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2.$$

Невідомі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

ПРИКЛАД 15. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i \Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Тоді загальний розв'язок даного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Знайдемо $C_1(x)$ та $C_2(x)$ із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0; \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C_1.$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 1, \quad C_2(x) = \int 1 dx = x + C_2.$$

Підставимо знайдені функції у вираз

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = (\ln|\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x.$$

4 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ N-ГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

4.1 Однорідні рівняння

Загальний вигляд: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \mathbf{K} + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

Розв'язання. Знайдемо n корнів характеристичного рівняння

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} \mathbf{K} + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

В залежності від них можливі наступні випадки:

Характер корнів характеристичного рівняння	Частинні розв'язки диференціального рівняння
k - простий дійсний корінь	$e^{k x}$
k - дійсний корінь кратності m	$e^{k x}, x e^{k x}, x^2 e^{k x}, \mathbf{K}, x^{m-1} e^{k x}$
$k = a \pm ib$	$e^{a x} \cos b x, e^{a x} \sin b x$
$k = a \pm ib$ - корні кратності m	$e^{a x} \cos b x, x e^{a x} \cos b x, \mathbf{K}, x^{m-1} e^{a x} \cos b x$ $e^{a x} \sin b x, x e^{a x} \sin b x, \mathbf{K}, x^{m-1} e^{a x} \sin b x$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \mathbf{K} + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n,$$

де $y_1, y_2, \mathbf{K}, y_{n-1}, y_n$ - n частинних розв'язків диференціального рівняння, вказаних у таблиці.

ПРИКЛАД 16. Розв'язати рівняння

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо три кореня характеристичного рівняння

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0.$$

Дістанемо: $k_1 = 1$, $k_2 = 2i$, $k_3 = -2i$.

Оскільки всі корені прості, то за таблицею частинні розв'язки будуть такі: $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$.

Тоді загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

4.2 Неоднорідні рівняння

Загальний вигляд:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \mathbf{K} + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Розв'язання. Загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сума частинного розв'язку (y_q) лінійного неоднорідного рівняння та загального розв'язку (y_o) відповідного лінійного однорідного рівняння, тобто $y = y_o + y_q$.

1. Знайдемо y_o , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} \mathbf{K} + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

2. Знайдемо y_q , за спеціальною правою частиною $f(x)$.

а) $f(x) = e^{ax} P(x)$, де $P(x)$ - многочлен n -ої степені.

Частинний розв'язок залежить від взаємозв'язку між a та коренями характеристичного рівняння k_i , ($i = 1, \mathbf{K}, n$). Можливі наступні випадки:

№	Взаємозв'язок між a та k_i	Вигляд частинного розв'язку
1	a - не є коренем характеристичного рівняння	$y_u = e^{a \cdot x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$
2	a - є коренем характеристичного рівняння кратності m	$y_u = x^m e^{a \cdot x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$

$$\text{б) } f(x) = e^{a \cdot x} [P(x) \cos b x + Q(x) \sin b x],$$

де $P(x)$ - многочлен степені m_1 , $Q(x)$ - многочлен степені m_2 .

$$n = \max(m_1, m_2) \quad \text{та} \quad z = a + ib.$$

Частинний розв'язок залежить від взаємозв'язку між z та коренями характеристичного рівняння k_i , ($i = 1, \mathbf{K}, n$). Можливі наступні випадки:

№	Взаємозв'язок між z та k_i	Вигляд частинного розв'язку
1	z - не є коренем характеристичного рівняння	$y_u = e^{a \cdot x} [M(x) \cos b x + N(x) \sin b x],$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \mathbf{K} + B_n x^n$
2	z - є коренем характеристичного рівняння кратності m	$y_u = x^m e^{a \cdot x} [M(x) \cos b x + N(x) \sin b x],$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \mathbf{K} + B_n x^n$

ПРИКЛАД 17. Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} + y'' = x^2 + x.$$

Розв'язання.

1. Знайдемо y_o , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$y^{(4)} + y'' = 0.$$

Запишімо характеристичне рівняння

$$k^4 + k^2 = 0.$$

$k_1 = 0$ - корінь кратності $m=2$; $k_{2,3} = \pm i$ - корені кратності $m=1$.

Тоді за таблицею частинні розв'язки будуть такі:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x}, \quad y_3 = \cos x, \quad y_4 = \sin x \Rightarrow$$

$$y_o = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

2. Знайдемо y_u , за спеціальною правою частиною $f(x)$.

Оскільки $f(x) = x^2 + x = e^{0x}(x^2 + x)$, то $P(x)$ - многочлен другої степені ($n=2$) та $a=0$. Так як a є коренем характеристичного рівняння, тобто $a=k_1$ кратності $m=2$, то за таблицею частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_u = x^2 e^{0x} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = A_0 x^2 + A_1 x^3 + A_2 x^4.$$

Знайдемо $y'_u, y''_u, y'''_u, y^{(4)}_u$:

$$y'_u = 2A_0 x + 3A_1 x^2 + 4A_2 x^3;$$

$$y''_u = 2A_0 + 6A_1 x + 12A_2 x^2;$$

$$y'''_u = 6A_1 + 24A_2 x;$$

$$y^{(4)}_u = 24A_2.$$

Підставимо значення y_q , y'_q , y''_q , y'''_q , $y_q^{(4)}$ до заданого диференціального рівняння та отримаємо тотожність

$$24A_2 + 2A_0 + 6A_1x + 12A_2x^2 \equiv x^2 + x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\left. \begin{array}{l} x^2: \quad 12A_2 = 1, \\ x: \quad 6A_1 = 1, \\ x^0: \quad 24A_2 + 2A_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_0 = -1, \quad A_1 = \frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{1}{12}.$$

Таким чином, частинний розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y_q = -x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4.$$

Тоді загальний розв'язок заданого диференціального рівняння буде таким:

$$y = y_o + y_q = C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

5 МЕТОД ВИКЛЮЧЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДВОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

Загальний вигляд:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(t, x, y); \\ \frac{dy}{dt} = F_2(t, x, y). \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо з першого (другого) рівняння невідому функцію x або y та підставимо у друге (перше) рівняння. Розв'яжемо отримане рівняння другого порядку та знайдемо $x(t)$ та $y(t)$.

ПРИКЛАД 18. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - e^t; \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо: $\frac{dx}{dt} = \mathbb{X}$, $\frac{dy}{dt} = \mathbb{Y}$. Виразимо з першого рівняння y , маємо

$$y = \mathbb{X} - e^t \Rightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{X} - e^t.$$

Підставимо у та $\mathbb{Y}$ друге рівняння та отримаємо

$$\mathbb{X} - e^t = x + 1 \Rightarrow \mathbb{X} - x = e^t + 1.$$

Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Використавши вище розглянуті методи знаходимо загальний розв'язок

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - t.$$

Обчислимо

$$\mathbb{X} = \frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - 1,$$

$$\text{тоді } y = \mathbb{X} - e^t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^t - 1.$$

Таким чином, система має такий загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - t, \quad y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^t - 1.$$

Індивідуальні завдання

Завдання 1

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' \ln y \cos x = y;$ $y(0) = 1.$
2. $(1 + x^2)dy - ydx = 0;$ $y(1) = 1.$
3. $yy' + xe^{y^2} = 0;$ $y(1) = 0.$
4. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0;$ $y(0) = \frac{p}{4}.$
5. $ydx - (\ln y)^2 dy = 0;$ $y(0) = e.$
6. $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx;$ $y(0) = 0.$
7. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y);$ $y(0) = \frac{p}{4}.$
8. $y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0;$ $y(-\frac{15}{16}) = e.$
9. $y = y' \ln y;$ $y(2) = 1.$
10. $y' = e^{x+y} + e^{x-y};$ $y(0) = 0.$
11. $(x^2 + 1)y' + 2xy^2 = 0;$ $y(0) = 1.$
12. $xy' + y = y^2;$ $y(1) = 0,5.$
13. $x^2 y^2 y' + 1 = y;$ $y(1) = 2.$
14. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0;$ $y(1) = 1.$

15. $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0;$ $y(0) = 1.$
16. $(1 + e^{2x})y'y^2 = e^x;$ $y(0) = 0.$
17. $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0;$ $y(1) = 1.$
18. $xy' = y^2 + 1;$ $y(1) = 1.$
19. $(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx;$ $y(1) = 1.$
20. $(1 - e^{y^2})dy = \frac{dx}{2y};$ $y(0) = 0.$
21. $y'(1 + x^2) = 1 + y^2;$ $y(0) = 1.$
22. $\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0;$ $y(0) = 1.$
23. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx;$ $y(2) = 0.$
24. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0;$ $y(0) = 1.$
25. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$ $y(2) = 0.$
26. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0;$ $y(0) = 1.$
27. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy;$ $y(1) = 0.$
28. $y' + 2y - y^2 = 0;$ $y(0) = 3.$
29. $(1 + e^{2x})y^2y' = e^x;$ $y(0) = 1.$
30. $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0;$ $y(1) = 1.$

Завдання 2

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $2x^2 y' = x^2 + y^2.$
2. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}.$
3. $x \sin \frac{y}{x} y' + x = y \sin \frac{y}{x}.$
4. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$
5. $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}.$
6. $xyy' = y^2 + 2x^2.$
7. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$
8. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$
9. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$
10. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$
11. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y.$
12. $\operatorname{tg} \frac{y}{x} (xy' - y) = x.$
13. $xy' = y - \sqrt{xy}.$
14. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$

$$15. \quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$16. \quad xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

$$17. \quad xy'y - y^2 = y'x^2.$$

$$18. \quad xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$19. \quad 3xyy' + x^2 = 3y^2.$$

$$20. \quad xy' - x \cos^2 \frac{y}{x} = y.$$

$$21. \quad y^2 + x^2 y' = xyy'.$$

$$22. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 9.$$

$$23. \quad xy' = x \sin \frac{y}{x} + y.$$

$$24. \quad xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$$

$$25. \quad xdy = (2y - x)dx.$$

$$26. \quad xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

$$27. \quad 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$$

$$28. \quad xy' + y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0.$$

$$29. \quad (2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

$$30. \quad (x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$$

Завдання 3

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$

2. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x.$

3. $xy' - y = x^2 \cos x.$

4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

5. $y' - 3y = e^{-2x}.$

6. $y' + 5y = e^{4x}.$

7. $y' + 2y = e^{3x}.$

8. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x.$

9. $y' \sin x - y \cos x = 1.$

10. $y' - \frac{y}{x} = 1 + 2 \ln x.$

11. $xy' - 2y = 2x^4.$

12. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$

13. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$

14. $x^2 y' + xy + 1 = 0.$

15. $y = x(y' - x \cos x).$

16. $y'x = x \ln x + y.$

17. $(xy' - 1) \ln x = 2y.$
18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}.$
19. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}.$
20. $y' = (x + 1)^3 + \frac{2y}{x + 1}.$
21. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$
22. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0.$
23. $x^3 y' = 1 - 2x^2 y.$
24. $y' \operatorname{ctgx} + y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctgx}.$
25. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x.$
26. $y' + y \operatorname{tgx} = \cos^2 x.$
27. $(2xy + 3)dx - x^2 dy = 0.$
28. $(x^4 + 2y)dx = xdy.$
29. $\cos x dy = (y + 2 \cos x) \sin x dx.$
30. $x^2 y' = xy + 1.$

Завдання 4

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + \frac{y}{x} - x^2 y^4 = 0.$
2. $y' - \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x}^2} \arctg x - \frac{2xy}{1+x^2} = 0.$
3. $y^2 \ln x - y - xy' = 0.$
4. $y' + y = x\sqrt{y}.$
5. $y' - \frac{y^2}{x-1} = \frac{y}{x-1}.$
6. $y' + y = -xy^2.$
7. $y' + y = \frac{x}{y^2}.$
8. $y' - e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y} + y = 0.$
9. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x.$
10. $xdy + (y + x^2 y^2)dx = 0.$
11. $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0.$
12. $xy' + y = x^3 y^2.$
13. $y' + 2y = y^2 e^x.$
14. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x.$
15. $xydy = (y^2 + x)dx.$

$$16. \quad xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$$

$$17. \quad xy^2 y' = x^2 + y^3.$$

$$18. \quad xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y.$$

$$19. \quad x^2 y' - 2xy + y^2 = 0.$$

$$20. \quad xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$$

$$21. \quad xy' + y - xy^2 \ln x = 0.$$

$$22. \quad y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}.$$

$$23. \quad y' - 7y - e^{3x} y^2 = 0.$$

$$24. \quad y' = \frac{y^2 + y}{x - 3}.$$

$$25. \quad y' + 3y = e^{2x} y^2.$$

$$26. \quad y' + 3y = y^2 e^x.$$

$$27. \quad 2xydy = (y^2 - x)dx.$$

$$28. \quad xdy - (y + xy^2)dx = 0.$$

$$29. \quad xdy = (x^5 y^2 - 2y)dx.$$

$$30. \quad 3dy = (1 - 3y^2)y \sin x dx.$$

Завдання 5

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$
2. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy = 0.$
3. $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0.$
4. $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0.$
5. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0.$
6. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0.$
7. $(\sin y + \cos x - y \cos x)dx + (\cos y + x \cos y - \sin x)dy = 0.$
8. $(y + x \ln y)dx + (\frac{x^2}{2y} + x + 1)dy = 0.$
9. $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0.$
10. $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$
11. $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0.$
12. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0.$
13. $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$
14. $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0.$
15. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0.$
16. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0.$
17. $e^y dx + (xe^y - 2)dy = 0.$

18. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$
19. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$
20. $(\ln y - 2x)dx + (\frac{x}{y} - 2y)dy = 0.$
21. $(y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy = 0.$
22. $(3x^2 + 3xy^2)dx + (3x^2y + 4y^3)dy = 0.$
23. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$
24. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$
25. $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0.$
26. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$
27. $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0.$
28. $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0.$
29. $(\frac{1}{x} - y^3 + 4)dx + (-\frac{1}{y} - 3xy^2)dy = 0.$
30. $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0.$

Завдання 6

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$; $y(1) = \frac{p}{2}$; $y'(1) = 2$.
2. $(3x + x^2)y'' - (3 + 2x)y' = 0$; $y(2) = \frac{-1}{3}$; $y'(2) = \frac{-1}{2}$.
3. $xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $y(1) = 6$; $y'(1) = 2$.
4. $yy'' - (y')^2 = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.
5. $y'' = y'$; $y(0) = \frac{2}{3}$; $y'(0) = 1$.
6. $yy'' - 3(y')^2 = 4y^2y'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -4$.
7. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
8. $y'' = \frac{y'}{x} + x^2$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.
9. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$; $y(2) = 1$; $y'(2) = -1$.
10. $y''(x-1) - y' = 0$; $y(2) = 2$; $y'(2) = 1$.
11. $yy'' - (y')^2 = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.
12. $y'' = y'e^y$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
13. $yy'' = 2(y')^2$; $y(-\frac{1}{4}) = 1$; $y'(-\frac{1}{4}) = 4$.

14. $y'' \cos y = (y')^2 \sin y$; $y(-1) = \frac{p}{6}$; $y'(-1) = 2$.
15. $xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0$; $y(1) = -1$; $y'(1) = \frac{p}{2}$.
16. $(2x+1)y'' + 2y' = 4xy''$; $y(1) = 0$; $y'(1) = \frac{2}{3}$.
17. $y'' = (2y' + 1) \operatorname{ctgx}$; $y(\frac{p}{2}) = 0$; $y'(\frac{p}{2}) = \frac{1}{2}$.
18. $y''y^3 + 4 = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = -2$.
19. $y''(y^2 + 1) = 2y(y')^2$; $y(\frac{p}{4}) = 1$; $y'(\frac{p}{4}) = 2$.
20. $x^2y'' - 2xy' + 3 = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 4$.
21. $(y-1)y'' = 2(y')^2$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$.
22. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 3$.
23. $2yy'' - y' - (y')^2 = 0$; $y(-1) = 1$; $y'(-1) = -1$.
24. $y \ln yy'' + (y')^2 = 0$; $y(0) = e$; $y'(0) = 1$.
25. $xy'' + y' = 2x \ln x + x$; $y(1) = \frac{-1}{2}$; $y'(1) = \frac{3}{2}$.
26. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$; $y(1) = e$; $y'(1) = e^2$.
27. $x^2y'' = \ln x$; $y(1) = 3$; $y'(1) = 1$.
28. $y'' = e^{2y}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
29. $2(y')^2 = (y-1)y''$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

$$30. \quad y^3 y'' + 1 = 0; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 0.$$

Завдання 7

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' + 4(y')^2 = 0.$
2. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$
3. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$
4. $x^2 y'' - (y')^2 = 0.$
5. $(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0.$
6. $2y''xy' - (y')^2 = -4.$
7. $y''y' = \frac{(y')^2 + 1}{2x}.$
8. $y'' = -2x(y')^2.$
9. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$
10. $y^3 y'' = 1.$
11. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}.$
12. $(1-x)y'' + y' = 2.$
13. $2xy'y'' = (y')^2 - 1.$
14. $y''(e^x + 1) - y'e^x = 0.$
15. $yy'' = (y')^2 - (y')^3.$

16. $y'' = y'2e^{-y}.$
17. $yy'' + 1 = (y')^2.$
18. $(1+x)y'' - y' = 2.$
19. $x^2y'' + (y')^2 = 0.$
20. $1 + (y')^2 = yy''.$
21. $(y'')^2 = 1 + (y')^2.$
22. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0.$
23. $y''x \ln x = y'.$
24. $xy'' - 2 = x^2e^x.$
25. $-(y')^2 = y''y \ln y.$
26. $\sqrt{y}y'' = y'.$
27. $y''(1+y) = (y')^2 + y'.$
28. $y'' \sin x = y' \cos x + 2 \cos x.$
29. $y'' \operatorname{ctg} x = y' + 1.$
30. $x^2y'' + 1 = y' - xy''.$

Завдання 8

Відомо, що ізолюваний провідник внаслідок недосконалої ізоляції втрачає поданий йому заряд, причому швидкість втрати заряду пропорційна наявному заряду в даний момент.

У початковий момент провіднику подано заряд q_0 (кулон). За перші t_1 хвилин провідник втрачає Δq (кулон).

Визначити за який час заряд провідника дорівнюватиме $m q_0$.

Варіант №	q_0	Δq	t_1	m
1	1×10^{-6}	2×10^{-6}	1	0,5
2	20×10^{-6}	4×10^{-6}	2	0,5
3	30×10^{-6}	6×10^{-6}	3	0,5
4	40×10^{-6}	$7,2 \times 10^{-6}$	4	0,6
5	50×10^{-6}	9×10^{-6}	5	0,6
6	60×10^{-6}	$10,8 \times 10^{-6}$	1	0,6
7	70×10^{-6}	$11,9 \times 10^{-6}$	2	0,7
8	80×10^{-6}	$13,6 \times 10^{-6}$	3	0,7
9	90×10^{-6}	$15,3 \times 10^{-6}$	4	0,7
10	$0,1 \times 10^{-3}$	11×10^{-6}	5	0,75
11	$0,11 \times 10^{-3}$	$12,1 \times 10^{-6}$	1	0,78
12	$0,12 \times 10^{-3}$	$19,2 \times 10^{-6}$	2	0,81
13	$0,13 \times 10^{-3}$	$20,8 \times 10^{-6}$	3	0,84
14	$0,14 \times 10^{-3}$	$22,4 \times 10^{-6}$	4	0,87
15	$0,15 \times 10^{-3}$	$2,25 \times 10^{-6}$	5	0,9
16	$0,16 \times 10^{-3}$	24×10^{-6}	1	0,5
17	$0,17 \times 10^{-3}$	$25,5 \times 10^{-6}$	2	0,55
18	$0,18 \times 10^{-3}$	27×10^{-6}	3	0,6
19	$0,19 \times 10^{-3}$	$26,6 \times 10^{-6}$	4	0,66
20	$0,2 \times 10^{-3}$	28×10^{-6}	1	0,65
21	$0,21 \times 10^{-3}$	$27,3 \times 10^{-6}$	2	0,67
22	$0,22 \times 10^{-3}$	$28,6 \times 10^{-6}$	3	0,69
23	$0,23 \times 10^{-3}$	$29,9 \times 10^{-6}$	4	0,71
24	$0,24 \times 10^{-3}$	$28,8 \times 10^{-6}$	5	0,73
25	$0,25 \times 10^{-3}$	30×10^{-6}	1	0,75
26	$0,26 \times 10^{-3}$	$31,2 \times 10^{-6}$	2	0,77
27	$0,27 \times 10^{-3}$	$32,4 \times 10^{-6}$	3	0,79
28	$0,28 \times 10^{-3}$	$33,6 \times 10^{-6}$	4	0,81
29	$0,29 \times 10^{-3}$	$2,9 \times 10^{-6}$	5	0,83
30	$0,30 \times 10^{-3}$	30×10^{-6}	2	0,85

Завдання 9

Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість обладнання дорівнює S_0 тисяч грошових одиниць.

Через один рік вартість обладнання становитиме S_1 тисяч грошових одиниць.

Обладнання використовувалося впродовж t років. Яка його вартість у теперішній час?

Варіант №	S_0	S_1	t
1	20	18,0	6
2	21	18,9	5
3	22	19,8	7
4	23	20,7	4
5	24	21,4	13
6	25	22,3	5
7	26	23,1	8
8	27	24,0	6
9	28	24,9	15
10	29	25,5	9
11	30	26,4	4
12	31	27,3	10
13	32	28,2	12
14	33	29,0	7
15	34	29,9	4
16	35	30,5	8
17	36	31,3	9
18	37	32,2	6
19	38	33,1	5
20	39	33,9	9
21	40	36,0	7
22	41	35,3	8
23	42	36,1	6
24	43	37,0	11
25	44	37,8	9
26	45	38,7	6
27	46	39,1	8
28	47	40,0	5
29	48	40,8	14
30	49	41,7	12

Завдання 10

Опір та провідність витoku кабелю на одиницю його довжини дорівнює відповідно R та G . Яка буде сила струму на кінці ділянки кабелю довжиною x , якщо на початку ($x=0$) ділянки сила струму дорівнює I_0 , а ЕРС дорівнює E_0 та відомо, що інтенсивність зменшення сили струму дорівнює добутку провідності витoku на ЕРС, а інтенсивність зменшення ЕРС дорівнює добутку опору на величину струму?

N	G	R	$I(x_0)$	$E(x_0)$	x
1	$1 \cdot 10^{-6}$	20	10	1000	20
2	$4,4 \cdot 10^{-6}$	19,4	44	966	19,4
3	$7,8 \cdot 10^{-6}$	18,8	78	932	18,8
4	$11 \cdot 10^{-6}$	18,2	112	898	18,2
5	$15 \cdot 10^{-6}$	17,6	146	864	17,6
6	$18 \cdot 10^{-6}$	17	180	830	17
7	$21 \cdot 10^{-6}$	16,4	214	796	16,4
8	$25 \cdot 10^{-6}$	15,8	248	762	15,8
9	$28 \cdot 10^{-6}$	15,2	282	728	15,2
10	$32 \cdot 10^{-6}$	14,6	316	694	14,6
11	$35 \cdot 10^{-6}$	14	350	660	14
12	$38 \cdot 10^{-6}$	13,4	384	626	13,4
13	$42 \cdot 10^{-6}$	12,8	418	592	12,8
14	$45 \cdot 10^{-6}$	12,2	452	558	12,2
15	$49 \cdot 10^{-6}$	11,6	486	524	11,5
16	$52 \cdot 10^{-6}$	11	520	490	10,8
17	$55 \cdot 10^{-6}$	10,4	554	456	10,1
18	$59 \cdot 10^{-6}$	9,8	588	422	9,4
19	$62 \cdot 10^{-6}$	9,2	622	388	8,7
20	$66 \cdot 10^{-6}$	8,6	656	354	8
21	$69 \cdot 10^{-6}$	8	690	320	7,3
22	$72 \cdot 10^{-6}$	7,4	724	286	6,6
23	$76 \cdot 10^{-6}$	6,8	758	252	5,9
24	$79 \cdot 10^{-6}$	6,2	792	218	5,2
25	$83 \cdot 10^{-6}$	5,5	826	184	4,4
26	$86 \cdot 10^{-6}$	4,8	860	150	3,6
27	$89 \cdot 10^{-6}$	4,1	895	116	2,8
28	$93 \cdot 10^{-6}$	3,4	930	82	2
29	$96 \cdot 10^{-6}$	2,7	965	48	1,2
30	$1 \cdot 10^{-4}$	2	1000	24	10

12. $y'' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^x \sin x$;

6) $f(x) = \cos x + x^3$.

13. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$; a) $f(x) = x^2 e^{4x}$;

6) $f(x) = e^{-6x} \cos x + e^x.$

14. $y'' + 2y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x} \sin 3x$;

6) $f(x) = 5e^{-x} + \cos x$.

15. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; a) $f(x) = (x+1)e^{2x}$;

6) $f(x) = e^x \cos 2x + 3x^2$.

16. $y'' + 2y' + 37y = f(x)$; a) $f(x) = e^{-x} \sin 6x$;

6) $f(x) = e^{-x}(6x-1) + 2x$.

17. $y'' - 14y' + 49 = f(x)$; a) $f(x) = e^x \cos 7x$;

6) $f(x) = (1-x)e^{7x} + 7x^2$.

18. $y'' + 2y' - 3y = f(x)$; a) $f(x) = (x+3)e^{-3x}$;

6) $f(x) = e^x \cos x + e^{3x}$.

19. $y'' + 6y' + 10y = f(x)$; a) $f(x) = x^3 e^x$;

6) $f(x) = e^x \cos 3x + e^{-3x} \sin x$.

20. $y'' - 10y + 25 = f(x)$; a) $f(x) = 3e^{5x}$;

6) $f(x) = 7 \cos 5x + e^{5x} \sin x$.

21. $y'' + y' - 6y = f(x)$; a) $f(x) = e^{-3x} \cos 2x$;

6) $f(x) = (1-2x)e^{2x} + x^3$.

22. $y'' + 6y' + 13y = f(x)$; a) $f(x) = e^{-3x} \sin 2x$;

6) $f(x) = (1-2x)e^{-3x} + e^{2x} \cos 3x$.

23. $y'' + 4y' + 4y = f(x)$; a) $f(x) = 5e^{-2x}$;

6) $f(x) = \cos 2x + e^{-2x} \sin x$.

24. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x} \cos 2x$;

6) $f(x) = (x-2)e^{-x} + \sin 2x$.

25. $y'' - 12y' + 40y = f(x)$; а) $f(x) = e^{2x} \sin 6x$;
 б) $f(x) = e^{6x} \cos 2x + (1 + 6x)e^{2x}$.
26. $y'' + 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x} \cos 3x$;
 б) $f(x) = 7e^{-3x} + \sin 3x$.
27. $y'' - 8y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = e^{2x} \sin 6x$;
 б) $f(x) = 5e^{6x} + 7 \cos 2x$.
28. $y'' - 6y' + 13y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x} \cos 2x$;
 б) $f(x) = (1 + 2x)e^{3x} + 2 \sin 3x$.
29. $y'' + 8y' + 16 = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{-4x}$;
 б) $f(x) = \cos 4x + e^{-4x} \sin x$.
30. $y'' - 6y' + 34y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x} \sin 5x$;
 б) $f(x) = e^{5x} \sin 3x + 5xe^{3x}$.

Завдання 12

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $y''' - 7y'' + 6y' = 2e^{6x}$. | 2. $y''' - 4y' = \sin 2x$. |
| 3. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$. | 4. $y^{IV} - y = \cos x$. |
| 5. $y''' - y'' = 2 \cos x$. | 6. $y^{IV} - 16y = \sin x$. |
| 7. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 3e^{2x}$. | 8. $y''' - 4y' = x^2$. |
| 9. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 2 \cos 3x$. | 10. $y''' + y' = \cos x$. |
| 11. $y''' - y' = 3x$. | 12. $y''' - y'' + y' - y = 3$. |
| 13. $y''' - 13y'' + 12y' = \sin x$. | 14. $y''' + 2y'' + y' = \sin x$. |
| 15. $y''' + y'' = 4x$. | 16. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 7$. |

17. $y^{IV} + 4y''' = 3\sin 2x$.

18. $y''' + 8y = e^x$.

19. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = \sin 3x$.

20. $y''' + 4y' = e^{2x}$.

21. $y''' + 3y'' + 2y' = \cos x$.

22. $y''' - y'' = 3\cos 2x$.

23. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = e^{2x}$.

24. $y''' + 9y' = 2$.

25. $y''' - 13y'' + 12y' = 3e^x$.

26. $y^{IV} - y = \cos 3x$.

27. $y''' + 9y' = \cos 3x$.

28. $y''' - y'' + y' - y = 3\sin x$

29. $y''' - y' = 2\sin x$.

30. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 5$.

Завдання 13

Нехай попит $D(t)$ та пропозиція $S(t)$ на товар визначаються відповідними співвідношеннями :

$$D(t) = a_2 p'' + a_1 p' + a_0 p + m;$$

$$S(t) = c_2 p'' + c_1 p' + c_0 p + n;$$

де $p(t)$ - рівноважна ціна на товар, $p'(t)$ - тенденція формування ціни, $p''(t)$ - темп зміни ціни, t - час.

Виходячи з вимог відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу, якщо в початковий момент часу $t=0$ відома ціна p_0 і тенденція формування ціни p_0' .

Варіант №	a_2	a_1	a_0	m	c_2	c_1	c_0	n	p_0	p_0'
1	2	-5	-2	10	3	1	3	5	4	7
2	4	-3	-4	19	5	6	4	3	3	6
3	1	-4	-2	15	2	с1	2	3	7	5
4	2	-1	-1	12	3	2	1	4	10	13
5	1	-3	-7	30	2	3	2	3	5	7
6	2	-1	-2	25	3	6	4	1	6	10

7	2	-3	-4	24	3	5	3	3	8	7
8	2	-3	-4	23	3	6	4	7	3	13
9	2	-2	-5	26	3	4	5	6	4	5
10	3	-4	-2	21	2	1	4	3	9	15
11	4	-2	0	14	6	2	2	2	11	15
12	2	-1	-1	16	3	1	1	2	12	13
13	3	-1	-2	27	4	1	3	7	7	10
14	1	-4	-1	18	2	4	16	1	2	4
15	2	-2	-3	13	3	1	-13	3	9	13
16	2	-3	-5	31	3	7	24	2	2	5
17	2	-4	-3	33	4	0	17	3	3	7,5
18	0	-2	-3	39	1	10	34	2	5	9
19	2	-2	-3	30	4	10	23	4	4	6
20	4	-2	-7	35	5	0	10	1	3	5
21	1	-2	-1	47	5	14	19	7	6	8
22	3	-2	-1	66	7	14	31	2	8	10
23	6	-4	-2	40	7	-4	7	4	7	9
24	2	-5	-6	54	4	3	20	2	3	4
25	3	-3	-1	9	4	1	2	3	4	9
26	7	-5	-2	32	10	1	13	2	6	7
27	4	-3	-3	28	7	0	-21	10	3	7
28	5	-1	-1	29	7	9	11	5	4	8
29	1	-2	-2	31	2	8	24	5	7	11
30	1	-2	-2	15	2	1	0	5	6	9

Примітка. Обґрунтуємо знаки коефіцієнтів . Якщо темп зміни ціни зростає , тоді ринок збільшує інтерес до товару і навпаки . Швидке зростання ціни зменшує попит , тому $a_1 < 0$: Пропозиція ще більше посилюється темпом зміни ціни , тому $c_2 > a_2$. Підвищення ціни теж збільшує пропозицію , тому $c_1 > 0$.

Завдання 14

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$

2. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}.$

3. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$

4. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$

5. $y'' + y = \operatorname{ctg} x.$

6. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$

7. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}.$

8. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}.$

9. $y'' + 9y = \operatorname{ctg} 3x.$

10. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$

11. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}.$

12. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$

13. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}.$

14. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$

15. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x.$

16. $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x.$

17. $y'' + 16y = \frac{1}{\cos 4x}.$

18. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$

19. $y'' - 3y' = \frac{e^{-3x}}{1 + e^{-3x}}.$

20. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$

21. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$

22. $y'' + 9y = \operatorname{tg} 3x.$

23. $y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

24. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$$25. \quad y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$26. \quad y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x).$$

$$27. \quad y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}.$$

$$28. \quad y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$29. \quad y'' - y' = e^{2x} \cdot \sin(e^x)$$

$$30. \quad y'' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Завдання 15

Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

$$1. \quad \begin{cases} x' = -x + y + t \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = -x + 2y - 4 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = 3x + y - 4e^t \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x' = 2x + 3y + t^2 \\ y' = 3x + 2y - t \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x' = x + 3y - e^{2t} \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x' = -2x + y - e^t \\ y' = x - 2y + 3 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x' = x - 2y + t \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} x' = 3x - y + t + 1 \\ y' = -x + 3y - t^2 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y - e^t \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} x' = 2x + 4y - t^2 \\ y' = 4x + 2y + 5 \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} x' = 4x - 8y + 2e^{3t} \\ y' = -8x + 4y - 4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 1 + t \\ \dot{y} = 2x - 3y - 3 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 4x + 5y - 4 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = 5x + y - 3e^{2t} \\ \dot{y} = x - 5y + 4e^{2t} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + 1 \\ \dot{y} = 4x + 3y - 2e^t \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y - 3e^t \\ \dot{y} = 3x - 4y + 7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = -x + 2y - 4 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \dot{x} = -x + 5y + 4t + 3 \\ \dot{y} = 5x - y + 7 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 3e^{-t} \\ \dot{y} = x - 2y + t \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \dot{x} = -7x + 3y + 5e^t \\ \dot{y} = 3x - 7y + 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = 6x + 3y + t \\ \dot{y} = -8x - 5y + 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y \\ \dot{y} = x - 6y - e^t \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = x - 5y + 3 \\ \dot{y} = -x - 3y - 4e^t \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t \\ \dot{y} = 8x + y - 4 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y + t \\ \dot{y} = x + y + e^t \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 4 \\ \dot{y} = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 4 \\ \dot{y} = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + e^t \\ \dot{y} = 2x + 3y - 1 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \dot{x} = 2x + e^t \\ \dot{y} = 3x + y + 1 \end{cases}$$

Контрольні питання

1. Навести означення звичайного диференціального рівняння.
2. Навести означення загального розв'язку диференціального рівняння.
3. Навести означення частинного розв'язку диференціального рівняння.
4. Записати диференціальне рівняння з відокремленими змінними.
5. Записати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.
6. Записати однорідне диференціальне рівняння першого порядку.
7. Яка заміна застосовується для розв'язання однорідного рівняння?
8. Записати лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
9. Яка заміна застосовується для розв'язання лінійного рівняння?
10. Записати рівняння Бернуллі та навести заміну для його розв'язання.
11. Навести означення диференціального рівняння n -го порядку та сформулювати задачу Коші для цього рівняння.
12. Сформулювати теорему про існування й єдиність розв'язку задачі Коші.
13. Записати загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = f(x)$.
14. Яка заміна застосовується для розв'язання рівняння $F(x, y', y'') = 0$?
15. Яка заміна застосовується для розв'язання рівняння $F(y, y', y'') = 0$?
16. Записати лінійне однорідне диференціальне рівняння n -го порядку.
17. Записати визначник Вронського та сформулювати його властивості.
18. Навести означення фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння.
19. Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку.

20. Записати характеристичне рівняння для лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.
21. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні між собою?
22. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні?
23. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені?
24. Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку.
25. У чому полягає суть методу варіацій довільних сталих (методу Лагранжа)?
26. Записати систему рівнянь для знаходження невідомих $C_1(x), C_2(x)$ по методу Лагранжа.
27. Навести правило знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною виду $f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$.
28. Навести правило знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною виду $f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cdot \sin bx + Q_m(x) \cdot \cos bx]$.
29. Навести означення системи диференціальних рівнянь першого порядку.
30. У чому полягає суть методу виключень розв'язання системи n диференціальних рівнянь?

Література

1. В.П. Денисюк, В.К. Репета. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навчальний посібник: У 4ч. – К.: НАУ, 2005.
2. Андрощук Л.В. , Ковтун О.І. , Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння. Навч. посібник. – К: НАУ, 2005.
3. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в економіке: Учебник: В 2-х ч. –М.: ФиС, 2000.
4. Высшая математика для экономистов: Уч. пособие / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч.: Підручник для студентів – К.: Либідь, 1994.
6. Шкіль М.І., Колесник Г.В.: Вища математика: Підручник, у 3-х кн., кн. 3. Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних. Диференціальне рівняння. – К.: Либідь, 1994.
7. М.С. Красс. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФА, 1999.
8. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в 3-х ч. / Под ред. А.П. Рябушко. – ч. III, Минск.: Выш. шк., 1992.