

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення дисципліни
“Основи науково-технічних досліджень”
для студентів спеціальності 136 “Металургія”
денної та заочної форм навчання

2016

Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Основи науково-технічних досліджень” для студентів спеціальності 136 “Металургія” денної та заочної форм навчання / Укл.: В.І.Гонтаренко – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – 70 с.

Укладач: В.І.Гонтаренко, професор, к.т.н.

Рецензент: Є.І.Івахненко, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск:
В.В.Луцьов, професор, д.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри “Машини і
технологія ливарного
виробництва”
Протокол № 1
від “ 17 ” серпня 2016.

Затверджено на засіданні
НМК Інженерно фізичного
факультету
Протокол № 1
від “ 13 ” вересня 2016.

ЗМІСТ

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	4
2 РОБОЧА ПРОГРАМА І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ТЕМ ДИСЦИПЛІНИ	5
2.1 Структура науково-дослідної роботи оформлення її результатів	5
2.2 Кореляційний аналіз результатів експерименту	6
2.3 Планування експерименту.....	7
2.4 Проведення активного експерименту	9
3 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ	10
4 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ.....	12
4.1 НДР і первинна обробка результатів експерименту	12
4.2 Кореляційний аналіз	22
4.3 ПФЕ і ДФЕ.....	27
4.4 Шлях по градієнту.....	39
4.5 Функціональна залежність	49
4.6 Кореляційна залежність.....	56
5 КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ	58
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	64
Додаток А. Програма для знаходження локального максимуму багатовимірної функції на комп'ютерній мові БЕЙСІК.....	65
Додаток Б. Програма кореляційно-регресійного аналізу на комп'ютерній мові БЕЙСІК “BCORREG”	66
Додаток В. Значення критерію Фішера для рівнів значущості: $\alpha=0,05/\alpha=0,01$	70

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Відповідно до навчального плану для денної та заочної форм навчання зі спеціальності 131 “Прикладна механіка” освітньої програми “Обладнання та технології ливарного виробництва” дисципліна “Основи науково-технічних досліджень” складається з лекційних і лабораторних занять та контрольної роботи (табл. 1.1):

Таблиця 1.1 – Нормативні дані до вивчення курсу

Форма навчання	Курс	Семестр	Лекції, год.	Лабораторні заняття, год.	Всього, год./кред.	Самостійна робота, год.	Залік
денна і заочна	4	8	10	10	45/1,5	25	+

Мета викладання дисципліни “Основи науково-технічних досліджень” – дати загальні відомості про науку, види та етапи наукових досліджень, про інформатизацію наукових досліджень, про методи експериментальних досліджень.

Перелік знань, вмінь, навичок після викладання дисципліни:

- знати структуру науково-дослідної роботи;
- одержати навички інформаційних пошуків, планування експерименту та статистичної обробки експериментальних даних.

На установочну сесію виносяться теми, які у сконцентрованому виді відповідають на усі питання, пов’язані з вивченням дисципліни:

- структура науково-дослідної роботи й оформлення її результатів;
- кореляційний аналіз результатів експерименту;
- планування експерименту;
- встановлення виду залежності між двома перемінними величинами;
- проведення активного експерименту.

Послідовне вивчення тем закріплюється рішенням відповідних задач і виконанням контрольної роботи.

2 РОБОЧА ПРОГРАМА І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ТЕМ ДИСЦИПЛІНИ

2.1 Структура науково-дослідної роботи оформлення її результатів

Під час проведення установочної сесії вивчення теми займає 2 години і 9 годин необхідно для самостійного вивчення теми.

Зміст робочої програми теми

Визначення і основні особливості науки. Наука як система знань. Наукові дослідження, їх особливості та класифікація. Наукові заклади і кадри країни.

Напрями наукових досліджень у ливарному виробництві. Основні етапи науково-дослідної роботи (НДР).

Методи обґрунтування тем наукових досліджень. Складання техніко-економічного обґрунтування для проведення НДР. Науково-технічна інформація. Інформаційний пошук. Аналіз інформації і формулювання задач наукового дослідження.

Методологія теоретичних досліджень. Моделі досліджень. Аналітичні методи досліджень, в тому числі з використанням експериментів. Імовірно-статистичні методи досліджень. Методи системного аналізу.

Методи експериментальних досліджень. Методологія експерименту. Розробка плану-програми експерименту. Статистичні методи оцінки вимірювань в експериментальних дослідженнях. Засоби вимірювань. Впровадження; експерименту. Методи графічного зображення результатів вимірювань. Методи добору емпіричних формул.

Аналіз теоретично-експериментальних досліджень і формулювання висновків та пропозицій. Складання; звітів про НДР. Підготування наукових матеріалів до опублікування у пресі.

Винахідницька робота та її особливості. Винахідництво як творчий процес. Оформлення винаходу. Правові можливості винахідників. Впровадження НДР. Організація та планування наукових досліджень.

Методичні вказівки щодо вивчення теми

Під час вивчення даної теми особливу увагу треба звернути на інформаційне забезпечення НДР і методологію експерименту. Треба

вивчити статистичні методи оцінки вимірювань в експериментальних дослідженнях. Необхідно також освоїти методи графічного зображення результатів вимірювань і методи добору емпіричних формул. З цією метою треба виконати окремо розрахункове завдання з переліку, який приведений у методичних вказівках до першого практичного завдання [1, с.6-133, 165-221; 2, с.7-9, 28-34, 154-161, 192-266].

Запитання для самоперевірки

1. Що таке наука?
2. Чим характеризується науково-технічна революція?
3. Дослід та його варіанти.
4. Головні етапи НДР.
5. Первинна і вторинна інформація.
6. Опубліковані і неопубліковані документи.
7. Що таке УДК і МВК?
8. Для чого потрібна статистична обробка результатів експериментів?
9. Графічне зображення результатів вимірювань.
10. Методи добору емпіричних формул.
11. Як підготувати матеріали досліджень до опублікування у пресі.
12. Складання звітів про НДР.
13. Методи технічної творчості,
14. Як оформлюється винахід?
15. Методи організації та планування наукових досліджень.

2.2 Кореляційний аналіз результатів експерименту

Під час проведення установочної сесії вивчення теми займає 2 години і 9 годин необхідно для самостійного вивчення теми.

Зміст робочої програми і теми

Метод найменших квадратів. Визначення інтервалів розподілу окремих вимірювань. Дисперсійний аналіз. Випадкові і стохастичні коливання. Коефіцієнт лінійної кореляції двох дослідних величин. Критерій Студента. Визначення закономірності кореляційного зв'язку між двох змінних. Перевірка адекватності лінійної моделі.

Множинна лінійна кореляція, Частинний коефіцієнт кореляції. Множинний коефіцієнт кореляції і його визначення за допомогою ЕОМ. Нелінійна множинна кореляція. Кореляційне співвідношення, Програма кореляційно-регресійного аналізу. Вивчення математичних залежностей в діалоговому режимі на ЕОМ.

Методичні вказівки щодо вивчення теми

Під час вивчення даної теми особливу увагу треба звернути на вивчення парної лінійної кореляції і визначення адекватності лінійної моделі за допомогою критерію Студента, тому що метод кореляційної обробки експериментальних даних дуже часто використовується у наукових дослідженнях в галузі ливарного виробництва. Необхідно також ознайомитися з можливостями використання пакетів прикладних програм “робочого місця” інженера. З метою засвоєння методів лінійної кореляції двох дослідних величин необхідно виконати окреме розрахункове завдання з переліку, який приведений у методичних вказівках до другого практичного завдання [1, с. 134-144; 2, с.92-98, 123-1283].

Запитання для самоперевірки

1. Що таке МНК?
2. Функціональні і нефункціональні залежності.
3. Як визначається коефіцієнт лінійної кореляції?
4. Як визначаються закономірності кореляційних зв'язків?
5. Використання критерію Стьюдента.
6. Взаємозв'язок дисперсії і кореляції.
7. Як визначаються частинний і множинний коефіцієнти кореляції?
8. Пакети програм для кореляційно-регресійного аналізу за допомогою ЕОМ.
9. Що таке кореляційне співвідношення?
10. Коли застосовується пасивний експеримент?

2.3 Планування експерименту

Під час проведення установочної сесії вивчення теми займає 2 години і 9 годин необхідно для самостійного вивчення теми.

Зміст робочої програми теми

Пасивний і активний експеримент. Основні поняття планування експерименту. Модель експерименту. Кодування факторів. Повний факторний експеримент (ГФЕ). Експеримент типу 2^K . Метод найменших квадратів (МНК) і ГФЕ. Визначення лінійних і нелінійних залежностей за допомогою ПФЕ.

Змішування ефектів. Дробові репліки. Генеруюче співвідношення. Визначальний контраст. Дробовий факторний експеримент (ДФЕ). Лінійні і напівквадратичні моделі.

Інші методи активного планування експерименту. Плани другого порядку. Ортогональні та ротатбельні плани. Аналіз нелінійної моделі. Симплексне-решітчасте планування.

Методичні вказівки щодо вивчення теми

Під час вивчення даної теми особливу увагу треба звернути на вивчення методів активного експерименту і застосування цих методів під час удосконалення ливарного виробництва, його обладнання та устаткування. Треба вивчити методи кодування факторів під час яких виконання ПФЕ, методи складання матриць планування. Навчитись обчислювати лінійні та нелінійні залежності складати дробові репліки, розраховувати генеруючі співвідношення та визначаючи контрасти, визначати системи змішування ефектів. З метою засвоєння методів ПФЕ і ДФЕ необхідно виконати окреме розрахункове завдання з переліку, який приведений в методичних вказівках до третього практичного заняття [1, с. 145-148; 2, с. 104-113; 3, с. 8-16].

Запитання для самоперевірки

1. Чим відрізняється активний експеримент від пасивного?
2. Що таке поверхня відгуку?
3. Куди веде шлях по “градієнту”?
4. Система кодування факторів.
5. Як складаються матриці ПФЕ?
6. Змішування ефектів і витрата інформації.
7. Складання дробових реплік.
8. Що таке генеруюче співвідношення і визначаючий контраст?
9. Ортогональні та ротатбельні плани другого порядку.
10. Симплексне-решітчасте планування нелінійних експериментів.

2.4 Проведення активного експерименту

Під час проведення установочної сесії вивчення теми займає 2 години і 9 годин необхідно для самостійного вивчення теми.

Зміст робочої програми теми

Планування експерименту з метою опису досліджуваного об'єкту. Оптимізація технологічних процесів з використанням планування експерименту.

Рандомізація. Визначення помилки експерименту. Оцінювання статистичної значущості коефіцієнтів регресії і визначення надійного інтервалу. Перевірка адекватності моделі за допомогою критерію Фішера.

Метод руху по градієнту чи “крутого сходу”. Принцип методу. Розрахунок серії досвідів під час руху по градієнту. Скорочування кроків на кожному етапі “крутого сходу”. Опис області оптимуму.

Стратегія активного експерименту і застосування його результатів у ливарному виробництві.

Методичні вказівки щодо вивчення теми

Під час вивчення даної теми особливу увагу треба звернути на методи проведення активного експерименту на усіх його етапах. Треба засвоїти методи рандомізації і визначення помилки експерименту, скорочення незначущих коефіцієнтів регресії і фіксування відповідних змінних. Необхідно навчитися перевіряти адекватність моделі за допомогою спеціальних критеріїв. Навчитись скорочувати кроки під час руху по градієнту. Освоїти методи опису області оптимуму. Треба навчитись визначати стратегію планування експерименту на усіх його етапах. З метою освоєння стратегії проведення активного експерименту необхідно виконати окреме розрахункове завдання з переліку, який приведений у методичних вказівках до четвертого практичного заняття.

Це розрахункове завдання є головною частиною контрольної роботи [1, с.149-164; 2, с. 114-122; 3, с. 17-59].

Запитання для самоперевірки

1. Переваги планування експерименту.
2. Для чого потрібна рандомізація?
3. Скільки проб проводиться на основному рівні?
4. Що таке надійний інтервал коефіцієнтів регресії?
5. Варіанти адекватності моделі.
6. Що таке “крутий схід” по поверхні відгуку?
7. Уявлення про шлях по градієнту в умовах багатofакторного експерименту.
8. Як описується область оптимуму?
9. Що є стратегією активного експерименту?
10. Як використовувати критерії Стюдента і Фішера.

2.5 Встановлення виду залежності між двома перемінними величинами

Під час проведення установочної сесії вивчення теми займає 2 години і 9 годин необхідно для самостійного вивчення теми. Виконання, на основі засвоєння зазначених тем, контрольної роботи.

Зміст робочої програми теми

Іноді необхідно виявити вид залежності між двома перемінними величинами, яка може бути функціональною або стохастичною.

Функціонально та стохастично залежні величини.

Частковий випадок стохастичної залежності. Кореляційна залежність. Коефіцієнт кореляції.

Вирівнювання емпіричних даних. Обчислення основної помилки.

Визначення параболі нульового ступеня, параболі першого, другого й третього порядку.

Стратегія активного експерименту і застосування його результатів у ливарному виробництві.

Методичні вказівки щодо вивчення теми

Під час вивчення даної теми особливу увагу треба звернути на встановлення виду залежності між двома перемінними величинами. Необхідно навчитися проводити експеримент таким чином, щоб для кожного значення однієї ознаки визначити значення другої ознаки.

Навчитись за отриманими даними будувати графік залежності між величинами.

З метою освоєння стратегії проведення активного експерименту необхідно одержану ламану лінію вирівняти за найбільш близькою до неї теоретичної кривої.

3 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

НДР і первинна обробка результатів експерименту (має відношення до першої теми дисципліни; складається з основних теоретичних положень рішення типових задач і виконання окремого завдання).

Кореляційний аналіз (теоретично і практично охоплює другу тему дисципліни і закінчується виконанням окремого завдання кожним студентом).

ПФЕ і ДФЕ (має відношення до третьої теми дисципліни; складається з теорії питання, рішення типових задач і виконання окремого завдання методом ДФЕ).

Шлях по градієнту (має відношення до четвертої теми дисципліни; теоретично і практично описує першу частину активного експерименту крутий схід по поверхні відгуку; практичне рішення типової задачі є основною частиною контрольної роботи).

4 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

4.1 НДР і первинна обробка результатів експерименту

Мета заняття – освоїти методи первинної обробки результатів пасивного експерименту. Внаслідок проведення практичного заняття студенти повинні:

- знати структуру НДР в галузі ливарного виробництва; методи пошуків первинної і вторинної інформації і методи первинної обробки результатів експерименту;

- уміти будувати лінійні і нелінійні моделі за результатами пасивних експериментів.

Основні теоретичні положення

НАУКА є системою знань про закони розвитку природи і суспільства. Вона є також результатом тривалого розвитку пізнавальної діяльності людства, спрямованої на перетворення об'єктивного світу.

Предметом кожної окремої науки є певна форма руху матерії або сукупність цих форм. Тому всі галузі знань поділяються на такі групи наук: суспільні та природні. До суспільних наук мають відношення філософія, політологія, історія, право, мово-, літературо- та мистецтвознавство, логіка, психологія тощо. З природничими науками тісно пов'язані технічні, які вивчають та визначають закономірності, розвитку техніки і способи найефективнішого їх використання.

Науково-технічна революція, початком якої вважається серединна ХХ століття, визначила бурхливий етап розвитку технічних наук. Він характеризується тим, що технічні науки стають визначальним фактором розвитку виробництва. Активний центр системи “наука-технологія-виробництво” зміщується на стик науки і технології. Для постійного оновлення і вдосконалення технологічних процесів і конструкцій машин треба проводити наукові дослідження.

ДОСЛІД чи ЕКСПЕРИМЕНТ – форма пізнання об'єктивної дійсності, один із основних методів наукового дослідження, в якому вивчення явищ відбувається за допомогою доцільно вибраних або штучно створених умов, що забезпечують появу тих процесів,

спостереження яких необхідне для встановлення закономірних зв'язків між явищами.

Дослід має велике значення в розвитку наукового знання. Він дає можливість втручатися в досліджуване явище, спрямовувати його в певне русло, повторювати його необхідну кількість разів і т.д.

Виникаючи на основі певних теоретичних побудов, дослід є засобом доведення їхньої істинності і, разом з тим, основою виникнення нових теоретичних положень, джерелом дальшого розвитку наукового пізнання.

Неоціненне значення дослід має для виробничої діяльності, де він виступає як виробничий експеримент.

ЛИВАРНЕ ВИРОБНИЦТВО має такі головні напрями наукових досліджень:

- розробка нових технологічних процесів і конструкції обладнання;
- удосконалення сучасних технологічних процесів і конструкції обладнання;
- механізація і автоматизація: ливарного виробництва;
- створення спеціалізованих ливарних виробництв;
- створення нових ливарних сплавів;
- удосконалення процесів комплексного легування і модифікування ливарних сплавів.

Дослідження проводяться методами пасивного чи активного експерименту.

ЕТАПИ ПДР:

- визначення мети і можливих шляхів її досягнення; розробки технічного завдання, плану і програми досліджень;
- попередній аналіз науково-технічної інформації; установлення характеру задач, що вирішуються;
- спорудження лабораторної установки і впровадження на неї досліджень чи впровадження лабораторних досліджень за допомогою обладнання наукового підрозділу;
- аналіз лабораторних досліджень і додаткової наукової інформації; розробка робочої гіпотези і вибір технічних, рішень, для будівництва дослідно-промислової установки;
- спорудження дослідно-промислової установки і впровадження на неї досліджень чи впровадження напівпромислових досліджень за допомогою обладнання наукового підрозділу;

- узагальнення даних дослідно-промислових досліджень; уточнювання; попередніх теоретичних положень і знаходження головних теоретичних рішень для будівництва, промислових установок та цехів;

- будівництво промислових установок, відпрацювання технології процесу і дороблення конструкцій обладнання чи віртуалізація конструктивних рішень за допомогою комп'ютерного обладнання наукового підрозділу;

- розробка остаточної теорії запитання чи її уточнення;

- вдосконалення технології процесу, конструкцій обладнання (в тому числі і за допомогою комп'ютерного моделювання) з метою підвищення їх продуктивності і поліпшення якості продукції на основі виробленої теорії;

Таким чином НДР починається з пошуків і обробки наукової інформації.

ІНФОРМАЦІЯ – відомості про які-небудь події, ситуації, чиясь діяльність тощо. Наукова інформація закріплюється в наукових документах двох видів: опублікованих і неопублікованих.

ОПУБЛІКОВАНІ ДОКУМЕНТИ: журнали, бюлетені, державні стандарти, описи винаходів, книги, монографії, збірники наукових праць, довідкова література тощо.

НЕОПУБЛІКОВАНІ ДОКУМЕНТИ: звіти про НДР, дисертації, алгоритми тощо.

Наукова інформація може бути первинною і вторинною.

ПЕРВИННА ІНФОРМАЦІЯ міститься в наукових журналах, збірниках наукових праць, монографіях, звітах про НДР, дисертаціях тощо.

ВТОРИННА ІНФОРМАЦІЯ міститься в енциклопедіях; довідниках, реферативних журналах тощо.

Для систематизації наукових джерел в реферативних журналах типу “Машинобудування” використовується **УНІВЕРСАЛЬНА ДЕСЯТКОВА КЛАСИФІКАЦІЯ (УДК)**, де сукупність знань умовно розділяється на 10 відділів. Прикладні науки відносяться до 6-го відділу. Відділ розділяється на 10 підвідділів, підвідділ – на 10 рубрик і т.д. 10-12 цифр індексують будь-яке поняття.

ПРИКЛАД № 4.1

Індекс УДК:	Поняття:
621	литво
621.74	ливарне виробництво
621.74.04	спеціальні види лиття
621.74.06	обладнання ливарного виробництва
621.744	формування
621.745	плавка
621.746	розливка
621.747	очистка і обробка литва
621.74.043	лиття кокільне і т.д.

Патентні документи систематизуються по МІЖНАРОДНІЙ КЛАСИФІКАЦІЇ ВІНАХОДІВ (МКВ), де уся сукупність знань умовно розділяється на 8 відділів буквами від А до Н. Відділи розділяються на класи – цифрами від 01 до 99. Класи розділяються на підкласи – латинськими буквами від А до Н. Підкласи розділяються на групи та підгрупи, при цьому цифри груп і підгруп розділяються косою рисою.

ПРИКЛАД № 4.2

Індекс МКВ:	Поняття:
С 21 С 5/04	одержання сталі в полум'яних печах
С 21 С 5/28	одержання сталі в конверторах
С 21 С 5752	одержання сталі в електричних печах
В 22 Д 7/00	відливка зливків
В 22 Д 11/00	безперервне лиття металів

Для пошуків індексів є “Алфавітно-предметні показники УДК та МКВ”.

Реферативні журнали відображають вже опубліковану інформацію у виді рефератів текстів наукових журналів, бюлетенів, збірників наукових праць та інших засобів первинної інформації.

Основними формами роботи з науково-технічною літературою є конспектування, аналізування її узагальнення. На картках розміщуються анотації, а у зошитах – докладні виписки.

Внаслідок аналізу науково-технічної літератури складається огляд, тобто стиснений виклад первинної інформації до даній проблеми з рекомендаціями для проведення подальших досліджень.

Лабораторно-промислові дослідження можуть виконуватись методами: активного експерименту, комп'ютерного моделювання і пасивного експерименту, тобто методами спостереження і статистичної обробки промислових даних.

СТАТИЧНА ОБРОБКА починається з систематизації, тобто з розміщення даних в таблицях або на окремих картках. Потім для наочності будуються графіки залежностей досліджуваних функцій. При цьому проводиться підбір емпіричних формул залежностей, знайдених на графіках.

Функції і аргументи вибирають на основі відомих залежностей між досліджуваними величинами або на основі умов експерименту. На осі абсцис відкладають аргумент, а на осі ординат – функцію. Допускають різні масштаби шкал по осям. Шкала не обов'язково повинна починатися з нуля: як початок відклику можна використовувати одне з граничних значень фактору.

Вісі графіка можуть мати лінійну шкалу або логарифмічну – відповідно до характеру залежності. На одному графіку можна розміщати декілька взаємозв'язаних залежностей.

Розрізняють емпіричні і теоретичні лінійні залежності чи регресії. Ламана лінія, проведена через експериментальні точки на графіку, називається ЕМПІРИЧНОЮ ЛІНІЄЮ РЕГРЕСІЇ. Граничну форму, до якої вона прагне при необмеженому збільшенні кількості спостережень (експериментальних точок), називають ТЕОРЕТИЧНОЮ ЛІНІЄЮ РЕГРЕСІЇ – перехід від складного до простого (рис 4.1).

Найкраще для виявлення експериментальних залежностей вибирати емпіричні формули по графікам, які дозволяють легко виявляти параметри лінійної залежності виду:

$$y=b_0+b_1x \quad (4.1)$$

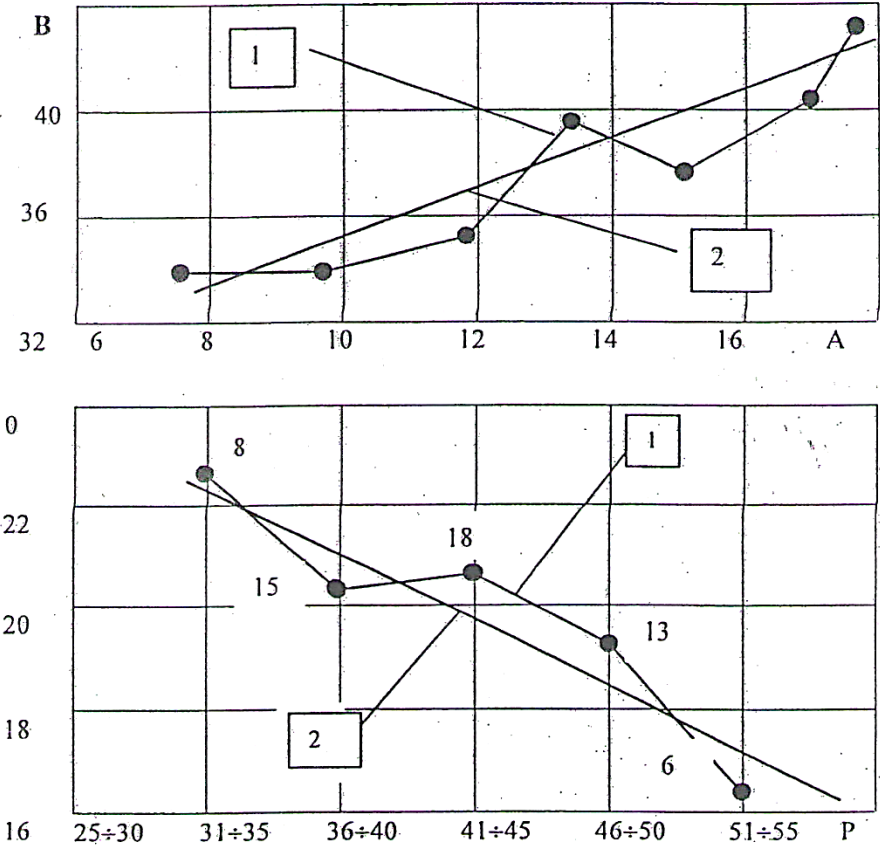
де b_0 – значення функції при нульовому аргументі, тобто при $x=0$ маємо $y=b_0$ (рис. 4.2, а);

b_1 – тангенс нахилу прямої лінії регресії до осі абсцис, який розраховується по координатам двох точок тобто коли $b_0=0$, то $y=b_1x$ чи $b_1=y/x$.

Тоді

$$b_1 = \operatorname{tg} \alpha = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \quad (4.2)$$

Точність рівняння за формулою (4.1) залежить від того, наскільки побудована пряма залежність близька до експериментальних точок.

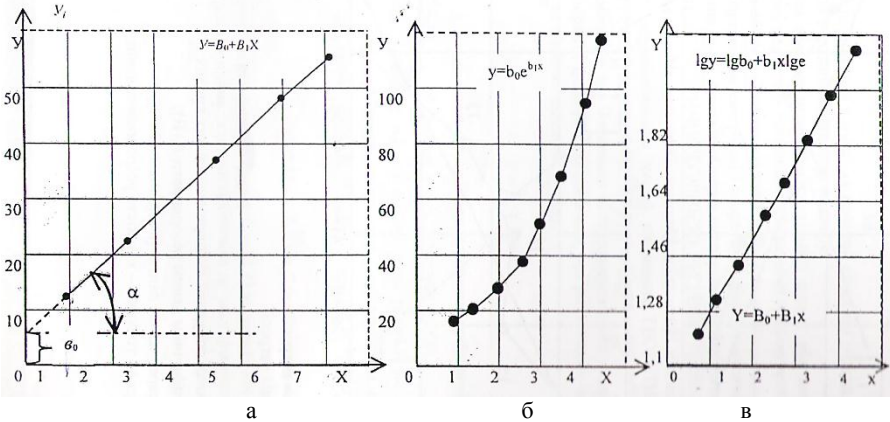


1 – Емпірична лінія регресії; 2 – Теоретична лінія регресії.

Координати Р–О – по усередненим даним;

цифри поряд з точками – кількість усереднених даних

Рисунок 4.1 – Приклад побудови експериментальних кривих по одиничним даним (координати А–В)



а – графік прямої лінійної залежності; б – графік криволінійної залежності;
в – криволінійна залежність в спрямованому виді після логарифмування

Рисунок 4.2 – Графіки до прикладів № 4.3 та 4.4

ПРИКЛАД № 4.3

Дібрати емпіричну формулу таких вимірювань

x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

y : 12,1; 19,2; 25,9; 33,2; 40,5; 46,4; 54,0.

Будуємо графік у координатах: $x(0-8) - y(0-60)$ (рис. 4.2, а).

Одержуємо пряму лінійну залежність, якій відповідає рівняння (4.1).

Вибираємо координати крайніх точок і підставляємо до рівняння:

$$\begin{cases} 54,2 = b_0 + b_1 \cdot 7; \\ 12,1 = b_0 + b_1 \cdot 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь і одержуємо:

$$41,9 = b_1 \cdot 6;$$

$$12,1 = b_0 = 6,98 \cdot 1;$$

$$b_1 = 6,98;$$

$$b_0 = 5,12.$$

Тоді емпірична формула приймає вид:

$$y = 5,12 + 6,98x$$

Підставляємо значення " x " і одержуємо розрахункові значення " Y_p ":

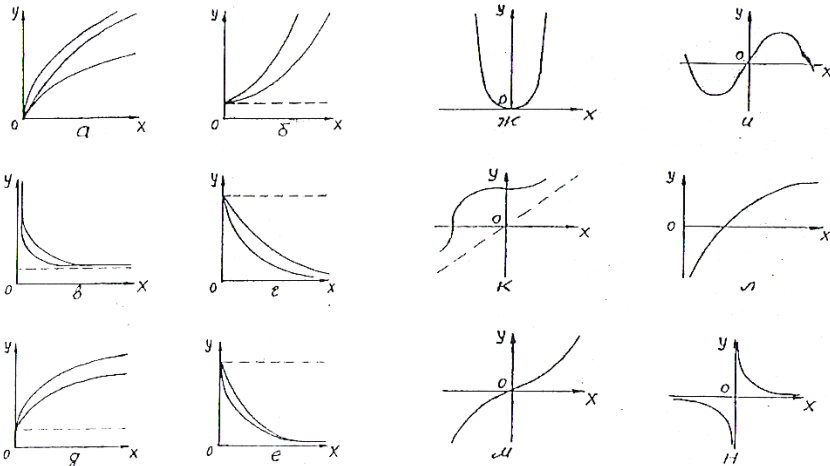
$$Y_p = 12,1; 25,06; 40,02; 47,02; 54,0.$$

Залежність значень “у” і “Y_p” свідчить про достовірність отриманого рівняння.

В багатьох випадках зустрічаються залежності, більш складні, ніж прямолінійні. Їх можна привести до лінійної форми методом ВИРІВНЮВАННЯ і, таким чином, знайти необхідні параметри. Тип емпіричної формули встановлюють за виглядом кривої залежності на графіку. З декілька формул вибирають ту, яка найповніше описує дослідні дані і відповідає теоретичній моделі процесу.

Коли експериментальний графік має вид рис. 4.3, а, то необхідно застосувати формулу опуклої функції:

$$y = b_0 x^{h_1} \quad (4.3)$$



$$\begin{aligned} \text{а} - y &= b_0 x^{h_1}; & \text{б} - y &= b_0 e^{h_1 x}; \\ \text{в} - y &= b_0 + b_1/x; & \text{г} - y &= b_0 x^{h_1} + c; \\ \text{д} - y &= b_0 e^{h_1 x} + c; & \text{е} - y &= 1/(b_0 + b_1 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж} - y &= x^2; & \text{и} - y &= \sin x; & \text{к} - y &= \sqrt{x^3 + 2}; \\ \text{л} - y &= x + 2 \ln x; & \text{м} - y &= x^3; & \text{н} - y &= 1/x \end{aligned}$$

Рисунок 4.3 – Графіки і рівняння криволінійних залежностей [5]

Для вирівнювання кривої лінії зробимо заміни:

$$Y = \lg y; \quad (4.4)$$

$$X = \lg x; \quad (4.5)$$

$$B_0 = \lg b_0. \quad (4.6)$$

Тоді одержуємо прямолінійну залежність на логарифмічній сітці, яка відповідає рівнянню 4.1:

$$Y = B_0 + b_1 X$$

Також, за допомогою логарифмування чи простого кодування, криволінійні залежності будь-якого виду можна привести до лінійної форми і визначити за допомогою “Програми для знаходження локального максимуму багатовимірної функції на комп’ютерній мові “БЕЙСІК” (додаток А).

ПРИКЛАД № 4.4

Дібрати емпіричну формулу таких вимірювань:

$$x : 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5.$$

$$y : 15,2; 20,6; 27,4; 36,7; 49,2; 66,0; 87,4; 117,5.$$

Будуємо графік в координатах: $x(0-5)$ – $y(10-120)$ (рис. 4.26). Одержуємо криволінійну залежність, якої відповідає рівняння на рис. 4.3:

$$y = b_0 e^{h_1 x} \quad (4.7)$$

зробимо заміни:

$$Y = \lg y; \quad (4.8)$$

$$B_0 = \lg b_0; \quad (4.9)$$

$$M = \lg e \quad (4.10)$$

Тоді одержуємо прямолінійну залежність на напівлогарифмічній сітці:

$$Y = B_0 + b_1 M_x \quad (4.11)$$

Перетворюємо початкові вимірювання згідно рівнянню (4.8):

$$Y(\lg y) = 1,182; 1,31; 1,44; 1,56; 1,69; 1,82; 1,94; 2,07.$$

Будуємо графік y напівлогарифмічних координатах: $x(0-5)$ - $Y(1,1-2,1)$ (рис. 4.2, в). Одержуємо прямолінійну залежність типу (4.11). Вибираємо координати крайніх точок і підставляємо їх до рівняння (4.1):

$$\begin{cases} 1,182 = B_0 + b_1 M \cdot 1,0 \\ 2,070 = B_0 + b_1 M \cdot 4,5 \end{cases}$$

Розв’язуємо систему рівнянь і одержуємо:

$$0,888 = b_1 M \cdot 3,5; \quad b_1 = 0,888 / M \cdot 3,5$$

При $M = 0,43429$ одержуємо $b_1 = 0,584$

$1,182 = B_0 + 0,584 \cdot 0,43429 \cdot 1,0$; $B_0 = 0,93 = \lg b_0$ (рівняння 4.9); тоді $b_0 = 8,511$.

Тоді емпірична формула приймає вид:

$$y = 8,511 e^{0,584x}$$

Хід практичних занять

Кожний студент виконує індивідуальне завдання (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Завдання для вибору емпіричної формули з рівняння 4.7

№№ зав-дань	Значення функції у згідно з № завдання при значенні аргументу x							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7,6	10,3	13,7	18,3	24,6	33,0	43,7	58,7
2	4,6	7,3	10,7	15,3	21,6	30,0	40,7	55,7
3	3,8	5,1	6,9	8,2	12,3	16,5	21,8	29,4
4	6,8	8,1	9,9	11,2	15,3	19,5	24,8	32,4
5	0,4	0,5	0,7	0,8	1,2	1,7	2,2	3,0
6	3,4	3,5	3,7	3,8	4,2	4,7	5,2	6,0
7	8,0	10,1	13,0	18,0	24,8	33,0	44,0	59,0
8	11,5	13,6	16,5	21,5	28,3	36,5	47,5	62,5
9	16,0	21,4	28,2	37,5	50,0	66,8	88,2	118,3
10	9,6	12,3	15,7	20,3	26,6	35,0	45,7	60,7
11	5,8	7,1	8,9	10,2	14,3	18,5	23,8	31,4
12	1,4	1,5	1,7	1,8	2,2	2,7	3,2	4,0
13	14,6	20,0	26,8	36,1	48,6	65,4	86,8	116,9
14	9,1	11,8	15,2	19,8	26,1	34,5	45,2	60,2
15	4,0	6,7	10,1	14,7	21,0	29,4	40,1	55,1
16	6,5	7,8	9,6	10,9	15,0	19,2	24,5	32,1
17	3,7	3,8	4,0	4,1	4,5	5,0	5,5	6,3
18	11,0	13,1	16,0	21,0	27,8	36,0	47,0	62,0
19	15,0	20,4	27,2	36,5	49,0	65,8	87,2	117,3
20	14,2	19,6	26,4	35,7	48,2	65,0	86,4	116,5
21	2,8	4,1	5,9	7,2	11,3	15,5	20,8	28,4
22	0,9	1,0	1,2	1,3	1,7	2,2	2,7	3,5
23	3,0	5,1	8,0	13,0	19,8	28,0	39,0	54,0
24	7,6	10,3	13,7	18,3	24,6	33,0	43,7	58,7
25	5,4	5,5	5,7	5,8	6,2	6,7	7,2	8,0
26	9,6	12,3	15,7	20,3	26,6	35,0	45,7	60,7
27	10,8	12,1	13,9	15,2	19,3	23,5	28,8	36,4
28	1,8	3,1	4,9	6,2	10,3	14,5	19,8	27,4
29	13,4	13,5	13,7	13,8	14,2	14,7	15,2	16,0
30	115,0	136,0	165,0	215,0	283,0	365,0	475,0	625,0

4.2 Кореляційний аналіз

Мета заняття – освоїти метод лінійної кореляції між двома факторами.

Внаслідок проведення практичного заняття студенти повинні:

- знати теорію методів регресійного, дисперсійного і кореляційного аналізів залежностей першого, другого та інших порядків;

- уміти знайти достовірне рівняння методом парної кореляції.

Основні теоретичні положення

При графічному підборі емпіричних залежностей характерними точками є граничні і середні значення. Відповідність одержаної залежності всьому масиву дослідних даних перевіряється по величині їх відхилення від розрахункових значень у всьому діапазоні вимірювань. Найкращі параметри емпіричних рівнянь визначаються МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК).

$$I = (x_{\max} - x_{\min}) / (1 + 3,322 \ln n); \quad (4.12)$$

де n – кількість експериментальних даних. В межах кожного інтервалу підраховують кількість точок, яку і позначають на графіку (рис. 4.1, координати Р – 0).

Суть МНК міститься в тому, що сума квадратів відхилів дослідних даних від шуканої лінії регресії повинна бути мінімальною. Середній квадрат цих відхилів, тобто дисперсія (D^2), визначається з формули:

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n; \quad (4.13)$$

де $\bar{x}$ – середнє значення аргументу;

D – середньоквадратичний відхил.

МНК є основою теорії кореляції. КОРЕЛЯЦІЯ в перекладі з латинської означає співвідношення понять, предметів, функцій. Кореляція в математичній статистиці – певна залежність між випадковими величинами, яка передається рівняннями першого, другого і більш високого ступеня. Коефіцієнти регресії між “у” і “х” визначаються такими формулами:

$$b_1 = [n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i] / [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]; \quad (4.14)$$

$$b_0 = [\sum y_i / n] - [b_1 \sum x_i / n] \quad (4.15)$$

Мірою закономірних, тобто СТОХАСТИЧНИХ, коливань “у” від “х” є КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ “r”:

$$r = [n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i] / \{ [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2] \}^{0.5} \quad (4.16)$$

де значення коефіцієнта кореляції знаходиться у межах:

$$-1 \leq r \leq +1 \quad (4.17)$$

Закономірність кореляційного зв'язку між “у” і “х” перевіряється по критерію Стюдента (t) (табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Деякі значення t-критерію (Стюдента)

f	α			f	α		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,31	12,7	63,66	6	1,94	2,45	3,71
2	2,92	4,5	9,93	7	1,9	2,37	3,5
3	2,35	3,18	5,84	8	1,86	2,31	3,36
4	2,13	2,78	4,6	9	1,83	2,26	3,25
5	2,02	2,57	4,03	10	1,81	2,23	3,17

$$t = \frac{|r| * n^{0.5}}{1-r^2} \quad (4.18)$$

Якщо $t_{\text{роз}} > t_{\alpha}^f$,

то “r” – значущий;

де $t_{\text{роз}}$ і t_{α}^f – розрахунковий і табличний критерії;

α – рівень значущості у табл. 4.2;

f – число ступенів волі, яке в даному випадку є:

$$f = n \quad (4.20)$$

Повне значення коефіцієнта кореляції знаходиться, як

$$r \pm \alpha \quad (4.21)$$

$$\text{чи } r \pm D_r; \quad (4.22)$$

де

$$D_r = \frac{1-r^2}{n} \quad (4.23)$$

ПРИКЛАД № 4.5

Дібрати емпіричну формулу для вихідних даних з прикладу № 4.3 методом кореляційного аналізу.

Складаємо кореляційну табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Кореляційна обробка вихідних даних

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	12,1	1	146,41	12,1	5	40,5	25	1640,25	202,5
2	19,2	4	368,64	38,4	6	46,4	36	2152,96	278,4
3	25,9	9	670,81	77,7	7	54,0	49	2916,00	378,0
4	33,2	6	1102,24	132,8	$\Sigma=28$	$=231,3$	$=140$	$=8997,31$	$=1119,9$

З рівняння (4.14-4.16 і 4.18) одержуємо значення коефіцієнтів лінійної регресії (b_1 і b_0), кореляції (r) і критерію Стюдента (t):

$$b_1 = \frac{7 \cdot 1119,9 - 28 \cdot 231,3}{7 \cdot 140 - 28^2} = 6,95;$$

$$b_0 = \frac{231,3}{7} - 6,95 \cdot \frac{28}{7} = 5,23;$$

$$r = \frac{7 \cdot 1119,9 - 28 \cdot 231,3}{[(7 \cdot 140 - 28^2)(7 \cdot 8997,31 - 231,3^2)]} = 0,999;$$

$$t = \frac{0,999 \cdot 7^{0,5}}{1 - 0,999^2} = 5625,54.$$

З рівняння (4.20) одержуємо значення числа ступенів волі (f):

$$f = 7.$$

$$\begin{cases} y = 5,12 + 6,98x \\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

$$y = 12,1; 19,2; 25,9; 33,2; 40,5; 46,4; 54,0$$

З таблиці 4.2 одержуємо значення критерію Стюдента при $f = 7$ і $\alpha = 0,01$:

$$t_{0,01}^7 = 3,5$$

Порівнюємо розрахункове і табличне значення t – критерію:

$$t_{\text{роз}}(5625,54) > t_{\text{табл}}(3,5)$$

Відповідно рівнянням (4.19 і 4.21) виводимо, що

$$r = + 0,999 \pm 0,01$$

є величиною значущою, що дозволяє зробити висновок:

розрахунково-кореляційна модель є певною моделлю процесу взаємодій даних “х” і “у”. Порівнюємо результати первинної (приклад 4.3) і кореляційної обробки (приклад 4.5) експериментальних даних:

$$\begin{aligned} y &= 12,1; 19,2; 25,3; 33,2; 40,5; 46,4; 54,0; \\ y_p &= 12,1; 19,08; 25,06; 33,04; 40,02; 47,02; 47,0; 54,0; \\ y_p^k &= 12,18; 19,13; 26,08; 33,03; 39,984; 46,93; 53,88. \end{aligned}$$

$$y_p^k = 5,23 + 6,95x \quad \text{при} \quad r = +0,999 \pm 0,01$$

Визначимо дисперсії для первинної і кореляційної моделей – згідно з рівнянням (4.13):

$$D_n^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y}_n)^2}{n} = [(12,1 - 12,1)^2 + (19,2 - 19,08)^2 + (25,9 - 25,06)^2 + (33,2 - 33,04)^2 + (40,5 - 40,02)^2 + (46,4 - 47)^2 + (54 - 54)^2] / 7 = 0,1894;$$

$$D_k^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y}_k)^2}{n} = [(12,1 - 12,18)^2 + (19,2 - 19,13)^2 + (25,9 - 26,08)^2 + (33,2 - 33,03)^2 + (40,5 - 39,98)^2 + (46,4 - 46,93)^2 + (54 - 53,88)^2] / 7 = 0,0898.$$

Таким чином дисперсія кореляційної моделі менше дисперсії первинної моделі:

$$D_k^2(0,0898) < D_n^2(0,1894),$$

що також підтверджує статистичну значущість кореляційної моделі.

Для обробки великого масиву Даних (більш 100 одиниць) застосовується, як правило, “Програма кореляційно-регресійного аналізу на комп’ютерній мові “БЕЙСІК В CORREG” (додаток Б).

Багатофакторними взаємодіями займається множинна кореляція за допомогою ЕОМ ЄС в ОЦ ЗДТУ за програмами: “Множинна лінійна регресія” і “Коркова регресія”.

Переважає більшість алгоритмів математичної статистики знаходиться у пакетах прикладних програм “робочого місця”

інженера. Наприклад “Графічний Інтерпретатор Даних” (GID) дозволяє в діалоговому режимі вивчати будь-які математичні залежності з графічними інтерпретаціями і одержанням необхідних формул, в тому числі в тривимірному просторі. Пакет “AUTOCAD” дозволяє працювати у багатоекранному режимі і одержувати складні математичні моделі, в тому числі для ливарних процесів. Робота з прикладними програмами провадиться у комп’ютерному класі кафедри.

Хід практичних занять

Кожний студент виконує індивідуальне завдання по добиранню емпіричних формул методами первинної (приклад 4.3) і кореляційної (приклад 4.5) обробки експериментальних даних (табл. 4.4).

Таблиця 4.4 – Завдання добору емпіричних формул

№№ зав-дань	Значення функції (y) при значенні аргументу (x)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	8	12	24	29	40	45	56	60
2	10	14	26	31	42	47	58	62
3	10	19	25	37	44	53	58	69
4	15	19	31	36	47	52	63	67
5	15	24	30	41	48	57	62	73
6	16	22	34	39	50	55	66	70
7	16	25	31	42	49	58	63	74
8	18	22	34	39	50	55	66	70
9	18	25	31	42	49	59	63	74
10	19	21	35	38	51	54	67	69
11	20	24	36	41	52	57	68	72
12	7	11	23	28	39	44	55	59
13	9	13	25	30	41	46	57	61
14	11	20	26	38	45	54	59	70
15	14	18	30	35	46	51	62	66
16	95	86	78	64	56	43	35	22
17	96	87	79	65	57	44	36	21
18	96	85	79	63	57	42	36	21

Продовження табл. 4.4

№№ зав-дань	Значення функції (y) при значенні аргументу (x)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
19	98	89	74	66	54	45	33	20
20	99	90	82	68	60	47	39	26
21	100	90	75	65	55	45	35	20
22	108	89	84	76	64	55	43	30
23	195	186	178	164	156	143	135	122
24	125	116	108	94	86	73	65	52
25	130	121	113	99	91	78	70	57
26	139	130	122	108	100	87	79	66
27	190	181	173	159	151	138	130	117
28	118	109	94	86	74	65	53	40
29	99	89	74	64	54	44	34	19
30	150	141	133	119	111	98	90	77

4.3 ПФЕ і ДФЕ

Мета заняття освоїти методи повного і дробового факторних експериментів (ПФЕ і ДФЕ).

Внаслідок проведення практичного заняття студенти повинні:

- знати теорію активного експерименту;
- уміти побудувати Матриці ПФЕ і ДФЕ і розрахувати моделі першого і другого порядків.

Основні теоретичні положення

Методи первинної і кореляційної обробки дослідних даних мають відношення до ПАСИВНОГО експерименту.

АКТИВНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ передбачає планування дослідів і використання статистичних методів на усіх його етапах: до постановки дослідів, під час процесу, після експерименту – з метою мінімізації кількості дослідів при максимізації їх результатів.

У двофакторному експерименті множини значень функції оптимізації можна подати у вигляді поверхні “горба” зі зглажуваною вершиною (рис. 4.4), тобто поверхні відгуку з точкою оптимуму.

Процес оптимізації складається з двох етапів: досягнення найкоротшим шляхом “майже стаціонарної області” і її опису. Перший етап, як правило є описом лінійної і моделі і тоді він називається ШЛЯХОМ ПО ГРАДІЄНТУ чи КРУТИМ СХОДОМ.

На першому етапі варіюють усіма факторами і будують таку лінійну модель:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_k x_k \quad (4.24)$$

Аналіз цього рівняння дає напрям руху із вихідної точки. На шляху по градієнту може бути декілька зупинок, де відповідно результатів попередніх дослідів ставиться невелика серія експериментів, яка визначає наступний крок. Область оптимуму, на другому етапі, описують нелінійною функцією:

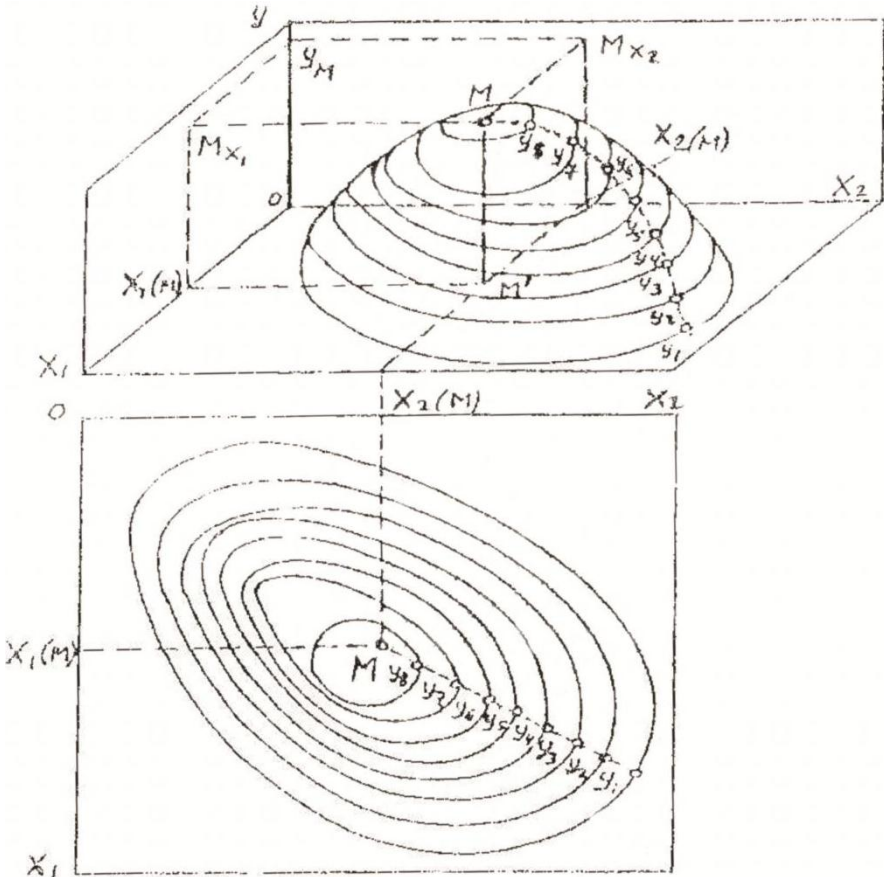
$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_k x_k + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \dots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + \dots + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{kk}x_k^2 \quad (4.25)$$

Від моделі переходимо до складання плану експерименту. Припустимо, що варіюються два фактори: x_1 і x_2 . Кожний фактор має два рівня: $+1$ і -1 , або скорочено: “+” і “-”. Тоді усі комбінації факторів вичерпаються у 4-х опитах (табл. 4.5):

Таблиця 4.5 – Матриця планування експерименту 2^2

№ проби	x_1	x_2	y
1	+	+	y_1
2	—	+	y_2
3	+	—	y_3
4	—	—	y_4

В цій таблиці-матриці рядки відповідають різним пробам, а стовпці – значенням факторів. В першій пробі обидва фактора знаходяться на верхньому рівні. В другій пробі: фактор “ x_1 ” знаходиться на нижньому рівні; а фактор “ x_2 ” – на верхньому рівні і т.д. Такі таблиці називаються МАТРИЦЯМИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.



y_1 - y_7 – ізолінії рівного виходу функції $y = f(x_1, x_2)$; M – точка оптимуму;
 (від рівня y_1 до рівня y_7 – шлях по градієнту;
 від рівня y_7 до точки M – шлях в області оптимуму).
 Рисунок 4.4 – Геометричне зображення поверхні відгуку (“горба” – параболоїда)
 при двофакторному експерименті

Експеримент, в якому реалізовані усі: можливі комбінації рівнів факторів, називається **ПОВНИМ ФАКТОРНИМ ЕКСПЕРИМЕНТОМ (ПФЕ)**. Число проб ПФЕ – n визначається з формули:

$$n = P^k; \quad (4.26)$$

де P – число рівнів кожного фактору;

k – число аргументів.

Матриця ПФЕ для двох рівнів ($P=2$) і “ k ” факторів добудовується із матриці 2^2 (з табл. 4.5) таким чином: донизу повторюється матриця 2^2 , а праворуч – послідовно подвоюється число знаків “+” і “-”. Таким, чином, стовпець для x_3 – з чотирьох знаків “+” і чотирьох знаків “-”, стовпець для “ x_3 ” – з восьми знаків “+” і восьми знаків “-” і т.д. (табл. 4.6).

Таблиця 4.6 – Матриця ПФЕ від 2^2 до 2^4

Плани	№ проби	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
2^4 2^3 2^2	1	+	+	+	+	+	y_1
	2	+	-	+	+	+	y_2
	3	+	+	-	+	+	y_3
	4	+	-	-	+	+	y_4
	5	+	+	+	-	+	y_5
	6	+	-	+	-	+	y_6
	7	+	+	-	-	+	y_7
	8	+	-	-	-	+	y_8
	9	+	+	+	+	-	y_9
	10	+	-	+	+	-	y_{10}
	11	+	+	-	+	-	y_{11}
	12	+	-	-	+	-	y_{12}
	13	+	+	+	-	-	y_{13}
	14	+	-	+	-	-	y_{14}
	15	+	+	-	-	-	y_{15}
	16	+	-	-	-	-	y_{16}

В цій таблиці доданий стовпець для фактора “ x_0 ”. Це пояснюється такими міркуваннями:

- за МНК (метод найменших квадратів) кожний коефіцієнт лінійної регресії визначається незалежно один від одного за формулою:

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^n x_{i_u} y_u}{n}, \quad (4.27)$$

де n – загальне число проб;

u – № проби;

i – № аргументу.

- в загальному виді лінійна модель має форму:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i; \quad (4.28)$$

- для розрахунку коефіцієнта “ b_0 ” необхідно мати хоча б фіктивну змінну “ x_0 ” яка у всіх пробах має значення “+1” чи “+”; тому й доданий стовпець для “ x_0 ” у табл. 4.6.

Тоді матриця планування експерименту 2^2 (табл. 4.5) реалізується через таке рівняння:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad \text{чи} \quad b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (4.29)$$

Коефіцієнти регресії цього рівняння визначаються за формулою (4.27):

$$b_0 = \frac{[(+)y_1 + (+)y_2 + (+)y_3 + (+)y_4]}{4} = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{4}; \quad (4.30)$$

$$b_1 = \frac{[(+)y_1 + (-)y_2 + (+)y_3 + (-)y_4]}{4} = \frac{(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)}{4}; \quad (4.31)$$

$$b_2 = \frac{[(+)y_1 + (+)y_2 + (-)y_3 + (-)y_4]}{4} = \frac{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}{4}. \quad (4.32)$$

Таким чином, для розрахунку будь-якого коефіцієнта лінійної регресії “ b_i ” треба числам стовпця “ y ” приписати знаки відповідного стовпця “ x_i ”, потім – скласти нові значення “ y_i ”, а результат поділити на число проб матриці планування. Величина коефіцієнта регресії та його знак відповідають вкладу даного аргументу до величини параметра оптимізації.

Варіюючи двома аргументами можна описати поверхню відгуку на рис. 4.4 квадратичним рівнянням з формули (4.25):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 \quad (4.33)$$

Добутки “ x_1^2 ” і “ x_2^2 ” завжди мають знак +, тому стовпці “ x_1^2 ” і “ x_2^2 ” у матриці планування будуть повністю збігатися зі стовпцем “ x_0 ”, тобто коефіцієнти “ b_0, b_{11} ” та “ b_{22} ” оцінити окремо неможливо, що суперечить вимогам МНК. В той же час знаки стовпця “ $x_1 x_2$ ” будуть відрізнятися від знаків стовпців “ x_0, x_1, x_2 ”. Тоді квадратична модель ПФЕ 2^2 буде мати такий вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \quad (4.34)$$

Ця модель відповідає розширеній матриці ПФЕ 2^2 (табл. 4.7).

Таблиця 4.7 – Розширена матриця ПФЕ 2^2

№ проби	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	–	+	–	y_2
3	+	+	–	–	y_3
4	+	–	–	+	y_4

Ця таблиця показує, що стовпець “ x_1x_2 ” дійсно має індивідуальні знаки, за допомогою яких можна розрахувати величину коефіцієнта “ b_{12} ” за формулою (4.27):

$$b_{12} = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}, \quad (4.35)$$

де b_{12} – ефект взаємодії двох факторів x_1 і x_2 чи ефект парної взаємодії.

Крім того, розширена матриця ПФЕ 2^2 відповідає принципу раціональності МНК: кількість опитів дорівнює кількості визначених коефіцієнтів регресії. Таким чином, матриця ПФЕ дозволяє знайти як лінійну так і нелінійну модель взаємодії будь-яких параметрів. При цьому повне число взаємодій C_k^m визначається з відношення факторіалів:

$$C_k^m = \frac{k!}{[m!(k-m)!]} \quad (4.36)$$

ПРИКЛАД № 4.6

Визначити загальне рівняння з матриці ПФЕ 2^4 . За формулою (4.26) визначаємо кількість проб:

$$n = p^k = 2^4 = 16.$$

За формулами (4.25 і 4.36) визначаємо аргументи та їх коефіцієнти:

- основні ефекти: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 з коефіцієнтами b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 ;
- парні взаємодії факторів: $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$ з коефіцієнтами $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34}$;
- потрійні взаємодії факторів: $x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4$ з коефіцієнтами $b_{123}, b_{124}, b_{134}, b_{234}$;
- четверна взаємодія усіх факторів: $x_1x_2x_3x_4$ з коефіцієнтом b_{1234} .

Таким чином, з матриці ПФЕ 2^4 можна побудувати і оцінити таке нелінійне рівняння:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{124}x_1x_2x_4 + b_{134}x_1x_3x_4 + b_{234}x_2x_3x_4 + b_{1234}x_1x_2x_3x_4 \quad (4.37)$$

Коефіцієнти регресії цього рівняння можна визначити за допомогою самої матриці (табл. 4.8) і рівняння (4.27):

$$b_0 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16}) / 16; \quad (4.38)$$

$$b_0 = (y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 + y_9 - y_{10} + y_{11} - y_{12} + y_{13} - y_{14} + y_{15} - y_{16}) / 16; \quad (4.39)$$

$$b_{1234} = (y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 + y_7 - y_8 - y_9 + y_{10} + y_{11} - y_{12} + y_{13} - y_{14} - y_{15} + y_{16}) / 16; \quad (4.40)$$

Але на першому етапі активного експерименту, тобто на етапі “крутого сходу”, не треба будувати нелінійну модель – досить інформації і від лінійного рівняння. З іншого боку число проб ПФЕ, як правило, помітно перевищує число коефіцієнтів лінійного рівняння. Тому на першому етапі можна скоротити число проб за рахунок інформації, яку дають ефекти парних взаємодій. Наприклад, у рівнянні ПФЕ 2^2 (4.28) малий коефіцієнт “ b_{12} ” можна умовно замінити на “ b_3 ”, а добуток “ x_1x_2 ” – на “ x_3 ”:

$$“x_1x_2” \equiv x_3, \text{ а } b_{12} \equiv b_3 \quad (4.41)$$

Тепер матриця ПФЕ 2^2 перетворюється на скорочену матрицю для трьох факторів (табл. 4.9).

Таблица 4.8 – Матрица ПФЕ 2^4

№ пробы	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	+	–	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	–	–	+	–	y_2
3	+	+	–	+	+	–	+	+	–	–	+	–	–	+	–	–	y_3
4	+	–	–	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	–	–	+	y_4
5	+	+	+	–	+	+	–	+	–	+	–	–	+	–	–	–	y_5
6	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	y_6
7	+	+	–	–	+	–	–	+	+	–	–	+	–	–	+	+	y_7
8	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+	–	y_8
9	+	+	+	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	–	–	–	y_9
10	+	–	+	+	–	–	–	+	+	–	–	–	+	+	–	+	y_{10}
11	+	+	–	+	–	–	+	–	–	+	–	–	+	–	+	+	y_{11}
12	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	y_{12}
13	+	+	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–	–	+	+	+	y_{13}
14	+	–	+	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	–	+	–	y_{14}
15	+	+	–	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	y_{15}
16	+	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	+	y_{16}

Таблиця 4.9 – Скорочена матриця планування для 3-х факторів

№ проби	x_0	x_1	x_2	$x_3 \equiv x_1 x_2$	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	–	+	–	y_2
3	+	+	–	–	y_3
4	+	–	–	+	y_4

З цієї матриці можна побудувати лінійну модель для трьох змінних X :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \quad (4.42)$$

Таким чином, скорочена матриця дає можливість у чотирьох пробах знайти інформацію про чотири коефіцієнти: b_0, b_1, b_2 та b_3 .

В цій матриці величина коефіцієнта “ b_3 ” повністю збігається з величиною коефіцієнта “ b_{12} ”, тому що знаки стовпців “ x_3 ” і “ $x_1 x_2$ ” однакові. Коли побудуємо стовпці “ $x_1 x_3$ ” і “ $x_2 x_3$ ”, то знаки цих стовпців: “+”, “+”, “–”, “–” і “+”, “–”, “+”, “–” будуть повністю збігатися зі знаками стовпців “ x_2 ” і “ x_1 ” (див. табл. 4.9). Тоді і коефіцієнти “ b_{13} ” і “ b_{23} ” будуть збігатися з коефіцієнтами “ b_2 ” і “ b_1 ”. Таким чином, у скороченій матриці лінійні ефекти змішані з ефектами парних взаємодій:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad (4.43)$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad (4.44)$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}. \quad (4.45)$$

Збиток інформації, тобто неточність нових коефіцієнтів регресії є платою за скорочення числа проб. З іншого боку чотири проби табл. 3.5, які поставлені для оцінки трьох факторів, є половиною ПФЕ, тобто ДРОБОВОЮ РЕПЛІКОЮ.

Дробові репліки умовно позначаються як P^{K-L} , де “ L ” – число лінійних ефектів, прирівняних до ефектів взаємодій. Наприклад, ПФЕ 2^6 має 64 проби, а його піврепліка – 2^{6-1} має 32 проби, його чверть репліка 2^{6-2} – 16 проб, одна восьма репліки – 2^{6-3} – 8 проб і т.д.

Мінімальна дробова репліка для будування лінійної моделі зобов’язана включати не менше $(K+1)$ проб для визначення $(b_1 - b_k + b_0)$ коефіцієнтів.

Табл. 4.9 є напівреплікою для експерименту 2^{3-1} , а рівняння (4.40): $x_3 \equiv x_1 x_2$ – ГЕНЕРУЮЧИМ СПІВВІДНОШЕННЯМ.

Помножимо обидві частини цього рівняння на “ x_3 ”:

$$x_3^2 \equiv x_1 x_2 x_3 \quad (4.46)$$

Оскільки " x_3^2 " = 1, то з рівняння (4.46) одержимо так званий ВИЗНАЧАЮЧИЙ КОНТРАСТ:

$$1 \equiv x_1 x_2 x_3 \quad (4.47)$$

За допомогою цього контрасту можна визначити систему змішування ефектів:

$$x_1 \equiv x_1^2 x_2 x_3 \equiv x_2 x_3 \quad (4.48)$$

$$x_2 \equiv x_1 x_2^2 x_3 \equiv x_1 x_3 \quad (4.49)$$

$$x_3 \equiv x_1 x_2 x_3^2 \equiv x_1 x_2 \quad (4.50)$$

Експеримент з використанням дробових реплік називається ДРОБОВИМ ФАКТОРНИМ ЕКСПЕРИМЕНТОМ (ДФЕ).

ПРИКЛАД № 4.7

Визначити загальне рівняння з матриці ДФЕ для чотирьох змінних на двох рівнях.

Визначаємо мінімальну кількість проб для будування лінійної моделі на двох рівнях.

Піврепліка ДФЕ 2^{4-1} має 8 проб, чверть репліка ДФЕ 2^{4-2} має 4 проби. За умовами будування планів ДФЕ дробова репліка зобов'язана включати $(K+1)$ проб для визначення $(b_1 - b_4 + b_0)$ коефіцієнтів, тобто не менше п'яти проб. Таким чином, будуємо матрицю ДФЕ з плану напіврепліки 2^{4-1} для 8 проб.

Для конкретизації завдання припустимо, що вже проведено 8 дослідів, які дали такі умовні значення функції "у":

48,5; 40,0; 43,0; 40,0; 41,5; 43,0; 45,5; 41,0.

Складаємо матрицю ДФЕ 2^{4-1} .

Таблиця 4.10 – Піврепліка ДФЕ 2^{4-1} з визначальним контрастом

$$1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4$$

№ проби	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 \equiv x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 = x_3 x_4$	$x_1 x_3 = x_2 x_4$	$x_1 x_4 = x_2 x_3$	у
1	+	+	+	+	+	+	+	+	48,5
2	+	-	+	+	-	-	-	+	40,0
3	+	+	-	+	-	-	+	-	43,0
4	+	-	-	+	+	+	-	-	40,0
5	+	+	+	-	-	+	-	-	41,5
6	+	-	+	-	+	-	+	-	43,0
7	+	+	-	-	+	-	-	+	45,5
8	+	-	-	-	-	+	+	+	41,0

В цій репліці реалізовано 8 проб для одержання 5 коефіцієнтів лінійної регресії. Тоді додатково можна розрахувати 3 квадратичних коефіцієнти для одержання, при необхідності, напівквадратичної моделі.

За допомогою визначального контрасту знаходимо систему змішування ефектів:

$$x_1 \equiv x_1^2 x_2 x_3 x_4 \equiv x_2 x_3 x_4; \quad (4.51)$$

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}; \quad (4.52)$$

$$x_2 \equiv x_1 x_2^2 x_3 x_4 \equiv x_1 x_3 x_4; \quad (4.53)$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134}; \quad (4.54)$$

$$x_3 \equiv x_1 x_2 x_3^2 x_4 \equiv x_1 x_2 x_4; \quad (4.55)$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124}; \quad (4.56)$$

$$x_4 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4^2 \equiv x_1 x_2 x_3; \quad (4.57)$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123}; \quad (4.58)$$

$$x_1 x_2 \equiv x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 \equiv x_3 x_4; \quad (4.59)$$

$$b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}; \quad (4.60)$$

$$x_1 x_3 \equiv x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 \equiv x_2 x_4; \quad (4.61)$$

$$b_{13} \rightarrow \beta_{13} + \beta_{24}; \quad (4.62)$$

$$x_1 x_4 \equiv x_1^2 x_2 x_3 x_4^2 \equiv x_2 x_3; \quad (4.63)$$

$$b_{14} \rightarrow \beta_{14} + \beta_{23}. \quad (4.64)$$

Відповідно рівнянню (4.27) визначаємо величини коефіцієнтів регресії:

$$b_0 = (48,5+40,0+43,0+40,0+41,5+43,0+45,5+41,0)/8 = 42,81;$$

$$b_1 = (48,5- 40,0+43,0- 40,0+41,5- 43,0+45,5- 41,0)/8 = 1,813;$$

$$b_2 = (48,5+40,0- 43,0- 40,0+41,5+43,0- 45,5-41,0)/8 = 0,438;$$

$$b_3 = (48,5+40,0+43,0+40,0- 41,5- 43,0- 45,5-41,0)/8 = 0,063;$$

$$b_4 = (48,5- 40,0- 43,0+40,0- 41,5+43,0+45,5-41,0)/8 = 1,438;$$

$$b_{12} = (48,5-40,0-43,0+40,0+41,5-43,0- 45,5+41,0)/8 = -0,063;$$

$$b_{13} = (48,5- 40,0+43,0- 40,0- 41,5+43,0- 45,5+41,0)/8 = 1,063;$$

$$b_{14} = (48,5+40,0- 43,0- 40,0- 41,5- 43,0+45,5+41,0)/8 = 0,938.$$

За допомогою цих коефіцієнтів складаємо лінійну модель:

$$y = 42,81 + 1,813x_1 + 0,438x_2 + 0,063x_3 + 1,438x_4.$$

При необхідності можна побудувати і напівквадратичну модель:

$$y = 42,81 + 1,813x_1 + 0,438x_2 + 0,063x_3 + 1,438x_4 - \\ - 0,063x_1x_2 + 1,063x_1x_3 + 0,938x_1x_4.$$

Хід практичних занять

Кожний студент виконує індивідуальне завдання по будівництву лінійної і напівквадратичної моделі методом ДФЕ для 4-х змінних на двох рівнях відповідно табл. 4.11.

Таблиця 4.11 – Завдання для будівництва моделей методом ДФЕ

№№ завдань	Умовні значення функції “у” для 4-х змінних на 2-х рівнях							
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
1	60	58	62	59	61	60	57	63
2	59	60	58	61	62	60	59	61
3	90	91	89	88	89	90	92	93
4	600	580	620	590	610	600	570	620
5	40	41	39	42	38	40	39	42
6	35	36	34	33	37	36	35	33
7	20	21	22	19	18	20	21	18
8	25	26	27	23	24	25	27	23
9	32	30	28	29	31	30	27	33
10	37	35	33	34	36	35	32	38
11	42	40	38	39	41	40	37	43
12	7	9	12	11	10	9	13	10
13	15	14	13	16	17	15	17	13
14	16	15	14	13	17	15	17	14
15	17	16	15	14	18	16	18	15
16	150	155	145	158	160	152	148	150
17	250	230	235	245	248	251	238	242
18	180	190	185	192	187	179	191	188
19	165	170	162	178	160	168	175	171
20	225	230	231	221	220	228	229	224
21	805	790	785	810	802	788	798	808
22	770	750	760	765	755	758	772	762
23	50	45	48	49	55	46	52	53
24	38	42	45	35	37	48	39	44
25	130	140	135	137	133	139	142	138
26	500	480	490	510	530	520	540	550
27	670	650	660	665	655	658	672	662
28	280	290	285	295	298	301	288	292
29	300	280	285	295	298	301	288	292
30	115	120	112	128	110	118	125	121

4.4 Шлях по градієнту

Мета заняття — освоїти методи проведення активних експериментів.

Внаслідок проведення практичного заняття студенти повинні:

- знати теорію активного експерименту, його тактику і стратегію;
- уміти будувати план “крутого сходу” і реалізувати його.

Основні теоретичні положення

Під час проведення активного експерименту вибирається його стратегія. Перша частина — шлях по градієнту у напрямку До області оптимуму, як правило, провадиться методом ДФЕ. Друга частина — опис області оптимуму провадиться методом ПФЕ.

Щоб мінімізувати вплив зовнішніх факторів: коливання температури, тиску, хімічного та гранулометричного складу сировини, зміна виконавців та їх настроїв тощо, рекомендується експерименти з матриці планування проводити у випадковій послідовності, тобто рандомізовано у часі. Процес організації випадкової послідовності проб за допомогою таблиці випадкових чисел (табл. 4.12) називається РАНДОМІЗАЦІЄЮ.

Таблиця 4.12 – Перелік випадкових чисел (фрагмент)

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07

Проби, які задані рандомізованою матрицею планування ДФЕ, можна робити по одному разу, а на основному рівні, тобто при середніх значеннях аргументів, треба робити серію однакових проб (див. табл. 4.10) для визначення помилки експерименту, тобто його дисперсії:

$$D_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{f_1}, \quad (4.65)$$

де y_i – результат “ i -тої” проби на основному рівні;

$\bar{y}$ – середнє арифметичне значення усіх “ n ” проб на основному рівні, тобто

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}; \quad (4.66)$$

n – кількість проб у серії:

$$n = (0,5-1,0) P^{K-L}; \quad (4.67)$$

f_1 – число ступенів волі:

$$f_1 = n - \text{const}; \quad (4.68)$$

де константою є середнє арифметичне значення “ $\bar{y}$ ”.

За результатами проб рандомізованої матриці ДФЕ розраховують коефіцієнти регресії і оцінюють СТАТИСТИЧНУ ЗНАЧУЩІСТЬ кожного коефіцієнта. Для цього визначають НАДІЙНИЙ ІНТЕРВАЛ коефіцієнтів:

$$\Delta b_i = \pm t_a^f \cdot D_{b_i}; \quad (4.69)$$

де t_a^f – значення табличного критерію Стюдента (табл.4.2);

D_{b_i} – однакове для усіх коефіцієнтів регресії значення середньоквадратичного відхилення від справжнього значення коефіцієнтів; в умовах кодування:

$$D_{b_i} = \left(\frac{1}{n}\right)^{0.5} \quad (4.70)$$

Коефіцієнт має статичну значущість, коли його абсолютна величина, тобто модуль коефіцієнта, більше надійного інтервалу:

$$|b_i| \geq \Delta b_i t_a^f D_{b_i} \quad (4.71)$$

Тобто модуль коефіцієнта регресії повинен бути в “ i ” разів більше його середньоквадратичної помилки.

Коефіцієнти, які не мають статистичної значущості, виключаються з моделі, але фактори, які мають незначущі коефіцієнти, беруть участь у наступному експерименті на середньому рівні.

Після одержання скороченої моделі перевіряється АДЕКВАТНІСТЬ за допомогою критерію Фішера (додаток В). Коли

$$F_p \leq F_{f1}^{f2} \quad (4.72)$$

то модель адекватна. В цій формулі F_p – розрахунковий критерій, який визначається за формулою:

$$F_p = \frac{D_{\text{од}}^2}{D_y^2} \quad (4.73)$$

де D_y^2 – дисперсія експерименту з формули (4.65);

$D_{од}^2$ – дисперсія адекватності моделі, яка визначається за формулою:

$$D_{од}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_p)^2 / f_2 \quad (4.74)$$

де y_p – значення функцій, які розраховані відповідно скороченої моделі;

f_2 – число ступенів волі по горизонтальній осі таблиці критерію Фішера, воно визначається за формулою:

$$f_2 = n - (K + 1) \quad (4.75)$$

При дослідженні рівняння регресії можливі такі випадки:

- лінійна модель адекватна; є декілька значущих коефіцієнтів; тоді можна переходити до стадії “крутого сходу”;

- лінійна модель адекватна, але один із значущих коефіцієнтів дуже перевищує значення інших; тоді треба змінити межі варіювання аргументів і повторити експеримент;

- лінійна модель адекватна, але усі коефіцієнти незначущі; тоді треба розширити межі варіювання аргументів і повторити експеримент;

- лінійна модель неадекватна; тоді треба звернути увагу на півквадратичну модель (див. приклад № 4.7) чи повторити досліді методом ПФЕ.

Після першого етапу першої частини експерименту отримується, як правило, лінійна функція відгуку типу:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k.$$

Тепер треба знайти найкоротший шлях із точки у середині вивченої зони до зони оптимуму. Це і є шлях по градієнту, рух по найкрутішому схилу. Цей метод називається МЕТОДОМ “КРУТОГО СХОДУ”.

Суть метода в тому, що ділянка поверхні відгуку апроксимується площиною (рис. 4.5) і в точці основного рівня (До) провадиться ДФЕ. Знаки додавання чи віднімання та величини коефіцієнтів показують в якому напрямі (A_0 – B_3) і на скільки одиниць варіювання треба змінити значення даного фактора по відношенню до основного рівня. В цьому напрямі виконують серію кроків (A_0 – A_3 , A_3 –

B_1, B_1-B_2) до отримання максимального значення параметра оптимізації.

Операція провадиться, доки, поступово, усі коефіцієнти регресії лінійної моделі зробляться незначущими, а самі аргументи будуть закріплені за певними значеннями. Це свідчить про вихід до зони оптимуму поверхні відгуку.

Але, щоб не проскочити мимо точки оптимуму (M), як це відбулося з точкою B_3 на рис. 4.5, треба скорочувати кроки на кожному новому етапі “крутого сходу”. Для цього, замість існуючого інтервалу варіювання будь-якого фактора “ Δx_i ”, інтуїтивно приймаємо новий, менший інтервал варіювання “ Δ_i ”. Тоді нові інтервали варіювання для інших факторів визначаються за допомогою такого рівняння:

$$\frac{\Delta i}{\Delta j} = \frac{b_i \Delta x_i}{b_j \Delta x_j} \quad (4.76)$$

Тепер план “крутого сходу” складається таким чином:

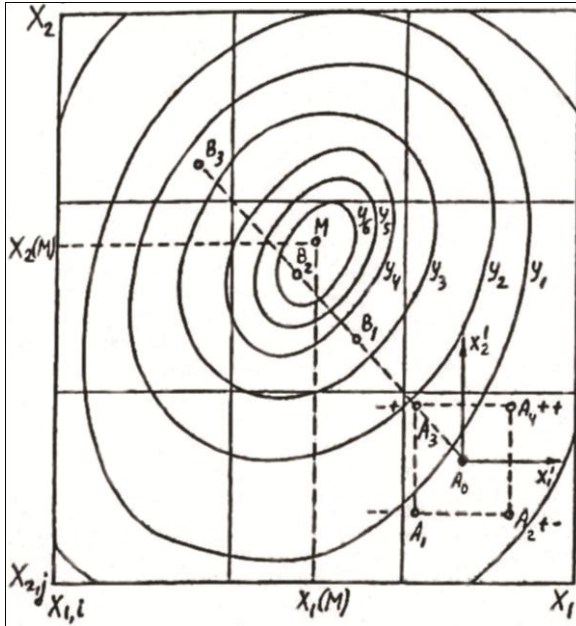
- значення фактора “ x_i ” в першій пробі відрізняється від значення основного рівня цього аргументу “ x_{i_0} ” на величину нового інтервалу варіювання “ Δ_i ” зі знаком, відповідним знаку коефіцієнта цього фактора:

$$x_i^I = x_{i_0}^I \pm \Delta_i \quad (4.77)$$

де усі параметри записані у некодованій формі;

- значення фактора “ x_i ” в другій і наступних пробах продовжують збільшуватись чи зменшуватись відповідно формулі (4.77);

- фактори, які мають незначущі коефіцієнти, фіксуються у плані “крутого сходу” на основному, тобто середньому рівні попереднього експерименту.



y_1-y_6 – ізолінії рівного виходу функції відгуку $y=f(x_1, x_2)$;
 A_0 – основний рівень; A_1-A_4 – початкові спроби для визначення напрямку руху;
 B_1-B_3 – значення функції під час “крутого сходу”; M – точка оптимуму
 Рисунок 4.5 – Схема “крутого сходу” по поверхні відгуку в зоні оптимуму

Після проведення експерименту згідно з планом “крутого сходу” визначається нове лінійне рівняння, оцінюється статистична значущість коефіцієнтів нової моделі та перевіряється адекватність цієї моделі.

Процес “крутого сходу” продовжується до того часу, поки не буде отримано лінійне рівняння з одним змінним фактором, що свідчить про вихід в область оптимуму. Тоді настає друга частина стратегії планування експерименту: шлях в області оптимуму за допомогою ПФЕ.

ПРИКЛАД № 4.8

Визначити рівняння регресії і побудувати план “крутого сходу” по градієнту в область оптимуму з таких даних:

- границя міцності (σ_B) сталі марки 15СГ є функцією хімічного складу і температури гартування цієї сталі;

- аргументи змінюються в таких межах: 0,5-0,9 % Mn;
0,2-0,5 % Si; 0,1-0,2 % C; 1000-1200 °C (температура гартування);
- 8 проб на основному рівні аргументів дали такі значення σ_B ,
кг/мм²: 78, 75, 88, 87, 90, 72, 87, 81.

Визначаємо лінійну модель цього експерименту за формулою (4.74)

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4$$

$$\text{чи} \quad \sigma_B = b_0 + b_1[Mn] + b_2[Si] + b_3[C] + b_4 t_{\text{гарт}}$$

Вибираємо для будування моделі піврепліку $ДФЕ 2^{4-1}$, оскільки вона дає 8 проб для визначення 5 коефіцієнтів. Будуємо табл. 4.13.

В цій таблиці генеруюче співвідношення $x_4 \equiv x_1 x_2 x_3$ одержано із визначального контрасту за формулою (4.57).

Таблиця 4.13 – Вихідні дані $ДФЕ 2^{4-1}$ з визначальним контрастом $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4$

Фактори	Mn, %	Si, %	C, %	$t_{\text{гарт}}, ^\circ\text{C}$	σ_B , кг/мм ²
Основний рівень, x_{i0}	0,70	0,35	0,15	1100	—
Інтервал варіювання, Δx_i	0,20	0,15	0,05	100	—
Верхній рівень, (+)	0,90	0,50	0,20	1200	—
Нижній рівень, (—)	0,50	0,20	0,10	1000	—
Код	x_1	x_2	x_3	$x_4 \equiv x_1 x_2 x_3$	y
Проба 1	+	+	+	+	78
Проба 2	—	—	+	—	75
Проба 3	+	—	+	—	88
Проба 4	—	—	+	+	87
Проба 5	+	+	—	—	90
Проба 6	—	+	—	+	72
Проба 7	+	—	—	+	87
Проба 8	—	—	—	—	81

Проводимо рандомізацію експерименту за допомогою таблиці випадкових чисел (див. табл. 4.17). Вибираємо 8 випадкових чисел і даємо їм номери по черзі зменшування:

88 90 81 87 78 75 72 87

3 5 8 4 1 2 6 7
 Будемо рандомізований план експерименту (табл. 4.14).
 Визначаємо коефіцієнти лінійної моделі за формулою (4.27):

$$b_0 = (88+90+81+87+78+75+72+87)/8 = 82,25;$$

$$b_1 = (88+90-81-87+78-75-72+87)/8 = 3,5;$$

$$b_2 = (-88+90-81-87+78+75+72-87)/8 = -3,5;$$

$$b_3 = (88-90-81+87+78+75-72-87)/8 = -0,25;$$

$$b_4 = (-88-90-81+87+78-75+72+87)/8 = -1,125.$$

Таблиця 4.14 – Піврепліка ДФЕ 2^{4-1} з визначальним контрастом
 $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4$

№ проби	№ рандом.	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 \equiv x_1 x_2 x_3$	y
1	3	+	+	–	+	–	88,0
2	5	+	+	+	–	–	90,0
3	8	+	–	–	–	–	81,0
4	4	+	–	–	+	+	87,0
5	1	+	+	+	+	+	78,0
6	2	+	–	+	+	–	75,0
7	6	+	–	+	–	+	72,0
8	7	+	+	–	–	+	87,0

Запишемо лінійне рівняння в загальному виді:

$$y = 82,25 + 3,5x_1 - 3,5x_2 - 0,25x_3 - 1,125x_4 \quad (4.78)$$

Визначаємо статистичну значущість коефіцієнтів цієї моделі за формулою (4.7). Для цього знаходимо середньоквадратичну помилку з рівняння (4.70):

$$D_{b_i} = \left(\frac{1}{8}\right)^{0,5} = 0,353.$$

Визначаємо критерій Стюдента з таблиці 4.2. Візьмемо $\alpha = 0,01$, $f = n = 8$. Тоді $t_{\alpha=0,01}^{f=8} = 3,36$.

Тепер надійний інтервал “ Δb_i ” має значення (з формули 4.69):

$$\Delta b_i = \pm 3,36 \cdot 0,353 = \pm 1,19$$

$$b_0 > \Delta b_i; b_1 > \Delta b_i; b_2 > \Delta b_i; b_3 < \Delta b_i; b_4 > \Delta b_i.$$

Таким чином, скорочена лінійна модель має вид:

$$y = 82,25 + 3,5x_1 - 3,5x_2 - 1,125x_4 \quad (4.79)$$

Запишемо рівняння в остаточному виді:

$$\sigma_B = 82,25 + 3,5[Mn] - 3,5[Si] - 1,125t_{\text{запм}} \quad (4.80)$$

Перевіряємо адекватність моделі за допомогою критерію Фішера (додаток В). Будуємо таблицю складових критерію (табл. 4.15).

Таблиця 4.15 – Визначення складових критерію Фішера

№ ран-дом.	y_i з табл. 4.3	$\bar{y}$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	y_p	$y_i - y_p$	$(y_i - y_p)^2$
3	88	82,25	+5,75	33,0625	90,375	-2,375	3,265575
5	90	82,25	+7,75	60,0625	83,375	+6,625	43,890675
8	81	82,25	-1,25	1,5625	83,375	-2,375	3,265575
4	87	82,25	+4,75	22,5625	81,125	+5,875	34,515625
1	48	82,25	-4,25	18,0625	81,125	-3,125	9,765625
2	75	82,25	-7,25	52,5625	76,375	-1,375	1,890625
6	72	82,25	-10,25	105,2625	74,125	-2,125	4,515625
7	87	82,25	+4,75	22,5625	88,125	-1,125	1,265625
Σ	658	—	—	313,7000	—	—	102,374950

В цій таблиці: $\bar{y} = \Sigma y_i / n = b_0 = 82,25$ (4.81)

$$y_p = 82,25 + 3,5x_1 - 3,5x_2 - 1,125x_4 \quad (x_1, x_2 \text{ і } x_4 \text{ з табл. 4.15})$$

$$y_p^1 = 82,25 + 3,5(+)-3,5(-)-1,125(-) = 90,375$$

$$y_p^2 = 82,25 + 3,5(+)-3,5(+)-1,125(-) = 83,375$$

$$y_p^3 = 82,25 + 3,5(-)-3,5(-)-1,125(-) = 83,375$$

$$y_p^4 = 82,25 + 3,5(-)-3,5(-)-1,125(+)= 81,125$$

$$y_p^5 = 82,25 + 3,5(+)-3,5(+)-1,125(+)=81,125$$

$$y_p^6 = 82,25 + 3,5(-)-3,5(+)-1,125(-)=76,375$$

$$y_p^7 = 82,25 + 3,5(-)-3,5(+)-1,125(+)=74,125$$

$$y_p^8 = 82,25 + 3,5(+)-3,5(-)-1,125(+)=88,125$$

За формулами (4.65, 4.74, 4.75, 4.68) визначаємо числа ступенів волі та необхідні дисперсії:

$$f_1 = n - 1 = 8 - 1 = 7; f_2 = n - (k + 1) = 8 - (3 + 1) = 4;$$

$$D_{од}^2 = \frac{\sum (y_i - y_p)^2}{f_2} = \frac{102,337}{4} = 25,59;$$

$$D_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{f_1} = \frac{313,7}{7} = 48,53.$$

Тоді за формулою (4.73) розраховуємо критерій Фішера:

$$F_p = \frac{D_{од}^2}{D_y^2} = \frac{25,59}{48,53} = 0,527.$$

Визначаємо найменший табличний критерій Фішера (додаток В):

$$F_{\alpha=0.05}^{f_1=7; f_2=4} = 4,12; \quad (F_p = 0,527) < (F_{табл} = 4,12)$$

Таким чином, за формулою (4.72), скорочена модель (4.79, 4.80):

$$y = 82,25 + 3,5x_1 - 3,5x_2 - 1,125x_4$$

чи $\sigma_B = 82,25 + 3,5[Mn] - 3,5[Si] - 1,125 t_{сарт}$ – є адекватною.

Тепер починаємо будувати план крутого сходу по градієнту лінійної моделі.

З таблиці вихідних даних (див. табл. 4.2) позичаємо інтервали варіювання для змінних скороченої моделі:

$$\Delta x_1 = 0,20 \% Mn; \quad \Delta x_2 = 0,15 \% Si; \quad \Delta x_4 = 100 ^\circ C$$

Інтуїтивно зменшимо крок зміни температури гартування сталі зі 100 до 10 °C, тобто візьмемо $\Delta_4 = 10$ °C. Тоді за формулою (4.76):

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \frac{b_1 \cdot \Delta x_1}{b_4 \cdot \Delta x_4}; \quad \Delta_1 = \frac{10 \cdot 3,5 \cdot 0,20}{1,125 \cdot 100} = 0,062(6) \approx 0,06 \%$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \frac{b_2 \cdot \Delta x_2}{b_4 \cdot \Delta x_4}; \quad \Delta_2 = \frac{10 \cdot 3,5 \cdot 0,15}{1,125 \cdot 100} = 0,04(6) \approx 0,04 \%$$

Оскільки коефіцієнт “ b_3 ” (для вмісту вуглецю) є незначущим, то залишимо концентрацію цього вуглецю на основному рівні, тобто на рівні 0,15 % (див. табл. 4.13).

Зміни концентрацій марганцю (x_1), кремнію (x_2) і градієнту температури гартування (x_4) фіксуємо за допомогою формули (4.77), відповідно знакам коефіцієнтів b_1, b_2 та b_4 у табл. 4.16):

Таблиця 4.16 – План “крутого сходу”

Фактори	$[Mn], \%$ x_1	$[Si], \%$ x_2	$t_{\text{гарт}}, ^\circ\text{C};$ x_4	$[C], \%;$ x_3	$\sigma_{\text{в}}, \text{кг/мм}^2;$ y
Основний рівень з табл. 4.2, x_{i0}	0,70	0,35	1100	0,15	—
Інтервал варіювання з табл. 4.2, Δx_i	0,20	0,15	100	0,05	—
Коефіцієнти регресії скороченої моделі, b_i	+3,5	−3,5	−1,125	—	—
Новий інтервал варіювання, Δ_i	0,06	0,04	10	—	—
Проба 1	0,76	0,31	1090	Основний рівень 0,15 % вуглецю	?
Проба 2	0,82	0,27	1080		?
Проба 3	0,88	0,23	1070		?
Проба 4	0,94	0,19	1060		?
Проба 5	1,00	0,15	1050		?
Проба 6	1,06	0,01	1040	Основний рівень 0,15 % вуглецю	?
Проба 7	1,12	0,07	1030		?
Проба 8	1,18	0,03	1020		?

Після реалізації цього плану і отримання нових значень границі міцності складається нова лінійна модель і, при необхідності, продовжуються кроки “крутого сходу” до області оптимуму.

4.5 Функціональна залежність

Потрібно знайти функцію $y = f(x)$, значення якої при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ можливо менше відрізнялися б від емпіричних значень $y_1, y_2, \dots, y_n$. В основу рішення покладений принцип Лежандра, за яким сума квадратів відхилень емпіричних значень y від y_i , визначених за формулою, повинна бути найменшою.

Оскільки більшість функцій може бути представлено багаточленом n -го ступеня, то при вирівнюванні доцільно представляти залежність між змінними величинами у виді параболи n -го ступеня:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (4.82)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – невідомі параметри. Для їхнього знаходження скористаємося інтерполяційною формулою Чебишева, що має вид:

$$y = \kappa_0 q_0(x) + \kappa_1 q_1(x) + \kappa_2 q_2(x) + \dots + \kappa_\lambda q_\lambda(x). \quad (4.83)$$

Величина $\lambda \leq n-1$ характеризує порядок параболи; n – число значень незалежної змінної. У цій формулі аргументом є величина $x = \bar{u}$, де $\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n}$.

Послідовність обчислення й способи визначення вхідних в інтерполяційну формулу коефіцієнтів покажемо на прикладі (див. табл. 4.17).

Таблиця 4.17 – Послідовність обчислення даних

№	Функція y	Аргумент u	y_i^2	$x_i = u_i - \bar{u}$	$y_i x_i$	x_i^2	$x_i^2 y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^3 y_i$	x_i^5	x_i^6	${}_2 f(u)$	${}_3 f(u)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	1	4	-6	-12	36	72	-216	1296	-482	-7776	46656	2,9	2,1
2	10	3	100	-4	-40	16	160	-64	256	-640	-1024	4096	9,6	13,1
3	17	4	289	-3	-51	9	153	-27	81	-459	-243	729	16,3	20,6
4	33	6	1089	-1	33	1	33	-1	1	-33	-1	1	35,6	37,7
5	51	7	2601	0	0	0	0	0	0	0	0	0	48,5	48,4
6	66	8	4356	+1	+66	1	66	1	1	66	1	1	63,5	61,2
7	96	10	9216	+3	+288	9	864	27	81	2592	243	729	99,8	95,3
8	120	11	14400	+4	+480	16	1920	64	256	7680	1024	4096	121,2	117,6
9	172	13	29584	+6	+1032	36	6192	216	1296	37152	7776	46656	170,3	175,3
Сума	567	63	61639		1730	124	9460	0	3268	$\frac{-1564 + 47490}{45926}$	0	102964		

Визначення параболі нульового ступеня

Знаходимо $\sum y_i = 567$ й заносимо її наприкінці стовпчика 2 (табл. 4.17).

Визначаємо величину κ_0 . Вона дорівнює $\kappa_0 = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{567}{9} = 63$.

Для рівняння параболі нульового порядку $q_0(x) = x^0 = 1$.

Знаходимо рівняння параболі нульового порядку ${}_0 f(x) = \kappa_0 q_0(x) = 63$.

Визначаємо основну помилку. Для цього знаходимо y_i^2 і заповнюємо стовпчик 4. Обчислюємо, що $\sum y_i^2 = 61639$. Знаходимо

$$\text{величину } \sum_0 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 61639 - \frac{567^2}{9} = 25918.$$

$$\text{Основна помилка дорівнює } \sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_0}{n-1}} = \sqrt{\frac{25918}{9-1}} = 56,9.$$

Визначення параболі першого порядку

Обчислюємо $\sum u_i = 63$.

$$\text{Обчислюємо } \bar{u} = \frac{\sum u_i}{n} = \frac{63}{9} = 7.$$

Заповнюємо стовпчик 5, обчислюючи значення $x_i = u_i - \bar{u}$.

Заповнюємо стовпчик 6, обчислюючи добуток $y_i x_i$ і знаходимо $\sum y_i x_i = 1730$.

Заповнюємо стовпчик 7, обчислюючи x_i^2 і знаходимо $\sum x_i^2 = 124$.

Обчислюємо рівняння параболі першого ступеня.

$$\text{Обчислюємо } \kappa_1 = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} = \frac{1730}{124} = 13,95.$$

Для параболі 1-го порядку величина $q_1(x) = x$. Тому $\kappa_1 q_1(x) = 13,95x$.

Складаємо $\kappa_0 q_0(x) + \kappa_1 q_1(x) = 63 + 13,95x$.

Шукане вираження ${}_1 f(x) = 63 + 13,95x$.

Обчислюємо основну помилку:

$$\sum_1 = \sum_0 - \kappa_1^2 \sum x_i^2 = 25918 - 13,95^2 \cdot 124 = 1784,5;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_1}{n-2}} = \sqrt{\frac{1784,5}{7}} = 15,9.$$

Оскільки σ_0 значно перевершує σ_1 , то необхідно продовжити інтерполяцію.

Визначення параболі другого й третього порядку

Обчислюємо добуток $x_i^2 y_i$, заповнюємо стовпчик 8 і знаходимо, що $\sum x_i^2 y_i = 9460$.

Обчислюємо x_i^3 , заповнюємо стовпчик 9 і знаходимо, що x_i^3

Обчислюємо x_i^4 , заповнюємо стовпчик 10 і знаходимо, що $\sum x_i^4 = 3268$.

Обчислюємо величини:

$$A_2 = \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{124}{9}; \quad b_2 = \frac{\sum x_i^3}{\sum x_i^2} = \frac{0}{124} = 0;$$

$$C_2 = \sum x_i^4 - b_2 \sum x_i^3 - A_2 \sum x_i^2 = 3268 - 0 \cdot 0 - \frac{124}{9} \cdot 124 = 1559,56.$$

Обчислюємо величину $\kappa_2 q_2(x)$

$$\kappa_2 = \frac{\sum x_i^2 y - \kappa_0 \sum x_i^2 - \kappa_1 \sum x_i^3}{C_2} = \frac{9460 - 63 \cdot 124 - 13,95 \cdot 0}{1559,56} = 1,06;$$

$$q_2(x) = (x^2 - b_2 x - A_2) = (x^2 - 0 \cdot x - \frac{124}{9}) = x^2 - 13,78;$$

$$\kappa_2 q_2(x) = 1,06(x^2 - 13,78) = 1,06x^2 - 14,6.$$

Складаємо $\kappa_0 q_0(x) + \kappa_1 q_1(x) + \kappa_2 q_2(x)$ й одержуємо рівняння параболі другого порядку

$${}_2 f(x) = 63 + 13,95x + 1,06x^2 - 14,6 = 1,06x^2 + 13,95x + 48,4.$$

Обчислюємо основну помилку:

$$\sum_2 = \sum_1 - \kappa_2^2 C_2 = 1784,5 - 1,06^2 \cdot 1559,56 = 32,12;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum_2}{n-3}} = \sqrt{\frac{32,12}{6}} = 2,3.$$

Якщо отримане значення $\sigma_2 = 2,3$ вважати досить малим, то

можна обмежитися обчисленням параболи 2-го порядку. Після цього необхідно перейти від аргументу $x = u - \bar{u} = u - 7$ до аргументу u , підставивши в рівняння параболи 2-го порядку $x = u - 7$. Тоді остаточно одержимо

$${}_2 f(u) = 1,06(u - 7)^2 + 13,95(u - 7) + 48,4$$

або

$${}_2 f(u) = 1,06u^2 + 0,89u + 2,74.$$

Для прикладу виконаємо обчислення параболи 3-го порядку.

Обчислюємо добуток $x_i^3 y_i$, заповнюємо стовпчик 11 і знаходимо $\sum x_i^3 y_i = 45926$.

Обчислюємо x_i^5 , заповнюємо стовпчик 12 і знаходимо, що $\sum x_i^5 = 0$.

Обчислюємо x_i^6 , заповнюємо стовпчик 13 і знаходимо, що $\sum x_i^6 = 102964$.

Обчислюємо вираження:

$$C_3 = \sum x_i^5 - b_2 \sum x_i^4 - A_2 \sum x_i^3 = 0 - 0 \cdot 3268 - \frac{124}{9} \cdot 0 = 0;$$

$$D_3 = \sum x_i^6 - b_2 \sum x_i^5 - A_2 \sum x_i^4 = 102964 - 0 \cdot 0 - \frac{124}{9} \cdot 3268 = 45025,778;$$

$$A_3 = \frac{C_2}{\sum x_i^2} = \frac{1559,56}{124} = 12,577; \quad b_3 = \frac{C_3}{C_2} - \frac{\sum x_i^3}{\sum x_i^2} = \frac{0}{1559,56} - \frac{0}{124} = 0;$$

$$E_3 = D_3 - b_3 C_3 - A_3 \sum x_i^4 = 45025,78 - 0 \cdot 0 - 12,58 \cdot 3268 = 3914,34.$$

Визначаємо $\kappa_3 q_3(x)$

$$\kappa_3 = \frac{\sum x_i^3 y_i - \kappa_0 \sum x_i^3 - \kappa_1 \sum x_i^4 - \kappa_2 C_3}{E_2} = \frac{45926 - 63 \cdot 0 - 13,95 \cdot 3268 - 1,06 \cdot 0}{3914,34} = 0,0862;$$

$$q_3(x) = (x - b_3)q_2(x) - A_3 x = (x - 0)\left(x^3 - \frac{124}{9}\right) - 12,58x = x^3 - 26,36x;$$

$$\kappa_3 q_3(x) = 0,0862(x^3 - 26,36x) = 0,0862x^3 - 2,267x.$$

Обчислюємо рівняння параболи 3-го порядку

$$\begin{aligned} {}_3f(x) &= \kappa_0 q_0(x) + \kappa_1 q_1(x) + \kappa_2 q_2(x) + \kappa_3 q_3(x) = \\ &= 63 + 13,95x + 1,06x^2 - 14,6 + 0,0862x^3 - 2,267x; \end{aligned}$$

$${}_3f(x) = 0,0862x^3 + 1,06x^2 + 11,68x + 48,4.$$

Обчислюємо основну помилку

$$\begin{aligned} \sum_3 &= \sum_2 - \kappa_3^2 E_3 = 32,12 - 0,0862^2 \cdot 3914,34 = 3,15; \\ \sigma_3 &= \sqrt{\frac{\sum_3}{n-4}} = \sqrt{\frac{3,15}{5}} = 0,79. \end{aligned}$$

Оскільки $\sigma_3 < \sigma_2$, то вирівнювання за параболою 3-го порядку дає трохи краще наближення. Величина σ_3 мало відрізняється від σ_2 і тому подальше збільшення порядку параболи недоцільно.

Слід також зазначити, що в практичних випадках параболи вище 3-го порядку зустрічаються дуже рідко й дають практично несуттєве зменшення основної помилки.

Виразимо аргумент x функції ${}_3f(x)$ через аргумент u . Для цього замість x підставимо як і раніше $(u-7)$ в ${}_3f(x)$

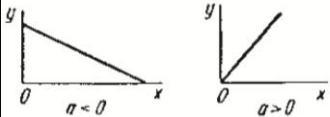
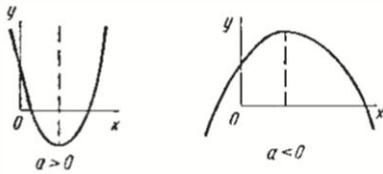
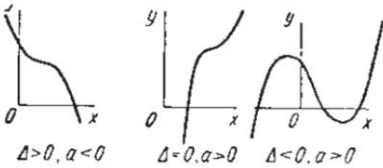
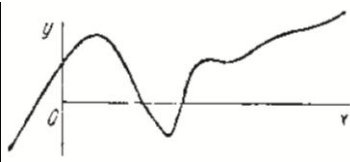
$${}_3f(x) = 0,0862(u-7)^3 + 1,06(u-7)^2 + 11,68(u-7) + 48,4;$$

$${}_3f(x) = 0,0862u^3 - 0,75u^2 + 9,51u - 10,99.$$

У стовпчиках 14 і 15 наведені вирівняні значення u , вираховані по параболах 2-го й 3-го ступеня.

В табл. 4.18 дані формули для вирівнювання по деяких інших функціях.

Таблиця 4.18 – Таблиця вирівнювання функцій

№	Назва функції	Рівняння	Графік функції	Примітка
1	Лінійна функція	$y = ax + b$		Якщо $b=0$, то пряма проходить через початок координат
2	Парабола 2-го порядку	$y = ax^2 + bx + c$		Крива має один екстремум
3	Парабола 3-го порядку	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$		$\Delta = 3ac - b^2$ При $\Delta < 0$ функція має один максимум і один мінімум
4	Парабола n -го порядку	$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$		При n -парному парабола має непарну кількість максимумів і мінімумів; точок перегину – парне число. При n -непарному функція або не має екстремумів або має їх парне число.

4.6 Кореляційна залежність

Припустимо, що у нас є дві випадкові величини x й y із заданими математичними очікуваннями MX й MY та середніми квадратичними відхиленнями σ_x і σ_y .

Величина

$$\mu_{xy} = M[(X - MX)(Y - MY)] = M(XY) - MXMY = \text{cov}(XY) \quad (4.84)$$

називається КОВАРІАЦІЄЮ.

Пронормуємо випадкові величини X та Y , тобто перейдемо до нових випадкових величин X' та Y' , математичні очікування яких дорівнюють нулю, а дисперсії – одиниці.

$$\text{Тоді} \quad X' = \frac{X - MX}{\sigma_x}; \quad Y' = \frac{Y - MY}{\sigma_y},$$

$\text{cov}(X'Y')$ нормованих випадкових величин X' та Y' називається КОЕФІЦІЄНТОМ КОРЕЛЯЦІЇ, тобто

$$\rho_{xy} = \text{cov}(X'Y') = M \left[\left(\frac{X - MX}{\sigma_x} \right) \left(\frac{Y - MY}{\sigma_y} \right) \right] = \frac{M(XY) - MXMY}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.85)$$

або

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(XY)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4.86)$$

Коефіцієнт кореляції вказує на тісноту зв'язку між двома випадковими величинами й змінюється від -1 до $+1$. При прямій лінійній залежності, тобто коли зі зростанням значень x_i збільшуються значення y_i , $\rho_{xy} = +1$. При зворотній лінійній залежності, тобто коли зі зростанням значень x_i , значення y_i зменшуються $\rho_{xy} = -1$. Якщо x та y незалежні, то $\rho_{xy} = 0$.

При $\rho_{xy} \neq 1$ кожному значенню x_i відповідає декілька значень y_i . УМОВНИМ СЕРЕДНІМ x_y називається середнє значення з величин x_i при даному значенні y_i . УМОВНИМ СЕРЕДНІМ $\bar{Y}_x$ називається середнє значення з величин y_i при даному значенні x_i . Дві лінії, що

з'єднують всі значення $\bar{Y}_x$ й $\bar{X}_y$, називаються ЛІНІЯМИ РЕГРЕСІЇ.

Коефіцієнт кореляції $\rho_{xy} > 0$, коли зі збільшенням значень x_i значення умовних середніх $\bar{Y}_x$ збільшуються.

Коефіцієнт кореляції $\rho_{xy} < 0$, коли зі збільшенням значень x_i значення умовних середніх $\bar{Y}_x$ зменшуються.

Якщо лініями регресії є прямі лінії, то кореляція називається прямолінійною.

Нижче обмежимося розглядом тільки прямолінійної кореляції.

Теоретичне обчислення коефіцієнта кореляції за формулою (4.85) в більшості випадків викликає багато труднощів. Тому для його визначення зазвичай використовують результати експериментальних даних.

Визначення коефіцієнта кореляції за виборкою невеликого об'єму

Для вибору невеликого об'єму коефіцієнт кореляції зручно визначати за формулою:

$$r_{xy} = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}, \quad (4.87)$$

де r_{xy} – емпіричний коефіцієнт кореляції.

ПРИКЛАД

Необхідно виявити наявність кореляційного зв'язку між розмірами моделей і виливків до них. Шляхом вимірювань визначені відхилення від номіналів висот моделей для 11 зразків (x_i) та виливків (y_i). Послідовність обчислень ясна з табл. 4.19.

Таблиця 4.19 – Кореляційний зв'язок між розмірами моделей і виливків до них

№№ зразка	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	0,90	-0,30	-0,2700	0,8100	0,0900
2	1,22	0,10	0,1220	1,4889	0,0100
3	1,32	0,70	0,9240	1,7424	0,4900

Продовження табл. 4.19

№№ зразка	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
4	0,77	-0,28	-0,2156	0,5929	0,0784
5	1,30	-0,25	-0,3250	1,6900	0,0625
6	1,20	0,02	0,0240	1,4400	0,0004
7	1,32	0,37	0,4884	1,7424	0,1369
8	0,95	-0,70	-0,6650	0,9025	0,4900
9	1,45	0,55	0,7975	2,1025	0,3025
10	1,30	0,35	0,4550	1,6900	0,1225
11	1,20	0,32	0,3840	1,4400	0,1024
Сума	12,93	0,88	1,7193	15,6411	1,8856

Підставимо знайдені суми у формулу (4.87)

$$r_{xy} = \frac{11 \cdot 1,7193 - 12,93 \cdot 0,88}{\sqrt{11 \cdot 15,6411 - (12,93)^2} \cdot \sqrt{11 \cdot 1,8856 - (0,88)^2}} = 0,76.$$

5 КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Контрольні завдання виконуються з метою теоретичних знань та практичних вмінь, одержаних внаслідок вивчення дисципліни.

Загальні вказівки

Внаслідок виконання контрольних завдань студенти повинні:

- знати особливості проведення НДР, правила оформлення самостійної роботи і методику планування активних експериментів;
- уміти застосовувати методи ПФЕ і ДФЕ, використовувати рандомізацію проб, виявляти статистичну значущість коефіцієнтів, регресії, перевіряти адекватність моделі за допомогою критеріїв Стюдента і Фішера, будувати плани “крутого сходу” по поверхні відгуку і робити висновки за результатами експерименту.

Завдання і методичні вказівки до виконання контрольної роботи

Контрольна робота містить теоретичне питання і рішення задачі. Перелік теоретичних питань приведений в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Перелік теоретичних запитань для контрольної роботи

№ завдання	Запитання
1	Що називається наукою?
2	Що вивчають технічні науки?
3	Сформулюйте суть НТР.
4	Що таке дослід?
5	Головні напрями ИДР у ливарному виробництві.
6	Етапи НДР.
7	Що таке первинна і вторинна інформація?
8	Що таке УДК і МВК?
9	Для чого потрібна статистична обробка?
10	Що таке регресія?
11	Метод вирівнювання нелінійних залежностей.
12	Що таке кореляція?
13	Як перевірити закономірність кореляційного зв'язку?
14	Що таке пасивний експеримент?
15	Що таке активний експеримент?
16	Куди веде шлях по градієнту?
17	Що таке ПФЕ?
18	Як будується матриця ПФЕ?
19	Як утворюється дробова репліка?
20	Що такеДФЕ?
21	Що таке генеруюче співвідношення?
22	Що таке визначальний контраст?
23	Що таке рандомізація?
24	Як оцінити статистичну значущість експериментів лінійної регресії?
25	Як визначається надійний, інтервал?
26	Як перевіряється адекватність моделі?
27	Для чого скорочуються кроки “крутого сходу”?
28	Стратегія експерименту.
29	В чому суть МНК?
30	Для чого потрібний експеримент?

Розрахункові завдання приведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Завдання для проведення ДФЕ 2^{4-1} з визначальним контрастом $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4$

№№ зав-дань	Значення факторів-аргументів				Параметр оптимізації	Значення параметра оптимізації на основному рівні таких проб							
	x_1	x_2	x_3	x_4		1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,8-3,5 % Cr	0,7-1,0 % Si	0,8-1,1 % Ni	0,4-0,6 % V	σ_B , кг/мм ²	70	71	74	76	75	77	73	72
2	0,6-0,7 % C	0,2-0,5 % P	0,1-0,3 % Cu	5,5-7,0 % Mn	$\sigma_{0,2}$, кг/мм ²	90	91	89	88	92	87	86	93
3	0,2-0,4 % C	14-17 % Cr	15-18 % Ni	0,4-0,6 % Nb	σ_T , кг/мм ²	60	58	52	59	51	50	55	56
4	1,8-2,0 % C	11-13 % Cr	0,2-0,5 % V	0,1-0,3 % Al	HB, мм	135	140	139	134	132	130	138	136
5	0,5-0,6 % C	0,9-1,21 % Cr	0,8-1,1 % Mn	0,2-0,3 % Mo	HB, мм	210	216	218	220	217	214	212	215
6	0,1-0,2 % C	0,3-0,4 % Mo	5-6 % Co	0,6-1,0 % Al	ψ , %	82	80	83	85	90	89	88	86
7	0,3-0,4 % C	13-15 % Cr	13-15 % Ni	1-2 % Si	ψ , %	86	88	93	89	90	91	92	87
8	0,5-0,6 % C	5-6 % Cr	2-3 % Si	0,8-1,2 % W	δ , %	60	69	63	68	60	65	66	61
9	0,1-0,2 % C	17-19 % Cr	11-13 % Ni	2-3 % Mo	δ , %	75	78	85	80	82	83	84	77
10	1,0-1,4 % C	11-13 % Mn	0,1-0,2 % P	0,1-0,3 % S	KCU, МДж/дм ²	100	110	120	90	115	95	105	110
11	11-13 % Mn	2-3 % Cr	3-4 % Ni	0,9-1,2 % C	KCU, МДж/дм ²	70	80	71	79	72	78	75	76
12	1-2 % W	0,1-0,3 % B	0,7-1,1 % Si	0,2-0,4 % Mo	KCU, МДж/м ²	110	120	111	119	118	112	115	116

Продовження табл. 5.2

№№ зав-дань	Значення факторів-аргументів				Параметр оптимізації	Значення параметра оптимізації на основному рівні таких проб							
	x_1	x_2	x_3	x_4		1	2	3	4	5	6	7	8
13	0,4-0,5 % C	1,6-2,3 % Cr	0,2-0,4 % Mo	0,4-0,8 % V	KCU, МДж/м ²	60	65	56	59	62	64	58	63
14	0,2-0,3 % C	1,0-1,4 % Mn	0,8-1,2 % W	0,1-0,2 % Mo	$I_{спиралі}$, см	75	77	73	74	70	72	76	71
15	0,8-1,2 % W	3-5 % Co	0,3-0,5 % Nb	0,1-0,3 % Ti	$I_{спиралі}$, см	88	92	89	91	83	86	90	87
16	0,3-0,4 % C	0,8-1,2 % Cr	0,7-1,1 % Mn	0,9-1,4 % Si	$d_{зерна}$, мкм	57	60	59	65	58	63	55	62
17	11-13 % Cr	20-23 % Ni	0,1-0,3 % Cu	0,3-0,6 % Al	σ_B , кг/мм ²	78	75	88	87	90	72	87	81
18	0,1-0,3 % C	0,1-0,2 % As	0,2-0,4 % Se	0,1-0,3 % S	$\sigma_{0,2}$, кг/мм ²	48	50	53	51	52	49	57	47
19	1,0-1,2 % C	17-19 % Cr	0,2-0,4 % Mo	0,1-0,2 % N	ψ , %	60	64	70	68	62	69	67	65
20	1,1-1,4 % C	17-20 % Cr	0,8-1,0 % Nb	0,1-0,4 % V	δ , %	48	42	50	49	40	43	44	47
21	0,2-0,3 % C	1-2 % Cr	7-8 % W	0,1-0,3 % V	KCU, МДж/м ²	92	100	90	99	98	93	94	96
22	0,1-0,2 % C	2-3 % Si	0,1-0,3 % S	0,2-0,5 % Al	KCU, МДж/м ²	70	82	80	84	85	75	72	74
23	1,0-1,1 % C	4-5 % Cr	5-6 % W	0,4-0,6 % Mo	HB, мм	160	176	165	179	162	175	180	171
24	0,4-0,6 % C	0,1-0,4 % Mo	1,5-2,1 % Ni	0,6-1,0 % Cr	$I_{спиралі}$, см	88	90	95	82	100	85	80	98

Продовження табл. 5.2

№№ зав-дань	Значення факторів-аргументів				Параметр оптимізації	Значення параметра оптимізації на основному рівні таких проб							
	x_1	x_2	x_3	x_4		1	2	3	4	5	6	7	8
25	0,5-0,9 % Mn	0,2-0,5 % Si	0,1-0,3 % V	0,2-0,4 % C	σ_B , кг/мм ²	90	104	102	100	97	105	103	95
26	0,15-0,25 % C	0,8-1,01 % Mn	0,1-0,5 % Si	0,2-0,4 % Mo	$\sigma_{0,2}$, кг/мм ²	60	70	67	65	72	75	74	62
27	0,1-0,2 % C	1,3-1,7 % Cr	3,8-4,3 % Ni	0,8-1,3 % W	ψ , %	51	59	48	58	60	49	57	45
28	0,4-0,5 % C	0,8-1,2 % Cr	0,6-1,0 % Ni	0,3-0,6 % Mo	δ , %	45	58	48	49	60	59	51	55
29	0,1-0,2 % C	17-20 % Cr	8-11 % Ni	0,2-0,6 % Ti	KCU, МДж/м ²	110	105	94	91	90	100	101	95
30	0,4-0,6 % C	12-16 % Cr	30-40 % Ni	1-2 % Si	HB, мм	130	138	155	150	145	139	134	148

Контрольна робота оформлюється відповідно СТП15-96, як мінізвіт з НДР, який складається з таких частин: титульний лист; реферат; зміст; вступ, де приводяться докази необхідності проведення експериментів; методика планування, яка, в свою чергу, складається з відповіді на теоретичне запитання з табл. 5.1 і скороченого опису математичного апарату для виконання розрахункового завдання з табл. 5.2; ПФЕ 2^4 зі складанням матриці і квадратичної моделі в умовному виді; ДФЕ 2^{4-1} зі складанням таблиці вихідних даних, рандомізацією проб, складанням піврепліки з визначальним контрастом будівництвом лінійної моделі, виявленням статистичної значущості моделі та складанням скороченого рівняння регресії; перевірка адекватності моделі за допомогою критерію Фішера; “крутий, схід” по поверхні відгуку зі складанням плану наступного експерименту відповідно до нових інтервалів варіювання та знаків коефіцієнтів скороченої моделі і висновки за результатами експерименту; перелік посилань.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА

1. Грушко И. М. Основы научных исследований [Текст] / И. М. Грушко, В. М. Сиденко – Харьков : Вища школа, 1983. – 224 с.
2. Романенко В. Н. Книга для начинающего исследователя-химика [Текст] / В. Н. Романенко, А. Г. Орлов, Г. В. Никитина – Л. : Химия, 1987. – 280 с.
3. Винарский М. С. Планирование эксперимента в технологических исследованиях [Текст] / М. С. Винарский, М. В. Лурье – К. : Техніка, 1975. – 168 с.

ДОДАТКОВА

1. Хазан В. Б. Технічні науки у системі наукового знання [Текст] / В. Б. Хазан – К. : Знання, 1989. – 48 с.
2. Основы научных исследований в литейном производстве [Текст] / Под ред. А. Е. Кривошеева. – К. : Вища школа, 1979. – 168 с.
3. Барабашук В. И. Планирование эксперимента в технике [Текст] / В. И. Барабашук, Б. П. Креденцер, В. И. Мирошниченко – К. : Техніка, 1984. – 290 с.
4. Вирченко Н. А. Графики функций [Текст] / Н. А. Вирченко, И. М. Ляшко, К. И. Швецов – К. : Наукова думка, 1979. – 320 с.
5. Большей Л. Н. Таблицы математической статистики [Текст] / Л. Н. Большей, Н. В. Смирнов – М. : Наука, 1983. – 416 с.
6. Чус А. В. Основы технического творчества [Текст] / А. В. Чус, В. Н. Данченко – К. : Вища школа, 1983. – 184 с.
7. СНІ 15-96 Стандарт підприємства. Пояснювальна записка до курсових і дипломних проектів – Запоріжжя : ЗДТУ, 1997.

Додаток А

Програма для знаходження локального максимуму багатовимірної функції на комп'ютерній мові БЕЙСІК

Аргументи функції – елементи одновимірного дійсного масиву “x”. Вхідні дані для розрахунку – вид функції (рядок 2), кількість аргументів (рядок 3), початковий крок і точність пошуку (рядок 5).

```

10 DIM X(10): DEF INT I,J,N: GOTO 30
20 Y=FNY(X(1),X(2),...,X(N)): RETURN
30 N=...: REM КІЛЬКІСТЬ АРГУМЕНТІВ ФУНКЦІЇ
40 FOR I=1 TO N: INPUT X(I): NEXT
50 GOSUB 20: YMAX=Y: INPUT D, DMIN
60 IF D<=DMIN GOTO 190
70 P=0: REM ПОЧАТОК ВКЛАДЕНОЇ ІТЕРАЦІЇ
80 FOR I=1 TO N
90 X(1)=X(I)-D: GOSUB 20
100 IF Y>YMAX THEN J=I: P=-D: YMAX=Y
110 X(1)=X(1)+2*D: GOSUB 20
120 IF Y>YMAX THEN J=I: P=D: YMAX=Y
130 X(1)=X(1)-D
140 NEXT
150 X(J)=X(J)+P
160 IF P GOTO 70
170 D=D/2: REM ЗМЕНШЕННЯ КРОКУ
180 GOTO 60: REM КІНЕЦЬ ЗОВНІШНІЙ ІТЕРАЦІЇ
190 FOR I=1 TO N: X(I): NEXT

```

Результат розрахунку виводиться оператором рядка 19.

Додаток Б

**Програма кореляційно-регресійного аналізу на комп'ютерній мові БЕЙСІК
“BCORREG”**

Програма використовується для знаходження параметрів рівнянь парній лінійній регресії типу

$$Y = A + BX$$

та статистичного аналізу якості металопродукції.

Програма дозволяє одержати математичні сподівання та дисперсії змінних “x” і “y”, коефіцієнти кореляції між ними і значущість цих коефіцієнтів. Дані вводяться з дисплею операторами 60 ... 100. Об'єм попередньо не загадується ($N \leq 256$). Розраховані дані у виді таблиці з'являються на екрані дисплею. Це надійні інтервали незалежної змінної “ x_i ” та експериментально розраховані значення “ y_i ”.

Програма працює у діалоговому режимі.

```

5 REM “PROGRAMMA BCORREG”
10 REM “КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ”
20 REM “ВВІД ДАНИХ”
30 DIM X(225), Y(225), Y4(225), Y5(225), Y6(225)
35 DIM T(9), R1(9)
40 DATA 12.71,4.3,3.18,2.78,2.57,2.45,2.37
41 DATA 2.31,2.26,0.997,0.95,0.88,0.81,0.75
42 DATA 0.71,0.67,0.63,0.6
50 V1=0 \ V2=0 \ W1=0 \ W2=0 \ Z=0 \ Z1=0
60 FOR I=1 TO 225
70 "ВВЕСТИ X(“;I,”)”
80 INPUT X(I)
90 PRINT “ВВЕСТИ Y(“;I,”)”
100 INPUT Y(I)
110 V1=V1 + X(I) \ V2=V2 + X(I)*X(I)
120 W1=W1 + Y(I) \ W2=W2 + Y(I)*Y(I)
130 Z=Z+X(I)*Y(I) \ N=1
140 NEXT I
150 N1=N – 1 \ N2=N – 2 \ X1=V1/N \ Y1=W1/N
170 S1=V2 – V1*V1/N \ S2=W2 – W1*W1/N

```

```

190 X2=S1/N1 \ Y2=S2/N1 \ X3=SQR(X2)
200 Y3=SQR(Y2) \ S3=Z - V1*W1/N
220 R=S3/SQR(S1*S2)
230 B=S3/S1 \ A=Y1 - B*X1
250 PRINT
260 PRINT "*"...*" 1)
280 PRINT "ТОЧКОВІ ВІДМІТКИ ПАРАМЕТРІВ"
290 PRINT "*"...*" 1)
300 PRINT "МАТ. СПОДІВАННЯ: ХСР="; YCP="; Y1
320 PRINT "ДИСПЕРСІЇ: DX="; X2; "DY="; Y2
330 PRINT "СЕР. КВАДР. ВІДХИЛ: S[="; X3; SY=" Y3
340 PRINT "КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ R=»; R
350 PRINT "РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ: Y=BX+A"
360 PRINT "ПАРАМЕТРИ: B="; B;"A="; A
370 PRINT "*"...*" 1)
390 STOP
400 FOR I=1 TO N \ Y5(I)=A+B*X(I)
410 Z1=1+(Y(I) - Y5(I))*(Y(I) - Y5(I)) \ NEXT I
440 S4=1/(N - 2) \ S5=SQR(S4)
460 C0=S5*SQR(V2/(N*S1)) \ C1=S5/SQR(S1)
480 IF N2>9 GOTO 540
490 FOR I=1 TO 9 \ READ T(I) \ NEXT I
520 T1=T(N2) \ GOTO 550
540 T1=1.95+2.8/N2
550 T2=ABS(A)/C0 \ T3=ABS(B)/C1 \ A1=A-T1*C1
570 A2=A+T1*C0 \ B1=B - T1*C1 \ B2=B+T1*C1
580 IF N2>3GOTO 610
590 FOR I=1 TO 9 \ READ R1(I) NEXT I
600 R2=R1(N2) \ GOTO 615
610 R2=0.21+3/73/N2
615 Z2=0.5*LOG((1+R)/(1-R)) \ Z3=1/SQR(N - 3)
620 Z4=Z2 - 1.96*Z3 \ Z5=Z2+1.96*Z3
630 DEF FNT(Q)=(EXP(Q)-EXP(-Q))/EXP(Q)+EXPT( - Q))
635 R3=FNT(Z4) \ R4=FNT(Z5)
640 IF N1 >9 GOTO 655 \ T4=T(N1) \ GOTO 660
655 T4= 1;95+2.8/N1
660 E=X3*T4/SQR(N) \ X4=X1 - E \ X5=X1+E
670 X6=X3*(0.857-0.407/N1) \ X7=X6*X6

```

```

680 X8=X3*( 1+10.63/N 1) \ X9=X8*X8
690 PRINT "*" ... "*" 1)
691 PRINT "РЕЗУЛЬТАТ ІНТЕРВАЛЬНОГО"
692 PRINT "СПОДІВАННЯ ПРИ НАДІЙНІЙ"
693 PRINT "ЙМОВІРНОСТІ P=0.95"
694 PRINT "*" ... "*" 1)
700 IF R2>=R GOTO 715
705 PRINT "КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ НЕЗНАЧУЩИЙ"
710 GOTO 720
715 PRINT "RМІН= "; R3; "RМАКС= "; R4
720 PRINT "XСЕР.МІН="; X4; "XСЕР.МАКС= "; X5
725 PRINT "DX МІН= "; X7; "DX МАКС="; X9
730 PRINT "СКО X МІН= "; X6; "СКО X МАКС="; X8
735 IF T2<=T1 GOTO 770 \ IF T3<=T1 GOTO 770
745 PRINT "A МІН= "; A1; "A МАКС=" A2
750 PRINT "B МІН= "; B1; "B МАКС= "; B2
765 GOTO 775
770 PRINT "КОЕФІЦІЄНТИ А ТА В НЕЗНАЧУЩІ"
775 PRINT
780 PRINT "*" ... "*" 1)
781 PRINT "ЯКЩО ДОВІРИТЕЛЬНІ ІНТЕРВАЛИ"
782 PRINT "РЕГРЕСІЇ СПОДІВАННІ"
783 PRINT "TO GOTO 800"
784 PRINT "*" ... "*" 1)
794 STOP
800 S6=T1*S5
810 FOR 1=1 TO N \ D1=X(I)-X1 \ D2=D1*D1
830 D3=S6*SQR(D2/(N*X2)+1/N)
840 Y4(I)=Y5(I)-D3 \ Y6(I)=Y5(I)+D3 \ NEXT I
860 FOR 1=0 TO 16
880 PRINT "*" ... "*" 1)
890 PRINT "X ҀЕКСП ҀМІН ҀСР ҀМАКС"
895 PRINT "*" ... "*" 1)
900 FOR J=1 TO 15 \ J1=J+I*15
910 PRINT X(J1), Y(J1), X4(J1), Y5(J1), Y6(J1)
920 NEXT J
930 PRINT "*" ... "*" 1)
931 PRINT "ПОСЛІДОВНЕ ВИВЕДЕННЯ ЗНАЧЕНЬ"

```

```
932 PRINT "GOTO 950"  
933 PRINT"*...*" 1)  
940 STOP  
950 NEXT I  
960 END
```

Рядок з 33 “зірочок”

Додаток В

Значення критерію Фішера для рівнів значущості: $\alpha=0,05/\alpha=0,01$

f_2	1	2	3	4	5	6	10	30	∞
f_1									
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	242 6056	250 6258	254 6366
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,3 99,3	19,33 99,33	19,39 99,40	19,46 99,47	19,5 99,5
3	10,13 34,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,78 27,23	8,62 26,50	8,53 26,12
4	7,71 21,2	6,59 18,0	6,50 16,69	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,21	5,96 14,54	5,74 13,83	5,63 13,46
5	6,61 16,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	5,05 10,97	4,95 10,67	4,74 10,05	4,50 9,38	4,36 9,02
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,98	4,53 9,15	4,39 8,75	4,28 8,47	4,06 7,87	3,81 7,23	3,67 6,88
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,98 7,46	3,87 7,19	3,63 6,62	3,38 5,98	3,23 5,65
8	5,52 11,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,63	3,58 6,37	3,34 5,82	3,08 5,20	2,93 4,86
9	5,12 10,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,13 5,26	2,86 4,64	2,71 4,31
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	2,97 4,85	2,70 4,25	2,54 3,91
15	4,54 8,58	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,89	2,90 4,56	2,79 4,32	2,55 3,80	2,25 3,20	2,07 2,87
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71 4,10	2,60 3,87	2,35 3,37	2,04 2,77	1,84 2,42
30	4,16 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,53 3,70	2,42 3,47	2,16 2,98	1,84 2,38	1,62 2,01
∞	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,21 3,02	2,09 2,80	1,83 2,32	1,46 1,79	1,00 1,00