УДК: 531. 31/39:519.85

А. В. Куземко[1], канд. физ.-мат. наук И. А. Костюшко[2]

[1] Национальный технический университет, [2] Национальный университет; г. Запорожье

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ МОМЕНТОВ

Для динамически симметричного космического аппарата решена задача стабилизации относительного положения равновесия с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих. В линейной постановке получены условия стабилизации постоянными моментами. В нелинейной постановке показана невозможность стабилизации постоянными моментами, получены условия стабилизации внешними моментами с добавлением нелинейных составляющих.

***Ключевые слова**: устойчивость, космический аппарат, функция Ляпунова, первое приближение, внешние моменты.*

Устойчивость неконсервативных систем – один из разделов механики, имеющий важное практическое значение и вызывавший интерес на протяжении всего минувшего столетия [1, 2]. Задачи исследования устойчивости при рассмотрении систем со следящими и реактивными силами, при проектировании современных конструкций в машиностроении, крупногабаритных космических конструкций. Эти же вопросы возникают и при решении задач управления, поскольку нагрузки, возникающие в объектах систем автоматического регулирования, в большинстве случаев представляют собой неконсервативные силы. Поэтому анализ и обнаружение новых качественных механических эффектов поведения систем под действием неконсервативных нагрузок представляет значительный интерес.

Уравнения движения космического аппарата

Рассматривается движение динамически симметричного космического аппарата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$. Два главных центральных момента равны $A = B$, момент инерции относительно оси симметрии равен C. За обобщенные координаты примем углы Эйлера θ, φ, ψ.

Функция Лагранжа системы имеет вид [3]

$$L = \frac{1}{2}A\begin{pmatrix}\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2 - \omega_0^2\cos^2\psi\sin^2\theta + \\ + \dot\psi\omega_0\cos\psi\sin(2\theta) + 2\omega_0\dot\theta\sin\psi\end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi - \omega_0\cos\psi\sin\theta)^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2(C-A)\cos^2\theta.$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t. После исключения циклической координаты φ [4] уравнения движения космического аппарата приводятся к виду:

$$\begin{cases} x_1'' - \frac{1}{2}x_2'^2\sin 2(x_1+\theta_0) + x_2'\cos(x_2+\psi_0) - \\ - x_2'\cos 2(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0) + \\ + \frac{1}{2}\sin 2(x_1+\theta_0)\cos^2(x_2+\psi_0) + \\ + \beta[x_2'\sin(x_1+\theta_0) + \cos(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0)] - \\ \frac{3}{2}(\alpha-1)\sin 2(x_1+\theta_0) = m_\theta, \\ x_2''\sin^2(x_1+\theta_0) + x_1'x_2'\sin 2(x_1+\theta_0) + \\ + x_1'\cos 2(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0) - \\ - x_1'\cos(x_2+\psi_0) - \frac{1}{2}\sin^2(x_1+\theta_0)\sin 2(x_2+\psi_0) - \\ - \beta\sin(x_1+\theta_0)\left[x_1' + \sin(x_2+\psi_0)\right] = m_\psi, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 = \theta - \theta_0$, $x_2 = \psi - \psi_0$, $\alpha = \dfrac{C}{A}$, $\beta = \dfrac{C\Omega}{A\omega_0}$, $C\Omega$ – циклическая постоянная, отвечающая координате φ. Штрих означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. Выражения для безразмерных стабилизирующих моментов имеют вид:

$$m_\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta_0\cos^2\psi_0 + \beta\cos\theta_0\cos\psi_0 -$$
$$-\frac{3}{2}(\alpha-1)\sin 2\theta_0 - \gamma_1 x_1'^3 - d_1 x_2'^2 x_1' - l_1 x_1^2 x_1',$$

$$m_\psi = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0\sin 2\psi_0 - \beta\sin\theta_0\sin\psi_0 -$$
$$-\gamma_2 x_2'^3 - d_2 x_1'^2 x_2' - l_1 x_2^2 x_2', \tag{2}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, d_1, d_2, l_1, l_2$ – положительные постоянные. Заметим, что каждой паре значений θ_0 и ψ_0 соответствуют выражения для m_θ и m_ψ, которые в свою очередь определяют ориентацию космического аппарата.

Система (1) имеет тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' = 0$, устойчивость которого исследуется в дальнейшем.

Исследование устойчивости в первом приближении

Разделяя нелинейные слагаемые системы (1) в ряды Маклорена, ограничиваясь линейными слагаемыми, получаем систему первого приближения:

$$MX'' + GX' + KX = 0, \tag{3}$$

где

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \sin^2\theta_0\end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix}0 & g\\-g & 0\end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix}k_1 & k_2\\k_2 & k_3\end{pmatrix}.$$

Здесь g, k_1, k_2, k_3 – определенные тригонометрические функции углов θ_0 и ψ_0, линейным образом зависящие от выбора параметров α и β.

Отметим, что матрица M в (3) является положительно определенной.

В случае если матрица K положительно определена, то нулевое положение равновесия системы (3) устойчиво, так как в этом случае нулевое положение потенциальной системы $MX'' + KX = 0$ устойчиво и матрица G не влияет на устойчивость [5].

Условия положительной определенности матрицы K:

$$k_1 > 0,\ k_1k_3 - k_2^2 > 0. \tag{4}$$

В случае если матрица K отрицательно определена, то нулевое положение равновесия потенциальной системы $MX'' + KX = 0$ неустойчиво. Однако оба собственных значения матрицы K отрицательны, то есть степень неустойчивости четна, а это означает, что устойчивость равновесия системы (3) зависит от матрицы G и в системе возможна гироскопическая стабилизация [5].

Условия отрицательной определенности матрицы K:

$$k_1 < 0,\ k_1k_3 - k_2^2 > 0. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение системы (3) имеет вид:

$$\lambda^4 \sin^2\theta_0 + b\lambda^2 + c = 0\,, \tag{6}$$

где

$$b = k_1 \sin^2\theta_0 + k_3 + g^2,\ c = k_1 k_3 - k_2^2.$$

Уравнение (6) биквадратное. Для устойчивости системы (3) необходимо, чтобы уравнение (6) имело две пары чисто мнимых корней, для этого необходимо выполнение условий:

$$b > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4c\sin^2\theta_0 > 0. \tag{7}$$

Таким образом, при выполнении условий (5) и (7) система (3) устойчива и устойчивость достигнута за счет гироскопической стабилизации.

В случае если не выполняются условия (4), (5), то матрица K не является знакоопределенной и нулевое положение равновесия потенциальной системы неустойчиво. Матрица K при этом имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение, т. е. степень неустойчивости нечетна, следовательно, положение равновесия $X = X' = 0$ системы (3) будет неустойчивым при любом выборе матрицы G [5].

Критический случай двух пар чисто мнимых корней

В случаях знакоределенной матрицы K характеристическое уравнение (6) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$. Таким образом, из устойчивости в первом приближении нельзя делать вывод об устойчивости нелинейной системы. Для исследования этого критического случая необходимо использовать также нелинейные слагаемые системы (1). Запишем систему (1) в нормальной форме, полагая $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1', y_4 = x_2'$.

Разлагая нелинейные слагаемые системы (1) в ряды Маклорена, ограничиваясь членами третьего порядка включительно, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_3; \\ y_2' = y_4; \\ y_3' = -k_1 y_1 - k_2 y_2 - g y_4 + Y_{12} + Y_{13} + \ldots; \\ y_4' = \dfrac{1}{\sin^2\theta_0}\left(-k_2 y_1 - k_3 y_2 + g y_3\right) + Y_{22} + Y_{23} + \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Здесь многоточие означает совокупность слагаемых порядка не ниже четвертого; Y_{12}, Y_{22} содержат квадратичные, а Y_{13} и Y_{23} кубические слагаемые аргументов $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$ $Y_{13}(y_1, y_2, y_3, y_4),\ Y_{23}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ – кубические слагаемые, и являются определенными функциями аргументов $\alpha, \beta, \theta_0, \psi_0, \gamma_i, d_i, l_i\ (i = 1{,}2)$.

$$\begin{cases} z_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4, \\ z_2 = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4, \\ z_3 = \overline{z_1} = \overline{c_1} y_1 + \overline{c_2} y_2 + \overline{c_3} y_3 + \overline{c_4} y_4, \\ z_4 = \overline{z_2} = \overline{a_1} y_1 + \overline{a_2} y_2 + \overline{a_3} y_3 + \overline{a_4} y_4. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь черта означает сопряжение, комплексные постоянные $c_i, a_i\ \left(i = \overline{1{,}4}\right)$ выбираем таким образом, чтобы для линейных слагаемых выполнялись соотношения

$$\frac{dz_1}{d\tau} = i\omega_1 z_1,\ \frac{dz_2}{d\tau} = i\omega_1 z_2,\ \frac{dz_3}{d\tau} = -i\omega_1 z_3,\ \frac{dz_4}{d\tau} = -i\omega_2 z_4.$$

Обратная замена переменных может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} y_1 = m_{11} z_1 + m_{12} z_2 + m_{13} z_3 + m_{14} z_4, \\ y_2 = m_{21} z_1 + m_{22} z_2 + m_{23} z_3 + m_{24} z_4, \\ y_3 = m_{31} z_1 + m_{32} z_2 + m_{33} z_3 + m_{34} z_4, \\ y_4 = m_{41} z_1 + m_{42} z_2 + m_{43} z_3 + m_{44} z_4. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $m_{ij}\ \left(i, j = \overline{1{,}4}\right)$ – известные комплексные величины.

В результате замены переменных (10) система (8) принимает вид:

$$\begin{cases} z_1' = i\omega_1 z_1 + Z_{12}(z_1, z_2, z_3, z_4) + Z_{13}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \ldots, \\ z_2' = i\omega_2 z_2 + Z_{22}(z_1, z_2, z_3, z_4) + Z_{23}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \ldots, \\ z_3' = -i\omega_1 z_3 + \overline{Z_{12}}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \overline{Z_{13}}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \ldots, \\ z_4' = -i\omega_1 z_4 + \overline{Z_{12}}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \overline{Z_{13}}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \ldots, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$Z_{12}(z_1, z_2, z_3, z_4) = c_3 \widetilde{Y}_{12} + c_4 \widetilde{Y}_{22}\,,$$

$$Z_{13}(z_1, z_2, z_3, z_4) = c_3 \widetilde{Y}_{13} + c_4 \widetilde{Y}_{23}\,,$$

$$Z_{22}(z_1, z_2, z_3, z_4) = a_3 \widetilde{Y}_{12} + a_4 \widetilde{Y}_{22}\,,$$

$$Z_{23}(z_1, z_2, z_3, z_4) = a_3 \widetilde{Y}_{13} + a_4 \widetilde{Y}_{23}$$

функции $\widetilde{Y}_{ij}$ получаются из Y_{ij} путем подстановки (10).

С помощью полиномиального преобразования переменных $(z_1, z_2, z_3, z_4) \to (w_1, w_2, w_3, w_4)$, систему (11) можно привести к нормальной форме:

$$\begin{cases} w_1' = i\omega_1 w_1 + A_{11} w_1^2 \overline{w_1} + A_{12} w_1 w_2 \overline{w_2} + \ldots, \\ w_2' = i\omega_2 w_2 + A_{21} w_1 w_2 \overline{w_1} + A_{22} w_2^2 \overline{w_2} + \ldots \end{cases} \tag{12}$$

Коэффициенты A_{11}, A_{12} равны соответствующим коэффициентам при $z_1^2 z_3,\ z_1 z_2 z_4$ в разложении функции $Z_{13}(z_1, z_2, z_3, z_4)$, коэффициенты A_{21}, A_{22} – коэффициентам при $z_1 z_2 z_3$, $z_2^2 z_4$ в разложении функции $Z_{23}(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Согласно теоремы Каменкова [6, 7], положение равновесия $w_1 = w_2 = w_1' = w_2' = 0$ системы (12) асимптотически устойчиво при одновременном выполнении трех условий:

1) $\operatorname{Re} A_{11} < 0$, 2) $\operatorname{Re} A_{22} < 0$, 3) если $\operatorname{Re} A_{12} > 0$ и $\operatorname{Re} A_{21} > 0$, то $\Delta = \operatorname{Re} A_{11} \operatorname{Re} A_{22} - \operatorname{Re} A_{12} \operatorname{Re} A_{21} > 0$.

В случае строгого нарушения знака хотя бы в одном из приведенных условий, положение равновесия будет неустойчивым.

Аналитический анализ позволяет утверждать, что в случае отрицательной определенности матрицы K, всегда имеет место нарушение условий Каменкова, т.е. нулевое положение равновесия нелинейной системы (1) всегда неустойчиво, в то время как линейной системы первого приближения устойчиво при выполнении условий (5), (7).

В случае положительной определенности матрицы K, всегда можно найти нетривиальные значения параметров задачи γ_i, d_i, l_i $(i = 1, 2)$, при которых условия Каменкова будут выполнены, т. е. имеет место асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (1), при этом в случае $\gamma_i = d_i = l_i = 0$ $(i = 1, 2)$ нулевое положение равновесия системы (1) неустойчиво, или иными словами стабилизация движения постоянными моментами невозможна.

Полученные аналитические результаты подтверждаются численными, что свидетельствует об их достоверности.

Список литературы

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин // М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.
2. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела Т. 3 / А. П. Филин // М. : Наука, 1981. – 400 с.
3. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В. В. Белицкий // М. : Изд-во Московского университета, 1975. – 308 с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев // М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения / Н. Г. Четаев // М. : Наука, 1965. – 208 с.
6. Каменков Г. В. Избранные труды Т. 1 / Г. В. Каменков // Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. – М. : Наука, 1971. – 256 с.
7. Хазин Л.Г. Устойчивость критических положений равновесия / Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль // Пущино, 1985. – 216 с.

Одержано 29.05.2013

Куземко А.В., Костюшко І.А. Стабілізація стаціонарного руху динамічно симетричного космічного апарату за допомогою зовнішніх моментів

Для динамічно симетричного космічного апарату вирішена задача стабілізації відносного положення рівноваги за допомогою зовнішніх моментів, які формуються з постійних і нелінійних складових. У лінійній постановці отримано умови стабілізації постійними моментами. У нелінійній постановці показана неможливість стабілізації постійними моментами, отримано умови стабілізації зовнішніми моментами з додаванням нелінійних складових.

***Ключові слова**: стійкість, космічний апарат, функція Ляпунова, перше наближення, зовнішні моменти.*

Kuzemko A., Kuzemko I. Stabilization of the steady motion of a dynamically symmetric spacecraft with the help of external moments

For a dynamically symmetric spacecraft the problem of stabilization of the relative equilibrium with the external side, the emerging of the permanent and non-linear components is solved. In the linear formulation conditions for the stabilization constant moments were obtained. In the nonlinear setting the impossibility of stabilizing the constant moments, we obtain conditions for the stabilization of the external moments with the addition of non-linear components.

***Key words:** stability, spacecraft, Lyapunov function, the first approximation, the external moments.*