МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання самостійних робіт
з розділу «Елементи аналітичної механіки»
для студентів спеціальності G9 (131)
«Прикладна механіка»
для всіх форм навчання

2025

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт з розділу «Елементи аналітичної механіки» для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» для всіх форм навчання / Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, О.С. Омельченко — Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 97 с.

Укладачі:
д-р ф-м. наук, професор В.І. Пожуєв,
к.т.н., доцент А.В. Пожуєв,
ст. викладач О.С Омельченко

Рецензент,
к.т.н., доцент А.А. Скребцов

Відповідальний
за випуск:,
ст. викладач О.С Омельченко

Затверджено
на засіданні кафедри
«Теоретична та прикладна механіка»
Протокол № 1 від 3.09.2025 р.

Рекомендовано до видання
НМК ТФ
Протокол № 1 від 11.09. 2025р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

У цих методичних вказівках викладено всі основні питання аналітичної механіки, починаючи від класифікації зв'язків і закінчуючи виведенням рівнянь Лагранжа другого роду з їх додатками до дослідження коливань механічних систем з одним ступенем свободи Теоретичні положення ілюструються прикладами, що допоможе вивчити даний розділ.

1. В'ЯЗІ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Матеріальна точка називається **вільною**, або **точкою без в'язей**, якщо її рух визначається лише прикладеними активними силами та початковими умовами. Система, що складається з таких матеріальних точок, називається **вільною механічною системою** (наприклад, Сонячна система).

Якщо рух точки підпорядковано деяким обмеженням, у випадку не залежать від діючих на точку сил, то точка називається **невільною**, а система, що з таких точок, - **невільною механічною системою**. Обмеження, що накладаються на координати та швидкості точок такої системи, називають **в'язями системи**.

Насправді всяка в'язь - є деяке тіло, з яким контактують точки системи під час її русі. Відволікаючись від конкретного виду зв'язку, ми схематично будемо надавати ці в'язі (шарніри, підшипники, площини, нитки, стрижні) у вигляді точок, ліній та поверхонь. Тоді рівняння цих геометричних фігур будуть називатися **рівняннями в'язей**, причому під час руху механічної системи у будь який час координати точок системи повинні задовольняти зазначеним рівнянням [1].

Класифікуємо в'язі.

1. В'язь, яка не змінюється з часом, називається **стаціонарною**. До рівняння такої в'язі час явно не входить. Розглянемо наприклад, кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.1).

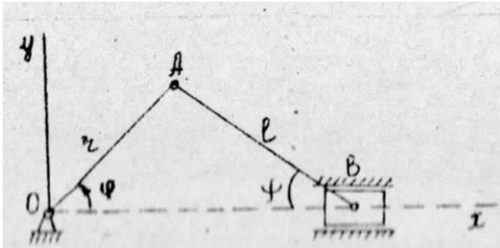

Рисунок 1.1 – Кривошипно-повзунний механізм

На дану систему накладено в'язі:

1) у точці 0 - шарнірно-нерухома опора. Математично така в'язь описується рівняннями:

$$x_0 = 0; y_0 = 0;$$

2) стрижень OA. Математично в'язь описується рівнянням:

$$x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0,$$

яке означає, що $\mathrm{OA} = \mathrm{const}$);

3) стрижень AB. Математично в'язь описується рівнянням:

$$(x_A - x_B)^2 + y_A^2 - \ell^2 = 0;$$

4) напрямні для повзуна В:$y_B = 0$.

Наведені п'ять рівнянь виконуються при будь-якому положенні механізму (будь-якому значенні кута φ). Хоча x_A, y_A, x_B залежать від t, але в рівняння t явно не входить.

В'язь, яка змінюється з часом, називається **нестаціонарною**.

У рівняння такої в'язі явно входить час t. Розглянемо систему: кулька M лежить на поверхні $f(x,y,z)=0$ (рис. 1.2).

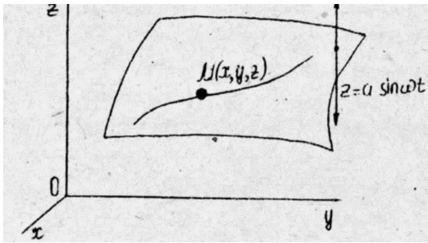

Рисунок 1.2 – Приклад нестаціонарної в'язі

Якщо поверхня нерухома, то координати точки M задовольняють цій умові. Якщо поверхня рухома, наприклад, переміщується вгору-вниз по гармонійному закону, рівняння набуває вигляду:

$$f(x,y,z,t)=0.$$

Така в'язь є **нестаціонарною**.

2. В'язь називається **утримуючою** або **двосторонньою**, якщо вона зберігає свою дію протягом усього часу руху системи, і **неутримуючою**, або **односторонньою**, якщо в деякі проміжки часу вона може припиняти, а потім знову відновлювати свою дію. Рівняння утримючих в'язей записують у вигляді рівностей, неутримуючих – у вигляді нерівностей.

Раніше було розглянуто утримуючі в'язі. **Приклад неутримуючої в'язі**: матеріальні точки M_1і M_2 з'єднані одна з одною стрижнем і переміщуються всередині кругового отвору у вертикальній площині (рис. 1.3). На цю систему накладені в'язі:

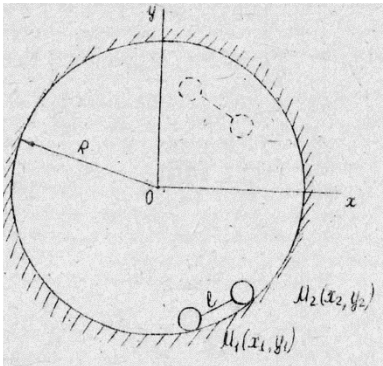

Рисунок 1.3 – Приклад неутримуючої в'язі

1) стрижень M_1, M_2, що не дозволяє точкам змінювати відстань між собою, рівняння в'язей має вигляд:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell^2 = 0;$$

2) неутримуюча в'язь; жодна з точок не може відійти від центру кола на відстань, більшу за радіус, але може наблизитися до точки 0.

Математично в'язь описується нерівностями:

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 \leq 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 - R^2 \leq 0.$$

Іншим прикладом неутримуючої в'язі, що часто зустрічається на практиці, є в'язь у вигляді гнучкої нерозтяжної нитки. Якщо на кульку, що рухається у вертикальній площині, накладена в’язь у вигляді нитки (рис. 1.4), рівняння в’язі має вигляд:

$$x^2 + y^2 - \ell^2 \leq 0.$$

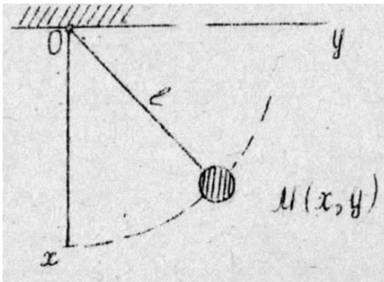

Рисунок 1.4 – Математичний маятник

Ця нерівність відображає той факт, що кулька не може відійти від точки O далі, ніж на довжину нитки, але може наближатися до цієї точки. Якщо замість нитки взяти стрижень, в’язь стане двосторонньою і нерівність заміниться рівністю.

3. В’язі, що накладають обмеження тільки на положення точок системи і не накладають на їхню швидкість, називаються **голономними**, або **геометричними**, У рівняння таких в’язей входять координати точок системи і не входять похідні від цих координат за часом. У всіх наведених раніше прикладах в’язі голономні.

Якщо в’язі накладають обмеження і на швидкості точок системи, всі вони називаються **неголономними, або кінематичними**. У рівняння таких в’язей входять координати точок системи та похідні від цих координат за часом. Ці рівняння є неінтегрованими диференціальними рівняннями (наприклад, в'язі, накладені на ковзан, що ковзає по льоду).

У техніці майже всі в'язі голономні. Система з такою в'яззю називається **голономною механічною системою**.

2. МОЖЛИВІ ПЕРЕМІЩЕННЯ НЕВІЛЬНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Можливим переміщенням невільної механічної системи називаєтьсчя уявне нескінченно мале переміщення її точок, що допускається на даний момент накладеними на систему в'язями, тобто будь яке уявне нескінченно мале переміщення точок системи, яке могли б здійснити ті точки в даний момент з даного їх положень, не порушуючи в'язів.

Можливі переміщення точок системи повинні відповідати **двом умовам**:

1) вони повинні бути нескінченно малі, тому що при кінцевих переміщеннях система перейде в інше положення, де умови рівноваги можуть бути іншими. Наприклад, якщо надати вантажу P (рис. 2.1) кінцеве переміщення по кривій C вниз, то цей вантаж як би перейде на іншу похилу площину, на якій він вже не врівноважуватиметься з вантажем Q. Переміщення вантажу P на нескінченно малу відстань δ_S залишає його на колишній похилій площині;

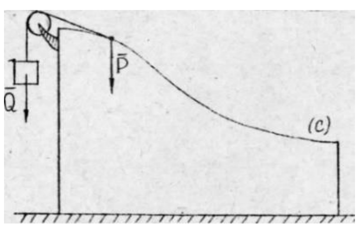

Рисунок 2.1– Можливі переміщення вантажу на похилій площині

2) можливі переміщення повинні бути такими, щоб при них всі накладені на систему в'язі зберігалися. В іншому випадку зміниться вид механічної системи, що розглядається (система стане іншою). Наприклад, якщо розглядати механічну систему з двох матеріальних точок, зв'язаних жорстким стрижнем і що знаходяться на горизонтальній поверхні, то не можна вважати можливим будь-яке переміщення точок, що порушує умову незмінності відстаней між ними, або переміщення, при яких точка відривається від площини.

Поняття можливого переміщення точки чи системи є поняттям чисто геометричним. Можливе переміщення не залежить від діючих на точку чи систему сил, а залежить тільки від характеру накладених в'язів. При можливому переміщенні точки або системи в'язі зберігаються і не перешкоджають цьому чисто геометричному зміщенню.

Не слід змішувати можливе переміщення точки з її дійсним переміщенням, яке обумовлено не тільки характером в'язі, але й силами, що діють на точку, і початковими умовами. Наприклад, якщо матеріальна точка M змушена залишатися на даній поверхні (рис. 2.2), то в довільний фіксований момент часу t в'язь дозволяє переміщатися в будь-якому напрямку уздовж цієї поверхні. Вектор можливого переміщення точки $\delta_{\bar{r}}$ лежить у дотичній площині до даної поверхні.

Якщо поверхня нерухома (стаціонарна в'язь, яка не змінюється з часом), то траєкторія дійсного руху точки лежить на цій поверхні, а вектор дійсного переміщення $d\bar{r}$ спрямований у бік руху точки по дотичній до траєкторії, отже, і до поверхні. Тому напрямок вектора $d\bar{r}$ збігається з одним із напрямків можливих переміщень $\delta\bar{r}$.

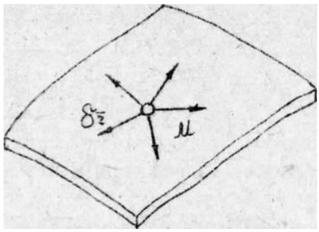

Рисунок 2.2 – Можливі переміщення точки на поверхні

Якщо поверхня сама рухається з часом за певним законом (нестаціонарна в'язь $f(x, y, z, t) = 0$), то траєкторія дійсного руху точки вже не буде лежати в дотичній площині до поверхні. Що ж до можливих переміщень $\delta\bar{r}$, то вони визначаються при зупиненому часі, отже, і при зупинених в'язях. Тому вектори $\delta\bar{r}$ залишаться, як і раніше, в дотичній площині до поверхні і напрям вектора $d\bar{r}$ у цьому випадку не збігається з жодним з напрямків $\delta\bar{r}$.

Якщо дійсне переміщення $d\bar{r}$ точки є диференціал функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$, що визначає закон руху цієї точки, то можливе переміщення $\delta\bar{r}$ тієї ж точки є за своїм змістом варіацією функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$, тому що варіацією функції називається елементарна зміна її значення за рахунок зміни виду самої функції за незмінного значення аргументу (t). Можливе переміщення точки шукали саме при зупиненому часі t , а зміна виду функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$ полягала в тому, що допускали будь-які закони уявного нескінченно малого переміщення точки, сумісного з накладеними на нього вданий момент часу t в'язями.

Аналогічно відомій формулі:

$$\mathrm{d}\bar{\mathrm{r}} = dx\bar{\imath} + dy\bar{\jmath} + dz\bar{k};$$

має місце подання:

$$\delta\bar{r} = \delta x\bar{\imath} + \delta y\bar{\jmath} + \delta z\bar{k},$$

де $\delta x, \delta y, \delta z$ - (проекції вектора $\delta\bar{\mathrm{r}}$ на координатні осі) називаються варіаціями координат x, y, z точки.

Варіювання, тобто взяття варіації функції, виконується формально за тими самими правилами, що і диференціювання, якщо вважати аргумент t сталою. Шляхом такого варіювання рівнянь в'язів можна знайти залежність між варіаціями координат точки, яку ця в'язь накладена.

У випадку для точок і тіл системі може існувати безліч можливих переміщень (переміщення $\delta\bar{\mathrm{r}}$ та $-\delta\bar{\mathrm{r}}$ не вважаються різними). Однак для кожної системи можна вказати незалежні між собою переміщення, число яких дорівнює числу ступенів свободи системи.

3. ІДЕАЛЬНІ В'ЯЗІ

В'язі, накладені на систему, називаються **ідеальними**, якщо сума елементарних робіт реакцій всіх накладених на систему в'язей на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0, \qquad (1)$$

де $\bar{R}_k$ - рівнодіюча всіх реакцій в'язей, накладених на k-ю точку;

$\delta\bar{r}_k$ - будь-яке можливе переміщення k-ї точки системи.

Наведемо приклади ідеальних зв'язків, котрим виконується умова (1).

Приклад 1. Абсолютно гладкі поверхні та лінії (напрямні) (рис. 3.1). Якщо абсолютно гладке тіло 1 ковзає по нерухомому абсолютно гладкому тілу 2, то в цьому випадку виникає лише нормальна реакція $\bar{N}$, перпендикулярна до будь якого можливого зміщення $\delta\bar{r}$ тіла 1, тому $\bar{N} \cdot \delta\bar{r} = 0$.

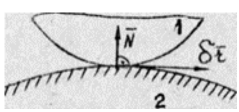

Рисунок 3.1 – Абсолютно гладка поверхня

Приклад 2. В'язі, накладені циліндричне тіло, що котиться без ковзання по нерухомій абсолютно твердій шорсткій поверхні (рис. 3.2). Тому що в цьому випадку точка P є миттєвий центр швидкостей для циліндра, то $v_P = 0$. Але тоді $\delta\bar{r}_P = \bar{v}_P dt = 0$ і

$$\bar{N} \cdot \delta\bar{r}_P = 0, \qquad \bar{F}_т \cdot \delta\bar{r}_P = 0.$$

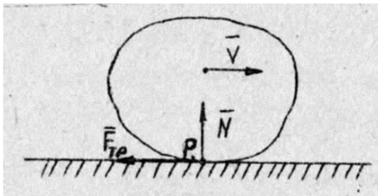

Рисунок 3.2 – В'язі, що накладені на тіло, яке котиться

Приклад 3. Ідеальні (без тертя) шарніри або підшипники (рис. 3.3). Якщо не враховувати момент тертя в шарнірі, то сила $\bar{R}_A$, як прикладена в нерухомій точці, при будь-яких поворотах тіла навколо точки A роботи не виконує і тому такий зв'язок є ідеальним.

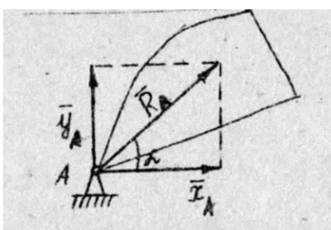

Рисунок 3.3 – Ідеальний шарнир

Приклад 4. В'язь у вигляді жорсткої незмінної системи (абсолютно тверде тіло, жорсткі стрижні, що не деформуються і т.п.). Розглянемо дві матеріальні точки, пов'язані жерстким невагомим і нерозтяжним стрижнем (рис. 3.4), покажемо, що умова (1) тут виконується. Реакції стрижня на матеріальні точки спрямовані по стрижню, причому $\bar{R}_B = -\bar{R}_A$. З умови нерозтяжності стрижня маємо:

$$(\bar{r}_A - \bar{r}_B)^2 = (AB)^2, \;\; AB = const.$$

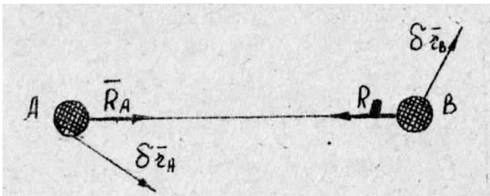

Рисунок 3.4 – В’язь – жорсткий стрижень

Варіюючи це рівняння в’язі, отримуємо:

$$2(\bar{r}_A - \bar{r}_B) \cdot (\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B) = 0,$$

тобто вектори $(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ і $(\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B)$ взаємно перпендикулярні.

Знайдемо суми робіт реакцій в’язів на можливому переміщенні точок. За визначенням маємо:

$$\bar{R}_A \cdot \delta\bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta\bar{r}_B = \bar{R}_A \cdot \delta\bar{r}_A - \bar{R}_B \cdot \delta\bar{r}_B =$$

$$= \bar{R}_A(\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B) = 0.$$

Останній добуток дорівнює нулю, тому що вектор $\bar{R}_A$, що збігається у напрямку з вектором $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$ (обидва напрямлені вздовж прямої AB), перпендикулярний до вектора $(\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B)$.

Таким чином, стрижень, а отже, і внутрішні в’язі абсолютно твердого тіла є ідеальними в’язями.

Зауважимо, що в даному прикладі робота окремих реакцій на можливому переміщенні не дорівнює нулю, але їх сума дорівнює нулю.

Приклад 5. В'язь, що здійснюється гнучкою нерозтяжною ниткою. Оскільки нитка є в'яззю тільки в натягнутому стані, то доказ виконання умови (1) для цього випадку проводиться аналогічно виконаному в прикладі 4.

4. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ (ПМП)

У геометричній статиці при дослідженні рівноваги систем тіл застосовувався метод розчленування, причому зі збільшенням числа тіл складність рішення зростала. В аналітичній статиці за допомогою принципу можливих переміщень (ПМП) можна вирішувати завдання простіше, при цьому дія в’язей враховується не введенням невідомих наперед реакцій, а розглядом можливих переміщень системи.

Теорема. Для рівноваги голономної механічної системи з ідеальними стаціонарними утримуючими в’язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх прикладених до системи активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^{(a)} \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \qquad (2)$$

де $\bar{F}_k^{(a)}$ - рівнодіюча всіх прикладених до k-ї точки системи активних сил.

Доказ

Необхідність. Нехай система знаходиться в рівновазі, тоді знаходиться в рівновазі і кожна з її точок, так що для всіх цих точок можна записати:

$$\bar{F}_k^{(a)} + \bar{R}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \qquad (3)$$

Надамо системі будь-яке ненульове можливе переміщення, так що $\delta\bar{r}_k$ - відповідне цьому можливому переміщенню системи переміщення k-ї точки. Помножимо (3) на $\delta\bar{r}_k$:

$$\left(\bar{F}_k{}^{(a)} + \bar{R}_k\right) \cdot \delta\bar{r}_k = 0, k = 1, \dots n. \quad (4)$$

Додамо всі рівності (4):

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\bar{F}_k{}^{(a)} + \bar{R}_k\right) \cdot \delta\bar{r}_k = 0.$$

Враховуючи, що для ідеальних в’язів виконується умова (1), отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k{}^{(a)} \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k{}^{(a)} \cdot \delta\bar{r}_k = 0.$$

Следовательно, если система находится в равновесии, условие (2) выполняется.

Достатність. Доведемо методом «від зворотного». Нехай умова (2) виконується, але хоча б одна з точок системи, наприклад (для визначеності) перша, не перебуває в стані рівноваги, а рухається. Тоді для неї можемо записати:

$$\bar{F}_1^{(a)} + \bar{R}_A \neq 0. \quad (5)$$

Інші точки залишаються в спокої і для них запишемо:

$$\bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{a})} + \bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{k}} = 0, \qquad \mathrm{k} = 2, \dots, \mathrm{n}. \quad (6)$$

Надамо системі таке можливе переміщення, при якому сили $\bar{F}_1^{(a)}$і $\bar{R}_1$, що прикладені до першої точки, викоують не нульову, а,наприклад, додатню роботу. Тоді з (5), (6) отримаємо:

$$+\begin{cases} \left(\bar{F}_1^{(a)} + \bar{R}_1\right) \cdot \delta\bar{r}_1 \; > 0 \\ \underline{\left(\bar{F}_k^{(a)} + \bar{R}_k\right) \cdot \delta\bar{r}_k \; = 0, k = 2, \dots n,} \end{cases} \qquad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\bar{F}_k^{(a)} + \bar{R}_k\right) \cdot \delta\bar{r}_k \; = \left(\bar{F}_1^{(a)} + \bar{R}_1\right) \cdot \delta\bar{r}_1 \; > 0.$$

З іншого боку, ліву частину нерівності (7) можна переписати як

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\bar{F}_k^{(a)} \cdot \delta\bar{r}_k \;\right) + \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_1 \; > 0;$$

звідси з урахуванням умови (1) отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\bar{F}_k^{(a)} \cdot \delta\bar{r}_k \;\right) > 0,$$

що суперечить умові (2).

Отже, припущення у тому, що з виконанні умови (2) хоча одна з точок системи рухається, суперечливо, тобто умова (2) є достатньою для рівноваги механічної системи.

Розкриваючи скалярні добутки, що стоять у лівій частині рівняння (2), запишемо цю умову у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^{(a)} \cdot \delta S_k cos\left(\widehat{\bar{F}_k^{(a)}, \delta\bar{r}_k}\right) = 0, \qquad (8)$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_{kx}^{(a)} \cdot \delta x_k + \bar{F}_{ky}^{(a)} \cdot \delta y_k + \bar{F}_{kz}^{(a)} \cdot \delta z_k) = 0. \qquad (9)$$

Значення принципу можливих переміщень полягає в тому, що він дає єдиний метод розв'язання задач статики для будь-якої механічної системи та за будь-якої сукупності сил, що діють на цю систему. При цьому застосування принципу вимагає врахування одних тільки активних сил і дозволяє виключити з розгляду всі наперед невідомі реакції ідеальних в'язів.

Примітки:

1. Якщо не всі в'язі, накладені на систему, ідеальні, є, наприклад, негладкі опорні площини та поверхні, то до активних сил слід додати сили тертя та прирівнювати до нуля суму робіт не тільки активних сил, а й сил тертя на будь-яких можливих переміщеннях точок системи. Складене рівняння визначає залежність між активними силами та силами тертя.

2. ПМП можна застосовувати для визначення будь-якої реакції ідеальної в'язі.

3. Для системи з одним ступенем свободи рівність (2) відразу дає умову рівноваги. Якщо система має кілька ступенів свободи, то умову (2) необхідно складати для кожного з незалежних можливих переміщень окремо. Тоді вийде стільки умов рівноваги, скільки ступенів свободи має система.

5. ПОРЯДОК ВИКОРИСТАННЯ ПМП ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ІДЕАЛЬНИХ В'ЯЗІВ

Щоб визначити реакцію будь-якої в'язі, необхідно зробити наступне.

1. Відкинути умовно відповідну в'язь, замінивши її шуканою реакцією і включивши цю реакцію в число активних сил.

2. Надати отриманій після відкидання в'язі системі будь-яке можливе переміщення і показати на кресленні вектори $d\bar{r}_1$ елементарних переміщень точок прикладання сил або кути $d\varphi_k$ елементарних поворотів тіл, на які діють сили.

3. Обчислити елементарні роботи всіх активних сил і доданої до них реакції в'язі на показаному в розд.2 можливому переміщенні системи. При цьому роботи обчислюються за однією з таких двох формул:

$$\delta A_k = F_{k\tau}\delta S_k \tag{10}$$

(формула застосовується в разі поступального переміщення ланки, до якої прикладена сила),

$$\delta A_k = m_O(\bar{F}_k)\delta\varphi_k \tag{11}$$

(формула використовується, якщо ланка, до якої прикладена сила, повертається навколо центру O).

4. Підставити обчислені за (10) або (11) можливі роботи в (2) і записати умови рівноваги системи. При цьому в загальному випадку в отримане рівняння можуть входити одночасно некілька кутів $\delta\varphi_k$ або кути $\delta\varphi_k$ та зсуву δS_k; тому, як правило, необхідне виконання ще п.5.

5. Встановити залежності між величинами $\delta\varphi_k$ і δS_k, що увійшли в умову (2), висловивши всі можливі переміщення через одне. Ці залежності можна знаходити:

а) із суто геометричних міркувань;

б) кінематичним шляхом, зв'язавши спочатку, наприклад, ω_k , з v_{k+1}, а потім врахувавши, що

$$\delta\varphi_k = \omega_k dt, \delta S_{k+1} = v_{k+1} dt.$$

6. Підставляючи отримані в п. 5 вирази для δS_k і $\delta\varphi_k$ у (2) і з огляду на те, що системі було надано ненульове можливе переміщення, одержуємо рівняння, з якого і знайдемо шукану в завданні реакцію.

Приклад. Визначити реакції зовнішніх в'язей плоскої рами з одним проміжним шарніром (рис. 5.1). Дано: $P_1 = 4\ H$; $\alpha = 60°$; $P_2 = 6\ H$; $M = 3\ H \cdot$ м; $q = 1 H/$м.

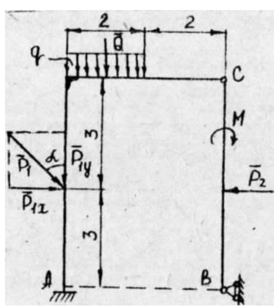

Рисунок 5.1 – Схема конструкції

Основна перевага ПМП при розв'язанні подібних задач полягає в тому, що він дає змогу визначати реакції зовнішніх в'язів без визначення внутрішніх реакцій.

Друга найважливіша особливість розв'язання таких задач на основі зазначеного принципу - можливість визначення реакції кожної в'язі незалежно від інших реакцій.

Розв'язання. Замінимо рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою, а похилу силу розкладемо на горизонтальну і вертикальну складові:

$$Q = q \cdot 2 = 2\ H;$$

$$|\bar{P}_{1x}| = P_1 sin\alpha = 2\sqrt{3}\,H;$$

$$|\bar{P}_{1y}| = P_1 cos\alpha = 2\ H.$$

Для визначення горизонтальної складової реакції закріплення:

1) уявимо опору у вигляді повзуна A в горизонтальних напрямних, щільно скріпленого зі стрижнем AC, і прикладемо до нього реакцію $\bar{X}_A$ (рис. 5.2);

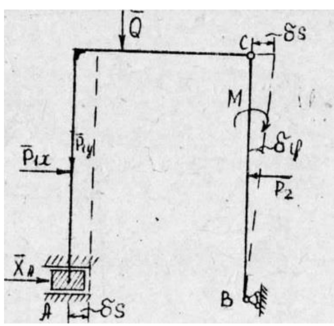

Рисунок 5.2 – Схема для визначення реакції $\bar{X}_A$

2) можливим зсувом такої конструкції є переміщення стрижня AC поступально праворуч на величину δS і поворот стрижня BC навколо точки B , яка є для даної ланки миттєвим центром обертання на кут $\delta\varphi$;

3) можливі роботи на таких переміщеннях обчислюємо окремо для лівого і правого стрижнів, використовуючи формули (10) і (11):

$$\delta A^A = X_A \delta S + P_1 sin\alpha \cdot \delta S,$$

$$\delta A^n = M\delta\varphi - P_2 2\delta\varphi;$$

4) згідно з (2) сумарна робота повинна дорівнювати нулю, отримуємо:

$$X_A \cdot \delta S + P_1 sin\alpha \cdot \delta S + M\delta\varphi - P_2 \cdot 2\delta\varphi = 0 \qquad (12)$$

5) із міркувань геометрії $\delta\varphi = \frac{\delta S}{6}$ тоді (12) набуває вигляду:

$$\left(X_A + P_1 sin\alpha + \frac{1}{6}M - \frac{1}{3}P_2\right)\delta S = 0; \qquad (13)$$

6) оскільки $\delta S \neq 0$, то з (13) визначаємо:

$$X_A = -P_1 sin\alpha - \frac{1}{6}M + \frac{1}{3}P_2 = 1{,}96\ H.$$

Визначення вертикальної складової защемлення проводять подібним чином (рис. 5.3) з урахуванням того, що для такої конструкції можливим є зміщення як єдиного цілого поступально вгору на δS. Тоді

$$\delta A^A = \ \varphi_A \delta S - P_1 cos\alpha \cdot \delta S - Q \cdot \delta S, \delta A^n = 0.$$

Умова (2) набуває вигляду

$$(\varphi_A - P_1 cos\alpha - Q)\delta S = 0,$$

звідси

$$\varphi_A = P_1 cos\alpha + Q = 4\ H.$$

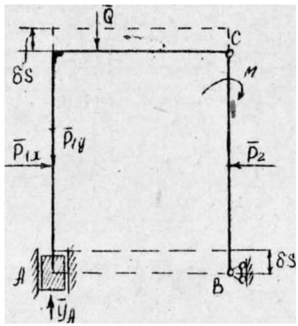

Рисунок 5.3 – Схема для визначення реакції φ_A

Для визначення реактивного моменту M_A необхідно таке:

1) Відкинемо в’язь, що перешкоджає в точці A повороту конструкції, замінивши защемлення шарнірно-нерухомою опорою і приклавши до ланки AC реактивний момент M_A (рис. 5.4);

2) Можливим переміщенням такої симетричної конструкції є поворот як жорсткого цілого навколо точки A на кут $\delta\varphi$.

3) Можливі роботи при цьому обчислюються за формулою (11):

$$\delta A^A = M_A\delta\varphi - P_1 sin\alpha \cdot 3\delta\varphi - Q \cdot 1\delta\varphi;$$

$$\delta A^n = -M_A\delta\varphi + P_1 sin\alpha \cdot 3\delta\varphi.$$

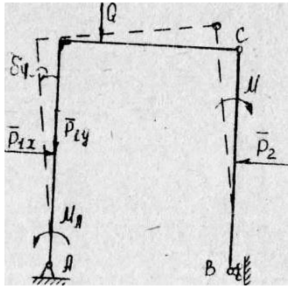

Рисунок 5.4 – Схема для визначення реактивного моменту

4) Оскільки тут поворот один і той самий для обох ланок, відпадає необхідність у виконанні п.5. Остаточно отримуємо:

$$(M_A - 3P_1 sin\alpha - Q)\delta\varphi = 0;$$

$$M_A = 3P_1 sin\alpha + Q + M - 3P_2 = -2{,}62\ H \cdot \text{м}.$$

Під час визначення реакції шарнірно рухомої опори в точці B (рис. 5.5) врахуємо, що можливим переміщенням конструкції є поворот стрижня $\boldsymbol{BC}$ навколо точки $\boldsymbol{C}$, а ланка $\boldsymbol{AC}$ залишиться нерухомою, оскільки вона жорстко затиснута в точці $\boldsymbol{A}$.

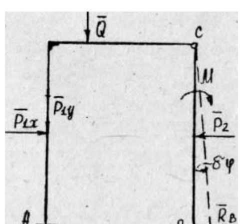

Рисунок 5.5 – Схема для визначення реакції R_B

Тоді

$$\delta A^A = 0,$$

$$\delta A^n = R_B \cdot 6\delta\varphi - P_2 \cdot 3\delta\varphi - M \cdot \delta\varphi.$$

Виконуючи умову (2), одержуємо:

$$(6R_B - 3P_2 - M) \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$R_B = \frac{M + 3P_2}{6} = 3{,}5\ H.$$

На закінчення прикладу ще раз звернемо увагу на те, що кожну з чотирьох реакцій знайдено незалежно від решти, і в задачах може знадобитися визначення не всіх, а тільки однієї зовнішньої реакції.

6. УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ ТА ЧИСЛО СТУПЕНІВ СВОБОДИ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок, так що її положення в будь-який момент руху визначається $3n$ декартовими координатами. Нехай на цю систему накладено S голономних утримувальних стаціонарних в'язів виду:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots . x_n, y_n, z_n) = 0, i = 1 \dots, S. \qquad (14)$$

Якщо $S \geq 3n$, рух системи неможливий, оскільки при цьому всі $3n$ координат точок системи будуть визначені з рівнянь (14) як постійні числа. Щоб система здійснювала рух, має виконуватися умова $S < 3n$, однак у цьому випадку з $3n$ координат точок незалежними будуть тільки P, причому

$$P = 3n - 3. \qquad (15)$$

Наприклад, якщо розглядати кривошипно-повзуновий механізм (див.рис. 1.1) як систему, положення якої визначається положенням її трьох характерних точок O, A, B, то, оскільки йдеться про плоский рух, треба було б стежити за $2 \cdot 3 = 6$ координатами. Однак на систем накладено в'язі, які описуються п'ятьма рівняннями виду (14) (див. приклад у розд.1). Тоді в цьому прикладі незалежною може бути тільки одна координата, оскільки згідно з (15) у цьому разі

$$P = \ 2n - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Число незалежних параметрів, за допомогою яких можна в будь-який момент руху однозначно визначити положення системи, називається **числом ступенів свободи** цієї **системи**. Незалежні один від одного параметри, за допомогою яких можна однозначно визначити в будь-який момент t положення системи і через які можна виразити декартові координати всіх точок системи, називаються у**загальненими координатами механічної системи**. Найчастіше за своїм фізичним змістом це довжини або кути повороту. Узагальнені координати зручні тим, що I) незалежні одна від одної та 2) їхнє введення позбавляє нас від необхідності враховувати рівняння голономних в'язів вигляду (14) (ці рівняння тепер задовольняються автоматично за самим змістом вибору узагальнених координат).

Наприклад, під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі тіло мало один ступінь свободи, і як узагальнену координату вибирали кут повороту. Під час плоского руху тіло мало три ступені свободи, і як узагальнені координати обирали іксову та ігрекову координати полюса, а також кут повороту перерізу навколо полюса.

Надалі узагальнені координати позначаються як $q_1, \dots q_P$, тоді q_P завжди повинні вибиратися таким чином, щоб була явна залежність декартових координат усіх точок системи від узагальнених координат цієї системи, тобто була залежність виду:

$$x_k = x_k(q_1, \dots, q_P)$$
$$y_k = y_k(q_1, \dots, q_P), (k = 1, \dots n) \qquad (16)$$
$$z_k = z_k(q_1, \dots, q_P).$$

Це означає, що радіус-вектор будь-якої точки також виражається через узагальнені координати:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_P), (k = 1, \dots n). \qquad (17)$$

Наприклад, для кривошипно-повзунного механізму найзручнішою узагальненою координатою є кут повороту кривошипа φ (див. рис. 1.1). Тоді ненульові декартові координати характерних точок системи виражаються через кут φ таким чином:

$$x_A = rcos\varphi;$$

$$y_A = rsin\varphi;$$

$$x_B = rcos\varphi + \ell cos\psi.$$

За теоремою синусів:

$$\frac{r}{\sin\psi} = \frac{\ell}{\sin\varphi} \to \sin\psi = \frac{r}{\ell}\sin\varphi.$$

Тоді координата X_B у такий спосіб виражається через обрану узагальнену координату:

$$X_B = rcos\varphi + \sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi.}$$

При підстановці виразів (16) у рівняння в’язів (14) останні повинні перетворитися на тотожності. Неважко перевірити справедливість цього положення в прикладі з кривошипно-повзунним механізмом.

Закон руху системи в узагальнених координатах має вигляд

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_P = q_P(t), \qquad (18)$$

причому похідні за часом від узагальнених координат називаються відповідно **узагальненими швидкостями** й **узагальненими прискореннями**:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}; \;\; \ddot{q}_j = \frac{d^2 q_j}{dt^2} \;, j = 1, \dots, P. \qquad (19)$$

7. УЗАГАЛЬНЕНІ СИЛИ ТА СПОСОБИ ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

Обчислимо роботу активних сил, що діють на систему, за будь-якого можливого переміщення цієї системи. Така робота називається **можливою**, або **віртуальною**. Для однієї точки вона розраховується так само, як елементарна робота в динаміці точки.

$$\delta A_k = \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k. \quad (20)$$

Тоді можлива робота всіх сил системи дорівнює сумі виразів виду (20):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k. \quad (21)$$

Виразимо можливу роботу через узагальнені координати системи, для чого проваріюємо співвідношення (17):

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_P}\delta q_P = \sum_{j=1}^{P} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j. \quad (22)$$

Підставляючи (22) у (21) і міняючи місцями порядок підсумовування, отримуємо

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \sum_{j=1}^{P} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j\right). \quad (23)$$

Введемо позначення:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \qquad (j = 1, \dots, p). \qquad (24)$$

З урахуванням (24) вираз (23) набуває вигляду:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{P} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_j + \dots + Q_P \delta q_P. \qquad (25)$$

Неважко помітити аналогію в структурі правих частин формул (20) і (25), але в (20) коефіцієнтами під час варіацій координат точки є проекції сили, що діє на цю точку. У зв'язку з цим коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у формулі (25) називаються **узагальненими силами**, що відповідають **узагальненим координатам** з тими самими індексами, наприклад, Q_1 - узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті q_1.

Для з'ясування фізичного сенсу узагальненої сили надамо системі таке можливе переміщення, за якого змінюватиметься тільки одна узагальнена координата, наприклад

$$\delta q_1 \neq 0, \qquad \delta q_2 - \delta q_3 = \dots = \delta q_P = 0.$$

Тоді формула (25) має вигляд:

$$\delta A' = Q_1 \delta q_1. \qquad (26)$$

Із (26) бачимо, що

$$Q_1 = \frac{\delta A'}{\delta q_1}.$$

Звідси випливає, що розмірність узагальненої сили:

$$[Q_j] = \frac{[A]}{[q_j]}.$$

Таким чином, розмірність узагальненої сили визначається розмірністю тієї узагальненої координати, якій відповідає узагальнена сила, Зокрема, у системі СІ:

якщо $[q_j] = \text{м}$, то $[Q_j] = H$ – сила;

якщо $[q_j] = \text{рад}$, то $[Q_j] = H \cdot \text{м}$ – момент;

тобто як узагальнені сили можуть бути сили, моменти тощо.

З (25) випливає, що число узагальнених сил дорівнює числу узагальнених координат, тобто числу ступенів свободи системи.

Способи знаходження узагальнених сил

1) Спосіб заснований на безпосередньому використанні формули (24), яку зручніше переписати в скалярному вигляді:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \qquad (27)$$

Щоб застосовувати цей спосіб, необхідно мати проекції всіх сил, що діють на систему, на осі деякої системи координат, а також мати в явному вигляді залежності координат точок прикладання сил від обраних узагальнених координат системи (формули (16)).

2. Щоб визначити Q_j треба надати системі таке можливе переміщення, за якого,

$$\delta q_j \neq 0, \delta q_1 = 0, \dots \delta q_P = 0,$$

а потім, обчисливши можливу роботу всіх прикладених до системи активних сил на такому можливому переміщенні, подати її у вигляді

$$\delta A' = \underbrace{(\qquad)}_{Q_j} \delta q_{j.}$$

Множник за варіації δq_j у правій частині виразу буде величиною узагальненої сили.

3. Спосіб застосовується в тому випадку, коли всі сили, що діють на систему, є консервативними, так що може бути знайдена потенційна енергія системи:

$$\Pi = \Pi(x_1, \; y_1, z_1, \dots x_n, y_n, \; z_n). \qquad (28)$$

Оскільки проекції сил пов'язані з П відомими залежностями

$$F_{kx} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; \; F_{ky} = \frac{\partial \Pi}{\partial y_k}: F_{kz} = \frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \qquad (29)$$

то, підставляючи (29) у (27), отримуємо

$$Q_j = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \, (30)$$

Згідно з (28) і (16) потенційна енергія залежить від узагальнених координат складним чином, тоді записана в (30) сума - це окрема похідна від П за відповідною узагальненою координатою, тож

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \qquad j = 1, \dots, p. \qquad (31)$$

За структурою формула (31) подібна до формули (29), причому, щоб користуватися формулою (31), необхідно заздалегідь виразити потенціальну енергію системи через узагальнені координати, тобто мати не залежність (28), а представлення виду

$$\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_P). \qquad (32)$$

Зазначимо ще раз, що під час обчислення узагальнених сил враховуються тільки активні сили, прикладені до системи. Реакції ідеальних в’язів не враховуються (їхня робота дорівнює нулю); якщо є оили тертя, то вони приєднуються до активних сил.

Приклад. Розглянемо механічну систему - подвійний математичний маятник (рис. 7.1), що складається з двох невагомих стрижнів довжиною ℓ_1 та ℓ_2 , на кінцях яких укріплено матеріальні точки M_1 та M_2 вагою відповідно $P_1 = m_1 g$ та $P_2 = m_2 g$. Перший стрижень може обертатися навколо нерухомої горизонтальної осі O, другий - навколо горизонтальної осі, пов’язаної з першою точкою. Ввести узагальнені координати й обчислити узагальнені сили.

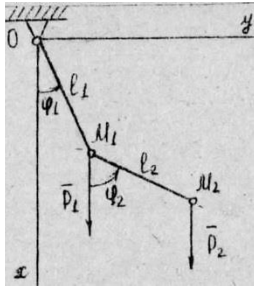

Рисунок 7.1 – Подвійний математичний маятник

Розв’язання. На систему з двох точок M_1 і M_2, що рухаються у вертикальній площині xOy , накладено дві в’язі стрижні OM_1, і M_1M_2% тоді $P = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, тобто система має дві ступені свободи, і найзручнішими узагальненими координатами тут є кути φ_1 і φ_2 відхилення стрижнів від вертикалі, так що $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$. Узагальнені сили обчислимо трьома способами.

Перший спосіб. Знайдемо проекції сил $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ і координати точок їхнього прикладання (див. рис. 16):

$$F_{1x} = m_1 g;\ F_{1y} = 0;\ F_{2x} = m_2 g; F_{2y} = 0\,. \quad (33)$$

$$Q_1 = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_{1y}{}^{=0}\frac{\partial y_1}{\partial q_1} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} + F_{2y}{}^{=0}\frac{\partial y_2}{\partial q_2};$$

$$x_1 = \ell_1 cos\varphi_1;\ \ x_2 = \ell_1 cos\varphi_1 + \ell_2 cos\varphi_{2.} \quad (34)$$

Підставивши (34) в (33), отримаємо:

$$Q_1 = m_1 g(-\ell_1 cos\varphi_1) + m_2 g(-\ell_1 sin\varphi_1) =$$

$$= -(m_1 + m_2) g(\ell_1 sin\varphi_1). \quad (35)$$

Аналогічно визначаємо:

$$Q_2 = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} = m_1 g \cdot 0 + m_2 g(-\ell_2 sin\varphi_2) =$$

$$= -m_2 g \ell_2 sin\varphi_2. \qquad (36)$$

Другий спосіб. Визначаючи Q_1, надамо системі таке можливе переміщення, при якому змінюється тільки кут φ_1 (рис. 7.2). $\delta\varphi_1 \neq 0, \delta\varphi_2 = 0,$ оскільки при цьому стрижень M_1M_2 переміщується поступально, то точки M_1 і M_2 переміщуються вгору на ту саму висоту h_1. Тоді

$$\delta A' = m_1 g h_1 - m_2 g h_1,$$

$$h_1 = hcos\varphi_1 - \ell_1 \cos(\varphi_1 + \delta\varphi_1) = \qquad (37)$$

$$= \ell_1[cos\varphi_1 - cos\varphi_1 \cdot cos\delta\varphi_1 + sin\varphi_1 \cdot sin\delta\varphi_1].$$

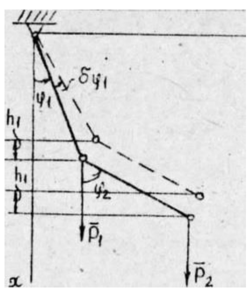

Рисунок 7.2 – Схема для визначення Q_1

Так як $\delta\varphi_1$ досить мале, можна записати

$$cos\delta\varphi_1 \neq 1, \;\; sin\delta\varphi_1 \approx \delta\varphi_1.$$

Тоді

$$h_1 = \ell_1 sin\varphi_1 \delta\varphi_1. \qquad (38)$$

Підставляючи (38) у (37), отримуємо:

$$\delta A' = -(m_1 + m_2) g \ell_1 sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1,$$

що збігається з результатом рішення першим способом.

Для визначення Q_2 надамо системі таке можливе шремвщення, при якому кут φ_1 не змінюється, а кут φ_2 отримує прирощення $\delta\varphi_2$ (рис. 7.3), $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$, При такому переміщенні системи роботу буде виконувати тільки одна сила $\bar{P}_2$, (точка прикладання сили $\bar{P}_1$ залишилася в попередньому положенні). Тоді за формулою (11)

$$\delta A'' = m_{M_1}(\bar{P}_2)\delta\varphi_2 = \underbrace{(-mg\ell_2 sin\varphi_2)}_{Q_2}\delta\varphi_2,$$

що також збігається з результатом рішення першим способом.

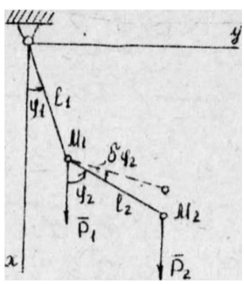

Рисунок 7.3 – Схема для визначення Q_2

Третій спосіб. Обчислимо потенційну енергію, вважаючи, що вона дорівнює нулю, коли обидва стрижня розташовані вертикально, тобто приймаємо, що $\Pi(0{,}0) = 0,$ тоді

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = m_1 g h_1 + m_2 g h_2;$$

$$-h_1 = \ell_1 - \ell_1 cos\varphi_1;$$

$$h_2 = \ell_1 - \ell_1 cos\varphi_1 + \ell_2 - \ell_2 cos\varphi_2;$$

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = m_1 g \ell_1 (1 - cos\varphi_1) +$$

$$+ m_2 g[\ell_1(1 - cos\varphi_1) + \ell_2(1 - cos\varphi_2)].$$

На підставі формули (31) отримуємо

$$Q_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -m_1 g \ell_1 sin\varphi_1 - -m_2 g \ell_1 sin\varphi_1 =$$

$$-(m_1 + m_2) g \ell_1 sin\varphi_1;$$

$$Q_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -m_2 g \ell_2 sin\varphi_2.$$

З прикладу видно, що узагальнені сили залежать не тільки від структури системи і прикладених до неї активних сил, але також і від вибору узагальнених координат. Насправді найчастіше застосовується другий спосіб визначення узагальнених сил, а для консервативних систем замість узагальнених сил розглядається потенційна енергія.

8. УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ

Відповідно до принципу можливих переміщень для рівноваги механічної системи з голономними стаціонарними утримуючими ідеальними в’язями необхідно і достатньо, щоб сума робіт усіх доданих до системи активних сил за будь-якого можливого переміщення системи дорівнювала нулю:

$$\delta A = 0. \tag{39}$$

Перепишемо цей принцип в узагальнених координатах, використовуючи залежність (25):

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_P \delta q_P = 0. \tag{40}$$

Так як варіації узагальнених координат незалежні один від одного і можуть набувати довільних значень, то (40) виконується тоді і тільки тоді, коли всі узагальнені сили дорівнюють нулю одночасно:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_P = 0. \tag{41}$$

Для доказу умов (41) повідомимо системі таке можливе переміщення, за якого

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_P = 0.$$

Тоді (40) набуває вигляду $Q_1 \delta q_1 = 0$.

За умовою $\delta q_1 \neq 0$, отже $Q_1 = 0$. Аналогічно доводяться інші умови (41).

Таким чином, **для рівноваги механічної системи з голономними стаціонарними утримуючими ідеальними зв’язками необхідно і**

достатньо, щоб усі узагальнені сили, що відповідають обраним для системи узагальненим координатам, дорівнювали нулю одночасно [2].

Число умов рівноваги виду (41) дорівнює числу ступенів свободи, тобто, якщо розглядається складна механічна система з одною ступіню свободи, до якої прикладена довільна система навантажень, то для такої системи потрібно записати лише одну умову рівноваги.

Якщо всі сили, що діють на систему, консервативні, то з використанням залежностей (31) умови (41) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0. \qquad (42)$$

Оскільки $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_P)$, то (42) - **необхідні умови екстремуму функції** П. Звідси укладаємо, що у цьому положенні консервативної системи її потенційна енергія досягає екстремального значення, це положення є **положенням рівноваги системи**. Система перебуватиме у рівновазі також у тому випадку, якщо її потенційна енергія постійна.

Приклад. Вантаж P_3 підвішений до осі рухомого блоку B (рис. 8.1), через який перекинутий канат, що йде одним кінцем через блок C, а іншим кінцем - через блок D, що сидить вільно на осі блока C ~ до вантажу A_2. . Знайти вагу P_1 та P_2 вантажів A_1 та A_2, нехтуючи тертям, якщо заданий вантаж P_3 утримується в рівновазі. Кути α та β в обох нахилених площинах задані.

Рішення. Зобразимо активні сили $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2, \bar{P}_3$, що діють цю систему. Положення цієї механічної системи визначається двома узагальненими координатами x_1 та x_2 вантажів A_1 та A_2 (див. рис.7.4), тобто $q_1 = x_1, q_2 = x_2$.

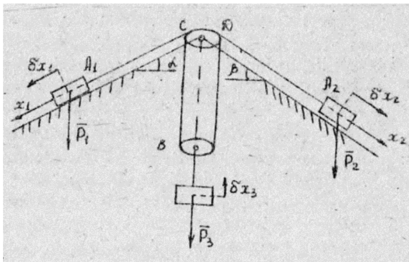

Рисунок 8.1– Схема механізма

Отже, дана система має два ступеня свободи. Задавши можливі переміщення цієї системи двома величинами δx_1 і δx_2 (які відраховують уздовж похилої площини вниз), отримаємо переміщення вантажу P_3 вгору на величину

$$\delta x_3 = \frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2}.$$

Можлива робота всіх сил, що діють на систему:

$$\delta A = P_1 \delta x_1 sin\alpha + P_2 \delta x_2 sin\beta - P_3 \frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2}$$

або

$$\delta A = (P_1 sin\alpha - \frac{1}{2} P_3)\delta x_1 + (P_2 sin\beta - \frac{1}{2} P_3)\delta x_2.$$

З порівняння цієї рівності з формулою (25) випливає, що узагальнені сили Q_1 і Q_2, відповідні узагальненим координатам

$$q_1 = x_{1,}\ \ q_2 = x_{2,}$$

$$Q_1 = P_1 sin\alpha - \frac{1}{2}P_3,$$

$$Q_2 = P_2 sin\beta - \frac{1}{2}P_3.$$

Використовуючи умови рівноваги системи в узагальнених координатах (41) і прирівнюючи нулю Q_1 і Q_2, отримуємо необхідну для рівноваги вагу вантажів A_1 та A_2:

$$P_1 = \frac{P_3}{2sin\alpha};\ P_2 = \frac{P_3}{2sin\beta}.$$

9. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ (РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА - Д'АЛАМБЕРА)

Принцип можливих переміщень дає найзагальніший метод розв'язання задач статики. З іншого боку, принцип Д'Аламбера дозволяє використовувати методи статики для вирішення завдань динаміки. Тому, об'єднуючи ці два принципи можна отримати загальний метод вирішення завдань динаміки.

Розглянемо механічну систему з n матеріальних точок, на яку накладені стаціонарні голономні утримуючі ідеальні в'язі. Розглянемо довільну точку цієї системи у довільний момент її руху (рис. 9.1):

$\bar{F}_k$ - рівнодіюча всіх прикладених до точки активних сил;

$\bar{P}_k$ - рівнодіюча всіх сил реакцій ідеальних в'язей.

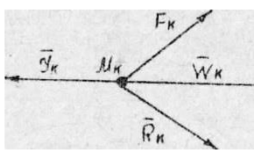

Рисунок 9.1 – Схема діючих на точку сил

Застосуємо до цієї точки принцип Д'Аламбера. Тоді, додаючи до зазначених сил силу інерції точки

$$\bar{\mathcal{J}}_k = m_k \bar{a}_k.$$

можемо записати:

$$\bar{F}_k + \bar{P}_k + \bar{\mathcal{J}}_k = 0. \qquad (43)$$

Подумки зафіксуємо час t і і надамо системі з даного «зупиненого» положення будь-яке можливе переміщення так, щоб $\delta\bar{r}_k$ - можливе переміщення $k-$ї точки системи.

Тоді, помножуючи скалярно обидві частини рівності (43) на $\delta\bar{r}_k$, отримаємо

$$(\bar{F}_k + \bar{P}_k + \bar{\jmath}_k)\delta\bar{r}_k = 0.$$

Аналогічні рівності можна отримати для всіх точок системи. Додавая потім усі ці рівності, знаходимо

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k + \bar{P}_k + \bar{\jmath}_k)\delta\bar{r}_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k + \bar{\jmath}_k)\delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\bar{P}_k\delta\bar{r}_k = 0.$$

За визначенням ідеальних в'язів остання сума дорівнює нулю, тоді остаточно отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k + \bar{\jmath}_k)\delta\bar{r}_k = 0. \tag{44}$$

Якщо розкрити скалярні добутки, що стоять під знаком суми, то таку рівність можна представити в наступній аналітичній формі:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx} + \mathcal{J}_{k_x}\right)\delta x_k + \left(F_{k_y} + \mathcal{J}_{k_y}\right)\delta y_k + \left(F_{kz} + \mathcal{J}_{k_z}\right)\delta z_k\right] = 0. \tag{45}$$

Рівність (44) (або (45)) є **загальним рівнянням динаміки**. Воно отримано шляхом з'єднання двох загальних принципів механіки: принципу Д'Аламбера з принципом можливих переміщень, пов'язаних з ім'ям Лагранжа. Тому загальне рівняння динаміки іноді називається **рівнянням Лагранжа – Д'Аламбера**. З нього випливає, що **при русі голономної механічної системи з утримуючими ідеальними в'язями в кожний момент часу сума елементарних робіт всіх прикладених до системи активних сил і всіх сил інерції системи на будь-якому можливому переміщенні цієї системи дорівнює нулю.**

Зважаючи на вирази для сил інерції, рівняння (44) можна ще записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k - m_k\bar{a}_k)\delta\bar{r}_k = 0. \qquad (46)$$

Примітки:

1) Можливі переміщення, що входять до (44)-(46), надають для фіксованого моменту часу, коли система подумки зупиняється в деякому своєму положенні.

2) Загальне рівняння динаміки можна використовувати і для систем з неідеальними в'язями, включаючи при цьому сили тертя до активних сил, як це вже робилося при використанні ПМП.

3) Загальне рівняння динаміки найбільш доцільно застосовувати для систем з дискретно розташованих матеріальних точок або в тому випадку, коли всі тіла системи рухаються поступально. Якщо серед тіл системи є поступально рухомі, то використання рівняння (44) ускладнюється, тому що виникають

складності з очищенням сил інерції. Для таких систем краще використовувати рівняння Лагранжа II роду.

Приклад. До системи блоків (рис. 9.2) підвішені вантажі A і B , вага яких відповідно $P_A = 100\ H$ і $P_B = 80$ Н. Визначити прискорення вантажів, нехтуючи масами блоків і вважаючи канат абсолютно гнучким і нерозтяжним.

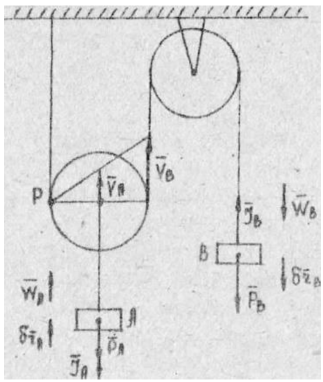

Рисунок 9.2 –Положення аналізованого механізму у довільний момент руху

Рішення. Так як вантажі A і B рухаються поступально, їх можна прийняти за матеріальні точки. Отже, дана система складається з двох матеріальних точок, в’язі яких голономні та ідеальні.

У даному випадку рівняння (44) набуває вигляду

$$(\bar{P}_A + \bar{J}_A)\delta\overline{r_A} + (\bar{P}_B + \bar{J}_B)\delta\overline{r_B} = 0, \qquad (47)$$

причому модулі сил інерції обчислюються за відомими формулами:

$$\mathcal{J}_A = \frac{P_A}{g} a_A, \mathcal{J}_B = \frac{P_B}{g} a_B. \qquad (48)$$

Припустимо, що вантаж опускається з прискоренням a_B, а вантаж A піднімається із прискоренням a_A. Якщо це припущення про направлення руху вантажів невірно, у відповіді буде знак мінус. Подумки зупинивши систему, повідомимо їй можливе переміщення, яке полягає в тому, що точка B опустилася вниз на $\delta\overline{r_B}$, а точка A піднялася вертикально вгору на $\delta\overline{r_A}$. Всі вектори, що входять у рівняння (47), показані на рис. 9.2. Розкриваючи в (47) скалярні добутки та враховуючи напрямки векторів (див. рис. 9.2), отримуємо:

$$-P_A|\delta\overline{r_A}| - \mathcal{J}_A|\delta\overline{r_A}| + P_B|\delta\overline{r_B}| - \mathcal{J}_B|\delta\overline{r_B}| = 0.$$

Враховуючи уявлення (48), це рівняння можна переписати у вигляді:

$$-P_A|\delta\overline{r_A}| - \frac{P_A}{g} a_A|\delta\overline{r_A}| + P_B|\delta\overline{r_B}| - \frac{P_B}{g} a_B|\delta\overline{r_B}| = 0. \quad (49)$$

Оскільки нитка нерозтяжна і не ковзає по блоках, то точка P є миттєвим центром швидкостей для блоку, до якого прикріплено вантаж A і тоді

$$v_A = \frac{1}{2} v_B \rightarrow a_A = \frac{1}{2} a_B, |\delta\overline{r_A}| = \frac{1}{2}\ |\delta\overline{r_B}|. \qquad (50)$$

Підставляючи (50) (49), отримуємо:

$$\left(-\frac{1}{2} P_A - \frac{P_A}{g}\frac{1}{2} a_B \cdot \frac{1}{2} + P_B - \frac{P_B}{g} a_B\right)|\delta\overline{r_B}| = 0.$$

Вираз у дужках дорівнює нулю. Звідси знаходимо потрібне прискорення точки B:

$$a_B = \frac{2P_B - P_A}{P_A + 4P_B} \cdot 2g = \frac{160 - 100}{100 + 320} \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 2{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad (51)$$

$$a_A = \frac{1}{2} a_B = 1{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

З (51) видно, що в такому механізмі при $2P_B > P_A$ вантаж буде опускатися прискорено, при $2P_B < P_A$ - підніметься, а при $2P_B = P_A$ система перебуватиме в спокої або рухатися рівномірно ($a_B = a_A = 0$).

10. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖУ ІІ РОДУ

Як зазначалося, загальне рівняння динаміки призводить до складних математичних викладок під час використання його до механічних систем, у яких тіла рухаються непоступально. Для таких систем більш доцільно користуватися рівняннями Лагранжа ІІ роду, які випливають із загального рівняння-динаміки і для яких зазначені раніше труднощі подолані в загальному вигляді при виведенні самих рівнянь. Рівняння Лагранжа другого роду називають ще **диференціальними рівняннями руху механічної системи в узагальнених координатах**.

Розглянемо голономну механічну систему з н матеріальних точок, на яку накладені ідеальні стаціонарні утримуючі в'язі, і яка має P ступенів волі, так що її положення щодо інерційних осей координат у будь-який момент часу визначається узагальненими координатами $g_1, \dots, g_P$.. Запишемо для цієї системи загальне рівняння динаміки

$$\sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_k + \bar{J}_k)\delta \overline{r_k} = 0. \tag{52}$$

Перетворимо це рівняння, перейшовши у ньому до узагальнених координат. Враховуючи, що за самим змістом вибору узагальнених координат мають місце залежності

$$\overline{r_k} = \overline{r_k}(g_1, \dots, g_P), k = 1, \dots, n, \tag{53}$$

проваріюємо співвідношення (53):

$$\delta\overline{r_k} = \frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_P}\delta q_P = \sum_{j=1}^{P}\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}\delta q_j. \quad (54)$$

Підставляючи (54) у (52) та змінюючи місцями порядок сумування, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k + \bar{\mathcal{I}}_k)\cdot\sum_{j=1}^{P}\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{P}\left[\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k + \bar{\mathcal{I}}_k)\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0. \quad (55)$$

Так як варіації узагальнених координат незалежні один від одного і довільна, то аналогічно тому, як це вже робилося при виведенні умов рівноваги системи в узагальнених координатах, приходимо до висновку, що рівняння (55) буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли всі вирази, що стоять у квадратних дужках, будуть дорівнювати нулю одночасно:

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k + \bar{\mathcal{I}}_k)\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j} = 0, j = 1 \dots p. \quad (56)$$

Цю систему p рівнянь запишемо у вигляді:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\bar{\mathcal{I}}_k\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}}_{Q_j^{\text{ін}}} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}}_{Q_j}, \; j = 1 \dots p. \quad (57)$$

де $Q_j^{\text{ін}}$ - узагальнена сила для сил інерції системи, яка відповідає $j_{k-\text{й}}$ узагальненій координаті;

Q_j - узагальнена сила всіх активних сил, яка відповідає $j_{k-\text{й}}$ узагальненій координаті.

З урахуванням введення узагальнених сил рівняння (57) перепишуться у вигляді:

$$Q_j^{\text{ін}} = -Q_{j,}\;\; j = 1 \dots p. \tag{58}$$

Для порівняння випишемо умови рівноваги системи в узагальнених координатах: $Q_j = 0, j = 1 \dots p$. (див. (41)).

З порівняння (58) з $j = 1 \dots p$ (див (41). Таким чином можна зробити висновок, що (58) - це аналог принципу Д'Аламбера в узагальнених координатах.

Рівняннями (58) можна безпосередньо користуватися для вирішення задач динаміки системи, проте процес складання цих рівнянь значно спроститься, якщо виразити усі вхідні сюди узагальнені сили інерції через кінетичну енергію системи. Перепишемо вираз для узагальненої сили інерції так:

$$Q_j^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\mathcal{J}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} m_k\, \bar{a}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}. \tag{59}$$

Неважко перевірити справедливість залежності

$$\bar{a}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right). \tag{60}$$

Доведемо дві допоміжні тотожності:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}, \qquad (61)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}. \qquad (62)$$

Спочатку доведемо тотожності (61). Тому що для голономних стаціонарних в'язів

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_P), \qquad (63)$$

то $\bar{r}_k$ залежить від часу складним чином.

Тоді

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \cdots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_P}\dot{q}_P. \qquad (64)$$

Згідно (63), коефіцієнти при узагальнених швидкостях (64) залежать тільки від узагальнених координат. Так як узагальнені швидкості не залежать одна від одної, то диференціюючи (64) по $\dot{q}_j$, отримуємо

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{d q_j},$$

тотожність(61)доведена.

Для підтвердження тотожності (62) продиференціюємо (64) по q_j:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_P \partial q_j}\dot{q}_P = \sum_{i=1}^{P} \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i. \qquad (65)$$

Аналогічно тому, як це робилося під час висновку (64), обчислюючи похідну за часом, маємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{dq_j}\right)=\frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_j\partial q_1}\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_j\partial q_P}\dot{q}_P=$$

$$=\sum_{i=1}^{P}\frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_j\partial q_i}\dot{q}_i. \tag{66}$$

Порівнюючи праві частини рівнянь (65) і (66) і враховуючи симетрію змішаних похідних, приходимо до висновку про рівність лівих частин цих формул, що і доводить справедливість тотожності (62). Підставляючи (61) та (62) до (60), отримуємо

$$\bar{a}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_j}\right)-\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} \tag{67}$$

або

$$\bar{a}_k\frac{\partial r_k}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{\dot{\bar{r}}_k{}^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\dot{\bar{r}}_k{}^2}{2}\right). \tag{68}$$

Як відомо,

$$\dot{\bar{r}}_k=\bar{v}_k,\bar{v}_k{}^2=v_k^2. \tag{69}$$

Підставив (68) з урахуванням (69) та міняючи місцями порядок додавання та диференціювання, отримаємо

$$Q_j^{\text{ін}}=\sum_{k=1}^{n}m_x\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{v_k^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v_k^2}{2}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right)$$

або

$$Q_j^{\text{ін}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, j = 1, \dots, P, \qquad (70)$$

де

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 - \text{ кінетична енергія системи.}$$

Підставляючи (70) до (58), остаточно отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\ , j = 1, \dots, P. \qquad (71)$$

Рівняння (71) є диференціальними рівняннями руху механічної системи в узагальнених координатах і часто називаються **рівняннями Лагранжа ІІ роду**.

Число рівнянь Лагранжа дорівнює числу незалежних узагальнених координат, тобто **числу ступенів свободи голономної системи.**

Для складання рівнянь (71) кінетична енергія системи повинна бути попередньо виражена як функція узагальнених швидкостей $\partial \dot{q}_j$ і координат ∂q_j. Кінетична енергія матеріальної систем визначається рівністю

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2. \qquad (72)$$

Так як $v_k^2 = \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k,\ \bar{v}_k = \dot{r}_k,$ то, підставивши (64)до (72), отримаємо

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_P}\dot{q}_P\right)^2=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\left[\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\right)^2\dot{q}_1{}^2+\cdots+\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_P}\right)^2\dot{q}_P{}^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\cdots+2\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_{P-1}}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_P}\dot{q}_{P-1}\dot{q}_P\right].\quad(73)$$

Введемо позначення

$$A_{ij}(q_1,\dots,q_P)=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j},i,j=1,\dots,P.\quad(74)$$

A_{ij} називаються узагальненими **коефіцієнтами інерції**, причому з визначення видно, що вони симетричні щодо своїх індексів, тобто, $A_{ij}=A_{ji}$.

Підставляючи (74) до (73), бачимо, що для стаціонарних в’язів кінетична енергія системи являє собою квадратичну форму узагальнених швидкостей

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{P}A_{ij}\,\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad(75)$$

причому коефіцієнти A_{ij} явно не залежать від t, хоча залежать від $q_1,\dots,q_P$. Так як за фізичним змістом T завжди більше нуля, то квадратична форма (75) завжди виразно позитивна. У низці приватних завдань T буде квадратичною функцією швидкостей з постійними коефіцієнтами.

Узагальнені сили Q_j також може бути в загальному випадку функціями узагальнених координат q_j та швидкостей $\dot{q}_j$. Таким чином, до виразів $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \frac{\partial T}{\partial q_j}$ та Q_j можуть входити узагальнені координати q_j та $\dot{q}_j$, тому у вираз $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$ увійдуть вже другі похідні $\partial \ddot{q}_j$.

Отже, рівняння Лагранжа II роду (71) є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, у випадку нелінійних, щодо узагальнених координат q_j $(j = 1, \dots, P)$.

Основна задача динаміки в узагальнених координатах формулюється наступним чином: знаючи або визначивши узагальнені сили, що відповідають обраним для системи узагальненим координатам, та записавши початкові умови руху системи при $t = 0$

$$q_j = {q_j}^0, \dot{q}_j = {\dot{q}_j}^P, j = 1, \dots, P \tag{76}$$

скласти та проінтегрувати диференціальні рівняння (71) і цим визначити закон руху системи

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_P = q_P(t). \tag{77}$$

Основні переваги рівнянь Лагранжа II роду

1. Ці рівняння дають найбільш загальний прийом складання диференціальних рівнянь для будь-якої голономної механічної системи точок або тіл, які рухаються як завгодно.

2. Вид і кількість цих рівнянь не залежать ні від того, скільки тіл входить до системи, ні від того, як ці тіла рухаються. Визначається число рівнянь Лагранжа лише числом ступенів волі системи.

3. Для систем з ідеальними в’язями до правих частин рівнянь (71) входять лише узагальнені активні сили, тобто використання рівнянь Лагранжа дозволяє при дослідженні руху системи виключати з розгляду всі наперед невідомі реакції ідеальних в’язів.

Примітка. Рівняння Лагранжа II роду можна складати і для систем з неідеальними в’язями, додаючи при цьому сили тертя до активних сил.

11. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖУ ІІ РОДУ У ВИПАДКУ ПОТЕНЦІЙНИХ СИЛ

Нехай всі сили, що діють на систему, є консервативними або потенційними, тоді згідно з третім способом знаходження узагальнених сил можна записати

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \qquad j = 1, \dots, P, \tag{78}$$

причому якщо розглядаються стаціонарні в'язі, то

$$\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_P). \tag{79}$$

Підставляючи (78) у (71) та враховуючи, що згідно з (79) будемо мати

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, j = 1, \dots, P$$

або

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0, j = 1, \dots, P. \tag{80}$$

Ввівши на розгляд кінетичний потенціал або функцію Лагранжа за формулою

$$\mathcal{L} = T - \Pi, \tag{81}$$

рівняння (80) перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0\ , j = 1, \dots, P. \tag{82}$$

Рівняння (82) є рівняннями Лагранжа другого роду для консервативних голономних систем.

Примітки:

1. При узагальненні понять функції, аналогічні функції Лагранжа, описують стан інших фізичних систем (безперервного середовища, гравітаційного або електромагнітного поля). Тому рівняння виду (82) відіграють важливу роль у ряді областей сучасної фізики.

2. Основний закон динаміки як $m\bar{a} = \bar{F}$ визначає рух точки **лише у інерційної системі отсчета**. У разі неінерційної системи ми повинні додати переносну та коріолісову сили інерції, тобто, у цьому випадку рівняння руху точки змінює свою форму. Рівняння Лагранжа зберігають свою форму і тоді, коли узагальнені координати характеризують положення матеріальної системи в неінерційній системі відліку. При цьому тільки слід пам'ятати, що кінетичну енергію T треба знаходити по **абсолютних швидкостях** точок системи.

3. Нехай $q_1, \dots, q_P$ - узагальнені координати системи та відомі загальні формули перетворення координат

$$\partial \dot{q}_j = \varphi_j(q_1, \dots, q_P), j = 1, \dots, P. \qquad (83)$$

Припускатимемо, що рівняння (83) можна вирішити, і притому єдиним чином, щодо величин q_j:

$$q_j = \psi_j(\acute{q}_1, \dots, \acute{q}_P), j = 1, \dots, P. \qquad (84)$$

У такому разі величини $\acute{q}_1, \dots, \acute{q}_P$ можуть у свою чергу служити узагальненими координатами, тому що їх завдання еквівалентне завданню q_j і повністю визначає положення всіх точок системи. Таким чином система рівнянь Лагранжа (71) еквівалентна системі аналогічних рівнянь у нових узагальнених координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \acute{q}_J}\right) - \frac{\partial T}{\partial \acute{q}_J} = \acute{Q}_J, \qquad j = 1, \dots, P. \tag{85}$$

При цьому має виконуватися умова

$$\sum_{j=1}^{P} Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^{P} \acute{Q}_J \acute{\delta} \acute{q}_J$$

і кінетична енергія системи T має бути виражена через нові узагальнені координати та швидкості.

Отже, тоді як диференціальні рівняння руху Ньютона інваріантні лише щодо перетворення Галілея. система диференціальних рівнянь Лагранжа інваріантна щодо найзагальнішого перетворення узагальнених координат.

12. ПОРЯДОК ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖУ ІІ РОДУ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розв'язання задач динаміки за допомогою рівнянь Лагранжа ІІ роду доцільно виконувати у наступному порядку:

1) визначити число ступенів свободи системи та вибрати узагальнені координати;

2) зобразити на рисунку діючі на систему активні сили (і сили тертя) та одним з описаних раніше способів визначити узагальнені сили, що відповідають обраним узагальненим координатам;

3) обчислити кінетичну енергію розглядаємої системи в її абсолютному русі, записавши цю енергію через узагальнені координати q_j і узагальнені швидкості $\dot{q}_j$;

4) розрахувати часткові похідні від кінетичної енергії за узагальненими швидкостями $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, $j = 1, \dots, P$, потім визначити похідні від отриманих результатів за часом $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$, $j = 1, \dots, P$;

5) знайти часткові похідні від кінетичної енергії за узагальненими координатами $\frac{\partial T}{\partial q_j}$, $j = 1, \dots, P$;

6) скласти рівняння Лагранжа ІІ роду, для чого отримані у пп. 4, 5 результати підставити в біноми

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, j = 1, \dots, P$$

і прирівняти кожен із них відповідної узагальненої силі;

7) вказати початкові умови (початкові значення узагальнених координат та узагальнених швидкостей), за яких починається рух точок системи;

8) проінтегрувати складені рівняння Лагранжа II роду, задовольнивши початковим умовам, і цим визначити закон руху механічної системи в узагальнених координатах.

Примітка. Коли всі прикладені до системи сили є потенційними, рівняння Лагранжа можна складати у формі (82). При цьому замість обчислення узагальнених сил треба визначити потевційну енергію, виразивши її через узагальнені координати.

Приклад. На шків I вагою $P = 100$ Н і радіуса $r = 0{,}1$ м, що обертається навколо нерухомої горизонтальної осі O, намотана гнучка нерозтяжна нитка, до кінця якої підвішений рухомий блок II радіуса r і вагою P (рис. 12.1). Через цей блок перекинуто другу нитку, що несе на кінцях два вантажі, вага яких $P_1 = 150\ H$ і $P_2 = 120\ H$.

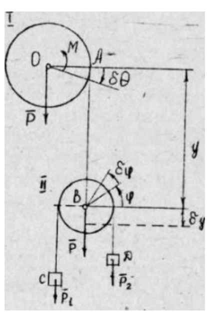

Рисунок 12.1 - Схема механізму

До шківа прикладений постійний крутильний момент $M = 60$ Нм. Вважаючи шків і блок однорідними дисками і нехтуючи масами ниток, визначити прискорення вантажів, а також закон руху системи. У початковий момент часу система знаходилася в стані спокою, відстань AB дорівнювала 40 м, а вантажі C і D розташовувалися на одному рівні.

Рішення. Виконаємо у зазначеній раніше послідовності всі пункти розв'язання задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду.

1. Система має два ступені свободи і в якості узагальнених координат приймемо зміщення центру блоку вниз і поворот блоку II навколо своєї осі, так що

$$q_1 = y, q_2 = \varphi.$$

2. Зобразимо на рисунку діючі на систему активні сили: вагу блоку, шківа і вантажів P_1, P_2, P_3, а також покажемо прикладений до шківа момент М, що обертає. Користуємося другим способом находження узагальнених сил (див. розд.7). При визначенні Q надамо системі таке можливе переміщення, за якого змінюється тільки відстань y (блок II додатково опускається вниз на відстань δy), тоді $\delta y \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ і ми отримуємо на такому можливому переміщенні, враховуючи, що при опуканні блоку II шків I повертається за годинниковою стрілкою на кут $\delta\theta = \frac{\delta y}{r}$,

$$\delta A' = -M\delta\theta + (P + P_1 + P_2)\delta y =$$

$$= \underbrace{\left(P + P_1 + P_2 - \frac{M}{r}\right)}_{Q_1}\delta y;\ Q_1 = P + P_1 + P_2 - \frac{M}{r}. \qquad (86)$$

Для визначення Q_2 надамо системі таке можливе переміщення, при якому відстань AB не зміниться, а блок II повернеться навколо своєї осі проти ходу годинникової стрілки на кут $\delta\varphi$, тоді $\delta y = 0, \delta\varphi \neq 0$:

$$\delta A'' = \underbrace{(P_1 r - P_2 r)}_{Q_2}\delta\varphi;$$

$$Q_2 = (P_1 - P_2)r. \tag{87}$$

3. Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять до системи: шківа I, блоку II, вантажів C і D, при цьому вантажі завершують поступальний рух і тому можуть розглядатися як точки. Крім того, при обчисленні кінетичних енергій вантажів врахуємо, що обидва вони роблять складний рух, опускаючись разом з точкою B і повертаючись навколо неї. Будемо мати

$$T = T_I + T_{II} + T_C + T_D. \tag{88}$$

Шків I здійснює обертальний рух, тому

$$T_I = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{z_1}\omega_I^2;\ \mathcal{J}_{z_1} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2;\ \omega_I = \frac{v_A}{r} = \frac{\dot{y}}{r}.$$

Тоді

$$T_I = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\frac{\dot{y}^2}{r^2} = \frac{1}{4}\frac{P}{g}\dot{y}^2. \tag{89}$$

Блок II здійснює плоскопаралельний рух, тоді на підставі теореми Кеніга

$$T_{II} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_B^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{z_2}\omega_{II}^2,$$

$$v_B = \dot{y}, \qquad \omega_{II} = \dot{\varphi}, \;\; \mathcal{J}_{z_2} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2,$$

і остаточно отримуємо

$$T_{II} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\dot{\varphi}^2. \qquad (90)$$

Для вантажів з урахуванням їхнього складного руху знаходимо

$$T_C = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g} \cdot {v_C}^2; \quad \bar{v}_C = \bar{v}_e + \bar{v}_r; \quad (\widehat{\bar{v}_e, \bar{v}_r}) = 0;$$

$${v_C}^2 = {\bar{v}_C}^2 = (\bar{v}_e + \bar{v}_r)^2 = v_e^2 + 2\bar{v}_e\bar{v}_r + v_r^2 =$$

$$= v_e^2 + 2\bar{v}_e\bar{v}_r + v_r^2;$$

$$v_e = y\dot{;} \;\; v_{er} = 2\dot{\varphi}.$$

Тоді

$$T_C = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}(\dot{y}^2 + 2r\dot{y}\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}). \qquad (91)$$

Аналогічно отримуємо для вантажу *D*, враховуючи, що для нього

$$(\widehat{\bar{v}_e, \bar{v}_r}) = 180° \Rightarrow \bar{v}_e \cdot \bar{v}_r = -v_e \cdot v_{r,}$$

$$T_D = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(\dot{y}^2 + 2r\dot{y}\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}). \qquad (92)$$

Підставляючи (89) - (92) в (88), отримуємо кінетичну енергію системи в узагальнених координатах:

$$T = \frac{1}{4g}[(3P + 2P_1 + 2P_2)\dot{y}^2 + 4(P_1 - P_2)r\dot{y}\dot{\varphi} +$$
$$+(P + 2P_1 + 2P_2)r^2\dot{\varphi}^2].$$

Ввівши позначення

$$A_1 = 3P + 2P_1 + 2P_2, \;\; A_2 = 2(P_1 - P_2),$$
$$A_3 = P + 2P_1 + 2P_2,$$

остаточно запишемо

$$T = \frac{1}{4g}(A_1\dot{y}^2 + 2A_2 r\dot{y}\dot{\varphi} + A_3 r^2\dot{\varphi}^2). \qquad (93)$$

4. Обчислимо похідні від кінетичної енергії за узагальненими швидкостями

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2g}(A_1\dot{y} + A_2 r\dot{\varphi}); \; \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2g}(A_2 r\dot{y} + A_3 r^2\dot{\varphi});$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) &= \frac{1}{2g}(A_1\ddot{y} + A_2 r\ddot{\varphi}); \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \frac{1}{2g}(A_2\ddot{y} + A_3 r\ddot{\varphi})r. \end{aligned} \qquad (94)$$

5. Згідно (93) T не залежить від y і φ, тому

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

6. З урахуванням отриманих виразів (94), (86), (87) складаємо рівняння Лагранжа для аналізованої системи

$$\frac{1}{2g}(A_1\ddot{y}+A_2r\ddot{\varphi})=P+P_1+P_2-\frac{M}{r};$$
$$\frac{1}{2gr}(A_2\ddot{y}+A_3r\ddot{\varphi})=(-P_1+P_2)r. \tag{95}$$

Введемо позначення

$$A_4=2g\left(P+P_1+P_2-\frac{M}{r}\right);\ \ A_5=2g\ (P_1-P_2).$$

Остаточно диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах мають вигляд

$$A_1\ddot{y}+A_2r\ddot{\varphi}=A_4;$$
$$A_2\ddot{y}+A_3r\ddot{\varphi}=A_{5.} \tag{96}$$

7. Відповідно до змісту завдання початкові умови при $t=0; y=40; \dot{y}=0;\ \varphi=0; \dot{\varphi}=0.$ (97)

8. Виключаючи змінну $\ddot{\varphi}$, з (96) отримуємо одне рівняння для $\ddot{y}$:

$$\left(A_1A_3-A_2{}^2\right)\ddot{y}=A_4A_3-A_5A_2.$$

звідси

$$\ddot{y}=\frac{A_4A_3-A_5A_2}{A_1A_3-A_2{}^2}. \tag{98}$$

$$A_1=3\cdot 100+2\cdot 150+2\cdot 120=840\text{ Н};$$

$$A_2=2\cdot(150-120)=60\text{ Н};$$

$$A_3=100+2\cdot 150+2\cdot 120=640\text{ Н};$$

$$A_4 = 2 \cdot 9{,}8 \cdot (100 + 150 + 120 - \frac{60}{0{,}1} = -4508 \,\frac{\text{Нм}}{\text{с}^2},$$

$$A_5 = 2 \cdot 9{,}8 \cdot (150 - 120) = 588 \,\frac{\text{Нм}}{\text{с}^2}.$$

Підставляючи ці значення (98), отримуємо

$$\ddot{y} = \frac{-4508 \cdot 640 - 588 \cdot 60}{840 \cdot 640 - 60^2} = 5{,}5 \,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \qquad (99)$$

Знак «-» означає, що точка B має прискорення, спрямоване вгору, оскільки позитивному значенню y відповідає переміщення вниз. Тоді з другого рівняння (97) знаходимо

$$\ddot{\varphi} = \frac{A_5 - A_2\ddot{y}}{A_3 r} = \frac{588 - 60(5{,}5)}{640 \cdot 0{,}1} = 14{,}3\ c^{-2}. \qquad (100)$$

Маючи (99) і (100) і послідовно інтегруючи ці співвідношення двічі, а потім задовольняючи початкові умови (97), знаходимо закон руху системи

$$\dot{y} = -5{,}5t + C_1; \ \ y = -5{,}5\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2;$$

$$\dot{\varphi} = 14{,}3t + C_3; \ \ \varphi = 14{,}3\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4;$$

з початкових умов $C_1 = 0;\ C_2 = 40; C_3 = 0;\ C_4 = 0;$

$$y = 40 - 5{,}5\frac{t^2}{2}; \ \ \varphi = 14{,}3\frac{t^2}{2}. \qquad (101)$$

Використовуючи теорію складного руху та враховуючи викладене у п.3, знаходимо прискорення вантажів

$$a_C = \ddot{y} + r\ddot{\varphi} = -5{,}5 + 0{,}1 \cdot 14{,}3 = -4{,}07\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_D = \ddot{y} - r_1\ddot{\varphi} = -5{,}5 - 0{,}1 \cdot 14{,}3 = -5{,}93\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Прискорення обох вантажів спрямовані вгору.

13. ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖУ ІІ РОДУ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ БІЛЯ ПОЛОЖЕННЯ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ

Теорія коливань механічних систем - один із найбільших розділів теоретичної механіки, що має велике прикладне значення.

Механічна система може здійснювати малі коливання лише поблизу **стійкого положення рівноваги**. Узагальнені координати системи в положенні рівноваги приймають рівними нулю, тобто відраховують їх від положення рівноваги. Тоді **коливальним рухом механічної системи у загальному випадку вважають будь який її рух,** у **якому все узагальнені координати чи частина їх змінюються не монотонно, а мають коливальний характер, тобто приймають нульові значення принаймні кілька разів**.

Для розгляду малих коливань слід дати визначення стійкого положення рівноваги системи та встановити умови, при виконанні яких положення рівноваги є стійким.

13.1 Стійкість положення рівноваги

Спочатку розглянемо поняття стійкості положення рівноваги з прикладу стрижня (рис. 13.1), та дамо визначення.

Щоб визначити, яке з перших двох положень рівноваги стрижня є стійким, слід дати стрижню досить мале відхилення від положення рівноваги, а загалом надати йому ще досить малу початкову кутову швидкість і розглянути його подальший рух. Якщо існує таке досить мале початкове відхилення стрижня від положення рівноваги, при якому сили прагнуть повернути стрижень у положення рівноваги ($\varphi = 0$), то таке положення рівноваги вважається **стійким**. У разі ($\varphi = 1$), коли сили ще далі видаляють стрижень від положення рівноваги, положення рівноваги є **нестійким.**

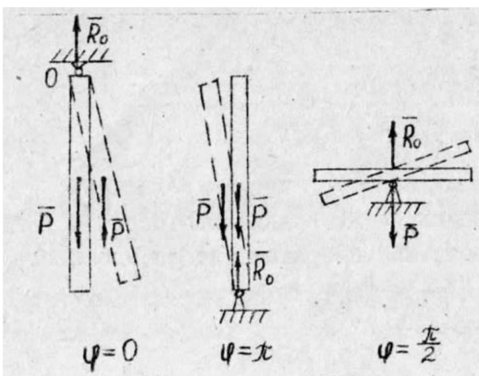

Рисунок 13.1 - Можливі положення рівноваги стрижня

Якщо стрижень, отримавши будь-яке мале початкове відхилення від положення рівноваги ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), залишається в рівновазі в новому відхиленому положенні, то таке положення рівноваги називається **байдужим**. Якщо повідомити стрижню в байдужому положенні ще початкову кутову швидкість, це положення стає нестійким.

При стійкому положенні рівноваги система, яка виведена з положення рівноваги досить малими збуреннями у вигляді початкових відхилень і швидкостей, які надаються всім точкам системи або їх частини, здійснює коливання біля положення рівноваги або наближається до нього без коливань. При нестійкому положенні рівноваги випадкові збурення призводять до того, що система все далі і далі віддаляється від положення рівноваги.

Чітке визначення поняття стійкості положення рівноваги було дано наприкінці минулого століття в роботах російського вченого А.М. Ляпунова. Будемо рахувати узагальнені координати $q_1, \dots, q_P$ від положення рівноваги. **Початкове збурення** системи полягає у загальному випадку з початкових значень узагальнених координат ${q_1}^0, \dots, {q_P}^0$ та початкових узагальнених швидкостей ${\dot{q}_1}^0, \dots, {\dot{q}_P}^0$.

Згідно Ляпунову рівновага системи називається **стійкою**, якщо для будь-якого скільки завгодно малого позитивного числа ε можна вибрати два інших малих позитивних числа η_1 і η_2, так що при початкових збуреннях, що задовольняють умовам

$$\left|q_j^0\right| > \eta_1, \;\; \left|\dot{q}_j^0\right| > \eta$$

у подальшому русі механічної системи для кожної узагальненої координати виконуються умови

$$\left|q_j(t)\right| < \varepsilon.$$

Як відомо, у положенні рівноваги механічної системи $Q_j = 0$. Для випадку консервативної механічної системи в положенні рівноваги $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0;$ $j = 1, \ldots, P$ (див. розд. 8). Отже, у положенні будьякої рівноваги потенційна енергія досягає свого екстремального значення.

13.2 Теорема Лагранжа - Діріхле

Достатня умова стійкості рівноваги голономної системи зі стаціонарними в'язями в консервативному силовому полі дається теоремою Лагранжа, точний доказ якої було дано Діріхле.

Теорема. Для стійкості положення рівноваги консервативної механічної системи з ідеальними та стаціонарними в'язями достатньо, щоб потенційна енергія системи мала в цьому положенні ізольований відносний мінімум.

Доказ. Спочатку розглянемо систему з одним ступенем свободи. На систему накладені голономні ідеальні стаціонарні в'язі і ця система знаходиться в стаціонарному потенційному силовому полі. Приймемо, що $q = 0, \Pi(0) = 0$ Тоді згідно з умовою теореми $\Pi_{min} = \Pi(0) = 0$ і функція $\Pi(q)$ наблизу точки $q = 0$ набуває тільки позитивних значень. Її графік зображено на рис. 13.2. Доведемо, що є такі малі початкові збурення, що з подальшому русі системи $|q(t)| < \varepsilon$.

Розглянемо два значення потенційної енергії, відповідні $|q| = \varepsilon$, тобто $\Pi(\varepsilon)$ та $\Pi(-\varepsilon)$.

Нехай $\Pi(-\varepsilon) < \Pi(\varepsilon)$; позначимо $\Pi^* = \Pi(-\varepsilon)$ проведемо через точку B_2 пряму, паралельну осі Oy, і знайдемо точку $A_1'(q', O)$, де $q' < \varepsilon$. Розглянемо інтервал A_2A_1.

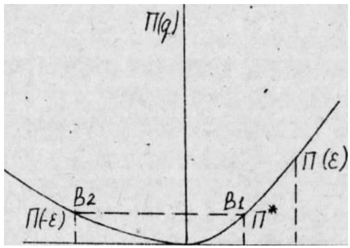

Рисунок 13.2 – Графік потенційної енергії

Для всіх точок $|q| < \varepsilon$ а потенційна енергія $\Pi(q) < \Pi^*$.

Тоді, якщо стане відомо, що при подальшому русі системи у кожний момент часу $\Pi(q) < \Pi^*$, то, отже, $|q| < \varepsilon$ і система перебуватиме поблизу положення рівноваги, тобто, положення рівноваги, тобто положення рівноваги і є положення стійкої рівноваги.

Можна знайти такі початкові дані $(q_0, \dot{q}_0)$ руху, внаслідок яких за подальшого руху потенційна енергія системи виявиться завжди меншою, ніж Π^*.

Оскільки система консервативна, то в процесі руху виконується закон збереження повної енергії

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 , \qquad (102)$$

де $T_0 = T(q_0, \dot{q}_0)$, $\Pi_0 = \Pi(\mathrm{q})$ виражаються через початкові збурення.

Це кінетична та потенційна енергії системи у початковий момент руху. Виберемо q_0 і $\dot{q}_0$ так, щоб виконувалася нерівність

$$T_0 + \Pi_0 < \Pi^*. \tag{103}$$

Ця нерівність із двома невідомими допускає безліч рішень, оскільки в положенні рівноваги $T(0;0), \Pi(0) = 0,$ з (102) можна записати

$$\Pi(q) = (T_0 + \Pi_0) - T. \tag{104}$$

Оскільки величина T під час руху системи завжди позитивна, то

$$\Pi(q) < (T_0 + \Pi_0)$$

і з урахуванням вибору початкових збурень, що задовольняють нерівності (103), можемо записати $\Pi(q) < \Pi^*$, а це означає, що координата q системи при русі задовольняє нерівності $|q| < \varepsilon$.

Це означає, що система при русі виходить з інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$ і теорема Лагранжа-Діріхле для системи з одним ступенем свободи доведена.

У разі системи з p ступенями свободи міркують аналогічно. Приймемо, що у положенні рівноваги $\Pi_{min} = \Pi(0, \ldots, 0) = 0,$ отже, у досить малої відстані від положення рівноваги $\Pi > 0.$ Виберемо ε і простежимо за зміною П при зміні узагальнених координат в інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$, включаючи його межі.

Нехай $|q_1| = \varepsilon$, а решта координат приймає будь - які значення в межах $\pm\varepsilon.$ Позначимо через Π_1 мінімальне значення потенційної енергії в цьому випадку, аналогічно Π_1 - це мінімальне значення П при

$|q_2| = \varepsilon$, а інші q_j змінюються в межах $\pm\varepsilon$. Розмірковуючи таким чином і далі, отримаємо ряд позитивних величин $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_P$. Мінімальне значення членів цього ряду позначимо Π^*.

Якщо під час руху системи потенційна енергія постійно приймає значення, які задовольняють нерівності $\Pi(q_1, \dots, q_P)$, то жодна з узагальнених координат не досягне межі інтервалу $\pm\varepsilon$.

Для консервативної системи у будь-який момент руху

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0. \qquad (105)$$

Підберемо початкові відхилення та початкові швидкості так, щоб

$$T_0 + \Pi_0 < \Pi^*. \qquad (106)$$

що цілком можливо, тому що в положенні рівноваги $T = 0$, $\Pi = 0$, тоді, оскільки $T > 0$, з (105), (106) отримуємо

$$\Pi = (T_0 + \Pi_0) - T < \Pi = T_0 + \Pi_0 < \Pi^*,$$

а в цьому випадку, згідно сказаного, протягом усього часу руху $|q_j| < \varepsilon, (j = 1, \dots, P)$. Теорема доведена.

Як практично користуватися теоремою?

Для системи з одним ступенем свободи визначення мінімуму є елементарним. Похідна другого порядку від потенційної енергії за узагальненою координатою, обчислена в положенні рівноваги, має бути позитивною:

$$\left(\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right) > 0$$

(нуль біля дужок тут і надалі означає, що береться значення функції у положенні рівноваги, де $q_j = 0$, $(j = 1, \ldots, P)$.

Для системи з довільним кінцевим числом ступенів свободи критерій мінімуму має складніший вигляд. Встановимо цей критерій.

13.3 Критерій Сільвестра

Розглянемо одне з положень рівноваги системи та вважатимемо, що в цьому положенні

$$\Pi(0, \ldots, 0) = 0. \qquad (107)$$

Розкладемо потенційну енергію біля положення рівноваги до ряду Маклорена за ступенями узагальнених координат:

$$\Pi(q_1, \ldots, q_P) = \Pi(0, \ldots, 0) + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_P}\right)_0 q_P + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial {q_1}^2}\right)_0 {q_1}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial {q_P}^2}\right)_0 {q_P}^2 +\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_{P-1} \partial q_P}\right)_0 q_{P-1} q_P\right] + \cdots$$

Тут крапками після квадратної дужки позначені члени вищого порядку щодо $q_1, \cdots, q_P$. Перший доданок дорівнює нулю за умовою (107). Усі коефіцієнти при $q_1,\cdots,q_P$ в першому ступені також дорівнюють нулю, оскільки у положенні рівноваги повинні виконуватися рівності (42).

Через зазначені обставини розкладання функції П почнеться з членів не нижче другого порядку щодо q_j. Обмежуючись малими відхиленнями від положення рівноваги, можна відкинути всі наступні члени розкладання, оскільки у малих відхиленнях найбільший внесок дають члени з найменшим порядком. Коефіцієнти при членах другого ступеня позначимо

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right) = C_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,P. \qquad (108)$$

Ці коефіцієнти, називаються **узагальненими коефіцієнтами жорсткості**, обчислюються в положенні рівноваги при $q_1 = q_2 = \cdots = q_P = 0$, отже, всі C_{ij} – сталі числа, причому симетричні за індексами $C_{ij} = C_{ji}$.

Враховуючи це, отримаємо наступне розкладання потенційної енергії в ряд за ступенями $q_j (j = 1,\dots,P)$:

$$\Pi = \frac{1}{2}(C_{11}{q_1}^2 + \cdots + C_{PP}{q_P}^2 + 2C_{12}q_1q_2 + \cdots +$$

$$+2C_{P-1,P}q_{P-1}q_P) + \cdots$$

або скорочено

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{P} C_{ij}\, q_i q_j + \cdots \qquad (109)$$

Припустимо, що квадратична форма (109) позитивна. У цьому випадку поблизу положення рівноваги $q_1 = 0, \dots, q_P = 0$ квадратична частина потенційної енергії та повна потенційна енергія будуть позитивними. Оскільки $\Pi(0, \dots, 0) = 0$, це означає, що потенційна енергія матиме в цьому положенні мінімум і, отже, виходячи з теореми Лагранжа-Діріхле маємо стійке положення рівноваги.

Отже, у разі $P > 1$ питання визначення мінімуму потенційної енергії звівся до питання визначення знака квадратичної форми (109).

Питання про знак будь-якої квадратичної форми визначається **теоремою Сильвестра**: для того щоб квадратична форма була виразно позитивною, необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці квадратичної форми були позитивні. Доказ цієї теореми дається у курсі лінійної алгебри.

Матриця квадратичної форми (109) та її головні діагональні мінори мають вигляд

$$\left\| \begin{matrix} C_{11} C_{12} \cdots C_{1P} \\ C_{21} C_{22} \cdots C_{2P} \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \ \cdot\cdot \ \cdot\cdot \\ C_{P1} C_{P2} \dots C_{PP} \end{matrix} \right\| \cdot \Delta_1 = C_{11}. \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \dots$$

$$\Delta_P = \begin{vmatrix} C_{11} C_{12} \cdots C_{1P} \\ C_{21} C_{22} \cdots C_{2P} \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \ \cdot\cdot \ \cdot\cdot \\ C_{P1} C_{P2} \dots C_{PP} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, критерій визначеної позитивності квадратичної форми (109) - критерій Сильвестра

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_P > 0. \qquad (110)$$

13.4 Порядок застосування теореми Лагранжа-Діріхле

1. Визначити кількість ступенів свободи системи, що розглядається, і вибрати узагальнені координати, відраховуючи їх від положення рівноваги.

2. Обчислити потенційну енергію системи, висловивши її через узагальнені координати і вважаючи, що вона дорівнює нулю у положенні рівноваги, тобто приймаючи, що $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$.

3. За формулами (108) обчислити всі необхідні коефіцієнти жорсткості системи.

4. Обчислити всі основні діагональні мінори Δ_j $(j = 1, \ldots, P)$ і перевірити виконання критерію Сильвестра. Якщо все $\Delta_j > 0$ $(j = 1, \ldots, P)$, то положення рівноваги є стійким.

При цьому умови (110) можуть використовуватися для двох цілей: для заданої механічної системи з конкретними параметрами перевірити стійкість положення рівноваги або ж, що на практиці зустрічається значно частіше, для того щоб підібрати жорсткістні і масові параметри конструкції, що забезпечують стійкість положення рівноваги.

Примітка. Теорема Лагранжа-Діріхле дає лише достатні умови стійкості рівноваги консервативної системи, але вона не дає жодних підстав будувати висновки про те, чи буде рівновага стійкою або нестійко, якщо у цьому положенні потенційна енергія не має мінімуму. У цьому випадку потрібні додаткові дослідження, наприклад, залучення теорем Ляпунова.

Дані питання в курсі теоретичної механіки не розглядаються.

Приклад. Дослідити стійкість вертикального положення рівноваги «оберненого» подвійного маятника (рис. 13.3).

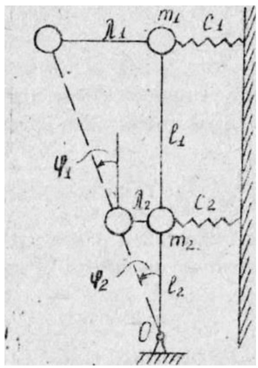

Рисунок 13.3 – «Обернений» подвійний маятник

Маятник може бути схематизований у вигляді двох матеріальних точок мас m_1, m_2, пов'язаних стрижнями довжин ℓ_1 і ℓ_2. У вертикальному положенні рівноваги пружини (жорсткості їх C_1 і C_2) не напружені, вагою стрижнів знехтувати.

Рішення. 1. Система має два ступені свободи і як узагальнені координати приймемо кути відхилення стрижнів від вертикального $q_1 = \varphi_1,\ q_2 = \varphi_2$.

2. Вважаючи $\Pi = 0$ у вертикальному положенні стрижнів, обчислимо $\Pi(\varphi_1, \varphi_2)$ як роботу на переміщенні з відхиленого положення у вертикальне, причому роботу тут виконують сили пружності обох пружин і сили тяжіння кожної з точок

$$\Pi = \frac{C_1\lambda_1^2}{2} + \frac{C_2\lambda_2^2}{2} - m_1gh_1 - m_2gh_2;$$

$$\lambda_1 = \ell_2 sin\varphi_2 + \ell_1 sin\varphi_1;\ \lambda_2 = \ell_2 sin\varphi_2;$$

$$h_1 = (\ell_1 + \ell_2) - \ell_1 cos\varphi_1 - \ell_2 cos\varphi_2;$$

$$h_2 = \ell_2 - \ell_2 cos\varphi_2.$$

Маємо наступний вираз для потенційної енергії у вибраних узагальнених координатах:

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{C_1}{2}(\ell_2 sin\varphi_2 + \ell_1 sin\varphi_1)^2 + \frac{C_2}{2}{\ell_2}^2 sin^2\varphi_2 -$$

$$-m_1g[(\ell_1 + \ell_2) - \ell_1 cos\varphi_1 - \ell_2 cos\varphi_2] -$$

$$-m_2g\ell_2(1 - cos\varphi_2).$$

3. Так як $C_{12} = C_{21}$, то тут необхідно за формулами (108) обчислити три коефіцієнти жорсткості C_{11}, C_{12}, C_{22}. Обчислимо спочатку перші похідні від П:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = C_1(\ell_1 sin\varphi_1 + \ell_2 sin\varphi_2)\ell_1 cos\varphi_1 -$$

$$-m_1g\ell_1 sin\varphi_1,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = C_1(\ell_1 sin\varphi_1 + \ell_2 sin\varphi_2)\ell_2 cos\varphi_2 +$$

$$+\frac{C_2}{2}{\ell_2}^2 sin2\varphi_2 - (m_1 + m_2)g\ell_2 sin\varphi_2.$$

Згідно (108) отримуємо

$$C_{11}=\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial {\varphi_1}^2}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_2=0}}=[-C_1\ell_1 sin\varphi_1(\ell_1 sin\varphi_1+\ell_2 sin\varphi_2)+$$

$$+C_1{\ell_1}^2cos^2\varphi_2-m_1g\ell_1cos\varphi_1]_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_2=0}}=C_1{\ell_1}^2-m_1g\ell_1.$$

$$C_{12}=\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_2=0}}=C_1\ell_1\ell_2\, cos\varphi_1 cos\varphi_2|_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_2=0}}=C_1\ell_1\ell_2;$$

$$C_{22}=\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial {\varphi_2}^2}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_2=0}}=[-C_1\ell_2 sin\varphi_2(\ell_1 sin\varphi_1+\ell_2 sin\varphi_2)+$$

$$+C_1{\ell_2}^2cos^2\varphi_2+C_2{\ell_2}^2cos2\varphi_2-$$

$$-(m_1+m_2)g\ell_2cos\varphi_2]_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_2=0}}=\ell_2[(C_1+C_2)\ell_2-$$

$$-(m_1+m_2)g].$$

Згідно з критерієм Сильвестра (110) вертикальне положення рівноваги «оберненого» подвійного маятника буде стійким, якщо жорсткості пружин, довжини стрижнів і маси вантажів задовольняють наступним двом нерівностям

$$\Delta_1=C_{11}=C_1{\ell_1}^2-m_1g\ell_1>0\Rightarrow C_1\ell_1>m_1g; \quad (111)$$

$$\Delta_2=C_{11}C_{22}-{C_{12}}^2=\ell_1(C_1\ell_1-m_1g)\ell_2[(C_1+C_2)\ell_2-$$

$$-(m_1+m_2)g](C_1\ell_1-m_1g)>{C_1}^2\ell_1\ell_2. \quad (112)$$

При заданих числових значеннях величин $m_1, m_2, \ell_1, \ell_2, C_1, C_2$, якщо при підстановці цих чисел в (111) і (112) обидва нерівності вірні, положення рівноваги стійке. При порушенні хоча б одного з нерівностей аналізоване положення рівноваги є нестійким.

Нерівності (111), (112) можуть бути використані на стадії проектування подібних механізмів і конструкцій, коли можна за допомогою цих умов підібрати такі довжини, жорсткості і маси, при яких вертикальне положення буде стійким.

13.5 Власні лінійні коливання системи з одним ступенем свободи

Механічна система з одним ступенем свободи у випадку голономних ідеальних в’язів, що не звільнюються, має одну узагальнену координату q і її рух описується одним рівнянням Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \qquad (118)$$

Узагальнену силу Q можна вважати що складається з трьох частин

$$Q = Q^{П} + Q^{Ф} + Q^{В}, \qquad (119)$$

де $Q^{П}$ - узагальнена сила потенційних сил,

$$Q^{П} = -\frac{dП}{dq};$$

$$П = П(q);$$

$Q^{Ф}$ – частина узагальненої сили від дії сил опору;

$Q^{\text{В}}$ – узагальнена сила від так званих збурювальних сил, які залежать насамперед від часу; узагальнена координата q відраховується від положення стійкої рівноваги.

Нехай система відхилена на невелику величину q_0 від положення рівноваги і їй надана невелика початкова швидкість $\dot{q}_0$. Тоді внаслідок стійкості положення рівноваги система здійснюватиме рух поблизу цього положення рівноваги, тобто q і $\dot{q}$. будуть весь час малі за модулем.

Розглянемо малі коливання системи на величину q_0 під впливом одних потенційних сил, тобто, коли $Q = Q^{\Pi}$. (Вважаємо, що сил опору і сил, що збурюють, немає). Такі коливання називаються **власні** або **вільними**.

Оскільки в силу сказаного раніше коливання вважаються малими, то в рівнянні Лагранжа (118) можна знехтувати всіма членами другого і більш високого порядку щодо $q,\ \dot{q}$ і $\vec{\dot{q}}$.

У цьому випадку отримаємо лінійне диференціальне рівняння для узагальненої координати q. Коливання, для яких диференціальне рівняння є лінійним, називаються лінійними.

Для виведення з рівняння Лагранжа (113) лінійного рівняння малих власних коливань слід кінетичну та потенційну енергії розкласти в ряди навколо положення рівноваги системи, де $q = 0$.

Для системи зі стаціонарними в'язями, що має одну ступінь свободи, кінетична енергія згідно (75) має вигляд

$$T = \frac{1}{2} A(q)\, \dot{q}^2, \tag{115}$$

де

$$A(q) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2 .$$

Розкладаючи $A(q)$ в ряд Маклорена за ступенями q, маємо

$$A(q) = A(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \cdots \tag{116}$$

Щоб у розкладанні T були члени не вище другого порядку по відношенню до q і $\dot{q}$, з (116) достатньо взяти тільки перший член, який позначимо $a = A(0)$, тоді з точністю до малих другого порядку отримаємо наближений вираз

$$T = \frac{1}{2} a\, \dot{q}^2. \tag{117}$$

Додатна стала a називається **коефіцієнтом інерції** (за розмірністю найчастіше це маса або момент інерції). Так як для стаціонарного силового поля $\Pi = \Pi(q)$, то, розкладаючи Π в ступеневий ряд біля $q = 0$, на підставі формули (109) маємо

$$\Pi = \frac{1}{2} C q^2, \tag{117}$$

де $C = \left(\frac{d^2 П}{dq^2}\right) > 0$ (оскільки розглядається рух поблизу положення стійкості рівноваги). Константа C називається **коефіцієнтом жорсткості**, або **жорсткістю**.

Системи, в яких T і $П$ виражаються точно за формулами (117) і (118) без відкидання членів вищого порядку, називаються **лінійними**.

Підставляючи (117) і (118) в (113), отримуємо **диференціальне рівняння малих власних коливань системи** з одним ступенем свободи:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{119}$$

Рівняння (119) можна переписати у вигляді

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \tag{120}$$

де величина $k = \sqrt{\frac{c}{a}}, (c^{-1})$ називається **круговою** або **циклічною частотою** коливань. Рівняння (120) аналогічно диференційному рівнянню прямолінійних коливань матеріальної точки маси m під дією сили пружності $F_x - c_0 x$:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, k^2 = \sqrt{\frac{c_0}{m}}. \tag{121}$$

Подібного роду рівняння часто зустрічаються у фізиці, математиці, динаміці точки, та методи отримання загального рішення, які б задовольняли початковим умовам, визначення амплітуди та періоду коливань докладно викладені в літературі. Період власних коливань системи, рух якої описується рівнянням (120), обчислюється за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}, \qquad (122)$$

а загальне рішення рівняння (120) має вигляд

$$q = C_1 coskt + C_2 sinkt. \qquad (123)$$

Приклад. Визначити період малих коливань астатичного маятника, що використовується у деяких сейсмографах для запису коливань грунту (рис. 13.4). Маятник складається з жорсткого стрижня довжиною ℓ, несучого на кінці масу m, затиснуту між двома горизонтальними пружинами жорсткості C із закріпленими кінцями. Масою стрижня знехтувати і вважати пружини в положенні рівноваги ненапруженими.

Рішення. Завдання подібного виду слід вирішувати в наступному порядку.

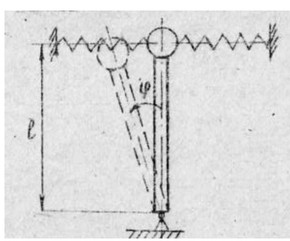

Рисунок 13.4 – Астатичний маятник

1. Визначити число ступенів свободи системи та вибрати узагальнену координату.

У даному завданні положення маятника в будь який момент часу визначається кутом відхилення стрижня від вертикального положення, тому $p = 1$, $q = \varphi$.

2.Обчислити кінетичну енергію системи, виразивши її через узагальнену координату та узагальнену швидкість. Спростити отриманий вираз так, щоб у ньому залишилися малі не вище другого порядку, представивши T у вигляді (117).

В даному випадку, оскільки маса стрижня не враховується, кінетичну енергією має тільки точкова маса, тоді

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\varphi^2. \qquad (124)$$

Тут спрощення не потрібно, тому що відразу отримали вираз виду (117).

3. Знайти потенційну енергію системи, виразив її через узагальнену координату, і зробити спрощення, використовуючи факт малості коливань, представивши Π як (118) .

Для нашої задачі

$$\Pi = \Pi_1 + 2\Pi_2. \qquad (125)$$

де Π_1 – потенційна енергія сили тяжіння;

Π_2 - потенційна енергія кожної з пружин, причому вважаємо, що $\Pi(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -mgh = -mg\ell(1 - cos\varphi) = -mg\ell 2sin^2\frac{\varphi}{2}; \\ \Pi_2 &= C\frac{\lambda^2}{2} = C\frac{1}{2}(\ell sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}C\ell^2 sin^2\varphi. \end{aligned} \qquad (126)$$

Оскільки розглядаються малі коливання, то для малих значень аргументу можна записати, що $sin\varphi \approx \varphi$, і тоді з (126), (125) отримуємо уявлення виду (118):

$$\Pi = -mg\ell\frac{\varphi^2}{2} + C\ell^2\varphi^2 - \ell\left(C\ell - \frac{1}{2}mg\right)\varphi^2. \quad (127)$$

4. Підставляючи отримані спрощені вирази для T і Π в рівняння Лагранжа II роду (113), отримати диференціальне рівняння вільних коливань у вигляді (119), (120) і визначити частоту і період коливань. За необхідності записати загальне рішення у формі (123) і, задовольнивши початковим умовам, знайти закон руху системи.

Підставляючи (124) та (127) у рівняння Лагранжа, яке в нашому випадку має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{d\Pi}{d\varphi},$$

отримуємо

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -2\ell(C\ell - \frac{1}{2}mg)$$

або остаточно

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{2C}{m} - \frac{g}{\ell}\right)\varphi = 0. \quad (128)$$

Порівнюючи (128) з рівнянням (120), бачимо, що

$$k = \sqrt{\frac{2C}{m} - \frac{g}{\ell}}, \quad T = \frac{2\pi}{k}.$$

За фізичним змістом частота може набувати лише дійсних значень, тому, щоб маятник здійснював коливання, повинно виконуватись умова

$$\frac{2C}{m} > \frac{g}{\ell}. \tag{130}$$

Скористаємося теоремою Лагранжа-Діріхле та з'ясуємо, коли вертикальне положення рівноваги буде стійким. Згідно з критерієм Сильвестра для системи з одним ступенем свободи має виконуватися умова

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} > 0. \tag{131}$$

Підставляючи в (131) вираз (127), отримуємо

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = 2\ell\left(C\ell - \frac{1}{2}g\right) > 0 \Rightarrow 2C\ell > mg.$$

що збігається з умовою (130); отже, при виконанні нерівності (130) вертикальне положення рівноваги стійке і маятник може здійснювати коливання поблизу цього положення.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Дідковський, В. С. Основи аналітичної механіки та теорії коливань [Електронний ресурс]: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 171 Електроніка / В. С. Дідковський, К. С. Дрозденко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,76 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 149 с.

2. Зражевський, Г. М. Аналітична механіка: навч. посіб. Ч. 1 / Г. М. Зражевський. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2024. — 117 с.

3. Булгаков, В. М. Теоретична механіка: підручник / В. М. Булгаков. — Київ: Центр учбової літератури, 2020. — 640 с. — ISBN 978-617-673-939-6.