МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

І. М. Килимник

ПРАКТИКУМ З ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2024

УДК 517.91(075.8)
К 39

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного університету «Запорізька політехніка»,
(Протокол № 8 від 26.03.2024 р.)

Рецензенти:

Туровцев Г. В., доктор фізико-математичних наук, професор, ректор Запорізького інституту економіки та інформаційних технологій;

Гребенюк С. М., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету.

К39 **Килимник І. М.**

Практикум з елементів теорії ймовірностей : Навчальний посібник / І. М. Килимник – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 256 с.

ISBN 978-617-529-447-5

У посібнику викладено матеріал з теорії ймовірностей у обсязі, передбаченому програмою курсу вищої математики для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки.

Наводяться всі необхідні теоретичні відомості з курсу теорії ймовірностей для того, щоб студент міг виконати завдання без звернення до додаткової літератури. Теоретичний матеріал доповнено численними прикладами з докладним розв’язанням та завданнями для самостійної роботи з відповідями.

Навчальний посібник «Практикум з елементів теорії ймовірностей» може бути корисним для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки заочної (дистанційної) форми навчання та для самостійної роботи студентів денної форми навчання.

УДК 517.91(075.8)

ISBN 978-617-529-447-5

© Килимник І.М., 2024
© Національний університет «Запорізька політехніка», 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей вивчає властивості масових випадкових подій, які можуть багаторазово повторюватись, при відтворенні певного комплексу умов. Основна властивість будь-якої випадкової події (незалежно від її природи) – ймовірність її здійснення.

Теорія ймовірностей – математична наука, що є теоретичною основою вивчення статистичних закономірностей, які виникають при багаторазовому повторенні дослідів із випадковими результатами. Можливість застосування теорії ймовірностей до вивчення явищ, які стосуються дуже далеких один від одного областей науки, полягає в тому, що ймовірності подій задовольняють деяким простим співвідношенням, незалежно від конкретного змісту явища, що вивчається. Одним з основних завдань теорії ймовірностей є встановлення правил, що дозволяють за ймовірністю одних подій знаходити ймовірності інших подій. Настання або ненастання деякої події зазвичай залежить від великої кількості мало пов'язаних між собою випадкових факторів. Тому можна сказати, що теорія ймовірностей – це математична наука, яка вивчає закономірності, що виникають при взаємодії великої кількості випадкових факторів.

Усі події, що відбуваються як у природі, так і в суспільстві, взаємопов'язані між собою: одні з них є наслідком інших і, у свою чергу, можуть бути причиною третіх. Ці події можна розділити на два класи – події детерміновані і випадкові.

Детерміновані події характеризуються тим, що за певного комплексу умов вони або відбуваються завжди, або ніколи. Наприклад, комплексом умов, за яких вода перетворюється на пару, є атмосферний тиск у 760 мм і температура вища за 100°С. З іншого боку, за цього ж комплексу умов вода не може перетворитися на лід.

Інший клас подій характеризується тим, що за певного комплексу умов вони можуть як відбутися, так і не відбутися. Передбачити це заздалегідь неможливо. Наприклад: при одноразовому підкиданні монети поява герба на верхній стороні – подія випадкова; кількість сонячних днів у наступному році заздалегідь передбачити неможливо; чи пропрацює орбітальна станція без пошкоджень протягом гарантійного терміну, заздалегідь невідомо.

Основою наукового дослідження в теорії ймовірностей є досвід та спостереження. Часто доводиться мати справу з різними дослідами.

Досліди можуть давати різні результати залежно від комплексу умов, за яких вони відбуваються. Результати досліду можна характеризувати якісно та кількісно. Якісна характеристика результату досліду є подією.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства та техніки: теорії надійності, теорії масового обслуговування, теоретичної фізики, геодезії, астрономії, теорії стрільби, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загального зв'язку та в багатьох інших теоретичних і прикладних науках. Теорія ймовірностей служить також для обґрунтування математичної та прикладної статистики, яка, у свою чергу, використовується при плануванні та організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, якості продукції та для багатьох інших цілей.

Курс теорії ймовірностей спирається на стандартні курси математичного аналізу, алгебри та дискретної математики і є основою для наступного за ним курсу математичної статистики. Обидва вони становлять головну частину необхідної бази для основних дисциплін спеціалізації економістів-математиків – економетрики, багатовимірних статистичних методів та теорії ризику.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1 Елементи комбінаторики

Нехай задана множина Ω, що містить скінченну кількість елементів (студенти в групі, яблука в кошику, набір доміно і т.д.). Такі множини будемо називати скінченними. Наприклад, якщо множина складається з чотирьох елементів, то можна позначати її $\{a, b, c, d\}$. Множина, для якої зазначений порядок розташування елементів, називається впорядкованою. Сполуками називають різні групи, складені з будь-яких елементів. Розрізняють такі три види сполук: перестановки, розміщення, комбінації.

Означення 1.1 *Перестановками з* n *елементів* називають сполуки, що містять всі n елементів і відрізняються між собою лише їх порядком.

Кількість перестановок з n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = n!, \qquad . \qquad (1.1)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Прийнято, що $0! = 1$. Корисна рекурентна формула $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Зауваження 1.1 Простий і комбінаторний сенс числа перестановок: $n!$ означає скількома способами можна впорядкувати кінцеву n-елементну множину.

Нехай є n однакових елементів першого типу, k однакових елементів другого типу і s однакових елементів третього типу, всього $(n+k+s)$ елементів. Скількома способами можна розділити ці елементи на три групи так, щоб в одній групі було n предметів, в іншій k предметів, у третій s предметів? Це завдання на перестановки з повторенням.

Число перестановок з повтореннями знаходиться за формулою:

$$\overline{P}_{(n+k+s)} = P_{(n+k+s)\,(\text{з повт})} = \frac{(n+k+s)!}{n!\cdot k!\cdot s!}. \qquad (1.2)$$

<u>Означення 1.2</u> *Розміщеннями з n елементів по m в кожному* називають такі сполуки, в кожну з яких входять m елементів, узятих з даних n елементів і які відрізняються одна від одної або самими елементами, або порядком їх розташування.

Число розміщень з n елементів по m знаходять за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

або (1.3)

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

<u>Зауваження 1.2</u> За змістом визначення зрозуміло, що $m \le n$.

Розміщення з повтореннями з n елементів по m елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно разів від 1 до m включно або не містити його зовсім. Тобто кожне розміщення з повторенням з n елементів по m елементів може складатися не лише з різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів.

Число розміщень з повтореннями обчислюється за формулою:

$$\overline{A}_n^m = A_{n\,(\text{з повт})}^m = n^m. \qquad (1.4)$$

<u>Означення 1.3</u> *Комбінаціями з n елементів по m* називають сполуки, в кожну з яких входять m елементів, взятих з даних n елементів і які відрізняються одна від одної, принаймні, одним елементом (порядок не враховуємо).

Число комбінацій з n елементів по m знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1)}{m!}$$

або (1.5)

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

На практиці часто використовують першу формулу для обчислення C_n^m.

Деякі властивості комбінацій, що застосовуються при розв'язуванні задач:

$$C_n^0 = C_0^0 = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^m = C_n^{n-m};$$
$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1};$$
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... C_n^n = 2^n.$$

Комбінації з повтореннями з n елементів по m елементів ($m \le n$) можуть містити будь-який елемент скільки завгодно разів від 1 до m включно або не містити його зовсім. Тобто кожна комбінація з повторенням з n елементів по m елементів може складатися не лише з m різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів. Слід зазначити, що якщо, наприклад, два з'єднання по m елементів відрізняються один від одного лише порядком розташування елементів, то вони не вважаються різними комбінаціями.

Число комбінацій з повтореннями обчислюється за формулою:

$$\overline{C}_n^m = C_{n\ (\text{з повт})}^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-m)!}. \tag{1.6}$$

<u>Зауваження 1.3</u> m може бути більше за n.

Два основні правила комбінаторики: правило суми і правило добутку.

Правило суми (правило «або»). Якщо якийсь елемент A можна вибрати m-способами, а елемент B – n-способами (не такими, як A), то елемент «або A, або B» можна вибрати $(m+n)$-способами.

Зауваження 1.4. При використанні правила суми потрібно стежити, щоб жоден із способів вибору елемента A не співпадав із жодним способом вибору елемента B.

Правило добутку (правило «і»). Якщо елемент A можна вибрати m-способами, а після кожного такого вибору інший елемент B можна вибрати n-способами (незалежно від вибору елемента A), то пару елементів A і B можна вибрати $(m \cdot n)$-способами.

Зауваження 1.5. Ключові висловлювання у формулюванні, що призводять до правила добутку: «і те, й інше», «одночасно», «незалежно», «кожен із».

Ці правила можна узагальнити на довільну кількість елементів.

Приклад 1. Одночасно кидають два гральних кубика. Визначити кількість результатів, у яких сумарна кількість очок, що випали, буде не більше 4.

Розв'язання. Число сприятливих випадків знайдемо простим їх перерахуванням: $1+1$, $1+2$, $1+3$, $2+1$, $2+2$, $3+1$, тобто всього 6.
Відповідь: 6.

Приклад 2. Слово АБРАКАДАБРА розрізається на букви, які потім перемішуються. Одна за одною витягуються 5 букв і прикладаються одна до одної зліва направо. Знайти число випадків, що сприяють появі слів РАДАР та БАРКА.

Розв'язання. У вихідному слові АБРАКАДАБРА міститься 2 букви «Р», 5 букв «А», 1 буква «Д». Тому в слові РАДАР першу букву «Р» можна вибрати двома способами, а другу – всього лише одним (одна «Р» уже взята). Першу букву «А» можна вибрати 5 способами, другу – 4 способами. Букву «Д» – в один спосіб. За правилом добутку число сприятливих випадків дорівнює

$m=2\cdot5\cdot1\cdot4\cdot1=40$. Аналогічно число випадків, що сприяють появі слова БАРКА, дорівнює: $m=2\cdot5\cdot2\cdot1\cdot4=80$.
Відповідь: 80.

Приклад 3. Менеджер щоденно переглядає 6 видань економічного змісту. Якщо порядок перегляду видань випадковий, то скільки існує способів його здійснення?

Розв'язання. Способи перегляду видань розрізняються лише порядком, склад видань при кожному способі незмінний. Отже, при розв'язанні цієї задачі необхідно розрахувати число перестановок:

$$P_6=6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720.$$

Відповідь: 720.

Приклад 4. Правління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів 3 людини на різні посади. Всі 10 кандидатів мають рівні шанси. Скільки різних груп по 3 людини можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язання. Оскільки групи по 3 людини можуть відрізнятися і складом претендентів, і заповнюваними ними вакансіями, тобто порядком, то необхідно розрахувати число розміщень з 10 елементів по 3.

$$A_{10}^3=10\cdot9\cdot8=720.$$

Відповідь: 720.

Приклад 5. Хай дано п'ять цифр: $1,2,3,4,5$. Визначимо, скільки тризначних чисел можна скласти з цих цифр.

Розв'язання. Якщо цифри в тризначному числі можуть повторюватися, то кількість тризначних чисел буде n^m, де $n=5$ (кількість цифр), $m=3$ (число тризначне). Всього 5^3 чисел, тобто 125. Якщо цифри в тризначному числі не повторюються, то отримаємо $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$ чисел.
Відповідь: 60 або 125.

Приклад 6. Правління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів 3 людини на однакові посади, всі 10 кандидатів мають рівні шанси. Скільки різних груп по 3 людини можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язання. Склад різних груп повинен відрізнятися, принаймні, хоча б одним кандидатом і порядок вибору не має значення, отже, цей вид з'єднань є комбінаціями.

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120\ .$$

Відповідь: 120 .

Приклад 7. П'ятьох чоловіків і десятьох жінок випадковим чином розсаджують по троє за 5 столів. Визначити кількість способів посадки, щоб за кожним столом сидів один чоловік.

Розв'язання. Одного чоловіка і двох жінок можна посадити за перший стіл $m_1=5\cdot C_{10}^{2}$ способами, за другий, третій, четвертий, п'ятий столи – відповідно: $m_2=4\cdot C_8^2$, $m_3=3\cdot C_6^2$, $m_4=2\cdot C_4^2$, $m_5=1$ способами. Отже, кількість сприятливих результатів дорівнює:

$$m=m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4\cdot m_5=5!\cdot C_{10}^{2}\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot 1=\frac{5!\cdot 10!}{2^5}\ .$$

Відповідь: $m=\dfrac{5!\cdot 10!}{2^5}$.

Приклад 8. П'ять книг ставлять на полицю. Визначити кількість способів розташування книг, щоби дві певні книги виявилися поруч.

Розв'язання. Підрахуємо число сприятливих випадків. Дві певні книги можна поставити поруч $2!=2$ способами. Книги, що залишилися, можна розташувати на полиці $4!$ способами. Тому кількість способів розташування книг дорівнює $2\cdot 4!=48$.

Відповідь: 48 .

1.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур (тура ходить та б'є тільки по прямій), щоб вони не вбили одна одну.	40320

Завдання	Відповідь
2. Скільки є способів вибрати 5 карт із колоди на 36 карт так, щоб серед них було не менше 3 шісток?	528
3. Скільки різних слів (немає значення чи є зміст) можна створити, переставляючи літери слова: а) ІНТЕГРАЛ, б) ФАКТОРІАЛ, в) СТАТИСТИКА?	а) 40320 , б) 181440 , в) 75600 .
4. Вісім студентів зняли трикімнатну квартиру для проживання. У двох кімнатах може розміститися по троє осіб, а в останній – двоє. Скільки є способів розміститися студентам у квартирі?	560
5. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр: $0,1,2,3,4$: а) жодна цифра не повторюється, б) цифри можуть повторюватися?	а) 96 , б) 2500 .
6. У бібліотеці є 6 підручників із теорії ймовірностей та 5 підручників із математичної статистики. Скільки є варіантів вибрати : а) один підручник, б) два підручники, в) два підручники з різних предметів, г) два підручники з одного предмету, д) 2 підручники з теорії ймовірностей і 3 підручники з математичної статистики?	а) 11 , б) 55 , в) 30 г) 25 , д) 150 .
7. Екзамен із вищої математики складається з 6 питань у вигляді тестів. На кожне питання є три варіанти відповіді. Скільки є можливих варіантів відповідей на всі питання?	729
8. Потяг Запоріжжя – Львів зупиняється на 35 станціях. На квитку позначається станція відправлення і станція прибуття. Скільки всього різних бланків квитків може бути?	1190
9. Для комплектування команди польоту до Марса потрібні: командир корабля, перший та другий його помічники, 2 бортінженери та 1 лікар. На місце керівної трійки претендує 25 осіб. Бортінженерів можна вибрати з 20 осіб. Заявку на участь у польоті подали 8 лікарів. Скількома способами можна скомплектувати команду для польоту?	20976000
10. Скільки існує чотиризначних пін-кодів до банківських карток?	10000

2 Події. Алгебра подій

Означення 2.1 *Подією* називатимемо будь-який факт, який може статися або не статися при певному комплексі умов.

Події позначатимемо великими латинськими буквами $A, B, C, \ldots$. При кожному здійсненні певного комплексу умов обов'язково відбувається деяка подія.

Означення 2.2 Довільну множину Ω назвемо *простором елементарних подій* $\omega \in \Omega$, якщо останнім відповідають всі взаємовиключні результати деякого досліду.

Множину взаємовиключних результатів можна або перенумерувати, тоді вона *злічення*, або в силу якихось причин не можна, тоді вона *незлічення*.

Кожну випадкову подію A, що може відбутися в результаті досліду, можна зіставити з групою відповідних їй елементарних подій з Ω. Ці події називаються *сприятливими*.

Приклади зліченних просторів елементарних подій:

Наприклад, підкидають гральний кубик один раз. У цьому досліді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Тут ω_k – результат досліду, що полягає у випаданні k очок, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Маємо шість результатів, що виключають один одного.

В цьому прикладі події $A = \{\text{випадання не більше чотирьох очок}\}$ сприятливими будуть елементарні події $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Наприклад, підкидають монету двічі. У цьому досліді $\Omega = \{\omega_1(\text{гг}), \omega_2(\text{гц}), \omega_3(\text{цг}), \omega_4(\text{цц})\}$, де г означає ”герб”, ц – ”цифра”.

Означення 2.3 Подія U називається *вірогідною* або *достовірною*, якщо вона настає при кожній реалізації комплексу умов.

Наприклад, при підкиданні двох гральних кісток сума очок, що випали, завжди не менша двох.

<u>Означення 2.4</u> Подія $\varnothing$ називається *неможливою*, якщо вона не настає при жодній реалізації комплексу умов.

Наприклад, при киданні двох гральних кісток сума очок, що випали, може бути більше дванадцяти.

<u>Означення 2.5</u> Подія A, яка в результаті певного комплексу умов може відбутися або не відбутися, називається *випадковою*.

<u>Означення 2.6</u> Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо подія $\overline{A}$ настає завжди, коли подія A не настає.

Прийнято позначати через $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$ події, *протилежні* подіям $A, B, C, \ldots$. Зрозуміло, що $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = U$.

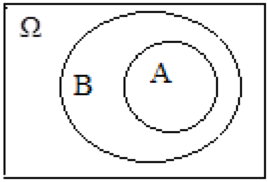
При підкиданні монети події $A =$ {випадає “герб”} протилежною буде подія $\overline{A} =$ {випадає “цифра”}.

Сукупність операцій, що виконуються над подіями, утворює алгебру подій.

1. <u>*Слідування подій.*</u>

Кажуть, що подія A тягне за собою подію B (позначається $A \subset B$), якщо при настанні події A обов'язково настає і подія B. Подія B називається *наслідком* події A: $A \subset B$, якщо з A слідує B.

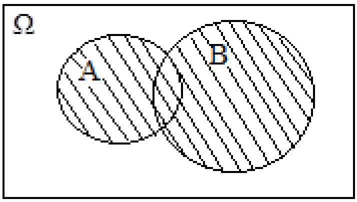
Якщо подія $A =$ {навмання кинута точка потрапила в область A}, а подія $B =$ {навмання кинута точка потрапила в область B}, то співвідношення $A \subset B$ виконується тоді, коли область A цілком міститься в області B.



Якщо $A \subset B$ і одночасно $B \subset A$, то події A і B називаються *еквівалентними* (рівносильними) або *рівними* $A = B$. Якщо $A = B$, то події A і B складаються з одних і тих же подій. Очевидно, що для будь-якої події A має місце включення вигляду $\varnothing \subset A \subset U$.

2. *Сумою* (*об'єднанням*) двох подій A і B називається така подія C, яка полягає в здійсненні або події A, або події B, або подій A і B разом:

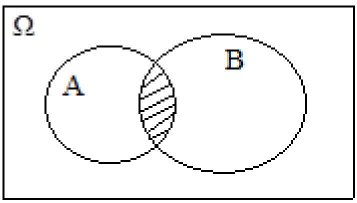
$$C = A + B \text{ або } C = A \bigcup B.$$



3. *Сумою* будь-якого числа подій A_1, A_2, ... , A_m називають таку подію C, яка полягає в здійсненні хоча б однієї з цих подій.

4. *Добутком* (*перетином*) двох подій A і B називається така подія C, яка полягає в здійсненні і події A, і події B:

$$C = A \cdot B \text{ або } C = A \bigcap B.$$



5. <u>*Добутком*</u> будь-якого числа подій A_1, A_2, ... , A_m називається така подія C, яка полягає в тому, що події A_1, A_2, ... , A_m відбудуться одночасно.

Сума і добуток подій мають такі властивості:

а) $A+B=B+A$;

б) $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$;

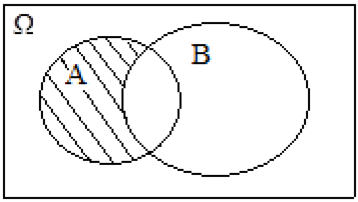
в) $A\cdot B=B\cdot A$;

г) $(A\cdot B)\cdot C= A\cdot(B\cdot C)=A\cdot B\cdot C$;

д) $A\cdot(B+C)= A\cdot B+A\cdot C$.

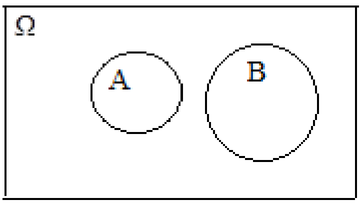
6. <u>*Різницею*</u> подій A і B називається подія C, яка настає лише тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B:

$$C=A\setminus B.$$



<u>***Означення 2.7***</u> Події A і B називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої:

$$A\cap B=\varnothing.$$



<u>***Означення 2.8***</u> Події $A_i, \left(i=\overline{1,n}\right)$ називаються *попарно несумісними*, якщо для будь-якої пари i та j

$$A_i \bigcap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Означення 2.9 Події $A_i, \left(i = \overline{1,n}\right)$ утворюють *повну групу подій*, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U; \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Кожна алгебра подій включає в себе такі поняття як «нуль» і «одиниця». В алгебрі подій умовно за «нуль» беруть неможливу подію, а за «одиницю» – вірогідну.

Використовуючи операції над подіями, можна описувати складніші події.

Приклад 9. Нехай A_1, A_2, A_3 – три довільні події. Виразити формулами, що: а) подія $A=${з'являється лише одна}, б) подія $B=${з'являються лише дві}, в) подія $C=${з'являються три}; г) подія $D=${не з'являється жодна з подій}, д) подія $E=${з'являються хоча б дві події}; е) подія $F=${з'являється хоча б одна подія}.

Розв'язання. а) подія $A=${з'являється лише одна подія}

$$A = A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A}_1\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3,$$

б) подія $B=${з'являються лише дві події}

$$B = A_1\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A}_1\,A_2\,A_3 + A_1\,\overline{A_2}\,A_3,$$

в) подія $C=${з'являються три події}

$$C = A_1\,A_2\,A_3,$$

г) подія $D=${не з'являється жодна з подій}

$$D = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},$$

д) подія $E=${з'являються хоча б дві події}

$$E = A_1\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A}_1\,A_2\,A_3 + A_1\,\overline{A_2}\,A_3 + A_1\,A_2\,A_3,$$

е) подія $F=${з'являється хоча б одна подія}

$$F = A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A}_1\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3 + A_1\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A}_1\,A_2\,A_3 +$$
$$+ A_1\,\overline{A_2}\,A_3 + A_1\,A_2\,A_3.$$

Приклад 10. На рис 1.1 зображено електричну схему. Вводяться події: $A = \{\text{працює блок } a\}$, $B_k = \{\text{працює блок } b_k, k = 1,2\}$, $C = \{\text{схема працює}\}$. Записати вираз для C та $\overline{C}$.

Розв'язання. Паралельне з'єднання блоків b_1, b_2 працює, якщо працює хоча б один з них, тому $B_1 + B_2 = \{\text{працює паралельне з'єднання блоків}\}$.

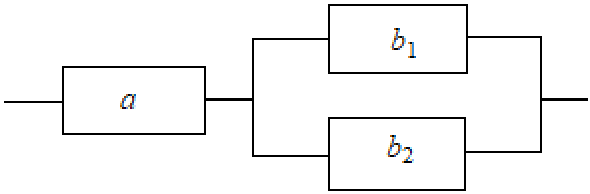


Рисунок 2.1

Подія C відбудеться, якщо одночасно з цим працює блок a. Отже, $C = A \cdot (B_1 + B_2)$. Схема не працює, якщо не працює або блок a, або паралельне з'єднання блоків b_1, b_2, або те й інше разом. Отже, $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}$.

Відповідь: $C = A \cdot (B_1 + B_2)$, $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}$.

Приклад 11. Для зображеного електричного ланцюга (рис. 2.2) вводять подію $C = \{\text{схема не працює}\}$. Записати вирази для C та $\overline{C}$.

Розв'язання.

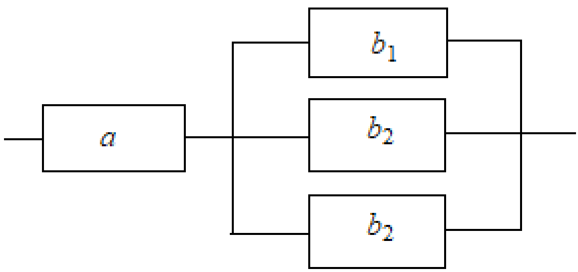


Рисунок 2.2

Розрив ланцюга відбудеться, якщо вийде з ладу елемент A або всі три елементи B_1, B_2, B_3, тобто відбудуться подія A або подія B_1, B_2, B_3. Тому $C = A + B_1\, B_2\, B_3$.

Тоді знаходимо $\overline{C} = \overline{A + B_1\, B_2\, B_3} = \overline{A} \cdot \left(\overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3}\right)$.

Відповідь: $C = A + B_1\, B_2\, B_3$, $\overline{C} = \overline{A} \cdot \left(\overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3}\right)$.

Приклад 12. Стрілець стріляє два рази по мішені. Чи утворюють повну групу подій наступні події: а) A={хоча б одне влучання} і B ={хоча б один промах}; б) C_0 ={жодного влучання}, C_1={рівно одне влучання} та C_2={жодного промаху}.

Розв'язання. Введемо події: A_i ={влучання при i-му пострілі}, $\overline{A_i}$ – «промах при i-му пострілі».

а) Для подій A і B відповідно маємо:

$$A = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2 + A_1 A_2, \qquad B = A_1 \overline{A_2} + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A_2}.$$

Отже, події A і B сумісні. Незважаючи на те, що $A + B = U$, події A і B не утворюють повну групи подій.

б) У цьому випадку маємо:

$$C_0 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}, \quad C_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2,\ C_2 = A_1 \cdot A_2.$$

Тут $C_0 + C_1 + C_2 = \Omega \cdot \mathrm{U}$ і для всіх $i = j$: $C_i \cdot C_j = \varnothing$. Це означає, що події C_0, C_1, C_2 утворюють повну групу подій.

Відповідь: а) події A і B не утворюють повну групи подій; б) події C_0, C_1, C_2 утворюють повну групу подій.

2.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання та відповіді
1. Випробування полягає в підкиданні двох гральних кісток. Нехай подія A={сума очок кратна трьом} а подія B ={сума очок є непарним числом}. Описати наступні події: $A + B$, $A \cdot B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Відповідь: $A + B = \{3,5,6,7,9,11,12\}$, $A \cdot B = \{3,9\}$, $A \setminus B = \{6,12\}$, $B \setminus A = \{5,7,11\}$.

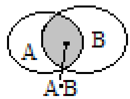
<table>
<tr><th>Завдання та відповіді</th></tr>
<tr><td>

2. Двічі стріляють по мішені. Нехай подія A={влучення при першому пострілі}, а подія B ={влучення при другому пострілі}. Записати подію C ={хоча б одне влучення у мішень} через події A і B .

Відповідь: $C = A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B + A\cdot B$ або $C = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$.

</td></tr>
<tr><td>

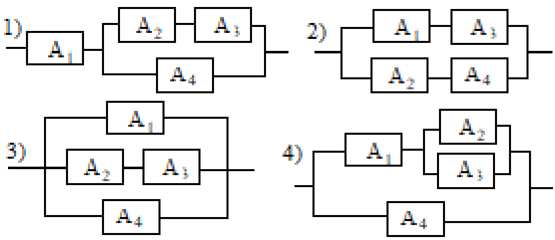
3. Кульку кидають на стіл і відзначають точку її падіння. Нехай подія A={кулька попадає всередину кола A } а подія B ={кулька попадає всередину кола B } (дивись рисунок). Який сенс мають наступні події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A+B$, $\overline{A+B}$, $\overline{A\cdot B}$?



Відповідь: $\overline{A}$ ={кулька влучила зовні кола A }, $\overline{B}$ ={кулька влучила зовні кола B }, $A+B$ ={кулька влучила в область, якій належать усі точки кіл A і B }, $\overline{A+B}$ ={кулька влучила в область, яка знаходиться зовні кіл A і B }, $\overline{A\cdot B}$ ={кулька влучила в область, яка знаходиться зовні спільної частини кіл A і B }.

</td></tr>
<tr><td>

4. Маємо електричний ланцюг (дивись рисунки). Треба описати для кожної схеми 1) – 4) події: а) ланцюг буде працювати, б) маємо розрив ланцюга.



Відповідь: 1) а) $A_1\cdot(A_2\cdot A_3+A_4)$, б) $\overline{A_1}+\left(\overline{A_2}+\overline{A_3}\right)\cdot\overline{A_4}$;

2) а) $(A_1+A_2)\cdot(A_3+A_4)$, б) $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}+\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}$;

3) а) $A_1+A_2\cdot A_3+A_4$, б) $\overline{A_1}\cdot\left(\overline{A_2}+\overline{A_3}\right)\cdot\overline{A_4}$;

4) а) $A_1\cdot(A_2+A_3)+A_4$, б) $\left(\overline{A_1}+\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)\cdot\overline{A_4}$.

</td></tr>
</table>

Завдання та відповіді
5. З колоди гральних карт витягують одну. Нехай подія A={витягнута карта – туз} а подія B ={витягнута карта – черві}. Описати наступні події: $A\cdot B$, $\overline{A}\cdot B$, $A+B$, $A\setminus B$, $\overline{A+B}$. Відповідь: $A\cdot B$={витягнута карта–червовий туз}, $\overline{A}\cdot B$={витягнута карта черві, але не туз}, $A+B$={витягнута карта або туз, або черві}, $A\setminus B$={витягнута карта туз, але не червовий}, $\overline{A+B}$={витягнута карта не туз і не черві}.
6. В ящику дванадцять кульок одного кольору, пронумерованих від 1 до 12. Витягують одну кульку. Нехай подія A={витягнута кулька з номером кратним 4}, а подія B ={витягнута кулька з номером не менше 6}. Описати наступні події: $A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}$, $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$ Відповідь: $A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}=\{1,2,3,5,8,12\}$, $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=\{8,12\}$.

3 Ймовірність випадкових подій

Основною характеристикою випадкової події є її ймовірність.

Можливі результати одного випробування, що виключають одне одного, називаються елементарними наслідками випробування. Результат випробування називається сприятливим для певної події, якщо внаслідок цього випробування з'являється вказана подія.

<u>Означення 3.1</u> Події називаються *рівноможливими*, якщо немає підстав вважати одну з них більш-менш можливою, ніж іншу.

Наприклад, при підкиданні монети, якщо вона симетрична і однорідна, падіння цифрою чи гербом уверх рівноможливі.

3.1 Класичне означення ймовірності

<u>Означення 3.2</u> *Імовірністю* $P(A)$ події A називають відношення числа m випадків, що сприяють появі цієї події, до загального числа

n всіх можливих елементарних результатів випробування, що утворюють повну групу. При цьому обов'язковою умовою є рівна можливість результатів досліду.

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{3.1}$$

<u>*Властивості ймовірності*</u>:

а) імовірність вірогідної події дорівнює одиниці;

б) імовірність неможливої події дорівнює нулю;

в) імовірність випадкової події $0 \le P(A) \le 1$.

Приклад 13. З 50 питань, які входять до екзаменаційних білетів, студент підготував 40. Яка ймовірність того, що 2 питання, які випадковим чином дісталися студенту, виявляться підготовленими?

Розв'язання. Нехай подія $A=\{$обидва питання підготовлені$\}$. Вибір двох питань з 50 питань можна здійснити

$$n=C_{50}^{2}=\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}=1225$$

способами, а обрати два підготовлених питання з 40 питань можна

$$m=C_{40}^{2}=\frac{40\cdot 39}{1\cdot 2}=780$$

способами. Тоді ймовірність $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{780}{1225}\approx 0{,}64$.

Відповідь: $P(A)=0{,}64$.

Приклад 14. На 7 картках написані літери: О, М, П, Ч, І, Е, Н. Картки перемішують і виймають по одній, прикладаючи одна до другої. Знайти ймовірність того, що буде складено слово ЧЕМПІОН.

Розв'язання. Нехай подія $A=\{$буде складено слово ЧЕМПІОН$\}$. Число сприятливих результатів $m=1$, а число всіх можливих результатів в цьому досліді $n=P_7=7!=5040$. Тоді ймовірність $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{5040}$.

Відповідь: $P(A)=\frac{1}{5040}$.

Приклад 15. На 7 картках написані літери: О, А, П, С, І, Т, К. Картки перемішують і виймають чотири по одній, прикладаючи одна до другої. Знайти ймовірність того, що буде складено слово СКАТ.

Розв'язання. Нехай подія А={буде складено слово СКАТ}. Число сприятливих результатів $m=1$, а число всіх можливих результатів в цьому досліді $n=A_7^4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$. Тоді ймовірність $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{840}$.

Відповідь: $P(A)=\dfrac{1}{840}$.

Приклад 16. На фірмі працюють 8 аудиторів, у тому числі 3 – високої кваліфікації, і 5 програмістів, у тому числі 2 – високої кваліфікації. У відрядження треба надіслати групу з 3 аудиторів та 2 програмістів. Якою є ймовірність того, що в цій групі виявиться принаймні 1 аудитор високої кваліфікації і хоча б 1 програміст високої кваліфікації, якщо набір групи проводився анонімним анкетуванням і кожен фахівець мав рівні можливості поїхати у відрядження?

Розв'язання. Введемо подію C ={у групі виявиться принаймні один аудитор високої кваліфікації і хоча б один програміст високої кваліфікації} і допоміжні незалежні події: A ={у групі виявиться принаймні один аудитор високої кваліфікації}, B ={у групі виявиться хоча б один програміст високої кваліфікації}. Тоді подію C можна представити як $C=AB$ і ймовірність $P(C)=P(A)\cdot P(B)$.

Введемо протилежні події: $\overline{A}$ ={у групі не виявиться жодного аудитора високої кваліфікації}, $\overline{B}$ ={у групі не виявиться жодного програміста високої кваліфікації}. Знайдемо ймовірність цих подій за формулою (3.1).

$P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{m_1}{n_1}$, де m_1 – число різних способів вибрати 3 аудиторів не вищої кваліфікації з 5, n_1 – число різних способів вибрати 3 аудиторів з 8 .

Тоді $m_1 = C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$, $n_1 = C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$.

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}.$$

$P\left(\overline{B}\right) = \frac{m_2}{n_2}$, де m_2 – число різних способів вибрати 2 програмістів не вищої кваліфікації з 3, n_2 – число різних способів вибрати 2 програмістів з 5.

Тоді $m_2 = C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$, $n_2 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$. $P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{10}$.

$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$, $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Імовірність шуканої події $P(C) = P(A)\cdot P(B) = \frac{23}{28}\cdot\frac{7}{10} = \frac{23}{40} \approx 0{,}575$.

Відповідь: $P(C) = 0{,}575$.

Приклад 17. П'ять кульок розкидають по шести лунках (у кожну лунку може потрапити будь-яке число кульок). Знайти ймовірності подій A={в першу лунку потрапило дві кульки}, B={всі кульки потрапили в одну лунку}, C={в перші п'ять лунок потрапило по одній кульці}.

Розв'язання. Нехай лунки мають номери з 1-го по 6-й.

Розглянемо подію A. Кидаючи кульку в лунку, тим самим вибираємо певний номер. Тоді елементарною рівноможливою подією в цьому досліді буде упорядкована послідовність з 5 номерів, вибраних з 6 номерів. Оскільки кожен з номерів цієї послідовності ми можемо вибирати 5 разів, то кількість таких послідовностей або загальна кількість елементарних подій у цьому досліді буде дорівнювати кількості розміщень із повтореннями з 6 елементів по 5 елементів. Тобто, $n = \overline{A}_6^5 = 6^5 = 7776$.

Число способів набору попадань 2 кульок в першу лунку дорівнює числу комбінацій з 5 елементів по 2 елементи – C_5^2. Для кожного такого набору можемо розмістити $5 - 2 = 3$ кульки у 5

лунок, або, що теж саме, скласти впорядковану послідовність з 5 номерів (з можливістю вибору кожного номера 3 рази) – $\overline{A}_5^3$ способами. За правилом добутку отримаємо, що $m_A = C_5^2 \cdot \overline{A}_5^3 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot 5^3 = 10 \cdot 5^3 = 1250$.

Тоді $P(A) = \dfrac{m_A}{n} = \dfrac{1250}{7776} \approx 0{,}1608$.

Розглянемо подію B . Загальна кількість способів n , якими можна розкидати 5 кульок по 6 лунках, обчислюється як $n = \overline{A}_6^5 = 6^5 = 7776$. Число випробувань m_B, сприятливих настанню події B, обчислюється $m_B = C_6^5 = \dfrac{6!}{5!\cdot 1!} = 6$.

Тоді $P(B) = \dfrac{m_B}{n} = \dfrac{6}{7776} \approx 7{,}716 \cdot 10^{-4}$.

Розглянемо подію C . Загальна кількість способів $n = \overline{A}_6^5 = 6^5 = 7776$. Число випробувань m_C, сприятливих настанню події C , обчислюється так: перша кулька попаде в перші п’ять лунок, друга кулька – в чотири лунки, оскільки п’ята зайнята, третя кулька – в три, четверта – в дві і п’ята – в одну, оскільки усі попередні зайняті. Згідно правила добутку матимемо $m_C = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Тоді $P(C) = \dfrac{m_C}{n} = \dfrac{120}{7776} \approx 0{,}0154$.

Відповідь: $P(A) = 0{,}1608$; $P(B) = 7{,}716 \cdot 10^{-4}$; $P(C) = 0{,}0154$.

3.2 Геометричне означення ймовірності

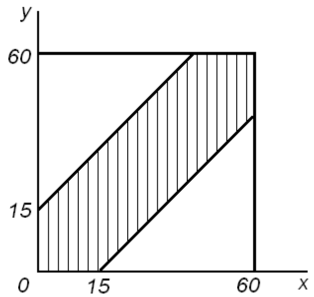
Поняття *геометрична ймовірність* виникає в тому випадку, коли ймовірність потрапляння випадкової точки в будь-яку частину області пропорційна мірі цієї області і не залежить від її розташування і форми. В таких задачах множина елементарних випадків не є дискретною. Якщо геометрична міра всієї області $mes(\Omega)$ (довжина, площа, об'єм і т.д.), а геометрична міра частини цієї області $mes(w)$, попадання в яку сприяє даній події, то ймовірність такої події

$$P(A) = \frac{mes\ (w)}{mes\ (\Omega)}, \tag{3.2}$$

де mes означає міру області, яка може бути довжиною, якщо Ω – одномірна множина; площею, якщо Ω – двовимірна множина і об'ємом, якщо Ω – тривимірна множина.

Приклад 18. Дві особи A і B умовилися зустрітися в певному місці між 17 і 18 годинами. Той, хто прийшов першим, чекає другого протягом 15 хвилин, після чого йде. Визначити ймовірність зустрічі, якщо час приходу кожного незалежний і рівноможливий протягом зазначеної години.

Розв'язання. Нехай x – момент приходу A і y – момент приходу B. Подія C ={зустріч двох людей у певному місці}. Областю можливих значень (простір елементарних подій Ω) є квадрат площею $S = 60^2 = 3600$ (одна година – 60 хвилин). Зустріч відбудеться, якщо $|x - y| \le 15$. Отже, множина елементарних подій w, що сприяють зустрічі, лежить між прямими $x - y = 15$ і $x - y = -15$.



Площа утвореної фігури $S_ф = 60^2 - (60 - 15)^2 = 1575$. На підставі формули (3.2) ймовірність події C дорівнює відношенню площі $S_ф$ до площі всього квадрата S, тобто

$$P(C) = \frac{S_ф}{S} = \frac{1575}{3600} = 0{,}4375 .$$

Відповідь: $P(C) = 0{,}4375$.

Приклад 19. Яка ймовірність того, що сума двох навмання взятих додатних чисел x і y, кожне з яких не більше трьох, не перевищує трьох, а їх добуток буде не більше $\frac{2}{7}$?

Розв'язання. Використовуємо геометричне визначення ймовірності. Оскільки числа x і y беруться з відрізка $(0,3)$ (додатні і не більше 3), можемо вважати, що вибирається точка з координатами (x, y) із квадрата на площині: $(0,3)\times(0,3)$.

Повинні виконуватись умови:

$$x+y\le 3 \text{ або } y\le 3-x \qquad \text{і} \qquad x\cdot y\le \frac{2}{7} \text{ або } y\le \frac{2}{7x}.$$

Нехай подія $A=\{$умови виконуються$\}$. Імовірність $P(A)$ дорівнює відношенню площі фігури, яка визначається цими обмеженнями (у квадраті) до площі квадрата, тобто до 9. Щоб підрахувати площу фігури, зробимо схематичне креслення (рис. 3.1)

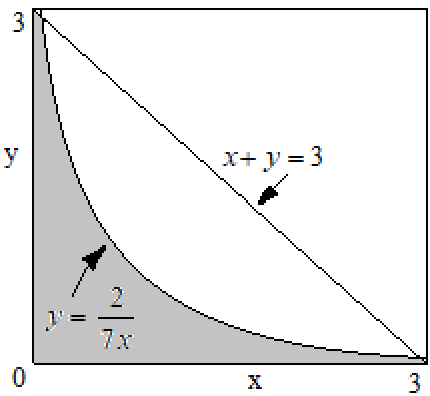


Рисунок 3.1

Оскільки y повинен лежати нижче обох ліній, то обидва обмеження виконуються в нижній зафарбованій фігурі. Знайдемо точки перетину кривих:

$$3-x=\frac{2}{7x} \quad\Rightarrow\quad 7x^2-21x+2=0.$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{385}}{14} \text{ і } x_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{385}}{14}.$$

Знайдемо площу зафарбованої фігури як площу половини квадрата мінус площу частини, яка з неї «вирізана» (між лініями $y = 3 - x$ та $y = \frac{2}{7x}$):

$$S_{\text{фіг}} = \frac{9}{2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(3 - x - \frac{2}{7x}\right) dx = \frac{9}{2} - \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{7} \cdot \ln|x|\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{9}{2} -$$

$$-3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{385}}{14} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{385}}{14}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{385}}{14}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{385}}{14}\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{2}{7}\left(\ln\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{385}}{14}\right) - \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{385}}{14}\right)\right) \approx 1{,}262.$$

Шукану ймовірність знаходимо за формулою (1.8)

$$P(A) = \frac{S_{\text{фіг}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{1{,}262}{9} \approx 0{,}14.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}14$.

Приклад 20. На прямолінійній ділянці газопроводу завдовжки 100 км відбувся розрив. Яка ймовірність того, що розрив віддалений від обох кінців ділянки на відстань більше 35 км?

Розв'язання. Ділянку газопроводу AB розіб'ємо точками C, D на три частини, як показано на рис. 3.2.

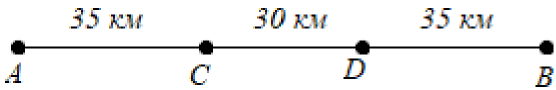


Рисунок 3.2

Подія A ={розрив, віддалений від обох кінців ділянки на відстань більше 35 км}. У нашому випадку розрив газопроводу має відбутися на ділянці CD. Отже, ймовірність події A

$$P(A)=\frac{l_{CD}}{l_{AB}}=\frac{30}{100}=0{,}3\,.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}3$.

Відносна частота і статистична ймовірність

Основні труднощі класичного і геометричного означення ймовірності – це виділення рівноможливих подій, що утворюють простір Ω. У реальних ситуаціях таке виділення, засноване на властивості симетрії досліджуваного явища, не завжди можливе. Класичне означення ймовірності при переході від найпростіших прикладів до складних завдань наштовхується на труднощі принципового характеру.

По-перше, число елементарних результатів випробування не завжди скінчене, по-друге, дуже часто неможливо подати результат у вигляді сукупності елементарних результатів, по-третє, важко вказати підстави, що дозволяють вважати елементарні результати рівноможливими. Тому використовують також статистичне означення ймовірності. В основі статистичного означення ймовірностей лежить так звана стійкість частот. Якщо в однакових умовах проведено досить багато випробувань, то за статистичну ймовірність події приймають відносну частоту цієї події.

Означення 3.3 *Відносною частотою* $W(A)$ події A називають відношення числа випробувань m, в яких подія A з'явилася, до загального числа n фактично проведених випробувань, тобто

$$W(A)=\frac{m}{n}\,. \tag{3.3}$$

Відносна частота події має такі властивості:

а) відносна частота випадкової події є число, укладене між нулем та одиницею: $0\le W(A)\le 1$,

б) відносна частота достовірної події U дорівнює одиниці: $W(U)=1$,

в) відносна частота неможливої події $\varnothing$ дорівнює нулю:

$W(\varnothing)=0$;

г) відносна частота суми двох несумісних подій A та B дорівнює сумі відносних частот цих подій: $W(A+B)=W(A)+W(B)$.

Відмінність відносної частоти від імовірності в тому, що ймовірність обчислюється без безпосереднього виконання дослідів (випробувань), а відносна частота – після досліду (випробування.

При однотипних масових випробуваннях у багатьох випадках спостерігається стійкість відносної частоти події, яка полягає в тому, що із збільшенням числа випробувань вона починає наближатися до значення ймовірності події і відрізняється від нього тим менше, чим більше проведено випробувань, *коливаючись близько деякого постійного числа*.

Графік залежності $W(A)$ від n наближається до прямої, що свідчить про існування границі

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}W(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n},$$

до якої наближається частота, коли $n\to\infty$. Цю границю називають *статистичним визначенням імовірності*.

При статистичному визначенні ймовірності події приймають її відносну частоту.

Для здійснення статистичної ймовірності події A потрібно:

а) можливість хоч би принципово проводити необмежену кількість випробувань, у кожному з яких подія A настає або не настає;

б) стійкість відносної частоти події A в різних серіях великої кількості випробувань.

Приклад 21. Автомобільна компанія впродовж доби виконує 15 рейсів, із них 60% – власним автопарком. На час t було виконано 9 рейсів, із них 6 – власним парком. Знайти ймовірність і відносну частоту виконання рейсу власним парком.

Розв'язання. Позначимо подію: A={рейс виконується власним автопарком}. Оскільки загальна добова кількість рейсів дорівнює 15, а власним парком виконується 9 рейсів (наслідки, сприятливі події A), то ймовірність події A

$$P(A)=\frac{9}{15}=0{,}6 .$$

За умовою на годину t було виконано 9 рейсів, тобто фактично проведено 9 випробувань, у яких подія A відбулася 6 разів. Отже, відносна частота події A

$$W(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67 .$$

Відносна частота $W(A)$ відрізняється від імовірності $P(A)$.

Відповідь: $P(A)=0{,}6$, $W(A)=0{,}67$.

Приклад 22. Швейна фабрика замовила 2500 ґудзиків, щоб пошити шкільну форму. Коли перевіряли партію, то виявилося, що 600 ґудзиків 12 бракованих. Яку найменшу кількість запасних ґудзиків необхідно замовити, щоб виключити брак?

Розв'язання. Нехай подія $A=${ґудзики браковані}. Відносна частота браку становить $W(A)=\dfrac{12}{600}=0{,}02$. За умовою задачі $n=2500$, а $W(A)=\dfrac{m}{n}$. Тоді серед 2500 ґудзиків, бракованих буде $m=n\cdot W(A)=2500\cdot 0{,}02=50$.

Отже, необхідно замовити найменшу кількість запасних ґудзиків 50 штук.

Відповідь: Щоб унеможливити брак, потрібно замовити мінімум 50 штук запасних ґудзиків.

Приклад 23. Відносна частота попадання в ціль при 85 пострілах дорівнює $0{,}8$. Скільки було попадань?

Розв'язання. Подія $A=${попадання в ціль при 85 пострілах}. За умовою задачі $W(A)=0{,}8$, $n=85$. З формули (3.3) маємо $m=n\cdot W(A)$, де $W(A)$ – відносна частота, n – число пострілів, m – число попадань. Тоді $m=n\cdot W(A)=85\cdot 0{,}8=68$.

Відповідь: Було 68 попадань.

Приклад 24. Серед виготовлених на автоматичному верстаті деталей виявилося 12 таких, які не відповідають стандарту. Визначити кількість виготовлених деталей, якщо відносна частота появи нестандартних деталей дорівнює $0{,}06$.

Розв'язання. Подія $A=${поява нестандартних деталей}. За умовою задачі $W(A)=0{,}06$, $m=12$. З формули (3.3) маємо

$n=\dfrac{m}{W(A)}$. Тоді кількість виготовлених деталей

$$n=\frac{m}{W(A)}=\frac{12}{0{,}06}=200 .$$

Відповідь: Було виготовлено 200 деталей.

3.2.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. У групі 20 студентів, серед них 5 відмінників. Випадково вибрали 10 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них рівно 2 відмінника.	$\approx 0{,}35$
2. У коробці містяться картки з буквами: А, К, О, Р, Р, Т, Т. Картки витягують по одній і викладають у порядку вилучення. Знайти ймовірність того, що можна прочитати слово ТРАКТОР.	$\approx 0{,}00079$
3. У ящику 9 білих та 6 зелених ґудзиків. Виймаються навмання два ґудзики. Яка ймовірність, що ґудзики будуть однокольоровими?	$\approx 0{,}4857$
4. Троє друзів домовились загадати будь-яке число від 1 до 10. Якщо усі три числа співпадають, то вони йдуть у нічний клуб, а якщо числа не співпадають, то залишаються вдома. Яка ймовірність цих подій?	$0{,}28$ $0{,}72$
5. Студент знає відповідь на 25 екзаменаційних питань з 60. Знайти ймовірність, що він складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти не менш ніж на два питання з трьох.	$\approx 0{,}37$
6. Клієнт забув пін-код до своє банківської карти, але пам'ятає, що в ньому є три п'ятірки, а четверта цифра або 3, або 8. Знайти ймовірність успішної авторизації з першої спроби.	$0{,}125$

Завдання	Відповідь
7. З колоди 36 карт навмання витягли чотири. Знайти ймовірність того, що серед них один туз і один король.	$\approx 0{,}1027$
8. Знайти ймовірність того, що в 9-значному числі рівно 5 цифр однакові, а інші різні.	$0{,}0381024$
9. У коло вписаний квадрат. Яка ймовірність того, що точка, навмання кинута в коло, опиниться всередині квадрата?	$\approx 0{,}6369$
10. Всередині кола радіусом 20 см проведені два кола, які не перетинаються, радіусами 5 см та 10 см. Знайти ймовірність того, що навмання кинута всередину великого кола точка опиниться всередині одного з малих кіл?	$0{,}3125$
11. Імовірність влучення м'ячем у кошик для деякого баскетболіста дорівнює 80%. Під час гри він з 25 кидків влучив у корзину 19 раз. Порівняти ймовірність і відносну частоту влучання цим баскетболістом м'яча у корзину.	$P(A)=0{,}8$ $W(A)=0{,}76$
12. У деякому дитячому конструкторі «Лего» 600 деталей. При перевірці встановлено, що серед 20 деталей одна була з браком. Яку найменшу кількість запасних деталей потрібно покласти в конструктор, щоб іграшку можна було зібрати без проблем?	Не менше 30 деталей

3.3 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема 3.1. Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{3.4}$$

Висновок 3.1 Імовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

<u>Висновок 3.2</u> Якщо події A_1, A_2, ... , A_n утворюють повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{3.5}$$

<u>Висновок 3.3</u> Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{3.6}$$

Приклад 25. На стелажі в бібліотеці стоять 15 підручників, причому 5 із них у твердій палітурці. Бібліотекар бере три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із узятих підручників буде у твердій палітурці.

Розв'язання. <u>Перший спосіб</u>. Нехай подія $A=${хоча б один підручник у твердій палітурці}, подія $B=${один із узятих підручників у палітурці, а два без палітурки}, подія $C=${два підручники в палітурці, а один без палітурки}, подія $D=${всі три підручники в палітурці}. Очевидно, $A=B+C+D$. Події B, C, D – несумісні. Тоді $P(A)=P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)$. Знайдемо ймовірності подій B, C, D:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91},\quad P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},\quad P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Отже, $P(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}$.

<u>Другий спосіб</u>. Нехай подія $A=${хоча б один підручник у твердій палітурці}; подія $\overline{A}=${жоден із взятих підручників не має твердої палітурки}. Оскільки події A і $\overline{A}$ протилежні, то

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$$

Відповідь: $P(A)=\frac{67}{91}$.

Приклад 26. Контрольна робота з математики оцінюється цілим числом балів, причому максимальна кількість балів дорівнює 10. Імовірність для студента отримати за цю роботу 10 балів дорівнює $0{,}2$; 9 балів – $0{,}3$ та від 1 до 9 балів включно – $0{,}7$. Знайти ймовірність того, що студент отримає: а) не менше ніж 9 балів; б) 0 балів.

Розв'язання. Розглянемо події $A_1=${студент отримає 10 балів}, $A_2=${студент отримає 9 балів}, $A_3=${студент отримає від 1 до 9 балів включно}. Подія $A=${студент отримає не менше 9 балів}, подія $B=${студент отримає 0 балів}. Імовірності подій A_1, A_2, A_3 дорівнюють: $P(A_1)=0{,}2$, $P(A_2)=0{,}3$, $P(A_3)=0{,}7$. З умови задачі маємо, що події A_2, A_3 – сумісні події. При розв'язуванні застосовуватимемо лише теорему додавання ймовірностей для несумісних подій.

а) Подія A полягає в тому, що студент отримає або 9, або 10 балів. Це означає, що подія A є сумою подій A_1 та A_2, які несумісні: $A=A_1+A_2$. Імовірність події A знаходимо за формулою (3.4)

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0{,}2+0{,}3=0{,}5.$$

б) Розглянемо подію $\overline{B}$, протилежну події B: $\overline{B}=${студент не отримає 0 балів}. Подія $\overline{B}$ полягає в тому, що студент отримає або 10 балів, або від 1 до 9 балів включно. Це означає, що подія $\overline{B}$ є сумою двох несумісних подій A_1 і A_3: $\overline{B}=A_1+A_3$. Імовірність події $\overline{B}$ знаходимо за формулою (3.4)

$$P(\overline{B})=P(A_1+A_3)=P(A_1)+P(A_3)=0{,}2+0{,}7=0{,}9.$$

Імовірність події B знаходимо за формулою (3.6)

$$P(B)+P(\overline{B})=1 \quad \Rightarrow \quad P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}9=0{,}1.$$

Відповідь: а) $P(A)=0{,}5$, б) $P(B)=0{,}1$.

3.4 Теорема множення ймовірностей

<u>Означення 3.4</u> Подія A називається *незалежною* від події B, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B чи ні.

Кілька подій називаються незалежними в сукупності, якщо будь-яка з них не залежить від будь-якої сукупності інших.

Означення 3.5 Подія A називається *залежною* від події B, якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того, відбулася чи ні подія B.

Означення 3.6 Імовірність події A, яка обчислюється за умови, що подія B сталася, називається *умовною ймовірністю події* A і позначається $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Умовна ймовірність задовольняє всім властивостям ймовірності.

Теорема 3.2. Імовірність добутку двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша з них відбулася:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B). \tag{3.7}$$

Висновок 3.4 Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A.

Висновок 3.5 Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{3.8}$$

Для обчислення ймовірності спільної появи більшої кількості подій, наприклад, чотирьох, використовують формулу:

$$P(A\cdot B\cdot C\cdot D)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)\cdot P(D/ABC).$$

Для кількох незалежних в сукупності подій ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \tag{3.9}$$

<u>Висновок 3.6</u> Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, $A_2,..., A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює різниці одиниці і добутку ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... , $\overline{A_n}$:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A_n}\right). \qquad (3.10)$$

Якщо зазначені події A_1, $A_2,..., A_n$ мають однакову ймовірність p, то формула набуває вигляду:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q^n, \qquad (3.11)$$

де $q = 1 - p$.

Приклад 27. Танк M і танк N починають бій. Першим стріляє танк M з імовірністю враження танка N $0{,}2$. Якщо танк N не пошкоджений, то, стріляючи в танк, M підбиває його з імовірністю $0{,}3$. Якщо танк M не підбитий, то він продовжує атаку та влучає в танк N з імовірністю $0{,}4$. Знайти ймовірність того, що в бою буде пошкоджений танк N.

Розв'язання. Розглянемо події: A={підбитий танк N}, H_1={танк N підбитий першим пострілом танка M}, H_2={танк N підбитий другим пострілом танка M}, H_3={танк N підбив танк M}.

Застосовуючи алгебру подій та теореми додавання і множення ймовірностей, матимемо:

$A = H_1 + \overline{H_1} \cdot \overline{H_3} \cdot H_2$, де $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}4$, $P(H_3) = 0{,}3$ і $H_1 \cdot \left(\overline{H_1} \cdot \overline{H_3} \cdot H_2\right) = \varnothing$.

Знайдемо $P\left(\overline{H_1} \cdot \overline{H_3} \cdot H_2\right) = P\left(\overline{H_1}\right) \cdot P\left(\overline{H_3}\right) \cdot P\left(H_2\right) =$

$$= (1 - 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}3) \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}224.$$

Тоді $P(A) = P(H_1) + P\left(\overline{H_1} \cdot \overline{H_3} \cdot H_2\right) = 0{,}2 + 0{,}224 = 0{,}424$.

Відповідь: $P(A) = 0{,}424$.

Приклад 28. Здійснюється стрільба по літаку. При попаданні одного снаряда він з імовірністю p_1 влучає в кабіну літака, з імовірністю p_2 – у паливні баки і з імовірністю p_3 – у планер $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Попадання снаряда в ту чи іншу частину літака не залежне від попадання інших снарядів. Для ураження літака достатньо одного попадання в кабіну, двох попадань у паливні баки або трьох у планер. Події: D_k={в літак потрапило k снарядів}, E={літак вражений}. Знайти умовну ймовірність $P(E / D_k)$ при $k = 2,3,4$.

Розв'язання. Позначимо A_i={i-й снаряд потрапив у кабіну}, B_i={i-й снаряд потрапив у паливні баки}, C_i={i-й снаряд потрапив у планер}, $i = \overline{1,k}$. При $k = 2$ маємо:

$$\left(\overline{E} / D_2\right) = B_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2,$$

де подія $\left(\overline{E} / D_2\right)$={літак не вражений при влучанні двох снарядів}, подія $B_1 \cdot C_2$={1-й снаряд влучив у паливні баки, 2-й – у планер}, подія $C_1 \cdot B_2$={1-й снаряд влучив у планер, 2-й – у паливні баки}, подія $C_1 \cdot C_2$={обидва снаряди влучили в планер}, попадання хоча б одного снаряда в кабіну призведе до враження літака.

Події, які стоять у правій частині рівності попарно несумісні, тому $P\left(\overline{E} / D_2\right) = P(B_1 \cdot C_2) + P(B_2 \cdot C_1) + P(C_1 \cdot C_2)$. Оскільки події A_i, B_i, C_i незалежні, то $P\left(\overline{E} / D_2\right) = 2 p_2 p_3 + p_3^2$.

Тоді $P(E / D_2) = 1 - P\left(\overline{E} / D_2\right) = 1 - 2 p_2 p_3 - p_3^2$ (відмітимо, що

$$1 - 2 p_2 p_3 + p_3^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2 p_2 p_3 - p_3^2 =$$
$$= p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 + 2 p_1 p_3.$$

Розмірковуючи аналогічно, матимемо при $k = 3$:
$\left(\overline{E} / D_3\right) = B_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot B_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 \cdot B_3$ і $P(E / D_3) = 1 - 3 p_2 p_3^2$.

При $k = 4$ подія $\left(\overline{E} / D_4\right) = \varnothing$ (якщо жоден снаряд не влучив у кабіну, жодні два не влучили в паливні баки, тоді принаймні три снаряди попадуть у планер і літак буде вражений) і $P(E / D_4) = 1$.

Відповідь: $P(E / D_2) = 1 - 2 p_2 p_3 + p_3^2$, $P(E / D_3) = 1 - 3 p_2 p_3^2$,
$P(E / D_4) = 1$.

Приклад 29. У барабані револьвера системи Наган знаходяться 3 патрони з сімох у довільному порядку. Барабан розкручують, після чого натискають на спусковий гачок двічі. Після першого пострілу барабан не розкручують. Знайти ймовірності таких подій: а) при першому натисканні є постріл, при другому – немає; б) при першому натисканні пострілу немає, при другому – є постріл; в) при натисканнях на гачок двічі пострілів немає; г) при двох натисканнях на гачок є два постріли; д) хоча б один постріл при двох натисканнях на гачок.

Розв'язання. Розглянемо події: $A=${при першому натисканні на гачок є постріл}, $\overline{A}=${при першому натисканні на гачок пострілу немає}. Тоді $P(A)=\frac{3}{7}$, $P(\overline{A})=\frac{4}{7}$.

а) Нехай подія $\overline{B}/A=${при другому натисканні на гачок пострілу немає за умови, що першим був постріл}, $C_1=${при першому натисканні на гачок є постріл, при другому – немає}.

$$P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ P(C_1)=P(A)\cdot P(\overline{B}/A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{7}.$$

б) Нехай подія $B/\overline{A}=${при другому натисканні на гачок постріл є при умові, що першого пострілу немає}, $C_2=${при першому натисканні на гачок пострілу немає, при другому – є постріл}.

$$P(B/\overline{A})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(C_2)=P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}.$$

в) Нехай подія $\overline{B}/\overline{A}=${при другому натисканні на гачок пострілу немає за умови, що першого пострілу немає}, $C_3=${при натисканнях на гачок двічі пострілів немає}.

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(C_3)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}.$$

г) Нехай подія $B/A=${при другому натисканні на гачок постріл є за умови, що першим був постріл}, $C_4=${при двох натисканнях на гачок є два постріли}.

$$P(B/A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ P(C_4)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}.$$

д) Нехай подія $D=\{$хоча б один постріл при натисканнях на гачок двічі$\}$.

Події C_1, C_2, C_3, C_4 утворюють повну групу подій:

$$P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)+P(C_4)=1.$$

Тому ймовірність події D: $P(D)=1-P(C_3)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.

Відповідь: а) $P(C_1)=\frac{2}{7}$, б) $P(C_2)=\frac{2}{7}$, в) $P(C_3)=\frac{2}{7}$, г) $P(C_4)=\frac{1}{7}$, д) $P(D)=\frac{5}{7}$.

Приклад 30. В урні 2 білі та 3 чорні кулі. З урни виймаються дві кулі поспіль. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі білі.

Розв'язання. Нехай подія $A=\{$обидві вийняті кулі білі$\}$. Ця подія є добутком двох подій: $B=\{$поява білої кулі при першому вийманні$\}$ і $C=\{$поява білої кулі при другому вийманні$\}$. Події B і C залежні. Тому

$$P(A)=P(B)\cdot P(C/B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=0{,}1.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}1$.

Приклад 31. Ті ж умови, що й у Прикладі 30, але після першого виймання куля повертається в урну і кулі в урні перемішуються.

Розв'язання. У цьому випадку події B і C незалежні й тому

$$P(A)=P(B)\cdot P(C)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=0{,}16.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}16$.

Приклад 32. У шухляді лежать 30 олівців, серед яких 8 жовтих, 10 блакитних, 8 зелених і 4 білі. Знайти ймовірність того, що перший раз із шухляди буде взято жовтий олівець, другий раз – блакитний олівець, і третій раз – зелений олівець, якщо олівці назад не повертаються.

Розв'язання. Розглянемо події: $A=\{$взято жовтий олівець$\}$, $B=\{$взято блакитний олівець$\}$, $C=\{$взято зелений олівець$\}$.

За умовою задачі, ймовірність того, що перший раз із шухляди буде взято жовтий олівець $P(A)=\dfrac{8}{30}=\dfrac{4}{15}$. Імовірність того, що другий раз із шухляди буде взято блакитний олівець $P(B)=\dfrac{10}{29}$, оскільки в шухляді залишилося 29 олівців.

Імовірність того, що послідовно взяли жовтий, а потім блакитний олівці $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\dfrac{4}{15}\cdot\dfrac{10}{29}=\dfrac{8}{87}$.

Імовірність , що з шухляди взяли зелений олівець, після того, як із неї взяли жовтий і блакитний олівці, $P(C/AB)=\dfrac{8}{28}=\dfrac{2}{7}$.

Шукана ймовірність

$$P(ABC)=P(AB)\cdot P(C/AB)=\frac{8}{87}\cdot\frac{2}{7}=\frac{16}{609}\approx 0{,}0263.$$

Відповідь: $P(ABC)\approx 0{,}0263$.

Приклад 33. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірність того, що формула міститься в першому, другому і третьому довідниках відповідно дорівнюють $0{,}6$; $0{,}7$ і $0{,}8$. Знайти ймовірності того, що формула міститься: а) тільки в одному довіднику; б) тільки у двох довідниках; в) у всіх трьох довідниках; г) хоча б у одному довіднику.

Розв'язання. Розглянемо події: $A=${формула міститься в першому довіднику}, $B=${формула міститься в другому довіднику, $C=${формула міститься в третьому довіднику}. За умовою задачі $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$, $P(C)=0{,}8$. Позначимо події: $D=${формула міститься тільки в одному довіднику}, $E=${формула міститься тільки в двох довідниках}, $F=${формула міститься в усіх трьох довідниках}, $G=${формула міститься хоча б у одному довіднику}, а події $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ протилежні подіям A, B ,C. Їх ймовірності відповідно дорівнюють $P(\overline{A})=0{,}4$, $P(\overline{B})=0{,}3$, $P(\overline{C})=0{,}2$. Скористаємося теоремами додавання та множення ймовірностей. Тоді:

а) $P(D)=P(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C)=P(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})+P(\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C})+$

$$+P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\right)=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}188;$$

б) $P(E)=P\left(A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C\right)=P\left(A\cdot B\cdot\overline{C}\right)+P\left(A\cdot\overline{B}\cdot C\right)+$

$$+P\left(\overline{A}\cdot B\cdot C\right)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}452;$$

в) $P(F)=P(A\cdot B\cdot C)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}336$;

г) $P(G)=1-P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)=1-0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=1-0{,}024=0{,}976$.

Відповідь: а) $P(D)=0{,}188$, б) $P(E)=0{,}452$ в) $P(F)=0{,}336$,

г) $P(G)=0{,}976$.

Приклад 34. У типографії є 4 друкарських верстати. Для кожного верстата ймовірність того, що він працює в даний момент, дорівнює $0{,}9$. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює хоча б один верстат.

Розв'язання. Нехай подія $A=${працює хоча б один верстат}. Події $A_i=${ i-тий верстат працює} і $\overline{A_i}=${ i-тий верстат не працює} (у даний момент) – протилежні, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $P(A_i)+P\left(\overline{A_i}\right)=1$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$. За умовою задачі $P(A_i)=0{,}9$. Звідси ймовірність того, що верстат зараз не працює, дорівнює $P\left(\overline{A_i}\right)=0{,}1$. Шукану ймовірність події A знайдемо за формулою (3.10), враховуючи, що для кожного з 4-х верстатів ці ймовірності однакові.

$$P(A)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)\cdot P\left(\overline{A_4}\right)=1-(0{,}1)^4=0{,}9999.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}9999$.

Приклад 35. Пакети акцій, що є на ринку цінних паперів, можуть дати дохід власнику з імовірністю $p=0{,}5$ з кожного пакета. Скільки пакетів акцій різних фірм потрібно придбати, щоб з імовірністю не менше $P=0{,}96875$, можна було б очікувати доходу хоча б за одним пакетом акцій?

Розв'язання. Позначимо через n кількість пакетів акцій різних фірм, що рекомендується придбати, а через подію $A_i=${отримання доходу від i-ої фірми} $(i=1,2,\ldots,n)$. Нехай ймовірність події A_i дорівнює p (за умовою задачі $p=0{,}5$). Тоді ймовірність отримання доходу хоча б за одним пакетом акцій, тобто ймовірність суми незалежних випробувань A_i знайдемо за формулою (3.10):

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A_n}\right) = 1 - (1-p)^n .$$

За умовою $1-(1-p)^n \geq P$, де $P = 0{,}96875$, звідки $(1-p)^n \leq 1-P$. Логарифмуємо обидві частини нерівності за «зручною» основою, наприклад, 10 , і враховуємо, що $\lg(1-p) < 0$. Матимемо

$$n \geq \frac{\lg\,(1-P)}{\lg\,(1-p)} = E\left[\frac{\lg\,(1-P)}{\lg\,(1-p)}\right] + 1, \text{ де } E[N] \text{ – ціла частина числа } N .$$

У нашому прикладі зручно як основу взяти $0{,}5$. Тоді

$$1 - 0{,}5^n \geq 0{,}96875 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5^n \leq 0{,}03125$$

або $$\log_{0,5}(0{,}5)^n \geq \log_{0,5} 0{,}03125 \quad \Rightarrow \quad n \geq \log_{0,5} 0{,}03125 .$$

Матимемо $n \geq 4{,}9(9)$. Мінімальне ціле число, що задовольняє цій нерівності, дорівнює 5 , тобто $n \geq 5$. Отже, необхідно придбати щонайменше 5 пакетів акцій.

Відповідь: Потрібно придбати 5 пакетів акцій.

Приклад 36. За даними перепису населення на кожні 900 новонароджених кількість померлих у віці до 24 років становить 30 людей, а кількість померлих у віці до 70 років – 90 людей. Знайти ймовірність того, що людина, яка дожила до 24 років, доживе і до 70 років.

Розв'язання. Розглянемо події: $A =${людина доживе до 24 років}, $B =${людина доживе до 70 років}, $C =${людина, яка дожила до 24 років, доживе і до 70 років}.

За даними перепису населення на кожні 900 новонароджених кількість тих, хто доживе до 24 років, становитиме $900 - 30 = 870$ людей.

Тоді ймовірність події A :

$$P(A) = \frac{870}{900} = \frac{29}{30} .$$

З 870 людей, що залишилися і дожили до 24 років, до 70 років помруть ще $90 - 30 = 60$ осіб.

Нехай подія B/A ={людина доживе до 70 років за умови, що вона дожила до 24 років}. Тоді ймовірність події:

$$P(B/A) = \frac{870-60}{870} = \frac{810}{870} = \frac{27}{29}.$$

Ймовірність того, що людина, яка дожила до 24 років, доживе і до 70 років, знайдемо за теоремою множення ймовірностей залежних подій:

$$P(C) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{29}{30} \cdot \frac{27}{29} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Відповідь: $P(C) = 0{,}9$.

Приклад 37. Деталі у кількості 200 штук виготовлені на двох верстатах: на першому верстаті – 120 деталей, а на другому – 80 деталей. Визначте ймовірність того, що перші дві взяті деталі виготовлені: а) на одному верстаті; б) різних верстатах.

Розв'язання. Розглянемо події: A_i ={ i -та деталь виготовлена на першому верстаті}, B_i ={ i -та деталь виготовлена на другому верстаті}.

а) Нехай подія C ={перші дві взяті деталі виготовлені на одному верстаті}. Тоді подія C є сумою добутків подій $C = A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2$.

Використовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, теорему множення ймовірностей залежних подій та формулу класичної ймовірності отримуємо:

$$P(C) = P(A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2) = P(A_1 \cdot A_2) + P(B_1 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) +$$

$$+ P(B_1) \cdot P(B_2 / B_1) = \frac{120}{200} \cdot \frac{119}{199} + \frac{80}{200} \cdot \frac{79}{199} = \frac{3}{5} \cdot \frac{119}{199} + \frac{2}{5} \cdot \frac{79}{199} = \frac{515}{995} =$$

$$= \frac{103}{199} \approx 0{,}5176.$$

б) Нехай подія D ={перші дві взяті деталі виготовлені на різних верстатах}. Тоді D є сумою добутків подій $D = A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_2$.

Використовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, теорему множення ймовірностей залежних подій та формулу класичної ймовірності отримуємо:

$$P(D) = P(A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot B_2) + P(B_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) +$$

$$+P(B_1)\cdot P(A_2/B_1)=\frac{120}{200}\cdot\frac{80}{199}+\frac{80}{200}\cdot\frac{120}{199}=\frac{48}{199}+\frac{48}{199}=\frac{96}{199}\approx 0{,}4824.$$

Відповідь: а) $P(C)=0{,}5176$, б) $P(D)=0{,}4824$.

3.5 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Означення 3.7 Дві події називаються *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Теорема 3.3. Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{3.12}$$

При цьому події A і B можуть бути як незалежними, так і залежними.

Для незалежних подій матимемо

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B). \tag{3.13}$$

Для залежних подій матимемо

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B/A). \tag{3.14}$$

Слід зауважити, що формула (3.14) додавання сумісних подій приводить, як правило, до громіздких обчислень. Тому доцільно розглянути інший спосіб розв’язування подібних задач.

Нехай маємо кілька сумісних подій $A_1, A_2,..., A_n$. Знайдемо ймовірність події $C= A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Розглянемо протилежну подію $\overline{C}$, яка, очевидно, означає, що жодна з подій $A_1, A_2,..., A_n$ не відбудиться, тобто $\overline{C}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}$. Враховуючи формулу (3.6), матимемо

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}\right)$$

Якщо події A_1, $A_2,...,A_n$ незалежні в сукупності, то матимемо формулу (3.10).

Приклад 38. Ймовірність влучання в ціль у першого стрілка $0{,}8$, у другого – $0{,}9$. Стрілки роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність: а) подвійного влучання; б) подвійного промаху; в) хоча б одного влучання; г) тільки одного влучання.

Розв'язання. Нехай подія $A=${влучання першого стрілка} і $P(A)=0{,}8$. Подія $B=${влучання другого стрілка} і $P(B)=0{,}9$. Подія $\overline{A}=${промах першого стрілка} і $P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}8=0{,}2$. Подія $\overline{B}=${промах другого стрілка} і $P\left(\overline{B}\right)=1-0{,}9=0{,}1$. Події A і B сумісні, але незалежні. Позначимо події: $C=${подвійне влучання}, $D=${подвійний промах}, $E=${хоча б одне влучання}, $F=${одне влучання}. Знайдемо ймовірності цих подій:

а) подія $C=${подвійне влучання}, $C=A\cdot B$

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72\,;$$

б) подія $D=${подвійний промах}, $D=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$$P(D)=P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)=0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02\,;$$

в) подія $E=${хоча б одне влучання}, $E=A+B$

$$P(E)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0{,}8+0{,}9-0{,}72=0{,}98$$

або $P(E)=1-P(D)=1-0{,}02=0{,}98$;

г) подія $F=${одне влучання}, $F=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

$$P(F)=P\left(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B\right)=P\left(A\cdot\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cdot B\right)=0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}26\,.$$

Відповідь: а) $P(C)=0{,}72$, б) $P(D)=0{,}02$, в) $P(E)=0{,}98$, г) $P(F)=0{,}26$.

Приклад 39. В урні 8 куль, серед них 3 червоні і 5 білих. З урни підряд виймають 2 кулі, причому першу з них назад в урну не повертають. Подія $A=${перша куля червона}, подія $B=${друга куля біла}. Знайти ймовірність події $A+B$.

Розв'язання. Події A і B сумісні і залежні. Ймовірність події $A+B$ знайдемо за формулою (3.14). Маємо $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{5}{8}$,

$P(B/A)=\dfrac{5}{7}$. Тоді

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B/A)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{41}{56}.$$

Відповідь: $P(A+B)=\dfrac{41}{56}$.

3.5.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. З колоди в 36 карт послідовно витягують 2 карти. Знайти ймовірність того, що: а) друга карта виявиться чирвою при умові, що перша також чирва; б) друга карта виявиться чирвою при умові, що перша карта іншої масті.	а) $\approx 0{,}0571$, б) $\approx 0{,}1929$.
2. У трьох урнах є по 6 білих та по 4 чорні кулі. З кожної урни витягують навмання по одній кулі. Знайти ймовірність того, що: а) всі три кулі будуть білими; б) усі три кулі будуть одного кольору.	а) $0{,}216$, б) $0{,}28$.
3. В урні 4 білих та 7 чорних куль. З урни навмання одну за одною витягують дві кулі, не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність того, що: а) обидві кулі будуть білими; б) обидві кулі будуть чорними; в) першою буде витягнута біла куля, а потім чорна.	а) $\dfrac{6}{55}$, б) $\dfrac{21}{55}$, в) $\dfrac{14}{55}$.
4. У першій урні міститься 12 куль, з них 7 білі, у другій – 6 куль, з них 3 білі. З першої урни в другу навмання перекладають одну кулю, а потім з другої урни навмання витягують одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона виявиться білою.	$\approx 0{,}51$.
5. Імовірність того, що студент складе перший іспит, дорівнює $0{,}9$; другий – $0{,}9$; третій – $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що студентом буде складено: а) тільки 2-й іспит; б) лише один іспит; в) три іспити; г) принаймні два іспити; д) хоча б один іспит.	а) $0{,}018$, б) $0{,}044$, в) $0{,}648$, г) $0{,}954$, д) $0{,}998$.

Завдання	Відповідь
6. Магазин отримав продукцію в ящиках з чотирьох оптових складів: 4 ящика з першого складу, 5 – з другого, 7 – з третього та 4 – з четвертого. Випадково обраний ящик для продажу. Якою є ймовірність того, що це буде ящик з першого або третього складу.	$0{,}55$.
7. Стрілець потрапляє в ціль з однією і тією самою ймовірністю при кожному пострілі. Якою є ця ймовірність, якщо ймовірність хоча б одного влучення при трьох пострілах дорівнює $0{,}973$?	$0{,}7$.
8. У кожному із трьох ящиків є по 10 деталей. У першому ящику 8 стандартних деталей, у другому – 7 , у третьому – 9 . З кожного ящика навмання витягують по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі деталі будуть: а) стандартними; б) нестандартними	а) $0{,}504$, б) $0{,}006$.
9. Два стрільці зробили по одному пострілу в ціль. Імовірність влучення для першого стрільця дорівнює $0{,}8$, для другого – $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що: а) лише один стрілець потрапить у ціль; б) хоча б один із стрільців потрапить у ціль.	а) $0{,}44$, б) $0{,}92$.
10. Для сигналізації про спалах встановлено два незалежно працюючі датчики. Імовірності того, що при загорянні датчик спрацює, для першого та другого датчиків відповідно дорівнюють $0{,}5$ та $0{,}7$. Знайти ймовірність того, що під час пожежі: а) обидва датчики відмовлять; б) обидва датчики спрацюють; в) спрацює тільки один датчик.	а) $0{,}15$, б) $0{,}35$, в) $0{,}5$.
11. Робочий обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом зміни перший верстат потребуватиме налаштування, дорівнює $0{,}3$, другий – $0{,}75$, третій – $0{,}4$. Знайти ймовірність того, що протягом зміни: а) всі верстати вимагатимуть налаштування; б) тільки один верстат потребує налаштування; в) хоча б один верстат вимагатиме налаштування.	а) $0{,}09$, б) $0{,}43$, в) $0{,}895$.

Завдання	Відповідь
12. Причиною розриву електричного ланцюга є вихід із ладу елемента K_1 чи одночасний вихід із ладу двох елементів – K_2 і K_3. Елементи можуть вийти з ладу незалежно один від одного з імовірностями, рівними відповідно $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$. Якою є ймовірність розриву електричного ланцюга?	$0{,}154$.

3.6 Формула повної ймовірності. Формула Байєса

<u>Означення 3.8</u> Якщо подія A може відбутися або ні після здійснення однієї з подій H_1, H_2, ..., H_n, що утворюють повну групу подій, то їх називаються *гіпотезами*.

Нехай подія A може відбутися внаслідок здійснення однієї з несумісних подій H_1, H_2, ..., H_n (гіпотез), що утворюють повну групу подій. Відомі ймовірності цих гіпотез $P\left(H_i\right)$ і умовні ймовірності настання події A, якщо правильна та чи інша гіпотеза $P\left(A/H_i\right)$.

Тоді ймовірність $P(A)$ появи події A визначається за формулою *повної ймовірності*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)\,, \qquad (3.14)$$

причому $P\left(H_1\right)+P\left(H_2\right)+\ldots+P\left(H_n\right)=1$.

Формула повної ймовірності дає можливість знайти ймовірність настання події A з урахуванням можливості настання будь-якої з гіпотез.

Іншою найважливішою формулою є формула Байєса. Нехай у результаті випробування відбулася подія A, яка могла наступити тільки разом з однією з несумісних подій H_1, H_2, ..., H_n, що утворюють повну групу подій. Необхідно знайти умовну ймовірність

$P(H_i / A)$ настання гіпотези H_i за умови, що подія A відбулася. Для знаходження цієї ймовірності використовують *формулу Байеса*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = 1,2,...,n \tag{3.15}$$

Зауваження 3.1

1. Імовірності $P(H_i / A)$ називаються *післядослідними* (*апостеріорними*) ймовірностями гіпотез H_i, а ймовірності $P(H_i)$ – *додослідними* (*апріорними*) ймовірностями гіпотез H_i. Ці ймовірності розрізняються.

2. Знаменник у правій частині формули дорівнює $P(A)$ – ймовірності, що обчислюється за формулою повної ймовірності.

Формула Байєса дозволяє знайти ці апостеріорні ймовірності і тим самим отримати інформацію про умови настання події A.

Приклад 40. На фірмі є 6 ПК з операційною системою Android та 4 ПК з операційною системою iOS. Імовірність того, що під час виконання обчислювальних робіт ПК з операційною системою Android не вийде з ладу, дорівнює $0,85$, для ПК з операційною системою iOS ця ймовірність дорівнює $0,95$. Знайти ймовірність того, що взятий навмання ПК не вийде з ладу до закінчення обчислювальних робіт.

Розв'язання. Нехай подія A={ПК не вийде з ладу}. Ця подія може відбутися з однією з гіпотез: H_1={взятий ПК з операційною системою Android}, H_2={взятий ПК з операційною системою iOS}. Тоді $P(H_1)=0,6$, $P(H_2)=0,4$ і за умовою задачі $P(A/H_1)=0,85$, $P(A/H_2)=0,95$. За формулою (3.14) знайдемо шукану ймовірність:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=0,6\cdot 0,85+0,4\cdot 0,95=0,89 .$$

Відповідь: $P(A)=0,89$.

Приклад 41. У першій коробці 6 простих і 8 кольорових олівців. У другій коробці 5 простих і 7 кольорових олівців. З кожної коробки навмання витягується один олівець, а потім з цих двох навмання береться один. Яка ймовірність, що це буде кольоровий олівець?

Розв'язання. Нехай подія A={з двох олівців вийняли навмання кольоровий олівець}. Ця подія може відбутися з однією з гіпотез: H_1={з першої коробки витягли кольоровий олівець, з другої витягли простий олівець}, H_2={з першої коробки витягли кольоровий олівець, з другої витягли кольоровий олівець}, H_3={з першої коробки витягли простий олівець, з другої витягли простий олівець}, H_4={з першої коробки витягли простий олівець, з другої витягли кольоровий олівець}.

За умовою задачі в першій коробці було 14 олівців, а у другій – 12 олівців. Знайдемо ймовірність гіпотез $P(H_1)=\frac{8}{14}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{21}$, $P(H_2)=\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{12}=\frac{1}{3}$, $P(H_3)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{28}$, $P(H_4)=\frac{6}{14}\cdot\frac{7}{12}=\frac{1}{4}$ і умовні ймовірності $P(A/H_1)=P(A/H_4)=\frac{1}{2}$, $P(A/H_2)=1$, $P(A/H_3)=0$.

За формулою (3.14) знайдемо шукану ймовірність:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+$$

$$+P(H_4)\cdot P(A/H_4)=\frac{5}{21}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{5}{28}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{97}{168}\approx 0{,}58.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}58$.

Приклад 42. 20 екзаменаційних білетів містять два питання, які не повторюються. Студент може відповісти лише на 30 запитань. Яка ймовірність того, що іспит буде складений, якщо для цього достатньо відповісти на 2 питання з одного білета або на 1 питання одного білета та на зазначене запитання з іншого білета?

Розв'язання. Нехай подія A={екзамен буде зданий}, а гіпотези H_i={студент знає i питань взятого білета}, $i=0,1,2$.

Гіпотези H_i попарно несумісні і утворюють повну групу. За умовою задачі з 40 питань студент може відповісти на 30, а на 10

питань він не знає відповіді. Ймовірності гіпотез $P(H_i)=\dfrac{m_i}{n}$, де $n=C_{40}^2=\dfrac{40\cdot 39}{1\cdot 2}=780$. Знайдемо значення m_i, $i=0,1,2$.

Гіпотези H_0={студент не знає жодного питання взятого білета} і $m_0=C_{10}^2=\dfrac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$, H_1={студент знає одне питання з узятого білета} і $m_1=C_{30}^1\cdot C_{10}^1=30\cdot 10=300$, H_2={студент знає два питання з узятого білета} і $m_2=C_{30}^2=\dfrac{30\cdot 29}{1\cdot 2}=435$. Знайдемо ймовірності гіпотез:

$$P(H_0)=\frac{m_0}{n}=\frac{45}{780}=\frac{3}{52}, \qquad P(H_1)=\frac{m_1}{n}=\frac{300}{780}=\frac{5}{13},$$

$$P(H_2)=\frac{m_2}{n}=\frac{435}{780}=\frac{29}{52}.$$

Умовні ймовірності $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_2)=1$; $P(A/H_1)=\dfrac{29}{38}$ (залишилося 38 питань, з яких на 29 студент знає відповідь). Ймовірність події A знайдемо за формулою (3.14)

$$P(A)=P(H_0)\cdot P(A/H_0)+P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$

$$=\frac{3}{52}\cdot 0+\frac{5}{13}\cdot\frac{29}{38}+\frac{29}{52}\cdot 1\approx 0{,}2935+0{,}5577=0{,}8512.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}8512$.

Приклад 43. Для пошуку у морі судна, яке потрапило у шторм і було пошкоджене, відправили 9 гвинтокрилів, кожен із яких може бути використаний для пошуків у одному з двох квадратів, де може перебувати судно, з імовірностями 0,7 і 0,3. Як краще розподілити гвинтокрили за квадратами пошуків, щоб імовірність знайти пошкоджене судно була найбільшою, якщо кожний гвинтокрил виявляє судно, яке знаходиться в квадраті пошуку з імовірністю 0,3, а пошуки здійснюються кожним гвинтокрилом незалежно від інших? Знайти ймовірність виявлення потерпілого судна при оптимальному пошуку.

Розв'язання. Нехай подія A={судно знайдено}, а подія $\overline{A}$={судно не знайдено}. Розглянемо гіпотези: H_1={пошкоджене судно перебуває в першому квадраті} і H_2={пошкоджене судно перебуває в другому квадраті}. За умовою задачі ймовірності гіпотез $P(H_1)=0,7$, $P(H_2)=0,3$. Припустимо, що n гвинтокрилів шукають пошкоджене судно в першому квадраті. Тоді $(9-n)$ гвинтокрилів шукають пошкоджене судно в другому квадраті. За формулою повної ймовірності (3.14) знайдемо ймовірність $P(\overline{A})$:

$$P(\overline{A})=P(H_1)\cdot P(\overline{A}/H_1)+P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2),$$

де подія $\overline{A}/H_1$={судно не знайдено в першому квадраті}, а подія $\overline{A}/H_2$={судно не знайдено в другому квадраті}.

За умовою задачі ймовірність знайти пошкоджене судно дорівнює $0,3$. Отже, ймовірність не знайти пошкоджене судно дорівнює $0,7$. За припущенням у першому квадраті пошкоджене судно шукають n гвинтокрилів, отже, $P(\overline{A}/H_1)=(1-0,3)^n=(0,7)^n$. Аналогічно $P(\overline{A}/H_2)=(1-0,3)^{9-n}=(0,7)^{9-n}$.

Тоді $P(\overline{A})=0,7\cdot(0,7)^n+0,3\cdot(0,7)^{9-n}=0,7\cdot(0,7)^n+\dfrac{0,3\cdot(0,7)^9}{(0,7)^n}$.

Потрібно вибрати $n_{\text{найб}}$, щоб $P(\overline{A})$ була найменшою. Зробимо заміну $(0,7)^n=y,\ y>0$. Матимемо $P(\overline{A})=0,7\cdot y+\dfrac{0,3\cdot(0,7)^9}{y}$.

Знайдемо $P'(\overline{A})=0,7-\dfrac{0,3\cdot(0,7)^9}{y^2}$. Критичні точки $P'(\overline{A})=0 \Rightarrow 0,7\cdot y^2-0,3\cdot(0,7)^9=0$. Маємо $y^2=0,3\cdot(0,7)^8$. Враховуючи, що $y>0$, отримаємо $y\approx 0,1315$, звідки $(0,7)^n=0,1315$. Логарифмуємо обидві частини рівняння за основою $0,7$: $n=\log_{0,7}0,1315\approx 5,6879$. Найближче ціле значення $n=6$. Це означає, що для оптимального пошуку судна в перший квадрат треба відправити 6 гвинтокрилів, а в другий квадрат – 3 гвинтокрили.

Тоді ймовірність виявлення потерпілого судна при оптимальному пошуку $P(A)=1-P(\overline{A})$ при $n=6$. Знаходимо

$$P(\overline{A})=0,7\cdot 0,1315+\frac{0,3\cdot 0,7^9}{0,1315}\approx 0,1841. \qquad P(A)=1-0,1841=0,8159.$$

Відповідь: Для оптимального пошуку судна в перший квадрат треба відправити 6 гвинтокрилів, а в другий квадрат – 3 гвинтокрили. $P(A)=0,8159$.

Приклад 44. Два з трьох незалежно працюючих елементів пристрою для зберігання даних відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили 1-й та 2-й елементи, якщо ймовірності відмови першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють $0,1$; $0,2$; $0,3$.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези: H_1={3-й елемент відмовив}, H_2={3-й елемент працює}. За умовою задачі ймовірності гіпотез $P(H_1)=0,3$, $P(H_2)=0,7$.

Нехай подія A={відмовили два елементи}, а події B_i={i-й елемент працює}, $i=1,2$. Тоді умовні ймовірності

$$P(A/H_1)=P(B_1\cdot\overline{B_2}+\overline{B_1}\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(\overline{B_2})+P(\overline{B_1})\cdot P(B_2)=$$
$$=(1-0,1)\cdot 0,2+0,1\cdot(1-0,2)=0,9\cdot 0,2+0,1\cdot 0,8=0,26,$$
$$P(A/H_2)=P(\overline{B_1}\cdot\overline{B_2})=P(\overline{B_1})\cdot P(\overline{B_2})=0,1\cdot 0,2=0,02.$$

Ймовірність того, що відмовили два елементи знайдемо за формулою (3.14)

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=0,3\cdot 0,26+0,7\cdot 0,02=0,092.$$

Імовірність того, що відмовили 1-й та 2-й елементи, якщо 3-й елемент працює, знайдемо за формулою (1.22)

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,7\cdot 0,02}{0,092}=\frac{0,014}{0,092}\approx 0,1522.$$

Відповідь: $P(H_2/A)=0,1522$.

Приклад 45. Лікарі підозрюють у хворого або хворобу A, або B, або C з ймовірністю відповідно $0,5$, $0,2$, $0,3$. Для уточнення діагнозу призначається деякий аналіз, що підтверджує хворобу A з ймовірністю $0{,}2$; хворобу B з ймовірністю $0{,}9$; хворобу C з ймовірністю $0{,}3$. Яка ймовірність, що людина дійсно захворіла на одну із підозрюваних хвороб? Імовірність якої хвороби більша?

Розв'язання. Нехай подія A={ людина дійсно захворіла на одну із підозрюваних хвороб}. Ця подія може відбутися внаслідок здійснення однієї з гіпотез: H_1={у хворого хвороба A}, H_2={у хворого хвороба B}, H_3={у хворого хвороба C}. За умовою задачі ймовірності гіпотез $P(H_1)=0,5$, $P(H_2)=0,2$, $P(H_3)=0,3$ і умовні ймовірності $P(A/H_1)=0,2$, $P(A/H_2)=0,9$, $P(A/H_3)=0,3$. Тоді ймовірність $P(A)$ появи події A визначається за формулою повної ймовірності (3.14)

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=0,5\cdot 0,2+0,2\cdot 0,9+0,3\cdot 0,3=0,28\,.$$

Щоб відповісти, ймовірність якої хвороби більша, знайдемо за формулою Байєса ймовірності $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$, $P(H_3/A)$ і порівняємо їх.

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,2}{0,28}=\frac{1}{28}\,,$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,2\cdot 0,9}{0,28}=\frac{18}{28}\,,$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0,3\cdot 0,3}{0,28}=\frac{9}{28}\,.$$

З отриманих результатів очевидно, що у хворого хвороба B.

Відповідь: Ймовірність того, що людина захворіла, дорівнює $0,28$ і це хвороба B.

Приклад 46. З 20 гармат стріляють по цілі. 5 гармат влучають у ціль з імовірністю $0{,}8$, шість – з імовірністю $0{,}7$, сім – з імовірністю $0{,}6$ і дві – з імовірністю $0{,}5$. Навмання вибрана гармата не влучила в ціль. До якої групи гармат найімовірніше вона належить?

Розв'язання. Нехай подія A={влучання в ціль є}, а подія $\overline{A}$={немає влучання в ціль}. Розглянемо гіпотези: H_1={гармата належить до групи з 5 гармат}, H_2={гармата належить до групи з 6 гармат}, H_3={гармата належить до групи з 7 гармат}, H_4={гармата належить до групи з 2 гармат}. За умовою задачі ймовірності гіпотез $P(H_1)=\frac{5}{20}=0,25$, $P(H_2)=\frac{6}{20}=0,3$, $P(H_3)=\frac{7}{20}=0,35$ і $P(H_4)=\frac{2}{20}=0,1$.

Тоді подія $\overline{A}/H_1$={гармата з групи п'ятьох гармат не влучила в ціль}, подія $\overline{A}/H_2$={гармата з групи шістьох гармат не влучила в ціль}, подія $\overline{A}/H_3$={гармата з групи сімох гармат не влучила в ціль}, подія $\overline{A}/H_4$={гармата з групи двох гармат не влучила в ціль}.

Тоді за умовою задачі ймовірності цих подій:

$$P\left(\overline{A}/H_1\right)=1-0,8=0,2,\ P\left(\overline{A}/H_2\right)=1-0,7=0,3,$$
$$P\left(\overline{A}/H_3\right)=1-0,6=0,4,\ P\left(\overline{A}/H_4\right)=1-0,5=0,5.$$

Порівняємо ймовірності $P\left(H_i/\overline{A}\right)$ ($i=1,2,3,4$), знайдені за формулою Байєса (3.15)

$$P(H_i/\overline{A})=\frac{P(H_i)\cdot P(\overline{A}/H_i)}{P(\overline{A})},\text{ де } P(\overline{A})=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\cdot P(\overline{A}/H_i).$$

$$P\left(\overline{A}\right)=P(H_1)\cdot P\left(\overline{A}/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(\overline{A}/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(\overline{A}/H_3\right)+$$
$$+P(H_4)\cdot P\left(\overline{A}/H_4\right)=0,25\cdot 0,2+0,3\cdot 0,3+0,35\cdot 0,4+0,1\cdot 0,5=0,33.$$

Тоді

$$P(H_1/\overline{A})=\frac{0,25\cdot 0,2}{0,33}\approx 0,1515,\ P(H_2/\overline{A})=\frac{0,3\cdot 0,3}{0,33}\approx 0,2727,$$

$$P(H_3/\overline{A})=\frac{0,35\cdot 0,4}{0,33}\approx 0,4242,\ P(H_4/\overline{A})=\frac{0,1\cdot 0,5}{0,33}\approx 0,1515.$$

Відповідь: Найімовірніше в ціль не влучила гармата, яка належить до групи з 7 гармат.

Приклад 47. У групі з 30 осіб, які прийшли складати іспит, є 10 відмінників, 10 підготовлених добре, 7 – задовільно і 3 – погано підготовлені. Відмінники знають усі 30 питань програми, добре підготовлені – 25, підготовлені задовільно – 20 і погано підготовлені знають лише 10 питань. Викликаний навмання студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність: а) студент підготовлений відмінно або добре, б) студент підготовлений задовільно, в) студент підготовлений погано.

Розв'язання. Нехай подія $A=${студент відповів на два задані питання}. Розглянемо гіпотези: $H_1=${студент підготовлений відмінно}, $H_2=${студент підготовлений добре}, $H_3=${студент підготовлений задовільно}, $H_4=${студент підготовлений погано}.

За умовою задачі ймовірності гіпотез $P(H_1)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $P(H_3)=\frac{7}{30}$ і $P(H_4)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$. Нехай події $B_i=${студент відповів на i-те питання}, $i=1,2$. Знайдемо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1)=1,$$

$$P(A/H_2)=P(B_1\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}=\frac{20}{29},$$

$$P(A/H_3)=P(B_1\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)=\frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}=\frac{38}{87},$$

$$P(A/H_4)=P(B_1\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}=\frac{3}{29}.$$

За формулою (3.14) знайдемо

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+$$
$$+P(H_4)\cdot P(A/H_4)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29}+\frac{7}{30}\cdot\frac{38}{87}+\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{29}=\frac{1763}{2610}.$$

За формулою (3.15) знайдемо умовні ймовірності

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1763}{2610}}=\frac{870}{1763}\approx 0{,}4935,$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29}}{\frac{1763}{2610}}=\frac{600}{1763}\approx 0{,}3403,$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{30}\cdot\frac{38}{87}}{\frac{1763}{2610}}=\frac{266}{1763}\approx 0{,}1509,$$

$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)\cdot P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{29}}{\frac{1763}{2610}}=\frac{27}{1763}\approx 0{,}0153.$$

Знайдемо ймовірності таких подій: C_1={студент підготовлений відмінно або добре}; C_2={студент підготовлений задовільно}; C_3= {студент підготовлений погано}.

$$P(C_1)=P(H_1/A)+P(H_2/A)=0{,}4935+0{,}3403=0{,}8338;$$

$$P(C_2)=P(H_3/A)=0{,}1509;\ P(C_3)=P(H_4/A)=0{,}0153.$$

Відповідь: $P(C_1)=0{,}8338$; $P(C_2)=0{,}1509$; $P(C_3)=0{,}0153$.

3.6.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. У першій та третій групах однакове число студентів, а у другій – у $1{,}5$ рази менше, ніж у першій. Кількість відмінників становить 9% у першій, 4% у другій та 6% у третій групі. Знайти ймовірність, що а) випадково викликаний студент є відмінником; б) випадково викликаний студент-відмінник навчається у третій групі	а) $0{,}06625$, б) $0{,}3396$.
2. У групі спортсменів лижників вдвічі більше, ніж бігунів, а бігунів утричі більше, ніж велосипедистів. Імовірність виконати норму для лижника $0{,}9$, для бігуна $0{,}75$, для велосипедиста – $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що спортсмен, вибраний навмання, виконає норму.	$0{,}845$.

Завдання	Відповідь
3. Два датчики посилають сигнал у загальний канал зв'язку, причому перший посилає сигналів удвічі більше, ніж другий. Можливість отримати спотворений сигнал від першого датчика дорівнює $0,06$; від другого – $0,03$. Яка можливість отримати неспотворений сигнал у загальному каналі зв'язку?	0,95
4. Співробітники відділу маркетингу вважають, що найближчим часом очікується зростання попиту на продукцію фірми. Імовірність цього вони оцінюють у 80%. Консультаційна фірма, що займається прогнозом ринкової ситуації, підтвердила припущення зростання попиту. Позитивні прогнози консультаційної фірми здійснюються з імовірністю 95%, а негативні – з ймовірністю 99%. Яка ймовірність того, що зростання попиту справді відбудеться?	0,958 .
5. Гравцю послідовно здається три карти з колоди в 36 карт. Якою є ймовірність того, що третя карта по масті не співпадає з першими двома?	0,59
6. Група студентів складається з 1 відмінника, 7 добре встигаючих студентів та 20 студентів, що встигають посередньо. Відмінник відповідає на 5 та 4 з рівною ймовірністю, добре встигаючий відповідає на 5, 4 та 3 з рівною ймовірністю та посередньо встигаючий студент відповідає на 4, 3 та 2 з рівною ймовірністю. Випадково обраний студент відповів на 4. Яка ймовірність того, що був викликаний посередньо успішний студент?	0,702 .
7. Імовірності правильного визначення хімічного складу продукту для кожного з трьох контролерів дорівнюють $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ та $\frac{2}{3}$. При одночасному контролі трьох проб трьома контролерами хімічний склад виявився правильно визначеним для двох проб, що підтвердилося на остаточній перевірці в лабораторії. Знайти ймовірність, що помилився третій контролер.	0,46 .

Завдання	Відповідь
8. У шухляді знаходяться 10 тенісних м´ячів, серед яких 7 нових. Для першої гри навмання беруть три м´ячі, які після гри повертають у шухляду. Для другої гри також навмання беруть три м´ячі. Знайти ймовірність того, що усі м´ячі, взяті для другої гри, нові.	0,0909
9. Один із трьох стрільців викликається на лінію вогню та робить два постріли. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює $0,3$; для другого – $0,5$; для третього – $0,8$. Мішень не вражена. Знайти ймовірність того, що постріли зроблено першим стрільцем.	0,628
10. У канцелярії працюють 4 секретарки, які відправляють 40%, 10%, 30% і 20% вихідних документів. Імовірності неправильної адресації документів секретарками відповідно рівні $0,01$; $0,04$; $0,06$; $0,01$. Знайти ймовірність того, що неправильно адресований документ відправлений третьою секретаркою.	0,64 .

3.7 Незалежні випробування. Формула Бернуллі

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись, так і не відбутись.

<u>Означення 3.9</u> Якщо ймовірність настання події A у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються *незалежними щодо події* A.

Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них імовірність настання події A однакова. Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують наступні формули і теореми.

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися (з однаковою ймовірністю p) або не відбутися (також з однаковою ймовірністю $q = 1 - p$). Припускаємо, що ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна, тобто не залежить ні від номера випробування, ні від результатів попередніх випробувань.

Послідовність випробувань, що задовольняють зазначеній умові, називається *схемою Бернуллі*.

Імовірність $P_n(m)$ того, що в n випробуваннях, які відповідають указаній схемі, подія A з'явиться рівно m раз, визначається за *формулою Бернуллі*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{3.16}$$

<u>Зауваження 3.2</u> Формула Бернуллі застосовується, якщо $n < 20$. Для $n \geq 20$ обчислювати ймовірності за формулою Бернуллі важко через громіздкість обчислень. Це пов'язано з обчисленням $n!$ При великих n з достатньою точністю формулу (3.16) можна замінити наближеними. Обираючи формулу для обчислень за схемою Бернуллі бажано керуватись такими міркуваннями: 1. Якщо n – велике, а p – "не мале", тобто $npq \geq 20$, де $q = 1 - p$, то для знаходження ймовірностей $P_n(m)$ та $P_n(m_1, m_2)$ застосовують локальну теорему Муавра-Лапласа або інтегральну теорему Муавра-Лапласа відповідно. 2. Якщо n – велике, а p – мале настільки, що $np \leq 10$, то для знаходження $P_n(m)$ застосовують формулу Пуассона.

Приклад 48. Імовірність того, що витрата електроенергії на протязі однієї доби не перевищить встановленої норми, дорівнює $p = 0,75$. Знайти ймовірність того, що протягом найближчих 6 діб витрата електроенергії протягом 4 діб не перевищить норми.

Розв'язання. Імовірність нормальної витрати електроенергії на продовженні кожної з 6 діб постійна і дорівнює $p = 0,75$. Отже, ймовірність перевитрати електроенергії щодня також постійна і дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Шукана ймовірність за формулою Бернуллі дорівнює

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}3.$$

Відповідь: $P_6(4) = 0{,}3$.

Приклад 49. Система автоматичного управління (САУ) космічного літального апарата складається з шести основних вузлів, ймовірність виходу з ладу кожного з яких при динамічних перевантаженнях дорівнює $0{,}3$. При виході з ладу трьох або меншої кількості вузлів система автоматичного управління з ладу не виходить. При виході з ладу чотирьох вузлів імовірність виходу САУ з ладу дорівнює $0{,}3$, при виході з ладу п'яти вузлів – $0{,}7$, при виході з ладу шести вузлів – $1{,}0$. Визначити ймовірність виходу САУ з ладу при динамічних перевантаженнях.

Розв'язання. Нехай подія A ={вихід САУ з ладу при динамічних перевантаженнях }. Імовірність виходу з ладу чотирьох, п'яти і шести вузлів обчислимо за формулою Бернуллі ($p = 0{,}3$; $q = 1 - p = 0{,}7$):

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (0{,}3)^4 \cdot (0{,}7)^2 = 15 \cdot 0{,}0081 \cdot 0{,}49 \approx 0{,}0595;$$

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot (0{,}3)^5 \cdot (0{,}7)^1 = 6 \cdot 0{,}00243 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}0102;$$

$$P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \cdot (0{,}3)^6 \cdot (0{,}7)^0 = 1 \cdot 0{,}000729 \cdot 1 \approx 0{,}0007.$$

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність $P(A)$ виходу з ладу САУ:

$$P(A) = 0{,}0595 \cdot 0{,}3 + 0{,}0102 \cdot 0{,}7 + 0{,}0007 \cdot 1 = 0{,}0257.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}0257$.

Приклад 50. Електронний пристрій змонтовано на 8 напівпровідниках, ймовірність виходу з ладу кожного дорівнює $0{,}1$. Пристрій виходить з ладу, якщо виходять з ладу хоча б будь-які два з 8 напівпровідників. Знайти ймовірність виходу з ладу всього пристрою.

Розв'язання. Припустимо, що вихід з ладу кожного з напівпровідників не залежить від стану працездатності інших. Тоді тут має місце типова схема Бернуллі, причому, ймовірність, що цікавить нас (вихід з ладу будь-якого напівпровідника) дорівнює $p=0,1$. Введемо події: $A_i=${вихід з ладу i напівпровідників серед 8 наявних}, $i=0,1,2,\ldots,8$; $B=${вихід з ладу пристрою}, $\overline{B}=${пристрій працездатний}. $B=A_0+A_1$. Звідси ймовірність події B можна підрахувати таким чином:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A_0)-P(A_1).$$

Імовірності $P(A_0)$ і $P(A_1)$ подій A_0, A_1 знаходимо за формулою Бернуллі. Тоді

$$P(B)=1-P(A_0)-P(A_1)=1-P_8(0)-P_8(1)=1-(1-p)^8-8\cdot p\cdot(1-p)^7=$$

$$=1-(0,9)^8-8\cdot 0,1\cdot(0,9)^7=1-0,4305-8\cdot 0,1\cdot 0,4783=0,1869.$$

Відповідь: $P(B)=0,1869$.

Приклад 51. Імовірність відмови кожного приладу під час випробування дорівнює $0,2$. Скільки таких приладів треба випробувати, щоб з імовірністю не меншою, ніж $0,9$, можна було стверджувати, що відмовлять не менше двох приладів?

Розв'язання. Позначимо кількість приладів через n. Нехай подія $A=${прилад відмовить} може відбутися або не відбутися в кожному випробуванні. Імовірність події A, за умовою прикладу, $p=0,2$. Тоді $q=0,8$.

Розглянемо події: $B=${відмовлять не менше двох приладів}, $\overline{B}=${відмовлять менше двох приладів}.

Подія $\overline{B}$ полягає в тому, що відмовить один прилад (подія B_1) або всі прилади будуть працювати (подія B_2), тобто $\overline{B}=B_1+B_2$. Події B_1 і B_2 несумісні. Імовірності цих подій знайдемо за формулою Бернуллі, а для знаходження ймовірності події $\overline{B}$ застосуємо теорему додавання ймовірностей несумісних подій.

$$P(\overline{B})=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}=0,8^n+$$

$+n\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{n-1}=0{,}8^n\left(1+\dfrac{n}{4}\right).$

Події B і $\overline{B}$ протилежні. Тому $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{0{,}8^n(4+n)}{4}$. За умовою $P(B)\geq 0{,}9$. Щоб знайти n, необхідно розв'язати нерівність:

$$1-\frac{0{,}8^n(4+n)}{4}\geq 0{,}9 .$$

Матимемо $\dfrac{0{,}8^n(4+n)}{4}\leq 0{,}1 \Rightarrow 0{,}8^n(4+n)\leq 0{,}4$. Або

$$n\cdot\lg 0{,}8+\lg(4+n)\leq \lg 0{,}4 \Rightarrow 0{,}0969n\geq \lg(4+n)+0{,}3979 .$$

Нерівність справедлива при $n\geq 18$. Таким чином, треба випробувати не менше 18 приладів.

Відповідь: Треба випробувати не менше 18 приладів.

Найімовірніша кількість.

<u>Означення 3.10</u> Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається *найімовірнішим числом* або *найімовірнішою кількістю* (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність.

Найімовірніше число m_0 задовольняє нерівностям $P_n(m_0-1)\leq P_n(m_0)\leq P_n(m_0+1)$ і визначається за формулою:

$$np-q\leq m_0\leq np+p . \qquad (3.17)$$

Оскільки довжина інтервалу, який визначається нерівністю (3.17), дорівнює одиниці, тобто

$$(np+p)-(np-q)=p+q=1 ,$$

і подія може статися в n випробуваннях тільки ціле число разів, то слід мати на увазі, що:

1) якщо $np-q$ – ціле число, то існують два значення найімовірнішого числа, а саме: $m_{0,1}=np-q$ і $m_{0,2}=np+p$;

2) якщо $np-q$ – дробове число, то існує одне найімовірніше число, а саме: єдине ціле, що міститься між дробовими числами, отриманими з нерівності (3.17);

3) якщо np – ціле число, то існує одне найімовірніше число, а саме: $m_0=np$.

При великих значеннях n користуватися формулою (3.16) для розрахунку ймовірності, що відповідає найімовірнішому числу, незручно. Якщо у рівність (3.16) підставити формулу Стірлінга

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n},$$

справедливу для досить великих n, і прийняти найімовірніше число $m_0=np$, то отримаємо формулу для наближеного обчислення ймовірності, що відповідає найімовірнішому числу:

$$P_{m_0 n.} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{npq}}. \tag{3.18}$$

Приклад 52. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому $0,6$ загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язання. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число: $np-q\le m_0\le np+p$. Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0,6n-0,4\le 40\le 0,6n+0,6; \qquad -0,4-40\le -0,6n\le 0,6-40;$$

$$\frac{39,4}{0,6}\le n\le\frac{40,4}{0,6}; \qquad 65,7\le n\le 67,3.$$

Задача має два розв'язки: $n=66$ і $n=67$.

Відповідь: Потрібно взяти 66 або 67 волокон.

Приклад 53. Скільки слід зіграти партій у шахи з ймовірністю перемоги в одній партії, що дорівнює $0,35$, щоб найімовірніше число перемог дорівнювало 6?

Розв'язання. Найімовірніше число перемог m_0 визначається з формули (3.17). Тут $p=0,35$ (імовірність перемоги), $q=0,65$ (імовірність програшу), n – невідома кількість партій. Підставляючи дані значення, отримуємо: $0,35n-0,65\le 6\le 0,35n+0,35$ або $-0,65\le 6-0,35n\le 0,35$. Розв'язуємо нерівність відносно n. Матимемо

$$-6,65\le -0,35n\le -5,65\,\big|:(-0,35),$$

$$\approx 16,14\le n\le 19\ .$$

Отримуємо, що $n=17$, $n=18$ чи $n=19$.

Відповідь: Слід зіграти 17 або 18 , або 19 партій.

Приклад 54. В університеті $60\,\%$ студентів одержують деякий вид стипендії. Для перевірки випадково взяли 8 студентів. Яка ймовірність, що з вибраних студентів стипендію одержують: а) 5 студентів; б) не більше трьох? Імовірніше всього скільки студентів із цих 8 одержують стипендію?

Розв'язання. Імовірність того, що студент має стипендію $p=0,6$, а ймовірність того, що у студента стипендії нема $q=1-p=0,4$. Має місце схема Бернуллі.

а) обчислимо за формулою Бернуллі (3.16) ймовірність того, що з вибраних 8 студентів стипендію одержують 5 студентів.

$$P_8(5)=C_8^5p^5q^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}(0,6)^5\cdot(0,4)^3\approx 0,2787\ .$$

б) ймовірність того, що з вибраних 8 студентів стипендію одержують не більше трьох студентів, знайдемо за формулою

$$P_{18}(m\le 3)=P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)+P_8(3)=C_8^0p^0q^8+C_8^1p^1q^7+C_8^2p^2q^6+$$

$$+C_8^3p^3q^5=(0,6)^0\cdot(0,4)^8+9\cdot(0,6)^1\cdot(0,4)^7+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}(0,6)^2\cdot(0,4)^6+$$

$$+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}(0{,}6)^3\cdot(0{,}4)^5=(0{,}4)^5\Big((0{,}4)^3+5{,}4\cdot(0{,}4)^2+10{,}08\cdot0{,}4+12{,}096\Big)=$$
$$=(0{,}4)^5\Big(0{,}064+0{,}864+4{,}032+12{,}096\Big)=0{,}01024\cdot17{,}056\approx0{,}175.$$

Знайдемо за формулою (3.17), скільки студентів із 8 ймовірніше всього одержують стипендію.

$$8\cdot0{,}6-0{,}4\le m_0\le8\cdot0{,}6+0{,}6\quad\Rightarrow\quad4{,}4\le m_0\le5{,}4,\ m_0=5.$$

Найімовірніше 5 студентів із 8 одержують стипендію.

Відповідь: а) $P_8(5)=0,2787$, б) $P_{18}(m\le3)=0{,}175$. Найімовірніше 5 студентів із 8 одержують стипендію.

Приклад 55. Відомо, що $0,06$ частина продукції, що поставляється заводом на торгову базу, не задовольняє всім вимогам стандарту. На базу було завезено партію виробів у кількості 300 штук. Знайти найімовірніше число виробів, що відповідають вимогам стандарту, і обчислити ймовірність того, що в цій партії виявиться найімовірніше число виробів.

Розв'язання. За умовою $n=300$, $q=0,06$, $p=0{,}94$. Відповідно до нерівності (3.17) маємо

$300\cdot0{,}94-0{,}06\le m_0\le300\cdot0{,}94+0{,}94$, звідки $281{,}94\le m_0\le282{,}94$. Отже, найімовірніше число виробів у партії з 300 штук, які відповідають вимогам стандарту, дорівнює $m_0=282$. За формулою (3.18) обчислюємо ймовірність наявності в партії найімовірнішого числа виробів: $P_{282,\,300.}\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{300\cdot0{,}94\cdot0{,}06}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{16{,}92}}\approx0{,}097$.

Відповідь: $m_0=282$, $P_{282,\,300.}=0{,}097$.

3.8 Локальна теорема Муавра-Лапласа

Теорема 3.4 (локальна теорема Муавра-Лапласа). Нехай імовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p, причому $0<p<1$. Імовірність того, що подія A не з'явиться у випробуванні $q=1-p$. Тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі в n незалежних випробуваннях подія A настане рівно m раз, наближено виражається рівністю

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{3.19}$$

де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ і $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функція Гаусса.

Властивості функції Гаусса:

а) $\varphi(x)$ визначена на всій осі абсцис; $\varphi(x) > 0$,

б) $\varphi(x)$ є парною функцією: $\varphi(-x) = \varphi(x)$,

в) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$.

Значення функції Гаусса знаходять за Таблицею А.1 (див. Додаток А), що складена для $x \geq 0$.

<u>Зауваження 3.3</u> Розв'язуючи задачі, дотримуються такого правила:

$$\varphi(x)\big|_{x \leq -4} \approx 0, \qquad \varphi(x)\big|_{x \geq 4} \approx 0.$$

Отже, практично використовуються значення функції Гаусса для $x \in [-4; 4]$, що показано на графіку функції Гаусса (рис. 3.3).

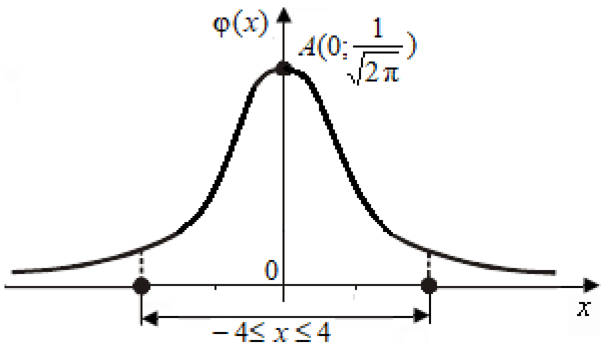


Рисунок 3.3

Формула (3.19) дає тим більш точний результат, чим більше n. Локальна теорема Муавра-Лапласа дає змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n \geq 20$ і $p > 0{,}1$.

Приклад 56. За даними ВТК заводу, $0{,}8$ всього обсягу мікросхем, що випускаються, не має дефектів. Знайти ймовірність того, що серед узятих навмання 400 мікросхем дефекти будуть мати 80 мікросхем.

Розв'язання. В умові прикладу $n=400$, $m=80$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$. Згідно з формулою локальної теореми Муавра-Лапласа маємо:

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=0\,.$$

За Таблицею А.1 (див. Додаток А) знаходимо, що $\varphi(0)=0{,}3989$. Тоді шукана ймовірність

$$P_{400}(80)=\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot\varphi(0)=\frac{1}{8}\cdot 0{,}3989=0{,}04986\,.$$

Відповідь: $P_{400}(80)=0{,}04986$.

Приклад 57. При соціологічному опитуванні кожна людина може дати нещиру відповідь незалежно від інших із ймовірністю $0{,}2$. Яка ймовірність того, що з 50 опитаних менше ніж дві особи дадуть щиру відповідь?

Розв'язання. Маємо схему Бернуллі при $n=50$, $m<2$, $q=0{,}2$, $p=1-q=1-0{,}2=0{,}8$. Необхідно знайти ймовірність $P_{50}(m<2)$, тобто $P_{50}(m<2)=P_{50}(0)+P_{50}(1)$. Для знаходження ймовірностей $P_{50}(0)$ і $P_{50}(1)$ застосуємо локальну теорему Муавра-Лапласа. За формулою (3.19) матимемо

$$P_{50}(0)=\frac{1}{\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi(x_1),\text{ де } x_1=\frac{0-50\cdot 0{,}8}{\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx -1{,}414\,.$$

$$P_{50}(1)=\frac{1}{\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi(x_2),\text{ де } x_2=\frac{1-50\cdot 0{,}8}{\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx -1{,}061\,.$$

Враховуючи, що $\varphi(-x)=\varphi(x)$, за Таблицею А.1 (див. Додаток А) знаходимо, що $\varphi(1{,}414)=0{,}1476$, $\varphi(1{,}061)=0{,}2275$. Тоді

$$P_{50}(m<2)=P_{50}(0)+P_{50}(1)=0{,}3536\cdot 0{,}1476+0{,}3536\cdot 0{,}2275\approx 0{,}1326\,.$$

Відповідь: $P_{50}(m<2)=0{,}1326$.

Приклад 58. Верстат виготовляє за зміну 100000 деталей. Імовірність виготовлення бракованої деталі $p = 0{,}0001$. Знайти ймовірність того, що за зміну буде виготовлено 5 бракованих деталей.

Розв'язання. За умовою $n = 100000$, $p = 0{,}0001$, $m = 5$. Появи бракованих деталей – події незалежні, n велике, а ймовірність p мала ($q = 0{,}9999$). Знайдемо значення:

$$npq = 100000 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}9999 = 9{,}999 > 9 .$$

Застосуємо локальну теорему Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) ,$$

де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{5 - 10}{\sqrt{9{,}999}} \approx -1{,}58$. За Таблицею А.1 (див. Додаток А) знаходимо, що $\varphi(-1{,}58) = 0{,}1145$ Тоді ймовірність $P_{100000}(5) = \dfrac{1}{3{,}1621} \cdot 0{,}1145 \approx 0{,}0362$.

Відповідь: $P_{100000}(5) = 0{,}0362$.

3.9 Теорема Пуассона

Розглянемо схему Бернуллі з малою ймовірністю p появи події A в одному випробуванні та з великою кількістю n випробувань. Нехай при великому n ймовірність p мала (близька до нуля). Нехай $p \cdot n = \lambda$, де λ – деяке число.

Теорема 3.5 (теорема Пуассона). Нехай $p \to 0$ при $n \to \infty$, причому так, що $p \cdot n \to \lambda$, де $\lambda > 0$. Тоді для будь-якого $m = 1, 2, \ldots$

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} . \qquad (3.20)$$

Через малість значень p розподіл Пуассона називають також *законом розподілу рідкісних подій*.

У цьому ж випадку для обчислення $P_n(m_1, m_2)$ можна застосовувати формулу

$$P_n(m_1, m_2) = e^{-\lambda} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Приклад 59. Сервісний автоцентр одночасно може обслуговувати 100 автомобілів. Ймовірність того, що протягом однієї хвилини автомобіліст звернеться до автоцентру, дорівнює $0,01$. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини. до автоцентру звернуться: а) три автомобілісти; б) менше трьох автомобілістів; в) більше трьох автомобілістів; г) хоча б один автомобіліст.

Розв'язання. Оскільки звернення до автоцентру автомобілістів є незалежними подіями, число $n=100$ велике, а ймовірність $p=0,01$ мала ($npq=100 \cdot 0,01 \cdot 0,99=0,99 \le 9$ і $p \le 0,1$), скористаємося формулою Пуассона. Знайдемо $\lambda = p \cdot n = 100 \cdot 0,01 = 1$.

Розглянемо події:

$A=${протягом однієї хвилини звернуться до автоцентру три автомобілісти}, $B=${протягом однієї хвилини звернуться до автоцентру менше трьох автомобілістів}, $C=${протягом однієї хвилини звернуться до автоцентру більше трьох автомобілістів}, $D=${протягом однієї хвилини звернеться до автоцентру хоча б один автомобіліст}, $\overline{D}=${до автоцентру жоден автомобіліст не звернеться}.

Знайдемо ймовірності цих подій.

а) $P(A) = P_{100}(3) = \dfrac{1 \cdot e^{1}}{3!} \approx 0,0613$;

б) $P(B) = P_{100}(m<3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \dfrac{1}{2}e^{-1} \approx 0,9197$;

в) події A, B, C утворюють повну групу подій, тому

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,0613 - 0,9197 = 0,0019;$$

г) події D і $\overline{D}$ – протилежні, тому

$$P(D) = 1 - P_{100}(0) = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

Відповідь: а) $P(A)=0{,}0613$, б) $P(B)=0{,}9197$, в) $P(C)=0{,}019$,
г) $P(D)=0{,}632$.

Приклад 60. З бази до магазину відправлено 4000 старанно упакованих доброякісних виробів. Імовірність того, що виріб зіпсують у дорозі, дорівнює $0{,}0005$. Знайти ймовірність того, що з 4000 виробів до магазину прибудуть 3 зіпсовані вироби.

Розв'язання. Маємо схему Бернуллі з параметрами $n=4000$, $p=0{,}0005$, $m=3$. Оскільки $n=4000$ велике, а $p=0{,}0005$ мале, можна використовувати для обчислень наближену формулу Пуассона (3.20). Знайдемо $\lambda = p\cdot n = 4000\cdot 0{,}0005 = 2$. Тоді

$$P_{4000}(3)=\frac{2^3\cdot e^{-2}}{3!}=\frac{8\cdot 0{,}1352}{6}\approx 0{,}1804.$$

Відповідь: $P_{4000}(3)=0{,}1804$.

3.10 Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

У багатьох задачах потрібно обчислити ймовірність $P_n(m_1,m_2)$ того, що в серії з n випробувань подія A відбудеться не менше m_1 і не більше m_2 раз. Для обчислення цієї ймовірності застосовують інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 3.6 (інтегральна теорема Муавра-Лапласа). Нехай імовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p, причому $0<p<1$. Імовірність того, що подія A не з'явиться у випробуванні $q=1-p$. Тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться від m_1 до m_2 разів ($m_2>m_1$), наближено виражається рівністю:

$$P_n(m_1,m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{3.21}$$

де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ – функція Лапласа, $x_i=\dfrac{m_i-np}{\sqrt{npq}}$, $i=1,2$.

__Властивості функції Лапласа__:

а) $\Phi(x)$ визначена на всій осі абсцис,

б) $\Phi(x)$ є непарною функцією: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

в) $\Phi(0) = 0$.

Значення функції Лапласа знаходять за Таблицею А.2 (див. Додаток А), складеної лише для $x \geq 0$.

<u>Зауваження 3.4</u> Розв'язуючи задачі, дотримуються такого правила:

$$\Phi(x)\Big|_{x \leq -4} \approx -0{,}5, \qquad \Phi(x)_{x \geq 4} \approx 0{,}5 .$$

Отже, практично використовуються значення функції Лапласа для $x \in [-4; 4]$, що показано на графіку функції Лапласа (рис. 3.4).

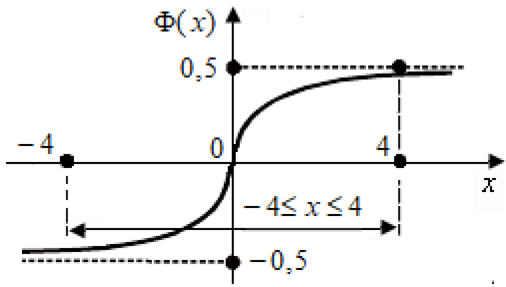


Рисунок 3.4

<u>Зауваження 3.5</u> Інтегральна теорема Муавра-Лапласа широко використовується на практиці при контролі якості продукції, визначенні надійності апаратури і т.д.

Наслідки з інтегральної теореми Муавра-Лапласа

1) Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то при досить великій кількості n незалежних випробувань ймовірність того, що число m настання події A відрізняється від добутку pn не більше ніж на величину $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), дорівнює

$$P\left(\left|m-np\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right); \qquad (3.22)$$

2) Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то при досить великій кількості n незалежних випробувань імовірність того, що відносна частота $\frac{m}{n}$ події A міститься в межах від α до β (включно) дорівнює

$$P\left(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta\right)=\Phi\left(z_2\right)-\Phi\left(z_1\right), \qquad (3.23)$$

де $z_1=\dfrac{\alpha-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$, $z_2=\dfrac{\beta-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$.

3) Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то при досить великій кількості n незалежних випробувань імовірність того, що відносна частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності не більше, ніж на величину $\varepsilon>0$ (за абсолютною величиною) дорівнює

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (3.24)$$

Це надійність оцінки $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$, сама оцінка називається *довірчою оцінкою відносної частоти* $\frac{m}{n}$ з надійністю P.

Приклад 61. Фабрика випускає $70\,\%$ продукції першого сорту.

Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число виробів першого сорту буде міститися між 652 і 760 ?

Розв'язання. За умовою задачі $n=1000$, $p=0,7$, $q=0,3$, $m_1=652$, $m_2=760$. Шукану ймовірність обчислюємо за формулою (3.21): $P_{1000}(652,760)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, де

$$x_1=\frac{652-1000\cdot 0,7}{\sqrt{1000\cdot 0,7\cdot 0,3}}\approx -3,31,\quad x_2=\frac{760-1000\cdot 07}{\sqrt{1000\cdot 0,7\cdot 0,3}}\approx 4,14$$

За Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо значення інтегральної функції Лапласа: $\Phi(4,14)=0,5$, $\Phi(-3,31)=-0,4995$.

Отже, шукана ймовірність $P_{1000}(652,760)=0,5-0,4995=0,9995$.

Відповідь: $P_{1000}(652,760)=0,9995$.

Приклад 62. Надсилається закодоване повідомлення з 1100 символів. Можливість помилки при декодуванні кожного символу становить $0,01$. Вважаючи декодування кожного символу незалежним від інших, знайти ймовірність того, що кількість помилок у прийнятому повідомленні не перевищує 20.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа (3.21), в якій покладемо $n=1100$, $p=0,01$, $q=0,99$, $m_1=0$, $m_2=20$.

Знайдемо

$$x_1=\frac{0-1100\cdot 0,01}{\sqrt{1100\cdot 0,01\cdot 0,99}}\approx -3,33 \text{ і } x_2=\frac{20-1100\cdot 0,01}{\sqrt{1100\cdot 0,01\cdot 0,99}}\approx 2,73.$$

Враховуючи, що $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ за Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо значення інтегральної функції Лапласа: $\Phi(2,73)=0,4968$, $\Phi(-3,33)=-0,4996$.

Отже, шукана ймовірність

$$P_{1100}(0,20)=\Phi(2,73)-\Phi(-3,33)=0,4968+0,4996=0,9964.$$

Відповідь: $P_{1100}(0,20)=0,9964$.

Застосування інтегральної теореми Муавра-Лапласа

Розглянемо наступні випадки.

1) Відомі ймовірність p настання події A в одному випробуванні, число всіх випробувань n і надійність P. Необхідно визначити довірчу оцінку ε з заданою надійністю P.

З формули (3.24) $\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{P}{2}$. За Таблицею А2 (див. Додаток А) знаходимо значення функції $T\left(\frac{P}{2}\right)$, яка є оберненою до функції $\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. Тоді

$$\varepsilon = T\left(\frac{P}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\,. \tag{3.25}$$

2) Відомі ймовірність p настання події A в одному випробуванні, довірча оцінка відносної частоти ε і її надійність P. Знайти число всіх випробувань.

З формули (3.23), розв'язавши відносно $\sqrt{n}$, матимемо

$$\sqrt{n} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot T\left(\frac{P}{2}\right) \cdot \sqrt{pq}\,. \tag{3.26}$$

3) Відомі ймовірність p настання події A в одному випробуванні, число всіх випробувань n і надійність P. Треба знайти кількість випробувань m, коли подія A спостерігалась.

У формулу $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ замість ε підставимо вираз з формули (3.23) і розв'яжемо відносно m. Матимемо

$$np - T\left(\frac{P}{2}\right) \cdot \sqrt{npq} \le m \le np + T\left(\frac{P}{2}\right) \cdot \sqrt{npq}\,. \tag{3.27}$$

Приклад 63. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю $0,9$. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю $0,9973$ можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме $0,03$? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A – «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $p(A)=p=0,1$. Скористаємося формулою (3.24). З умови задачі маємо $2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)=0,9973$, а $\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)=0,49865$.

Тоді за Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо

$$\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}=3\Rightarrow n=\frac{9\,p\,q}{\varepsilon^2}=900.$$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900}-0,1\right|<0,03\Rightarrow -0,03<\frac{m}{900}-0,1<0,03\Rightarrow 0,07<\frac{m}{900}<0,13.$$

Маємо $63<m<117$. Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Відповідь: Буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Приклад 64. Імовірність появи події у кожному із 400 незалежних випробувань дорівнює $0,8$. Знайти таке додатне число ε, щоб з імовірністю $0,984$ абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності не перевищувала ε.

Розв'язання. За умовою задачі $n=400$, $p=0,8$, $q=0,2$ і $P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=0,984$. Тоді $\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)=0,492$. За Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо $T(0,492)=2,41$. Застосовуємо формулу (3.25) і знаходимо $\varepsilon=2,41\cdot\sqrt{\dfrac{0,8\cdot0,2}{400}}\approx0,0482$.

Відповідь: $\varepsilon=0,0482$.

Приклад 65. Імовірність виходу з експлуатації виробу під час проведення експерименту, метою якого є виявлення надійності виробу в роботі, дорівнює $0,2$. Знайти найменше число випробувань, при якому з імовірністю $0,95$ очікується, що відносна частота появи події відхиляється від його ймовірності за модулем не більше ніж на $0,02$.

Розв'язання. За умовою задачі $p=0,2$, $q=0,8$, $\varepsilon=0,02$, $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=0,95$. На підставі формули (3.24) отримуємо

$$2\Phi\left(0,02\cdot\sqrt{\frac{n}{0,2\cdot 0,8}}\right)=0,95 \text{ або } \Phi\left(0,05\cdot\sqrt{n}\right)=0,475.$$

За Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо $\Phi(1,96)=0,475$.

Отже, $0,05\cdot\sqrt{n}=1,96$, тобто $n=1536,64$. Округлюємо результат до найближчого цілого, отримуємо $n=1537$.

Відповідь: $n=1537$.

Приклад 66. За статистичними даними в середньому 85% новонароджених доживають до 45 років. Знайти ймовірність того, що з 800 новонароджених частка тих, що дожили до 45 років, відрізнятиметься від ймовірності цієї події не більше, ніж на $0,03$ (за абсолютною величиною).

Розв'язання. За умовою задачі $n=800$, $p=0,85$, $q=0,15$, $\varepsilon=0,03$. Використовуючи формулу (3.24) знаходимо

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,85\right|<0,03\right)=2\Phi\left(0,03\cdot\sqrt{\frac{800}{0,85\cdot 0,15}}\right)=2\Phi(2,38)=2\cdot 0,4913=$$
$$=0,9826.$$

Відповідь: $P=0,9826$.

3.10.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. У наслідок кожного візиту страхового агента договір укладається з ймовірністю $0,1$. Знайти найімовірніше число укладених договорів після 25 візитів.	$m_0=2$.

Завдання	Відповідь
2. У продукції деякого виробництва якість виробів становить 85%. Вироби надсилаються споживачам (без перевірки) у коробках по 100 штук. Знайти ймовірність, що кількість бракованих виробів у коробці не перевищує 20.	$0{,}919$.
3. У лісгоспі приживається у середньому 80% саджанців. Скільки саджанців треба посадити, щоб з ймовірністю $0{,}9981$ можна було стверджувати, що частка саджанців, що прижилися, буде знаходитися в межах від $0{,}75$ до $0{,}85$.	616.
4. Студент виконує тестову роботу, що складається із трьох завдань. Для отримання позитивної оцінки достатньо розв'язати два. Для кожного завдання пропонується 5 варіантів відповіді, з яких лише одна правильна. Студент погано знає матеріал і тому вибирає відповіді для кожного завдання навмання. Яка ймовірність, що він отримає позитивну оцінку?	$0{,}104$.
5. Дві електричні лампочки включені в ланцюг паралельно. Імовірність того, що при деякому підвищенні напруги в ланцюзі вище номінального перегорить лише одна лампочка, дорівнює $0{,}18$. Знайти ймовірності перегоріти для кожної з цих ламп, якщо відомо, що ці ймовірності перевищують $0{,}7$ і рівні між собою.	$0{,}9$.
6. Схожість насіння даного сорту рослин оцінюється з імовірністю, що дорівнює $0{,}8$. Яка ймовірність того, що з п'яти посіяних насинин зійдуть не менше чотирьох?	$0{,}73728$.
7. Велика партія автопокришок містить $1{,}5\%$ браку. Який повинен бути обсяг випадкової вибірки, щоб можливість виявити в ній хоча б одну браковану автопокришку була б не більше $0{,}92$?	не менше 168.
8. На лекції з теорії ймовірності присутні 50 студентів. Якою є ймовірність того, серед них є 5 студентів, у яких день народження у січні?	$0{,}16$

Завдання	Відповідь
9. Завод відправив на базу 10000 стандартних виробів. Середня кількість виробів, що ушкоджуються під час транспортування, становить $0{,}02\%$. Знайти ймовірність того, що з 10000 виробів буде пошкоджено щонайменше 3 вироби.	$0{,}3233$.
10. Зі школи з імовірністю 40% випускаються двієчники. На ту саму спеціальність університету намагаються вступити 7 випускників цієї школи. Знайти найімовірніше число двієчників серед них і визначити ймовірність того, що саме стільки двієчників надходитиме на цю спеціальність.	$m_0 = 3$; $0{,}29$.
11. Скільки разів із імовірністю $0{,}0484$ можна очікувати появи події A у 100 незалежних випробуваннях, якщо ймовірність його появи в окремому випробуванні $0{,}5$?	55.
12. Імовірність влучання в ціль з одного пострілу дорівнює $0{,}004$. Знайти ймовірність ураження цілі не менше ніж 2-ма снарядами, при залпі з 250 гармат.	$\approx 0{,}264241$.
13. За результатами перевірок податковими інспекціями встановлено, що загалом кожне друге мале підприємство регіону має порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що із 1000 зареєстрованих у регіоні малих підприємств мають порушення фінансової дисципліни: а) 480 підприємств; б) найімовірніше число підприємств; в) не менше ніж 480; г) від 480 до 520.	а) $0{,}0113$; б) $m_0 = 500$ в) $0{,}897$; г) $0{,}794$.
14. Підручник виданий тиражом 10000 екземплярів. Імовірність того, що екземпляр підручника зброшурований неправильно, дорівнює $0{,}0001$. Знайти ймовірність, що тираж містить 5 бракованих книг.	$0{,}0031$.
15. Імовірність того, що деталь нестандартна, $0{,}1$. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від ймовірності $0{,}1$ за абсолютною величиною не більше ніж на $0{,}03$.	$\approx 0{,}9544$.

Завдання	Відповідь
16. У роботі служби швидкої допомоги районного центру відбувається три виклики на годину. Знайти ймовірність; а) хоча б одного виклику за годину; б) п'яти дзвінків за 2 години.	а) $0{,}9502$; б) $0{,}1602$.
17. Театр, що вміщує 1000 відвідувачів, має два різні входи, кожним з яких будь-який глядач може скористатися з рівною ймовірністю. Біля кожного входу є власний гардероб. Скільки місць має бути в кожному гардеробі, щоб з імовірністю $0{,}99$ будь-який глядач зміг роздягнутися в тому гардеробі, в який він звернувся відразу після входу в театр.	537.
18. При схрещуванні двох сортів пшениці виявили, що у другому поколінні ймовірність появи насіння першого ґатунку дорівнює $0{,}25$. Скільки треба взяти насіння пшениці, щоб із ймовірністю $0{,}977$ можна було очікувати, що відносна частота насіння першого сорту відхилиться за абсолютною величиною від ймовірності їх появи не більше ніж на $0{,}02$?	4107.
19. Імовірність виходу пристрою з експлуатації під час проведення експерименту, метою якого є визначення надійності пристрою в роботі, дорівнює $0{,}2$. Було перевірено 625 пристроїв. Знайти таке додатне число ε, щоб із ймовірністю $0{,}7888$ абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу з ладу пристроїв від імовірності $0{,}2$ не перевищувала ε.	$0{,}02$.
20. Відділ технічного контролю перевіряє на брак 900 процесорів. Імовірність того, що процесор працює, дорівнює $0{,}9$. Знайти з ймовірністю $0{,}95$ межі, між якими міститься кількість несправних процесорів серед справних.	від 792 до 828.

4 Випадкові величини

Другим важливим об'єктом, який вивчає теорія ймовірностей, є випадкова величина (ВВ). Зупинимося на понятті випадкової величини. Зазвичай результатом досліду є подія, та, як її наслідок, якась величина – число. Багаторазово повторюючи випробування, ми отримуємо різні значення цієї величини, що цікавить нас, незважаючи на незмінний комплекс умов проведення випробування. Прикладами випадкової величини є: кількість дзвінків, що надійшли від абонентів на телефонну станцію протягом деякого інтервалу часу; сума очок, що випали на верхніх гранях при підкиданні двох гральних кісток; дальність польоту снаряда при пострілі з гармати, час безвідмовної роботи електроприладу і т. д. Всі ці значення заздалегідь передбачити неможливо, і в одних і тих же умовах вони будуть різними, тобто вони будуть величинами випадковими.

<u>Означення 4.1</u> Під *випадковою величиною* будемо розуміти таку величину, яка в результаті випробування приймає невідоме заздалегідь значення, причому воно від випробування до випробування може змінюватися.

Випадкові величини прийнято позначати великими латинськими буквами X, Y, Z, U, W,...

Важливою характеристикою будь-якої випадкової величини X є її функція розподілу $F(x)$. Розглянемо подію $A=\{X<x\}$, де x – будь-яке дійсне число. Імовірнісна міра P будь-якій події A ставить у відповідність число $P(A)$, що визначає ймовірність цієї події. Це число залежить від x і є основною характеристикою випадкової величини.

<u>Означення 4.2</u> Функція $F(x)$, що дорівнює ймовірності того, що значення випадкової величини X менше аргументу цієї функції, називається *функцією розподілу випадкової величини* X, тобто $F(x)=P\ (X<x)$.

Функція розподілу $F(x)$ дорівнює ймовірності попадання значень випадкової величини X на проміжок $(-\infty, x)$.

Найважливіші властивості функції розподілу:

а) $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $x_1<x_2$, то $F(x_1)\le F(x_2)$;

б) $0 \le F(x) \le 1$;

в) $F(x \to -\infty) \to 0$;

г) $F(x \to \infty) \to 1$;

д) функція розподілу неперервна зліва: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$;

е) правостороння границя функції розподілу $F(x)$ в будь-якій точці x_0 дорівнює ймовірності попадання випадкової величини X в напіввідкритий проміжок $(-\infty, x_0]$: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = P(X < x_0)$, $\forall x > x_0$.

Функція розподілу $F(x)$ є найбільш повною характеристикою випадкової величини. Описати, задати випадкову величину X означає задати її функцію розподілу $F(x)$.

Якщо відома функція розподілу $F(x)$, то ймовірність попадання випадкової величини X в напіввідкритий проміжок $[a, b)$ знаходиться за формулою: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

4.1 Дискретні випадкові величини

Означення 4.3 Випадкова величина називається *дискретною випадковою величиною* (ДВВ), якщо всі її можливі значення ізольовані одне від одного і їх можна занумерувати.

Можливі значення випадкових величин, наприклад, X, Y позначають відповідними малими буквами $x_1, x_2, \dots x_n$; $y_1, y_2, \dots y_m$.

Означення 4.4 *Законом розподілу* (або *рядом розподілу*) ДВВ X називається взаємно однозначна відповідність між можливими її значеннями x_i і ймовірностями $p_i = P(X = x_i)$, з якими ці значення приймаються.

Найчастіше закон або ряд розподілу зображують таблицею:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

де $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Для ряду розподілу має виконуватися *умова нормування*: $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Для дискретної випадкової величини X, значення якої $x_1, x_2, \ldots, x_n$, нерівність $x_i < x$ означає, що підсумовування відноситься до всіх значень x_i, які за своєю величиною менше x, а функція розподілу знаходиться за формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\left(X = x_i\right) \tag{4.1}$$

або в розгорнутому вигляді

$$F(x) = P\left(X = x_1\right) + P\left(X = x_2\right) + \ldots + P\left(X = x_i\right),$$

де $x_i < x$

Функція розподілу $F\left(x\right)$ дискретної випадкової величини X має вигляд:

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le x_1, \\ p_1, & \text{при } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{при } x_2 < x \le x_3, \\ \ldots, & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & \text{при } x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & \text{при } x > x_n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Функція розподілу $F\left(x\right)$ дискретної випадкової величини є ступінчастою зі стрибками в точках x_i, з розривами першого роду, рівними ймовірності $p\left(x_i\right)$ при настанні відповідного значення x_i, $i = \overline{1, n}$.

Якщо можливі значення ВВ X належать кінцевому відрізку $[a;b]$, то $F(x)=0$ при $x \le a$ і $F(x)=1$ при $x > b$. Величина $b-a$ називається *розмахом* ВВ X .

Для того, щоб надати закону більш наочний вигляд, вдаються до його графічного зображення: по осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини X , а по осі ординат – їх ймовірності. Точки (x_i, p_i), $i=1,2,\ldots,n$ з’єднують відрізками прямих. Отриману фігуру називають *багатокутником розподілу*.

Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X , заданої рядом розподілу у вигляді таблиці.

При $x \le x_1 : F(x)=P(X<x)=0$.

При $x_1 < x \le x_2 : F(x)=P(X<x)=P(X=x_1)=p_1$.

При $x_2 < x \le x_3 : F(x)=P(X<x)=P(X=x_1)+P(X=x_2)=p_1+p_2$.

… … … … … … … … … … …

При $x_{n-1} < x \le x_n : F(x)=P(X<x)=$

$$=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_{n-1})=p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}.$$

При $x > x_n : F(x)=P(X<x)=$

$$=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_{n-1})+P(X=x_n)=$$

$$=p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n=1.$$

Графік функції розподілу $F(x)$ (рис. 4.1):

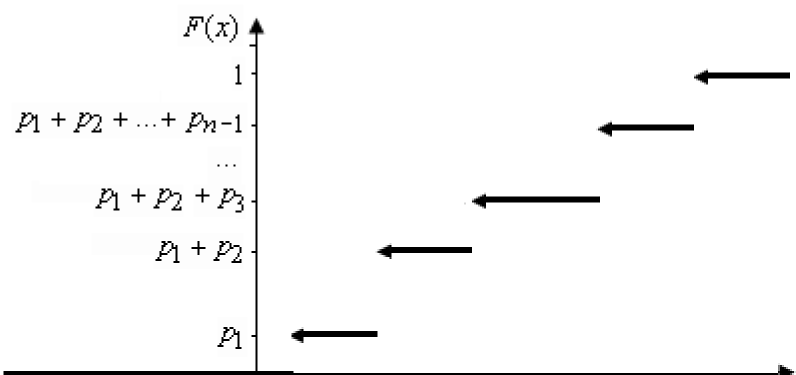


Рисунок 4.1

Приклад 67. Є три коробки з олівцями. У першій міститься 4 червоних та 6 зелених олівців, у другій – 8 червоних та 2 зелених, а у третій – 3 червоних та 7 зелених. З кожної коробки навмання беруть по одному олівцю. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – появи числа червоних олівців серед трьох навмання взятих, знайти функцію розподілу та побудувати графік цієї функції.

Розв'язання. Серед трьох навмання взятих олівців число червоних може бути $0, 1, 2, 3$. Закон розподілу дискретної випадкової величини X шукатимемо у вигляді:

X	0	1	2	3
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Розглянемо події A_1={з першої коробки витягли червоний олівець}, B_1={з першої коробки витягли зелений олівець}, A_2={з другої коробки витягли червоний олівець}, B_2={з другої коробки витягли зелений олівець}, A_3={з третьої коробки витягли червоний олівець}, B_3={з першої коробки витягли зелений олівець}. Ці події незалежні. Імовірності цих подій: $P(A_1)=\frac{4}{10}=0{,}4$; $P(B_1)=\frac{6}{10}=0{,}6$; $P(A_2)=\frac{8}{10}=0{,}8$; $P(B_2)=\frac{2}{10}=0{,}2$; $P(A_3)=\frac{3}{10}=0{,}3$; $P(B_3)=\frac{7}{10}=0{,}7$.

Знайдемо ймовірності p_1, p_2, p_3, p_4:

$$p_1 = P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3) = 0{,}6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}084;$$

$$p_2 = P(A_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3) + P(B_1)\cdot P(A_2)\cdot P(B_3) + P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}428;$$

$$p_3 = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(B_3) + P(B_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) + P(A_1)\cdot P(B_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}392;$$

$$p_4 = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 = 0{,}096.$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
p	0,084	0,428	0,392	0,096

Перевіримо виконання умови нормування:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}084 + 0{,}428 + 0{,}392 + 0{,}096 = 1 .$$

Обчислюємо значення функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X :

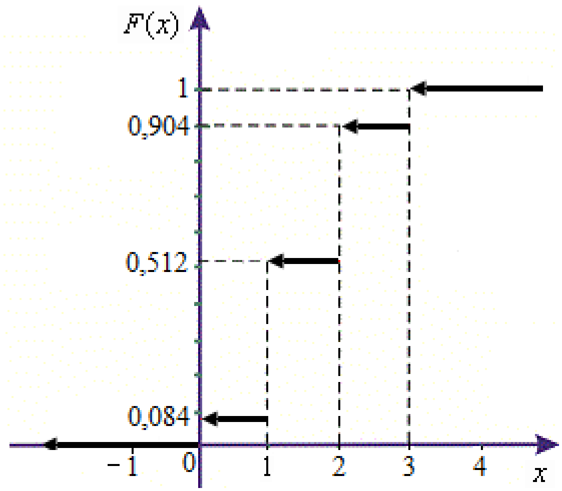
$x \le 0: F(x) = P\ (X < x) = 0$; $0 < x \le 1: F(x) = P\ (X < x) = P\ (X = 0) = 0{,}084$;

$1 < x \le 2: F(x) = P\ (X < x) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) = 0{,}084 + 0{,}428 = 0{,}512$;

$2 < x \le 3: F(x) = P\ (X < x) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) + P\ (X = 2) = 0{,}512 +$
$+ 0{,}392 = 0{,}904$;

$x > 3: F(x) = P\ (X < x) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) + P\ (X = 2) + P\ (X = 3) =$
$= 0{,}904 + 0{,}096 = 1$.

Графік функції розподілу $F(x)$



4.1.1 Числові характеристики дискретних випадкових величин

1. <u>Математичне сподівання ДВВ</u>

<u>Означення 4.5</u> *Математичним сподіванням* $M(X)$ ДВВ X називається сума добутків можливих значень ВВ на їх ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n . \qquad (4.3)$$

Математичне сподівання ВВ може бути як додатним, так і від'ємним числом. Відзначимо, що при великому числі дослідів середнє арифметичне значень ВВ, що спостерігалися, наближається до її математичного сподівання.

<u>Зауваження 4.1</u> Математичне сподівання ВВ є величина не випадкова. Математичне сподівання – це число, навколо якого зосереджено значення ВВ. Математичне сподівання зберігає розмірність ВВ. Математичне сподівання в теорії ймовірностей – це середньозважена величина всіх можливих значень, які може приймати ця ВВ. Математичне сподівання ВВ є аналог центру мас системи матеріальних точок.

Основні властивості математичного сподівання:

а) математичне сподівання постійної величини дорівнює постійній, тобто, якщо $C = \text{const}$, то $M(C) = C$;

б) постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

в) математичне сподівання суми (різниці) двох ВВ X і Y дорівнює сумі (різниці) математичних сподівань цих величин, тобто $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;

г) якщо C_1 і C_2 сталі величини, то $M(C_1 X + C_2) = C_1 M(X) + C_2$;

Наслідок: математичне сподівання будь-якої лінійної комбінації $C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$ будь-яких дискретних випадкових величин

$X_1, X_2, ..., X_n$, знаходиться за формулою:

$$M(C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n) = C_1M(X_1) + C_2M(X_2) + ... + C_nM(X_n),$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – будь-які числові множники.

д) математичне сподівання добутку двох незалежних ВВ X і Y дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;

е) якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність появи події A постійна і дорівнює p, то математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях визначається формулою: $M(X) = n \cdot p$.

Означення 4.6 Для будь-якої ВВ X випадкова величина $X^0 = X - M(X)$ називається *центрованою* ВВ або *відхиленням*.

2. Дисперсія ДВВ

Нехай X – випадкова величина. Очевидно, що математичне сподівання відхилення $X - M(X)$ дорівнює нулю: $M(X - M(X)) = 0$.

Означення 4.7 *Дисперсією* (*розсіюванням*) $D(X)$ ВВ X називають математичне сподівання квадрата відхилення від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (4.4)$$

Для дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 \qquad (4.5)$$

Основні властивості дисперсії:

а) $D(X) \geq 0$;

б) дисперсія постійної величини дорівнює нулю, тобто $D(C)=0$;

в) постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату, тобто $D(C \cdot X)= C^2 \cdot D(X)$;

г) дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій $D(X \pm Y)= D(X)+D(Y)$;

д) якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і дорівнює p, тоді дисперсія $D(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях: $D(X)=n \cdot p \cdot q$.

Наслідок: $D(C+X)=D(X)$, де $C=\text{const}$.

<u>Зауваження 4.2</u> Дисперсія $D(X)$ випадкової величини характеризує розкид випадкової величини навколо її математичного сподівання. Дисперсія має розмірність квадрата одиниці розмірності випадкової величини X.

3. <u>Середнє квадратичне відхилення</u>.

Дисперсія дає уявлення про те, чому в середньому дорівнює квадрат відхилення. Для оцінки самої величини відхилення вводять показник розсіювання ВВ, що має ту ж розмірність, що і випадкова величина. Для цього добувають квадратний корінь з дисперсії.

<u>Означення 4.8</u> Квадратний корінь з дисперсії називають *середнім квадратичним відхиленням* (*стандартом*) і позначають:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{4.6}$$

Відзначимо, що середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}$$

Якщо математичне сподівання ВВ X є характеристикою її положення, середнім значенням, біля якого групуються значення ВВ, то дисперсія ВВ X і її середнє квадратичне відхилення є характеристиками розсіювання ВВ біля її математичного сподівання.

Якщо декілька випадкових величин мають однакові розподіли, то їх числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія і т. д.) однакові.

Обидві величини – дисперсія $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ – характеризують ступінь розкиду значень величини X навколо її середнього значення $M(X)$.

Справді, чим сильніше розкидані значення X навколо $M(X)$, тим більше числові значення $X - M(X)$ відхилень величини X від $M(X)$. Отже, тим більше квадрати $(X - M(X))^2$ цих відхилень і тим більше середнє значення $M\left((X - M(X))^2\right)$ квадратів цих відхилень, тобто тим більше дисперсія $D(X)$ випадкової величини X і тим більше середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ величини X.

А чим менше розкид значень випадкової величини X навколо її математичного сподівання $M(X)$ (тобто чим кучніше вони розташовані навколо $M(X)$), тим менше величини $D(X)$та σ(X).

З цих двох числових характеристик $D(X)$ і $\sigma(X)$ випадкової величини X найважливішою є $\sigma(X)$ з її найяснішого сенсу ($\sigma(X)$ – це середнє відхилення X від $M(X)$ не враховуючи знаку цього відхилення). А дисперсія $D(X)$є допоміжною величиною, якою потім визначається середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

4. <u>Коефіцієнт варіації величини</u> X

<u>Означення 4.9</u> *Коефіцієнтом варіації випадкової величини* X називають величину $V(X)$, яка показує, яку частку у відсотках складає для випадкової величини X її середнє відхилення $\sigma(X)$ від середнього $M(X)$ по відношенню до самого середнього

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \cdot 100\% . \qquad (4.7)$$

5. Мода ДВВ

Означення 4.10 *Модою* M_0 ДВВ X називають те її можливе значення, що відповідає найбільшій ймовірності p_i появи, тобто таке значення величини, яке трапляється найчастіше під час проведення експериментів, дослідів, спостережень.

$$M_0 = x_{\max\limits_i p(x_i)} .$$

6. Медіана ДВВ

Означення 4.11 *Медіаною* M_e ДВВ X називається таке значення випадкової величини, для якого $P(X < M_e) = P(X \ge M_e) = 0,5$.

Для дискретної випадкової величини медіану зазвичай не визначають, однак є правила, згідно з якими, для ряду випадкових величин розміщених у порядку зростання (варіаційного ряду) моду визначають: якщо є непарна кількість випадкових величин $n = 2k + 1$, то медіана дорівнює середній величині $M_e = x_k$, у разі парної кількісті випадкових величин $n = 2k$ – напівсумі середніх величин $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

У разі симетричного розподілу ВВ мода і медіана співпадають з її математичним сподіванням.

7. Початковий момент порядку k ДВВ

Означення 4.12 *Початковим моментом* ν_k порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^{κ}:

$$\nu_k = M\left(X^k\right), \qquad (4.8)$$

зокрема, $\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M\left(X^2\right)$.

Користуючись цими позначеннями формулу для обчислення дисперсії можна записати так: $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2=\nu_2-(\nu_1)^2$.

8. <u>Центральний момент порядку</u> k <u>ДВВ</u>

<u>Означення 4.13</u> *Центральним моментом* μ_k порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X-M(X))^k$:

$$\mu_k=M\left((X-M(X))^k\right), \tag{4.9}$$

зокрема, $\mu_1=M(X-M(X))=0$, $\mu_2=M\left((X-M(X))^2\right)=D(X)$.

Неважко вивести співвідношення:

$$\mu_2=\nu_2-(\nu_1)^2,\ \mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2(\nu_1)^3,$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2(\nu_1)^2-3(\nu_1)^4.$$

Якщо випадкова величина розподілена симетрично щодо математичного сподівання, то всі її центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю.

Приклад 68. Знайти закон розподілу ДВВ X, яка приймає тільки два значення: x_1 і x_2 $(x_1<x_2)$. Імовірність значення x_1 дорівнює $p_1=0{,}1$, математичне сподівання $M(X)=3{,}9$ і дисперсія $D(X)=0{,}09$.

Розв'язання. Знайдемо $p_2=1-p_1=1-0{,}1=0{,}9$. Запишемо математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$ за формулами (4.3) і (4.5):

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2 \text{ і } D(X)=x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2-(M(X))^2.$$

Звідси

$$\begin{cases}0{,}1\cdot x_1+0{,}9\cdot x_2=3{,}9\\ 0{,}1\cdot x_1{}^2+0{,}9\cdot x_2{}^2=15{,}3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+9\cdot x_2=39\\ x_1{}^2+9\cdot x_2{}^2=153\end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 39 - 9 \cdot x_2 \\ (39 - 9 \cdot x_2)^2 + 9 \cdot x_2{}^2 = 153 \end{cases} \Rightarrow 5x_2{}^2 - 39x_2 + 76 = 0.$$

Знайдемо корені рівняння: $x_2{}^{(1)} = 4$, $x_2{}^{(2)} = 3{,}8$ і $x_1{}^{(1)} = 3$, $x_1{}^{(2)} = 4{,}8$.

За умовою $x_1 < x_2$, тому $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Відповідь: Закон розподілу ДВВ X

X	3	4
p	0,1	0,9

Приклад 69. За статистикою складання екзамену студентами деякому викладачу встановлено, що скласти йому екзамен на «відмінно» можна з імовірністю $0,3$; на «добре» − з імовірністю $0,4$. Яка можливість отримати у цього викладача оцінки «задовільно» і «незадовільно», якщо математичне сподівання випадкової величини X, пов'язаної з розподілом оцінок у даного викладача при випадково вибраному білету, дорівнює $0,39$.

Розв'язання. Відомо, що випадкова величина X може приймати значення з множини $\{2, 3, 4, 5\}$. Припустимо, що p_1 і p_2 – ймовірності відповідно отримати оцінки «незадовільно» і «задовільно». Складемо передбачуваний закон розподілу дискретної випадкової величини X:

X	2	3	4	5
p	p_1	p_2	$0,4$	$0,3$

Згідно умови нормування $p_1 + p_2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1$. За умовою прикладу $M(X) = 0,39$, тобто

$$M(X) = 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 3,9.$$

Маємо систему двох рівнянь із невідомими p_1 і p_2:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0{,}3, \\ 2p_1 + 3p_2 = 0{,}8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}1, \\ p_2 = 0{,}2. \end{cases}$$

Отже, у даного викладача можна отримати «задовільно» з ймовірністю $0,2$ і «незадовільно» з ймовірністю $0,1$.

Відповідь: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$.

Приклад 70. Зроблено два високо ризикові інвестиційні внески: 10 тис. грн. у компанію А і 15 тис. грн. – у компанію В. Компанія А обіцяє 50% річних, але може «збанкрутувати» з ймовірністю $0,2$. Компанія В обіцяє 40% річних, але може «збанкрутувати» з ймовірністю $0,15$. Скласти закон розподілу випадкової величини – загальної суми прибутку (збитку), отриманого від двох компаній через рік і знайти математичне сподівання.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – загальна сума прибутку (збитку) від двох компаній через рік. Випадкова величина X може приймати значення: $x_1 = -25,\ x_2 = -10,\ x_3 = -4,\ x_4 = 11.$

Тоді $X = x_1 = -25$ – обидві компанії «збанкрутували»;

$X = x_2 = -10$ – компанія А виплатила 5 тис. грн. (50% річних), компанія В «збанкрутувала»;

$X = x_3 = -4$ – компанія А «збанкрутувала», компанія В виплатила 6 тис. грн. (40% річних);

$X = x_4 = 11$ – компанія А виплатила 5 тис. грн. (50% річних) і компанія В – 6 тис. грн. (40% річних).

Знайдемо ймовірності, з якими ВВ X набуває своїх значень:

$P(X = -25) = 0,2 \cdot 0,15 = 0,03$, $P(X = -10) = 0,8 \cdot 0,15 = 0,12$,

$P(X = -4) = 0,2 \cdot 0,85 = 0,17$, $P(X = 11) = 0,8 \cdot 0,85 = 0,68$.

Закон розподілу випадкової величини X:

X	-25	-10	-4	11
p	$0,03$	$0,12$	$0,17$	$0,68$

Перевіримо виконання умови нормування для отриманого закону розподілу: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,03 + 0,12 + 0,17 + 0,68 = 1$.

Знайдемо математичне сподівання:

$M(X) = -25 \cdot 0,03 + (-10) \cdot 0,12 + (-4) \cdot 0,17 + 11 \cdot 0,68 = 4,85$ (тис. грн.).

Відповідь: $M(X) = 4,85$ тис. грн.

Приклад 71. Баскетболіст кидає м'яч у кошик до першого влучання, але робить не більше 4-х кидків. Побудувати ряд розподілу

ДВВ X – числа кидків по цілі, якщо ймовірність влучання при одному кидку дорівнює $0,6$. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік. Знайти математичне сподівання, дисперсію, моду і медіану випадкової величини X, а також імовірність того, що кількість кидків буде не менше трьох.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X може набувати таких значеннь: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. Введемо події:

$A_i = \{$Влучання в корзину при i-му кидку$\}$,

$\overline{A_i} = \{$Промах при i-му кидку$\}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Імовірності цих подій: $P(A_i) = 0,6$, $P(\overline{A_i}) = 0,4$. Знайдемо ймовірності, з якими ВВ X набуває своїх значень:

$X = x_1 = 1$ – влучання при першому кидку.

Тоді $P(X = 1) = P(A_1) = 0,6$.

$X = x_2 = 2$ – влучання при другому кидку.

Тоді $P(X = 2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0,24$.

$X = x_3 = 3$ – влучання при третьому кидку.

Тоді $P(X = 3) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = 0,096$.

$X = x_4 = 4$ – промахнувся три рази, незалежно від того, влучив він чи ні в четвертий раз.

Тоді $P(X = 4) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,064$.

Отже, ряд розподілу випадкової величини X буде:

X	1	2	3	4
p	0,6	0,24	0,096	0,064

Функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}6, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}84, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}936, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases} .$$

Графік функції розподілу (рис. 4.2):

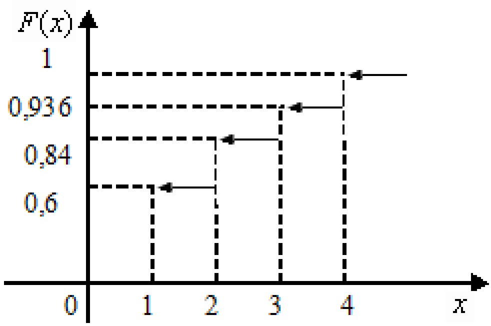


Рисунок 4.2

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію за формулами для ДВВ:

$$M(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,096 + 4 \cdot 0,064 = 1,624 .$$

$$D(X) = 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,096 + 16 \cdot 0,064 - (1,624)^2 = 0,8106 .$$

З таблиці розподілу визначаємо моду $M_0 = 1$ як значення при максимальній імовірності. Маємо одномодальний розподіл.

Випадкова величина X набуває парної кількості значень $n = 2k = 4 \Rightarrow k = 2$. Тому $M_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} = \dfrac{x_2 + x_3}{2} = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$.

Ймовірність того, що кількість кидків буде не менше трьох, дорівнює

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,096 + 0,064 = 0,16 .$$

Відповідь: $M(X) = 1,624$; $D(X) = 0,8106$; $M_0 = 1$; $M_e = 2,5$;
$P(X \geq 3) = 0,16$.

4.1.2 Закони розподілу дискретних випадкових величин

1. *Біноміальний закон розподілу*.

Означення 4.14 Дискретна ВВ X має *біноміальний закон розподілу* з параметрами n і p, якщо вона набуває значень $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$ з імовірностями

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (4.10)$$

де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Біноміальний закон розподілу – це закон розподілу числа $X = m$ настання події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких вона може з'явитися з однією і тією ж імовірністю p.

Ряд розподілу біноміального закону має вигляд

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Числові характеристики розподілу: $M(X) = n \cdot p$, $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

Наслідок: Математичне сподівання відносної частоти $\frac{m}{n}$ події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких вона може з'явитись з однією і тією ж імовірністю p, дорівнює p, тобто $M\left(\frac{m}{n}\right) = p$, а її дисперсія $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{p \cdot q}{n}$.

2. <u>*Розподіл Пуассона*</u>.

<u>***Означення 4.15***</u> Дискретна ВВ X має *закон розподілу Пуассона* з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значень $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ (нескінченна, але зліченна кількість значень) з імовірностями

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (4.11)$$

де $\lambda = n \cdot p$.

Ряд розподілу Пуассона має вигляд

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

Числові характеристики розподілу: $M(X)=\lambda$ і $D(X)=\lambda$.

3. <u>*Потік подій*</u>.

<u>Означення 4.16</u> *Потоком подій* називається послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу.

Потоки можуть мати властивості: стаціонарності (в цьому випадку ймовірність появи m подій за проміжок часу тривалості t є функція, що залежить тільки від m і t), відсутність післядії, ординарності.

<u>Означення 4.17</u> *Найпростішим* (*пуассонівським*) *потоком подій* називають потік подій, що має перераховані вище властивості.

<u>Означення 4.18</u> *Інтенсивністю потоку* λ називають середнє число подій, які з'являються в одиницю часу.

Ймовірність настання m подій за час t визначається формулою Пуассона:

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}. \qquad (4.12)$$

4. <u>*Геометричний розподіл*</u>.

<u>Означення 4.19</u> Дискретна ВВ $X=m$ має *геометричний розподіл* з параметром p, якщо вона набуває значень $1, 2, \ldots, m, \ldots$ (нескінченна, але зліченна кількість значень) з імовірностями

$$P(X=m)=q^{m-1}\cdot p, \qquad (4.13)$$

де $0<p<1$, $q=1-p$.

ДВВ X – число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A, тобто у перших $m-1$ випробуваннях подія A не відбулася, а в m-му випробуванні сталася. Подія A з'являється у випробуванні з імовірністю p. Імовірність того, що подія A у випробуванні не з'явиться, дорівнює q.

Числові характеристики розподілу: $M(X)=\dfrac{1}{p}$ і $D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

5. *Гіпергеометричний розподіл*.

Означення 4.20 Розподіл ВВ X називається *гіпергеометричним*, якщо випадкова величина X, яка означає випадковий вибір n виробів, серед яких рівно m стандартних, з партії N виробів, що містить M стандартних ($M<N$), з ймовірністю

$$P(X=m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (4.14)$$

Числові характеристики розподілу:

$$M(X)=\frac{M\cdot n}{N} \text{ і } D(X)=\frac{n\cdot M\cdot(N-M)\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}.$$

Приклад 72. Стрілець робить чотири постріли по мішені. Випадкова величина X – кількість влучань. Імовірність влучання при одному пострілі дорівнює $0,7$. Знайти ряд розподілу випадкової величини X і ймовірність того, що влучань буде більше, ніж промахів.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. Вона може набувати значень: $0,1,2,3,4$. Знайдемо ймовірності, з якими вона набуває цих значень:

$$p_1=P_4(X=0)=C_4^0\cdot(0,7)^0\cdot(0,3)^4=0,0081,$$
$$p_2=P_4(X=1)=C_4^1\cdot(0,7)^1\cdot(0,3)^3=0,0756,$$
$$p_3=P_4(X=2)=C_4^2\cdot(0,7)^2\cdot(0,3)^2=0,2646,$$
$$p_4=P_4(X=3)=C_4^3\cdot(0,7)^3\cdot(0,3)^1=0,4116,$$
$$p_5=P_4(X=4)=C_4^4\cdot(0,7)^4\cdot(0,3)^0=0,2401.$$

Ряд розподілу:

X	0	1	2	3	4
p	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Нехай подія $A=\{$влучань буде більше, ніж промахів$\}$. Імовірність події A:

$$P(A)=P_4(X\geq 3)=P_4(X=3)+P_4(X=4)=0{,}4116+0{,}2401=0{,}6517.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}6517$.

Приклад 73. Два стрільці одночасно, незалежно один від одного, стріляють по мішені до першого влучання хоча б одним із них. Імовірність влучання в мішень для першого стрільця дорівнює $0{,}6$, а для другого – $0{,}7$. Знайти: а) закон розподілу числа X зроблених пострілів, б) імовірність того, що пострілів буде більше двох, в) математичне сподівання випадкової величини X.

Розв'язання. а) Випадкова величина X розподілена за геометричним законом. За умовою прикладу ймовірності влучання кожного в мішень $p_1=0{,}6$ і $p_2=0{,}7$. Тоді ймовірність промаху для кожного відповідно $q_1=0{,}4$ і $q_2=0{,}3$. Знайдемо ймовірність p того, що при першому пострілі обох стрільців хоча б один із них влучив у мішень

$$p=1-q_1q_2=1-0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}88.$$

Припустимо, що при перших $(m-1)$-му пострілі стрільці не влучили в мішень з імовірністю $q=1-p=1-0{,}88=0{,}12$, а при m-му пострілі було влучення в мішень з імовірністю $p=0{,}88$. За формулою (4.13) матимемо $P(X=m)=(0{,}12)^{m-1}\cdot 0{,}88$. Закон розподілу має вигляд:

X	1	2	$\dots$	m	$\dots$
p	$0{,}88$	$0{,}1056$	$\dots$	$(0{,}12)^{m-1}\cdot 0{,}88$	$\dots$

б) Знайдемо ймовірність

$$P(X>2)=1-P(X=1)-P(X=2)=1-0,88-0,1056=0,0144.$$

в) Для геометричного розподілу математичне сподівання $M(X)=\dfrac{1}{p}$. Матимемо $M(X)=\dfrac{1}{0,88}\approx 1,1364$.

Відповідь: б) $P(X>2)=0,0144$; в) $M(X)=1,1364$.

Приклад 74. За годину мобільний оператор отримує в середньому 540 викликів. Знайти ймовірність того, що за дану хвилину він отримає: а) рівно 4 виклика, б) від 3 до 5 викликів.

Розв'язання. Імовірність того, що за час t хвилин мобільний оператор отримає m викликів, знайдемо за формулою Пуассона (4.12). За умовою прикладу інтенсивність потоку $\lambda=\dfrac{540}{60}=9<10$. Тоді $P_t(m)=\dfrac{(9t)^m e^{-9t}}{m!}$. Використовуємо Таблицю А.3 (див. Додаток А).

а) Знайдемо ймовірність того, що за дану хвилину ($t=1$) буде рівно 4 виклики.

$$P_1(4)=\frac{(9)^4 e^{-9}}{9!}=0,0337.$$

б) Знайдемо ймовірність того, що за дану хвилину ($t=1$) буде від 3 до 5 викликів.

$$P_1(3\le m\le 5)=P_1(3)+P_1(4)+P_1(5)=\frac{(9)^3 e^{-9}}{3!}+\frac{(9)^4 e^{-9}}{4!}+\frac{(9)^5 e^{-9}}{5!}=$$

$$=0,015+0,0337+0,0607=0,1094.$$

Відповідь: а) $P_1(4)=0,0337$; б) $P_1(3\le m\le 5)=0,1094$.

Приклад 75. На полиці стоять 8 книг, із яких 5 книг з математики та 3 з фізики. Вибирають навмання 4 книги. Випадкова величина X – число книг з математики серед відібраних. Скласти закон розподілу випадкової величини X . Знайти математичне сподівання та функцію розподілу цієї випадкової величини.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена за гіпергеометричним законом. Вона може набувати значень: $1,2,3,4$. Знайдемо відповідні ймовірності за формулою (4.11).

$X=1$, якщо одна книга з математики і три – з фізики.

$$P(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_3^3}{C_8^4}=\frac{5\cdot 1}{70}=\frac{1}{14}.$$

$X=2$, якщо дві книги з математики і дві – з фізики.

$$P(X=2)=\frac{C_5^2\cdot C_3^2}{C_8^4}=\frac{10\cdot 3}{70}=\frac{3}{7}.$$

$X=3$, якщо три книги з математики і одна – з фізики.

$$P(X=3)=\frac{C_5^3\cdot C_3^1}{C_8^4}=\frac{10\cdot 3}{70}=\frac{3}{7}.$$

$X=4$, якщо чотири книги з математики.

$$P(X=1)=\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}.$$

Маємо закон розподілу випадкової величини X

X	1	2	3	4
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X за формулою (4.3)

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{14}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{3}{7}+4\cdot\frac{1}{14}=\frac{35}{14}=2,5$$

або за формулою $M(X)=\dfrac{M\cdot n}{N}$ для гіпергеометричного розподілу. Матимемо $M(X)=\dfrac{5\cdot 4}{8}=2,5$.

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини X.

$x\le 1: F(x)=P(X<1)=0$;

$1 < x \le 2 : F(x) = P\ (X < 2) = \dfrac{1}{14}$;

$2 < x \le 3 : F(x) = P\ (X < 3) = \dfrac{1}{14} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{7}{14} = 0{,}5$;

$3 < x \le 4 : F(x) = P\ (X < 4) = \dfrac{7}{14} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{13}{14}$;

$x > 4 : F(x) = P\ (X \ge 4) = \dfrac{13}{14} + \dfrac{1}{14} = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{1}{14}, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}5, & 2 < x \le 3, \\ \dfrac{13}{14}, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Відповідь: $M(X) = 2{,}5$.

4.2 Неперервні випадкові величини

Означення 4.21. Випадкову величину називають *неперервною випадковою величиною* (НВВ), якщо вона може приймати будь-які значення з деякого проміжку (скінченного або нескінченного).

Означення 4.22. *Функцією розподілу або інтегральною функцією неперервної випадкової величини* X, як і дискретної, називається функція $F(x) = P\ (X < x)$, яка визначає ймовірність, що значення випадкової величини X менше або дорівнює граничному значенню x.

Основні властивості функції розподілу:

а) область визначення функції розподілу $F(x)$ – множина всіх дійсних чисел, а область значень – відрізок $[0;1]$;

б) $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 \ge x_1$;

в). $F(x)$ – неперервна функція;

г) $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$;

д) якщо можливі значення НВВ X належать інтервалу $(a;b)$, то $F(x)=0$ при $x\leq a$ і $F(x)=1$ при $x>b$;

е) якщо можливі значення НВВ X розташовані на всій числовій осі, то справедливі граничні співвідношення:

$$\lim_{x\to -\infty} F(x)=0 \text{ і } \lim_{x\to \infty} F(x)=1.$$

Теорема 4.1. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одного певного значення, дорівнює нулю: $P(X=x_1)=0$.

Наслідок. Якщо X – неперервна випадкова величина, то ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(x_1;x_2)$ не залежить від того, є цей інтервал відкритим або закритим, тобто

$$P(x_1<X<x_2)=P(x_1\leq X<x_2)=P(x_1<X\leq x_2)=P(x_1\leq X\leq x_2).$$

Усі властивості функцій розподілу дискретних випадкових величин виконуються й у функцій розподілу неперервних випадкових величин.

Графік функції розподілу $F(x)$ має вигляд

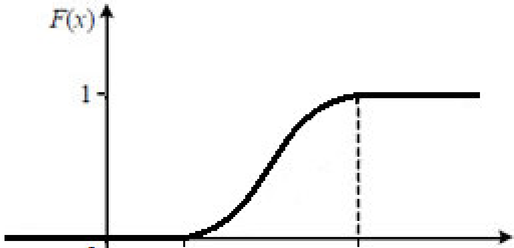


Рисунок 4.3

Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину, однак має один недолік. За функцією розподілу важко судити про характер розподілу випадкової величини в околі тієї чи іншої точки числової осі.

Для неперервних випадкових величин щільність розподілу ймовірностей є основною характеристикою.

<u>Означення 4.23</u> *Щільністю розподілу ймовірностей* неперервної випадкової величини X називають похідну від її функції розподілу: $f(x) = F'(x)$.

Основні властивості щільності розподілу ймовірностей:

а) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in R$,

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Знаючи щільність розподілу, можна обчислити ймовірність того, що деяка НВВ X набуде значення, що належить заданому інтервалу

$$P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (4.15)$$

Геометрично це означає, що ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення, що належить інтервалу $(a; b)$, дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженою віссю Ox, кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$.

Функція розподілу може бути легко знайдена, якщо відома щільність розподілу, за формулою:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (4.16)$$

Сенс щільності розподілу полягає в тому, що вона показує, як часто з'являється випадкова величина X в деякій околиці точки X при повторенні випробувань.

Графік функції щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ має вигляд:

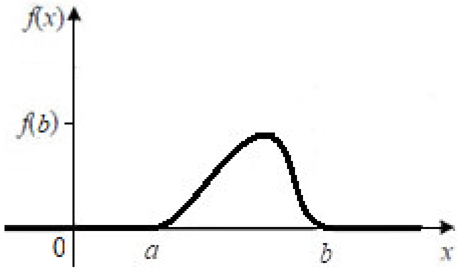


Рисунок 4.4

Геометрично властивості щільності ймовірності означають, що її графік (крива розподілу) лежить не нижче за вісь абсцис, і повна площа фігури, обмеженої кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

4.2.1 Числові характеристики неперервних випадкових величин

1. Математичне сподівання НВВ

Означення 4.24 *Математичним сподіванням* $M(X)$ НВВ X, можливі значення якої належать всій осі Ox, із щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ називається величина

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx \qquad (4.17)$$

При цьому, звичайно, передбачається, що невласний інтеграл є збіжним. Зокрема, якщо всі можливі значення НВВ X належать інтервалу $(a;b)$, то $M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx$.

З геометричної точки зору математичне сподівання випадкової величини дорівнює абсцисі центру тяжіння площі, обмеженій кривою розподілу та віссю абсцис.

2. Дисперсія НВВ

Означення 4.25 *Дисперсією* $D(X)$ НВВ X називається $M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)$, де різниця $X-M(X)$ називається відхиленням ВВ X від її математичного сподівання. Дисперсія обчислюється за формулою

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx\ . \tag{4.18}$$

Для практичного знаходження дисперсії використовується формула:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2 . \tag{4.19}$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини від свого середнього значення.

Зауваження 4.3. Властивості $M(X)$ і $D(X)$ для НВВ аналогічні відповідним властивостям для ДВВ.

3. Середнє квадратичне відхилення НВВ

Означення 4.26 *Середнім квадратичним відхилення* $\sigma(X)$ НВВ називають квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{4.20}$$

4. Мода НВВ

Означення 4.27 *Модою* $M_0(X)$ НВВ X називається точка максимуму щільності розподілу $f(x)$.

Випадкова величина може мати кілька мод. З геометричної точки зору мода – значення аргументу x, у якому графік функції щільності розподілу приймає максимальне значення: $f(M_0) = \max f(x)$.

Розподіл називається <u>*унімодальним*</u>, якщо він має єдину моду (біноміальний, нормальний, показниковий тощо). Розподіл називається <u>*полімодальним*</u>, якщо він має більше однієї моди (рівномірний тощо). Існують і такі розподіли, які не мають моди, їх називають *антимодальними*.

5. <u>Медіана НВВ</u>

<u>***Означення 4.28***</u>. *Медіаною* $M_e(X)$ ВВ X називається таке значення X_p випадкової величини, для якого виконуються рівність ймовірностей подій, тобто

$$P(-\infty < X_p < M_e) = P(M_e < X_p < \infty) = 0{,}5 .$$
$$F(M_e) - F(-\infty) = F(\infty) - F(M_e),$$
$$F(M_e) = 1 - F(M_e) \Rightarrow 2F(M_e) = 1 ,$$
$$F(M_e) = 0{,}5 .$$

Неперервна випадкова величина має лише одне значення медіани. Вертикальна пряма $x = M_e(X)$, яка проходить через точку з абсцисою, що дорівнює $M_e(X)$, геометрично ділить площу фігури під кривою розподілу на дві рівні частини (рис. 4.5).

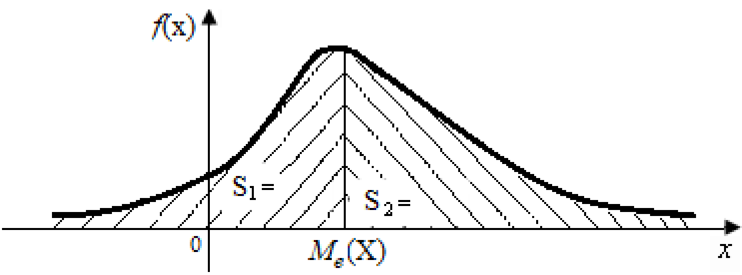


Рисунок 4.5

Геометрично медіана – це точка на осі Ox, для якої площі під графіком щільності розподілу, що лежать ліворуч і праворуч від неї, однакові і дорівнюють $0{,}5$.

<u>Зауваження 4.4</u>. Якщо щільність розподілу симетрична щодо прямої $x=a$ і розподіл одномодальний, то математичне сподівання, медіана і мода збігаються між собою.

6. <u>Початковий момент порядку</u> k <u>НВВ</u>

<u>Означення 4.29</u>. *Початковим моментом порядку* k неперервної випадкової величини X називається число ν_k, яке дорівнює математичному сподіванню випадкової величини X^k і обчислюється за формулою

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx\,. \tag{4.21}$$

Якщо $k=0$, то $\nu_0=1$, якщо $k=1$, то $\nu_1=M(X)$.

7. <u>Центральний момент порядку</u> k <u>НВВ</u>

<u>Означення 4.30</u>. *Центральним моментом порядку* k неперервної випадкової величини називається число μ_k, яке обчислюється за формулою:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^k f(x)dx \tag{4.22}$$

Якщо $k=0$, то $\mu_0=1$, якщо $k=1$, то $\mu_1=0$, якщо $k=2$, то $\mu_2=D(X)$.

Центральні моменти виражаються через початкові моменти за формулами:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^{\,2}, \qquad \mu_3=\nu_3-3\cdot\nu_1\cdot\nu_2+2\cdot\nu_1^{\,3},$$

$$\mu_4=\nu_4-4\cdot\nu_1\cdot\nu_3+6\cdot\nu_1^{\,2}\cdot\nu_2-3\cdot\nu_1^{\,4}.$$

Третій центральний момент служить для характеристики асиметрії розподілу.

***<u>Означення 4.31</u>*. *Коефіцієнтом асиметрії* випадкової величини називається величина

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Якщо розподіл симетричний щодо математичного сподівання, то $As = 0$.

Четвертий центральний момент характеризує крутість розподілу.

***<u>Означення 4.32</u>*. *Ексцесом випадкової величини* називається число

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Для нормального закону розподілу ексцес рівний нулю: $Es = 0$. Якщо ексцес додатний ($Es > 0$), то на графіку функція розподілу має гостру вершину, а для від'ємних значень ($Es < 0$) − більш пологу. В такий спосіб можна встановити відхилення заданого закону від нормального.

Приклад 76. Випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4{,}5x - 6, & x \in [2;4], \\ 0, & x \notin [2;4]. \end{cases}$$

Знайти параметр a, моду, медіану і математичне сподівання.

Розв'язання. Для знаходження параметра a використовуємо властивість щільності розподілу ймовірностей: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Обчислюємо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{2}^{4} (ax^2 + 4{,}5x - 6)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{9x^2}{4} - 6x\right)\Bigg|_2^4 = \frac{56a}{3} + 15.$$

Тоді, застосовуючи наведену формулу, отримаємо $\frac{56a}{3}+15=1$, звідки $a=-0,75$.

Для знаходження моди M_0 знайдемо точки максимуму функції $f(x)$. Для $x\in[2;4]$ маємо $f'(x)=2ax+4,5=-1,5x+4,5$. Похідна $f'(x)=0$ лише при $x=3$. Так як знак $f'(x)$ змінюється з "+" на "–" при переході через точку $x=3$, то $x=3$ − точка максимуму. Тому мода $M_0=3$.

Щоб знайти медіану M_e, розв'яжемо рівняння $P(X<t)=0,5$. Для цього попередньо обчислимо ймовірність $P(X<t)$:

$$P(X<t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx=\int_{2}^{t}\left(-0,75x^2+4,5x-6\right)dx=$$

$$=(-0,25x^3+2,25x^2-6x)\Big|_2^t=-0,25t^3+2,25t^2-6t+5.$$

Отримаємо рівняння для визначення t:

$$-0,25t^3+2,25t^2-6t+5=0,5\Rightarrow t^3-9t^2+24t-18=0.$$

Методом підбору знайдемо корінь рівняння $t=3$. Тоді рівняння можна представити у вигляді $(t-3)\cdot\left(t^2-6t+6\right)=0$. Квадратний тричлен t^2-6t+6 не має дійсних коренів у проміжку $[2;4]$. Тому вихідне рівняння має єдиний корінь $t=3$ на цьому проміжку. Тоді медіана $M_e=3$.

Математичне сподівання знаходимо за формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{2}^{4} x\left(-0,75x^2+4,5x-6\right)dx=\left(-\frac{3x^4}{16}+1,5x^3-\right.$$

$$\left.-3x^2\right)\Big|_2^4=3.$$

Відповідь: $a=-0,75$, $M_0=3$, $M_e=3$, $M(X)=3$.

Приклад 77. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{x^3-8}{19}, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти: а) $f(x)$, б) $P(2,5<X<3)$, в) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M_0(X)$, $M_e(X)$.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу ймовірностей $f(x)$.

а) $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{3x^2}{19}, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

б) $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$:

$$P(2,5<X<3)=\int\limits_{2,5}^{3}\frac{3x^2}{19}dx=\frac{3}{19}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{2,5}^{3}=\frac{1}{19}\left(3^3-2,5^3\right)=0,599.$$

в) $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$:

$$M(X)=\int\limits_{2}^{3} x\cdot\frac{3x^2}{19}dx=\frac{3}{19}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{2}^{3}=\frac{3}{76}\left(3^4-2^4\right)=\frac{3}{76}(81-16)=2,566.$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(M(X)\right)^2:$$

$$D(X)=\int\limits_{2}^{3} x^2\cdot\frac{3x^2}{19}dx-2,566^2=\frac{3}{19}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{2}^{3}-2,566^2=0,079.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,079}\approx 0,28.$$

Враховуючи, що $f(M_0)=\max f(x)$, функція $f(x)$ досягає максимуму при $x=3$. Тому $M_0(X)=3$. Медіану $M_e(X)$ знайдемо з умови $F(M_e(X))=\frac{1}{2}$. Маємо

$$\frac{(M_e(X))^3-8}{19}=\frac{1}{2} \Rightarrow (M_e(X))^3=\frac{35}{2}=17{,}5. \; M_e(X)=\sqrt[3]{17{,}5}\approx 2{,}596.$$

Відповідь: $P(2{,}5<X<3)=0{,}599$, $M(X)=2{,}566$, $D(X)=0{,}079$,
$\sigma(X)=0{,}28$; $M_0(X)=3$; $M_e(X)\approx 2{,}596$.

4.2.2 Закони розподілу неперервних випадкових величин

1. *Рівномірний розподіл*.

Означення 4.33. Розподіл імовірностей називається *рівномірним*, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення НВВ X, щільність розподілу ймовірностей зберігає постійне значення, а поза цим інтервалом вона дорівнює нулю.

Для рівномірно розподіленої випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a;b]$, щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 0, & x<a,\ x>b. \end{cases} \qquad (4.23)$$

При рівномірному розподілі графік щільності розподілу ймовірностей має вигляд (рис.4.6):

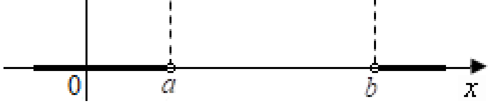


Рисунок 4.6

Функція розподілу $F(x)$ рівномірно розподіленої НВВ X :

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \qquad (4.24)$$

Графік функції розподілу рівномірно розподіленої НВВ X має вигляд (рис.4.7):

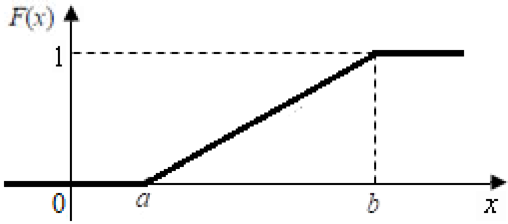


Рисунок 4.7

Числові характеристики рівномірно розподіленої НВВ X :

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (4.25)$$

Для рівномірного розподілу не можна вказати моду, оскільки всі ймовірності набувають однакових значень.

Імовірність попадання випадкової величини X на будь-який інтервал, наприклад, інтервал $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ обчислюється за формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (4.26)$$

Випадкові величини з рівномірним розподілом зустрічаються у тих випадках, коли за умовами експерименту випадкова величина X

набуває значень у кінцевому проміжку $\left[a;b\right]$, причому всі значення рівноймовірні.

Приклад 78. Інтервал руху автобуса дорівнює 15 хвилинам. Яка ймовірність того, що пасажир на зупинці буде чекати автобус не більше 5 хвилин?

Розв'язання.. Випадкова величина X − це час очікування автобуса, має рівномірний розподіл на відрізку $\left[0;15\right]$. Її функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{15}, & 0\le x\le 15,.\\ 1, & x>15.\end{cases}$$

Імовірність того, що пасажир на зупинці буде чекати автобус не більше 5 хвилин:

$$P\left(0<X<5\right)=F\left(5\right)-F\left(0\right)=\frac{5}{15}-\frac{0}{15}=\frac{1}{3} \text{ або } P\left(0<X<5\right)=\frac{5-0}{15-0}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $P\left(0<X<5\right)=\dfrac{1}{3}$.

Приклад 79. Неперервна ВВ X має рівномірний розподіл і задана щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[\gamma;\ 2{,}4],\\ 0, & x\notin[\gamma;\ 2{,}4].\end{cases}$$

Знайти: а) параметр γ, б) функцію розподілу $F\left(x\right)$, в) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$, г) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F\left(x\right)$, д) $P\left(1{,}5<X<2\right)$.

Розв'язання. а) Визначимо параметр γ. Відомо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)d\,x=1 \Rightarrow \int_{\gamma}^{2,4} 1\cdot dx=1,\ x\Big|_{\gamma}^{2,4}=1,\ \ 2{,}4-\gamma=1 \Rightarrow \gamma=1{,}4.$$

Тоді $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,4;\ 2,4], \\ 0, & x \notin [1,4;\ 2,4]. \end{cases}$

б) Функція розподілу $F(x)$ визначається формулою (4.16).

Якщо $x < 1,4$, то $f(x) = 0$ і $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$.

Якщо $1,4 \le x \le 2,4$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1,4} 0 \cdot dt + \int\limits_{1,4}^{x} 1 \cdot dt = 0 + t\Big|_{1,4}^{x} = x - 1,4$.

Якщо $x > 2,4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1,4} 0 \cdot dt + \int\limits_{1,4}^{2,4} 1 \cdot dt + \int\limits_{2,4}^{x} 0 \cdot dt = 0 + t\Big|_{1,4}^{2,4} + 0 = 2,4 - 1,4 = 1.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1,4; \\ x - 1,4, & 1,4 \le x \le 2,4; \\ 1, & x > 2,4. \end{cases}$$

в) Числові характеристики НВВ X:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int\limits_{1,4}^{2,4} x \cdot 1\, dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{1,4}^{2,4} = \frac{2,4^2 - 1,4^2}{2} = \frac{3,8}{2} = 1,9$$

або $M(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1,4 + 2,4}{2} = \dfrac{3,8}{2} = 1,9$.

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(M(X)\right)^2 = \int\limits_{1,4}^{2,4} x^2\, dx - (1,9)^2 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{1,4}^{2,4} - 3,61 =$$

$$= (2,4^3 - 1,4^3)/3 - 3,61 \approx 3,6933 - 3,61 = 0,08333$$

або $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{(2,4 - 1,4)^2}{12} = \dfrac{1}{12} \approx 0,0833$.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}08333} \approx 0{,}2887$

або $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2{,}4-1{,}4}{2\sqrt{3}} \approx \dfrac{1}{2\cdot 1{,}7321} = \dfrac{1}{3{,}4642} \approx 0{,}2887$.

г) графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ мають вигляд:

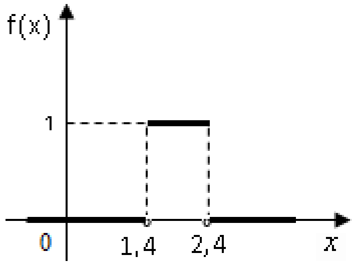


Рисунок 4.8

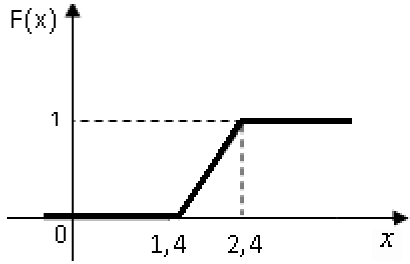


Рисунок 4.9

д) Імовірність $P(1{,}5 < X < 2)$ знайдемо за формулою (4.26):

$$P(1{,}5 < X < 2) = \frac{2-1{,}5}{2{,}4-1{,}4} = 0{,}5.$$

Відповідь: а) $\gamma = 1{,}4$; в) $M(X) = 1{,}9$; $D(X) = 0{,}08333$; $\sigma(X) = 0{,}2887$;
д) $P(1{,}5 < X < 2) = 0{,}5$.

2. *<u>Показниковий (експоненціальний) розподіл</u>*.

<u>Означення 4.34</u>. НВВ X має *показниковий* (*експоненціальний*) закон розподілу з параметром λ, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Функція розподілу НВВ X, розподіленої за показниковим законом, має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}. \qquad (4.28)$$

Графіки щільність розподілу $f(x)$ і функції розподілу $F(x)$ мають вигляд:

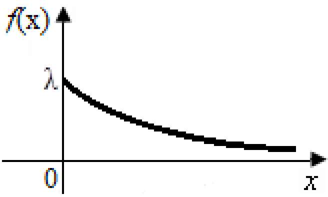


Рисунок 4.10

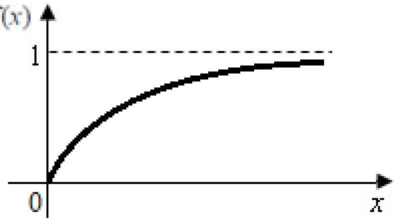


Рисунок 4.11

Числові характеристики НВВ X, розподіленої за показниковим законом:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (4.29)$$

Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(a;b)$ обчислюється за формулою:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \qquad (4.30)$$

Показниковий розподіл широко застосовується в теорії надійності, одним з основних понять якої є функція надійності. Також закон показникового розподілу використовують у системах масового обслуговування.

Прикладом неперервної випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, може бути час між появою двох послідовних подій найпростішого потоку.

Припустимо, деякий пристрій починає працювати в момент часу T_0. Нехай через деякий час T відбулася відмова в його роботі. Позначимо T неперервну довільну величину – тривалість безвідмовної роботи пристрою.

Імовірність відмови роботи пристрою протягом деякого часу тривалістю t визначається функцією розподілу $F(t)=P(T<t)$.

Тоді ймовірність протилежної події (безвідмовна робота пристрою протягом часу t) дорівнює

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t). \qquad (4.31)$$

<u>Означення 4.35</u>. *Функцією надійності* $R(t)$ називають функцію, що визначає можливість безвідмовної роботи пристрою протягом часу t.

Тривалість безвідмовної роботи пристрою – випадкова величина, що відповідає показниковому закону розподілу НВВ:

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},$$

де λ – інтенсивність відмов, тобто, середня кількість відмов на одиницю часу.

Взагалі кажучи, якщо розглядати новий пристрій, то ймовірність відмови на початку його функціонування буде вищою, потім кількість відмов знизиться і деякий час матиме практично те саме значення. Потім (коли пристрій виробить свій ресурс) кількість відмов зростатиме.

Іншими словами, можна сказати, що функціонування пристрою протягом усього існування (у сенсі кількості відмов) можна описати комбінацією двох показникових законів (на початку та наприкінці функціонування) та рівномірного закону розподілу.

Тому функція надійності набуває вигляду:

$$R(t)=1-F(t)=1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)=e^{-\lambda t}. \qquad (4.32)$$

<u>Означення 4.36</u> Функцію надійності, задану залежністю $R(t)=e^{-\lambda t}$, називають *показниковим законом надійності* і використовують для обчислення ймовірності безвідмовної роботи пристрою за час t.

Основна властивість показникового закону надійності полягає в тому, що ймовірність безвідмовної роботи пристрою на інтервалі часу t не залежить від часу попередньої роботи до початку розглянутого інтервалу, а залежить лише від тривалості часу t при відомій інтенсивності відмов λ.

Таким чином, умовна ймовірність безвідмовної роботи пристрою на інтервалі часу t (за умови його безвідмовної роботи до цього часового інтервалу) дорівнює безумовній ймовірності, тобто минулий досвід роботи не враховується.

Оскільки подібну властивість має лише показниковий закон розподілу, то цей факт дозволяє визначити, чи є закон розподілу випадкової величини показниковим чи ні.

Приклад 79. Встановлено, що час T горіння електричної лампочки є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом. Вважаючи, що середнє значення цієї величини дорівнює 6 місяцям, знайти ймовірність того, що лампочка буде горіти протягом року.

Розв'язання. За формулами (4.29) матимемо $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}=6$, $\lambda=\dfrac{1}{6}$.

Тому, $P(T>12)=P(12<T<\infty)=e^{-\frac{12}{6}}-e^{-\infty}=e^{-2}\approx 0{,}1353$.

Відповідь: $P(T>12)=0{,}1353$.

Приклад 80. Програміст при написанні своїх програм знайшов 9 помилок і переконався, що час (у днях) до знаходження наступної помилки підпорядковується показниковому розподілу з $\lambda=0{,}24$. Знайти: а) середній час, витрачений на знаходження першої помилки; б) ймовірність того, що для знаходження першої помилки знадобиться понад 4 дні; в) ймовірність того, що на знаходження десятої помилки потрібно від 5 до 11 днів.

Розв'язання. а) За формулами (4.29) знайдемо середній час, витрачений на знаходження першої помилки, матимемо

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}24}\approx 4{,}17\,.$$

б) Імовірність того, що для знаходження першої помилки знадобиться понад 4 дні, знайдемо за формулою (4.32).

$$P(T>4)=1-F(4)=e^{-0{,}24\cdot 4}=e^{-0{,}96}\approx 0{,}3829\,.$$

в) Імовірність того, що на знаходження одинадцятої помилки потрібно від 5 до 11 днів, знайдемо за формулою (4.30).

$$P(5<X<11)=e^{-0{,}24\cdot 5}-e^{-0{,}24\cdot 11}=e^{-1{,}2}-e^{-2{,}64}\approx 0{,}3012-0{,}0714=0{,}2298.$$

Відповідь: а) $M(X)\approx 4{,}17$; б) $P(T>4)\approx 0{,}3829$;

в) $P(5<X<11)\approx 0{,}2298$.

3. <u>*Нормальний розподіл*</u>

Нормальний закон розподілу займає центральне місце в теорії ймовірностей. Це зумовлено тим, що цей закон проявляється у всіх випадках, коли випадкова величина є результатом дії великої кількості різних факторів. За допомогою нормального розподілу можна описати щільність імовірності неперервних випадкових величин у тих випадках, коли відхилення від середньої випадкової величини з'являються за рахунок різних явищ, що впливають незалежно одне від одного, але приблизно з однаковою мірою, причому чим більше підсумовується цих випадкових величин, тим результат точніше. Всі ці явища не залежать одне від одного, але, впливаючи на процес виготовлення приблизно з однаковою силою, зумовлюють те, що закон, за яким змінюється неперервна випадкова величина, описується нормальним розподілом. Випадкова величина з нормальним розподілом існує в інтервалі (-∞; ∞) та описується законами:

<u>Означення 4.37</u>. НВВ X має *нормальний розподіл* (*розподіл Гаусса*), якщо її функція щільності розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,, \qquad (4.33)$$

де $a=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$ – параметри розподілу.

Властивості функції $f(x)$:

а) $f(x)>0$,

б) крива симетрична щодо прямої $x=a$; максимум досягається при $x=a$ і рівний $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$,

в) при $x\to\pm\infty$ крива наближається до осі Ox,

г) крива вгнута при $x\in(-\infty;a-\sigma)\cup(a+\sigma;+\infty)$ і опукла при $x\in(a-\sigma;a+\sigma)$,

д) величини параметрів нормального розподілу НВВ X безпосередньо впливають на форму кривої $f(x)$: зростання математичного сподівання a приводить до зсуву нормальної кривої вздовж осі Ox вправо, спадання – до зсуву вліво без змін форми. Зі зростанням σ нормальна крива стає більш пологою, тобто максимум функції спадає, а при зменшенні σ нормальна крива стає більш гостровершинною, тобто максимум функції зростає.

Графік функції $f(x)$ називають *нормальною кривою* або *кривою Гаусса* (рис. 4.12).

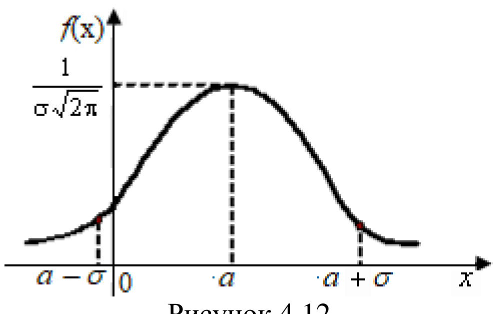


Рисунок 4.12

Функція нормального розподілу має вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx \qquad (4.34)$$

Графік функції розподілу нормально розподіленої НВВ X має вигляд (рис. 4.13):

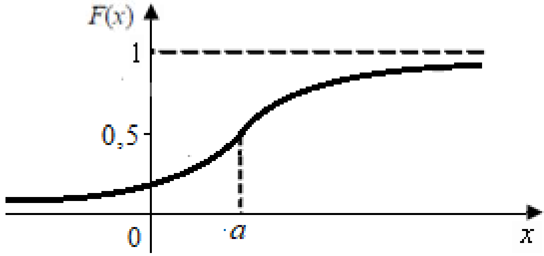


Рисунок 4.13

Числові характеристики НВВ X, розподіленої за нормальним законом:

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2, \qquad (4.35)$$

де σ – середнє квадратичне відхилення.

Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X на відрізок $[\alpha;\beta]$ визначається за формулою:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (4.36)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, значення якої знаходять за Таблицею А.2 (див. Додаток А) .

Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал, симетричний щодо математичного сподівання, визначається формулою:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (4.37)$$

«**Правило трьох сигм**»: якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a, σ^2, то практично достовірно, що її значення знаходяться в інтервалі $(a-3\sigma; a+3\sigma)$, тобто нормально розподілена НВВ X відхиляється від свого математичного сподівання a, як правило, менш ніж на 3σ. (Слова «як правило» означають, що лише в 0,27% випадках відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання може перевищити 3σ). Якщо, зокрема, $\delta = 3\sigma$, то $P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Побудуємо графік $f(x)$ при $a=0$ і трьох можливих значеннях середнього квадратичного відхилення $\sigma = 0{,}5$, $\sigma = 1$ і $\sigma = 2$ (рис. 4.14).

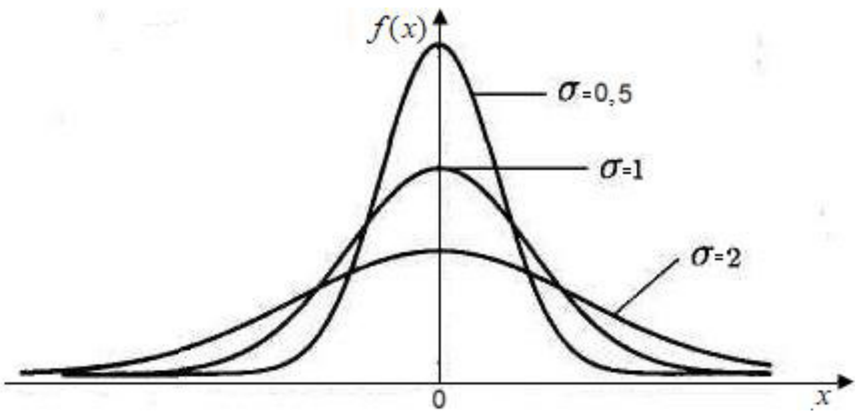


Рисунок 4.14

Як бачимо, при збільшенні значення середнього квадратичного відхилення графік стає більш пологим, а максимальне значення зменшується.

Означення 4.38. *Нормованим законом нормального розподілу* називають нормальний розподіл з параметрами: $a=0$ і $\sigma=1$.

Для нормованого нормального розподілу функція щільності розподілу ймовірностей і функція розподілу відповідно рівні:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ і } F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \qquad (4.38)$$

де $F_0(x)=0{,}5+\Phi(x)$, $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа, значення якої знаходять за Таблицею А.2 (див. Додаток А).

Приклад 81. Довжина деталі є нормально розподіленою випадковою величиною X з математичним сподіванням 40 мм і середнім квадратичним відхиленням 3 мм. Знайти: а) ймовірність того, що довжина довільно взятої деталі буде більше 34 мм і менше 43 мм; б) ймовірність того, що довжина деталі відхилиться від її математичного сподівання не більше ніж на 1,5 мм.

Розв'язання. а) Нехай випадкова величина X – довжина деталі. За умовою задачі, вона нормально розподілена. Якщо її функція щільності розподілу ймовірностей $f(x)$, то ймовірність того, що X набуде значень, які належать $[\alpha;\beta]$, визначається за формулою:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Імовірність виконання строгих нерівностей $\alpha<X<\beta$ визначається тією ж формулою. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Тому

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $a=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

За умовою задачі $a=40$, $\sigma=3$, $\alpha=34$, $\beta=43$. Тоді

$$P(34<X<43)=\Phi\left(\frac{43-40}{3}\right)-\Phi\left(\frac{34-40}{3}\right)=\Phi(1)-\Phi(-2)=\Phi(1)+\Phi(2)$$

За Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо: $\Phi(2)=0{,}4772$, $\Phi(1)=0{,}3413$. $P(34<X<43)=0{,}8185$.

б) За умовою задачі $a-\delta<X<a+\delta$, де $a=40$; $\delta=1{,}5$. Підставимо $\alpha=a-\delta$ та $\beta=a+\delta$. Маємо за формулою (4.37), а саме,

$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$. Тому

$$P(|X-40|<1{,}5)=2\Phi\left(\frac{1{,}5}{3}\right)=2\Phi(0{,}5).$$

За Таблицею А.2 (див. Додаток А) знаходимо: $\Phi(0{,}5)=0{,}1915$.

Тоді $P(|X-40|<1{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383$.

Відповідь: а) $P(34<X<43)=0{,}8185$; б) $P(|X-40|<1{,}5)=0{,}383$.

Приклад 82. Функція щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ нормально розподіленої ВВ X має вигляд: $f(x)=\gamma\, e^{-3x^2-3x+2}$. Визначити: а) числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) параметр γ; в) функцію розподілу $F(x)$; г) записати функцію щільності розподілу ймовірностей в стандартному вигляді і побудувати її графік; д) знайти $P(-0{,}5<X<1{,}5)$.

Розв'язання. а) НВВ X розподілена нормально, якщо функція щільності розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де $a=M(X)$ – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення. Виділимо повний квадрат у квадратному тричленні:

$$-3x^2-3x+2=-(3x^2+3x-2)=-3\left(x^2+x-\frac{2}{3}\right)=-3\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=-3\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{12}\right)=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}.$$

Записуємо $f(x)$ у вигляді:

$$f(x)=\gamma\, e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\gamma\, e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot e^{\frac{11}{4}}=\gamma\, e^{\frac{11}{4}}\cdot e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{1/3}}.$$

Отже, $M(X)=a=-\frac{1}{2}=-0{,}5$, а $2\sigma^2=\frac{1}{3}\Rightarrow D(X)=\sigma^2=\frac{1}{6}$, $\sigma=0{,}4082$.

б) Знайдемо параметр γ :

$$\gamma\cdot e^{\frac{11}{4}}=\frac{1}{0{,}4082\cdot\sqrt{2\pi}}\quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{1}{e^{\frac{11}{4}}\cdot 0{,}4082\cdot\sqrt{2\pi}}\approx\frac{1}{16{,}0056}\approx 0{,}0625 .$$

в) Функція розподілу $F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x+0{,}5}{0{,}4082}\right)$.

г) Функція щільності розподілу ймовірностей в стандартному вигляді:

$$f(x)=0{,}978\cdot e^{-\frac{(x+0{,}5)^2}{0{,}33}} .$$

Графік функції щільності розподілу ймовірностей цієї випадкової величини

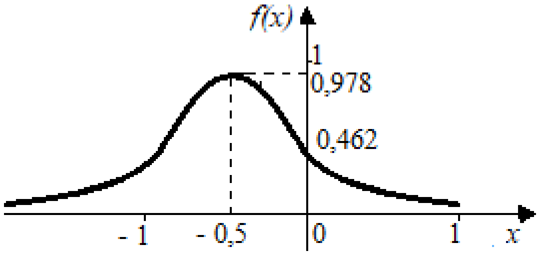


Рисунок 4.15

д) $P(-0{,}5<X<1{,}5)=\Phi\left(\frac{1{,}5+0{,}5}{0{,}4082}\right)-\Phi\left(\frac{-0{,}5+0{,}5}{0{,}4082}\right)=$

$$=\Phi(4{,}8996)-\Phi(0)=0{,}499997-0=0{,}499997 .$$

Відповідь: а) $M(X)=-\frac{1}{2}$, $D(X)=\frac{1}{6}$, $\sigma=0{,}4082$; б) $\gamma=0{,}0625$;

в) $F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x+0{,}5}{0{,}4082}\right)$; д) $P(-0{,}5<X<1{,}5)=0{,}499997$.

4.3 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. Імовірність того, що стрілець влучить у мішень, дорівнює $p = 0{,}7$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості влучень після двох пострілів.	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & 0 & 1 & 2 \\ \hline p & 0{,}09 & 0{,}42 & 0{,}49 \\ \hline \end{array}$
2. Випадкова величина X задана законом розподілу $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & -1 & 0 & x_3 & 5 \\ \hline p & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ \hline \end{array}$ Знайти x_3, якщо математичне сподівання $M(X) = 1{,}9$.	$x_3 = 2$.
3. Система бронювання та продажу авіаційних білетів має 1000 периферійних пультів. Імовірність надходження запиту з кожного пульта на протязі однієї хвилини дорівнює $0{,}002$. Знайти середню кількість запитів	$M(X) = 2$.
4. У білеті три завдання. Імовірність правильного розв'язання першого завдання дорівнює $0{,}9$; другого – $0{,}8$; третього – $0{,}7$. Знайти математичне сподівання та дисперсію закону розподілу числа правильно розв'язаних завдань у білеті.	$M(X) = 2{,}4$; $D(X) = 0{,}46$.
5. Серед 1000 лотерейних квитків один квиток виграє 1000 грн., десять квитків – по 500 грн., сто квитків – по 50 грн. Нехай X – величина виграшу, що відповідає одному купленому квитку. Знайти середній виграш, який припадає на один лотерейний квиток.	11 грн.
6. Середня кількість автомобілів, що проходять митний огляд протягом години, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що: а) за 2 години пройдуть огляд від 7 до 10 автомобілів; б) за півгодини встигне пройти огляд лише 1 автомобіль.	а) $\approx 0{,}1438$; б) $\approx 0{,}9526$.

Завдання	Відповідь
7. У розважальному центрі працівник обслуговує чотири доріжки для боулінгу. Імовірність того, що якась доріжка потребує прибирання протягом зміни, є постійною величиною з ймовірністю 85%. Склавши закон розподілу ймовірностей ДВВ X – кількість доріжок, які потребують прибирання, знайти середнє квадратичне відхилення і моду.	$\sigma(X) = 3{,}1177$; $M_0(X) = 4$.
8. Випадкова величина задана функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ x^2 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$ Знайти: а) $f(x)$; б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) $P(0{,}5 < X < 1)$.	а) $f(x) = \{\ 0\ при\ x \le 0\quad і$ $при\ x > 1\ ;\ 2x\ при$ $0 < x \le 1\ \}$; б) $M(X) = 0{,}6667$; $D(X) = 0{,}0556$; $\sigma(X) = 0{,}2358$; в) $P(0{,}5 < X < 1) = 0{,}75$.
9. Ціна поділу шкали вольтметра $0{,}2\,\mathrm{W}$. Показання вольтметра округляють до найближчого цілого поділу. Припускаючи, що випадкова величина X є помилка округлення, яка рівномірно розподілена між цілими показаннями шкали вольтметра, знайти ймовірність того, що допущена помилка перевищить $0{,}04\,\mathrm{W}$.	$0{,}6$.
10. Довжина X деякої деталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом розподілу, і має середнє значення $20\,мм$ і середнє квадратичне відхилення – $0{,}2\,мм$. Яким має бути задане відхилення, щоб відсоток деталей, відхилення яких від середнього не перевищує заданого, підвищився до 54%.	$0{,}148$.

Завдання	Відповідь
11. Встановлено, що час ремонту ноутбука є випадковою величиною X, розподіленою за показниковим законом. Визначити ймовірність того, що на ремонт ноутбука потрібно щонайменше 15 днів, якщо середній час ремонту ноутбука становить 12 днів.	$\approx 0{,}2865$.
12. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = 10$ та дисперсією $D(X) = 4$. Знайти ймовірність попадання цієї випадкової величини на інтервал $(12;\ 14)$.	$P(12 < X < 14) = 0{,}1359$.

5 Функції одного випадкового аргументу

Часто при розв'язуванні багатьох прикладних задач потрібно розглядати невипадкові функції однієї чи кількох випадкових величин (випадкових аргументів). Щоб визначати їх закони розподілу, треба знати не тільки функціональну залежність, а й закони розподілу випадкових аргументів.

Також велике місце посідають задачі, що вимагають знаходження законів розподілу та числових характеристик випадкових величин.

Зазвичай в інженерних додатках завдання ставиться так: вхід пристрою піддається випадковому впливу X. Пристрій трансформує цей вплив деяким функціональним перетворенню φ, результатом якого є випадкова величина $Y = \varphi(X)$. При відомому законі розподілу ВВ X (або лише її числових характеристик) потрібно визначити закон розподілу (або лише числові характеристики) ВВ Y.

У більш складному випадку вхід піддається не одному, а декільком впливам $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, а на виході знімається кілька величин $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ (у загальному випадку $k \neq n$). Потрібно, знаючи закон розподілу чи лише числові характеристики системи $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, знайти закон розподілу чи лише числові характеристики системи $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.

<u>Означення 5.1</u>. Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає єдине можливе значення випадкової величини Y, то Y називають *функцією випадкового аргументу* X і позначають $Y=\varphi(X)$.

Якщо випадкова величина X – дискретна, то випадкова величина $Y=\varphi(X)$ також є дискретною. Функцію φ будемо припускати неперервною.

Випадкова величина $Y=\varphi(X)$ є неперервною, якщо X – неперервна випадкова величина. У цьому випадку припускатимемо, що функція φ ще й диференційована.

Якщо Y – дискретна випадкова величина, то закон її розподілу може бути заданий рядом розподілу, якщо відомий ряд розподілу дискретного випадкового аргументу X.

Якщо випадкова величина Y – неперервна, то її закон розподілу задається функцією розподілу $G(y)$ або щільністю розподілу $g(y)$. Функції $G(y)$ і $g(y)$ можна знайти, якщо відомий закон розподілу випадкової величини X, тобто якщо відома функція розподілу $F(x)$ або щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X.

Нехай X – дискретна випадкова величина. Тоді можливі значення функції Y знаходяться з рівності $y_i=\varphi(x_i)$ з імовірностями $p_i=P(X=x_i)$, де x_i – множина можливих значень ВВ X.

Для знаходження функції розподілу $G(y)$ застосовуємо співвідношення:

$$G(y)=P(Y<y)=\sum_{\substack{i \\ \varphi(x_i)<y}} p_i .$$

Для функції $G(y)$ виконуються всі властивості функції розподілу випадкових величин. Якщо складено ряд розподілу дискретної випадкової величини Y, то її функція розподілу і всі основні числові характеристики знаходяться за загальними правилами для всіх дискретних випадкових величин.

Складемо ряд розподілу випадкової величини $Y=\varphi(X)$. Для цього необхідно знайти значення, яких набуває випадкова величина Y за формулою $y_i=\varphi(x_i)$, $\left(i=\overline{1,n}\right)$. При цьому ймовірності p_i, з якими випадкова величина Y набуває своїх значень, такі ж самі, як і відповідні ймовірності p_i, з якими випадкова величина X набуває своїх значень x_i, $\left(i=\overline{1,n}\right)$:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\ldots$	$\varphi(x_n)$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Об'єднавши в один стовпець усі однакові значення $\varphi(x_i)$ та приписавши стовпцю сумарну ймовірність, матимемо ряд розподілу випадкової величини Y :

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_{m}

Нехай X – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$.

Розглянемо спочатку випадкову величину $Y=\varphi(X)$, де $\varphi(x)$ – неперервна, строго монотонна та диференційована функція скалярного аргументу x. Тоді щільність розподілу ймовірностей $g(y)$ випадкова величина Y обчислюють за формулою:

$$g(y)=f(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|, \tag{5.1}$$

де $\psi(y)$ – обернена функція стосовно $\varphi(x)$.

Якщо $\varphi(x)$ – немонотонна функція на множені можливих значень X, то слід розбити цей проміжок на такі інтервали, в яких функція $\varphi(x)$ монотонна, і знайти щільності розподілів $g(y)_i$ для кожного з інтервалів монотонності, а потім $g(y)$ подати у вигляді суми

$$g(y)=\sum_i g(y)_i \ .$$

Зокрема, якщо функція $\varphi(x)$ монотонна у двох інтервалах, у яких відповідні обернені функції рівні $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$, то

$$g(y)=f(\psi_1(y))\cdot|\psi_1'(y)|+f(\psi_2(y))\cdot|\psi_2'(y)|\ . \qquad (5.2)$$

<u>Зауваження 5.1</u>. Лінійна функція випадкової величини $Y=aX+b$ не змінює виду розподілу випадкової величини.

Визначимо функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини Y. За означенням

$$G(y)=P(Y<y)=P(\varphi(x)<y)=P(X<\psi(y))=\int_{-\infty}^{\psi(y)}\varphi(x)dx\ ,$$

де $\psi(y)$ – обернена функція стосовно $\varphi(x)$.

Нехай $Y=\varphi(X)$ – монотонно зростаюча функція. Для виконання умови $Y<y$ необхідно і достатньо, щоб випадкова величина X належала проміжку осі абсцис від a до $x=\psi(y)$. Таким чином, функція розподілу Y для аргументу X, розподіленого в інтервалі $[a;b]$, визначається:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & y<\psi(a), \\ \int_a^{\psi(y)}\varphi(x)dx, & \psi(a)\le y\le\psi(b), \\ 1, & y>\psi(b). \end{cases} \qquad (5.3)$$

Нехай $Y=\varphi(X)$ – монотонно спадна функція. Для виконання умови $Y<y$ необхідно і достатньо, щоб випадкова величина X належала проміжку осі абсцис від $x=\psi(y)$ до b. Таким чином, функція розподілу Y для аргументу X, розподіленого в інтервалі $[a;b]$, визначається:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & y<\psi(b), \\ \int\limits_{\psi(y)}^{b}\varphi(x)dx, & \psi(b)\le y\le\psi(a), \\ 1, & y>\psi(a). \end{cases} \qquad (5.4)$$

Приклад 83. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
p	0,2	0,7	0,1

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=\sin^2 X$.

Розв'язання. Знайдемо значення, яких набуває випадкова величина за формулою $y_i=\varphi(x_i)$, $(i=1,2,3)$. Матимемо

$$y_1=\varphi(x_1)=\sin^2\frac{\pi}{6}=0,25;$$

$$y_2=\varphi(x_2)=\sin^2\frac{\pi}{4}=0,5;$$

$$y_3=\varphi(x_3)=\sin^2\frac{\pi}{3}=0,75.$$

Враховуючи, що випадкова величина X і випадкова величина Y набувають відповідних значень з тією ж самою ймовірністю, закон розподілу випадкової величині Y має вигляд:

Y	0,25	0,5	0,75
p	0,2	0,7	0,1

Приклад 84. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	-3	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$ та функцію розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язання. Знайдемо значення, яких набуває випадкова величина за формулою $y_i = \varphi(x_i)$, $(i = 1,2,3,4)$. Матимемо

$y_1 = \varphi(x_1) = (-3)^2 = 9$; $y_2 = \varphi(x_2) = (1)^2 = 1$;

$y_3 = \varphi(x_3) = (2)^2 = 4$; $y_4 = \varphi(x_4) = (3)^2 = 9$.

Отже, випадкова величина Y має три можливі значення: $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 9$. Імовірність можливого значення $y_3 = 9$ дорівнює сумі ймовірностей несумісних подій $X = -3$ та $X = 3$, тобто. $0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$. Тому ряд розподілу випадкової величини Y має вигляд:

Y	1	4	9
p	0,2	0,3	0,5

Складемо функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини $Y = X^2$:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ 0{,}2, & 1 < y \le 4, \\ 0{,}5, & 4 < y \le 5, \\ 1, & y > 5. \end{cases}$$

Приклад 85. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \sqrt{3}, \\ \dfrac{x^3 - 3x}{2}, & \sqrt{3} \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $Y = \dfrac{1}{X}$.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{x} < \sqrt{3},\\ \dfrac{3\left(x^2-1\right)}{2}, & \sqrt{3}\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

За умовою функція $\varphi(X)=\dfrac{1}{X}$. Тоді $\psi(y)=\dfrac{1}{y}$. Запишемо відповідні межі інтервалів:

$\sqrt{3}\le x\le 2:\ \sqrt{3}\le\dfrac{1}{y}\le 2\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{x}<\sqrt{3}:\ y>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x>2:\ y<\dfrac{1}{2}$.

Для знаходження щільності розподілу ймовірностей випадкової величини Y застосовуємо формулу (5.1). Знайдемо $f(\psi(y))=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)$, $\left|\psi'(y)\right|=\left|-\dfrac{1}{y^2}\right|=\dfrac{1}{y^2}$. Тоді матимемо $g(y)=f(\psi(y))\cdot\left|\psi'(y)\right|=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)\cdot\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{y^4}-\dfrac{1}{y^2}\right)$ для $\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ і $g(y)=0$ для $y>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ і $y<\dfrac{1}{2}$. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $Y=\dfrac{1}{X}$ має вигляд:

$$g(y)=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{y^4}-\dfrac{1}{y^2}\right), & \dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ 0, & y>\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

Приклад 86. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $(0;2\pi)$. Знайти функцію $g(y)$ щільності розподілу випадкової величини $Y=\cos X$.

Розв'язання. Запишемо функцію щільності розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини X за формулою (4.23):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & x\in(0;2\pi),\\ 0, & x\notin(0;2\pi).\end{cases}$$

За умовою $Y=\varphi(X)=\cos X$. Маємо $\varphi(x)=\cos x$. Знайдемо функцію $x=\psi(y)$ – обернену стосовно функції $\varphi(x)$. Оскільки в інтервалі $(0;2\pi)$ функція $y=\cos x$ немонотонна, то розіб'ємо цей інтервал на $(0;\pi)$ і $(\pi;2\pi)$, в яких ця функція монотонна. В інтервалі $(0;\pi)$ обернена функція $\psi_1(y)=\arccos y$, а в інтервалі $(\pi;2\pi)$ обернена функція $\psi_2(y)=2\pi-\arccos y$. Шукану функцію $g(y)$ щільності розподілу випадкової величини Y знайдемо за формулою (5.2).

Знайдемо похідні функцій $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$:

$$\psi_1'(y)=(\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \psi_2'(y)=(2\pi-\arccos y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

і їх модулі:

$$|\psi_1'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ |\psi_2'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Враховуючи, що $f(x)=\dfrac{1}{2\pi},\ \ x\in(0;2\pi)$, матимемо $f(\psi_1(y))=\dfrac{1}{2\pi}$ і $f(\psi_2(y))=\dfrac{1}{2\pi}$. Тоді $g(y)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ для $y\in(-1;1)$, а поза цим інтервалом $g(y)=0$.

Відповідь: $g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1;\ 1), \\ 0, & y \notin (-1;\ 1). \end{cases}$

5.1 Числові характеристики функцій одного випадкового аргументу

Нехай задана функція $Y = \varphi(X)$ випадкового аргументу X з відомим законом розподілу. Необхідно знайти числові характеристики цієї функції.

1. Якщо X – дискретна випадкова величина з можливими значеннями x_i, ймовірності які відповідно рівні p_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$, тобто ряд розподілу відомий, то відомо, що можливі значення випадкової величини $Y = \varphi(X)$ $y_i = \varphi(x_i)$ дорівнюють p_i.

Тоді <u>математичне сподівання</u> і <u>дисперсія</u> визначаються формулами:

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot p_i\ , \tag{5.5}$$

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - M(Y))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - M(Y))^2 \cdot p_i\ . \tag{5.6}$$

або

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i))^2 \cdot p_i - (M(Y))^2\ . \tag{5.7}$$

Початкові моменти k-го порядку і центральні моменти k-го порядку випадкової величини $Y = \varphi(X)$ визначаються відповідно формулами:

$$v_k = M\left(Y^k\right) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i))^k \cdot p_i\ , \tag{5.8}$$

$$\mu_k = M\left(\left(Y - M\left(Y\right)\right)^k\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi\left(x_i\right) - M\left(Y\right)\right)^k \cdot p_i \ , \tag{5.9}$$

<u>Зауваження 5.1</u>. Таким чином, для обчислення числових характеристик функції одновимірної випадкової величини X необов'язково знати закон розподілу випадкової величини $Y = \varphi(X)$, а достатньо знати закон розподілу випадкового аргументу X .

2. Якщо X – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$.

Для знаходження математичного сподівання випадкової величини $Y = \varphi(X)$ необхідно знайти щільність розподілу ймовірностей $g(y)$ випадкової величини Y і скористатися формулою:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, g(y) d\, y \tag{5.10}$$

або, не знаходячи щільність розподілу ймовірностей $g(y)$, застосувати формулу:

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) d\, x \ . \tag{5.11}$$

Для знаходження дисперсії випадкової величини $Y = \varphi(X)$ випадкового аргументу X застосовують формулу:

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M(Y))^2 f(x) d\, x \ . \tag{5.12}$$

або

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^2 f(x) d\, x - (M(Y))^2 . \tag{5.13}$$

Початкові моменти k-го порядку і центральні моменти k-го порядку випадкової величини $Y=\varphi(X)$ визначаються відповідно формулами:

$$v_k = M\left(Y^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^k f(x) dx\,, \tag{5.14}$$

$$\mu_k = M\left((Y-M(Y))^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M(Y))^k f(x) dx\,. \tag{5.15}$$

<u>Зауваження 5.2</u>. Якщо $\varphi(x)=x^k$, то математичне сподівання випадкової величини $Y=\varphi(X)$ є початковий момент k-го порядку, тобто $M(Y)=M\left(X^k\right)=v_k$. Аналогічно, якщо $\varphi(x)=(x-M(X))^k$, то математичне сподівання випадкової величини $Y=\varphi(X)$ є центральний момент k-го порядку, тобто $M(Y)=M\left((X-M(X))^k\right)=\mu_k$.

Приклад 87. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=X^2-3$, якщо випадкова величина X має закон розподілу

X	-3	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,15	0,3	0,2	0,15	0,1

Розв'язання. Оскільки X – дискретна випадкова величина, для знаходження математичного сподівання випадкової величини $\varphi(X)$ використовуємо формулу (5.5), а для дисперсії – (5.7). У нашому випадку $\varphi(x)=x^2-3$, тому знайдемо $y_i=\varphi(x_i)$:

$y_1=\varphi(x_1)=(-3)^2-3=6$; $y_2=\varphi(x_2)=(-1)^2-3=-2$;

$y_3=\varphi(x_3)=(0)^2-3=-3$; $y_4=\varphi(x_4)=(1)^2-3=-2$

$y_5=\varphi(x_5)=(2)^2-3=1$; $y_6=\varphi(x_6)=(3)^2-3=6$.

Можна скласти закон розподілу випадкової величини Y

Y	-3	-2	1	6
p	0,3	0,35	0,15	0,2

Тоді

$$M(Y)=M\left(\varphi(X)\right)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\cdot p_i=(-3)\cdot 0{,}3+(-2)\cdot 0{,}35+1\cdot 0{,}15+$$
$$+6\cdot 0{,}2=-0{,}25\,;$$

$$D(Y)=D\left(\varphi(X)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i)\right)^2\cdot p_i-\left(M(Y)\right)^2=(-3)^2\cdot 0{,}3+(-2)^2\cdot 0{,}35+$$
$$+1^2\cdot 0{,}15+6^2\cdot 0{,}2-(-0{,}25)^2=11{,}45-0{,}0625=11{,}3875\,.$$

Відповідь: $M(Y)=-0{,}25$; $D(Y)=11{,}3875$.

Приклад 88. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=2-3\sin X$, якщо щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X є $f(x)=0{,}5\cos x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Математичне сподівання знайдемо за формулою (5.11)

$$M(Y)=M\left(\varphi(X)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-3\sin x)\cdot 0{,}5\cos x\,dx=$$

$$=0{,}5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-3\sin x\cdot\cos x)\,dx=0{,}5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos x-\frac{3}{2}\sin 2x\right)dx=$$

$$=0{,}5\left(2\sin x+\frac{3}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0{,}5\cdot(2+2)=2\,.$$

Дисперсію знайдемо за формулою (5.13)

$$D(Y)=D(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x))^2 f(x)dx-(M(Y))^2=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-3\sin x)^2\cos x dx-$$

$$-4=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos x-12\sin x\cos x+9\sin^2 x\cos x\right)dx-4=\frac{1}{2}\left(4\sin x+\right.$$

$$\left.+3\cos 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x d\sin x-4=4+\frac{9}{2}\cdot\frac{\sin^3 x}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-4=3.$$

Відповідь: $M(Y)=2$, $D(Y)=3$.

5.2 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу X: 3, 6, 8; p: 0,2, 0,1, 0,7 Знайти закон розподілу ВВ $Y=2X+1$.	Y: 7, 13, 21; p: 0,2, 0,1, 0,7

Завдання 1, закон розподілу X:

X	3	6	8
p	0,2	0,1	0,7

Відповідь 1:

Y	7	13	21
p	0,2	0,1	0,7

Завдання	Відповідь
2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу (див. таблицю нижче). Знайти закон розподілу ВВ $Y=X^4-X^2$.	(див. таблицю нижче)
3. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності розподілу ймовірностей $f(x)=3e^{-3x}$, $x>0$. Знайти щільність розподілу ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y=2-3X$.	$g(y)=\begin{cases}e^{y-2}, & y\le 2,\\ 0, & y>2.\end{cases}$

Завдання 2, закон розподілу X:

X	-3	-1	0	3
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Відповідь 2:

Y	0	72
p	0,7	0,3

Завдання	Відповідь
4. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ Знайти щільність розподілу ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y=X^3$.	$g(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0,\\ \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, & 0<y\le 1,\\ 0, & y>1.\end{cases}$
5. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності розподілу ймовірностей $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\in[0;1),\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ Знайти щільність розподілу ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y=-\ln X$.	$g(y)=3e^{-3y},\quad y>0$
6. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу <table><tr><td>X</td><td>-3</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,2</td></tr></table>Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=2X-3$.	$M(Y)=-2{,}6$; $D(Y)=9{,}44$
7. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності розподілу ймовірностей $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$ Знайти математичне сподівання випадкової величини $Y=X^2$	$M(Y)=\pi-2$.

6 Закон великих чисел

На практиці часто розглядають ВВ, які є, в свою чергу, сумами великої кількості випадкових величин. Обчислення безпосередньо ймовірностей розподілу має певні труднощі. Однак при дуже великій кількості випадкових явищ середній їх результат практично не є випадковим і може бути передбачений з великою мірою певності. Наприклад, якщо в кожному випробуванні ВВ X набуває деякого значення, то при зростанні $n \to \infty$ середнє арифметичне спостережених значень ВВ X стає стійким (збігається) до математичного сподівання ВВ X.

Закон великих чисел, що займає найважливіше місце в теорії ймовірностей, є сполучною ланкою між теорією ймовірностей як математичною наукою та закономірностями випадкових явищ при масових спостереженнях над ними.

Він дозволяє теоретично обґрунтувати стійкість, тобто практично – невипадковість основних емпіричних характеристик випадкових величин: вибіркових математичного сподівання та дисперсії, асиметрії, ексцесу, вибіркову функцію розподілу тощо.

Під законом великих чисел розуміють узагальнену назву групи теорем, які стверджують, що при необмеженому збільшенні числа випробувань середні величини збігаються до деяких сталих. Найбільш узагальненою з цих теорем є теорема Чебишова, яку ще називають законом великих чисел.

Теорема 6.1 (*теорема Чебишова*). Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – послідовність попарно незалежних ВВ з математичними сподіваннями $M(X_i)$ і дисперсіями $D(X_i)$, які обмежені однією і тією ж постійною: $D(X_i) \le C$, то для достатньо великого n і для довільного малого $\varepsilon > 0$, справедливо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (6.1)$$

Таким чином, теорема Чебишова стверджує, що якщо розглядається досить велика кількість незалежних випадкових величин, що мають обмежені дисперсії, то майже достовірною можна вважати подію, яка полягає в тому, що відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде за абсолютною величиною як завгодно малим.

На теоремі Чебишова заснований широко застосовуваний у статистиці вибірковий метод, суть якого полягає в тому, що за порівняно невеликою випадковою вибіркою судять про всю сукупність (генеральну сукупність) об'єктів, що досліджуються.

Прийнято говорити, що послідовність ВВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ підпорядковується закону великих чисел.

При доведенні теореми Чебишова використовують таку оцінку

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}\,. \qquad (6.2)$$

У теоремі Чебишова випадкові величини мають різні математичні сподівання. Буває, що випадкові величини мають однакові математичні сподівання a. Очевидно, якщо припустити, що дисперсії цих величин обмежені, то може бути застосована теорема Чебишова для окремого випадку.

Наслідок. Якщо ВВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно незалежні, мають одне й те саме математичне сподівання $M(X_i) = a$ і дисперсії цих ВВ $D(X_i)$ рівномірно обмежені однією і тією ж постійною $D(X) = \sigma^2$, то для достатньо великого n і для довільного малого $\varepsilon > 0$, справедливо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (6.3)$$

або

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}\,. \qquad (6.4)$$

Розглянемо послідовність ВВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$, яка збігається за ймовірністю до ВВ X, якщо для будь–якого $\varepsilon > 0$ ймовірність нерівності $|X_n - X| < \varepsilon$ при $n \to \infty$ прямує до одиниці.

Нехай ВВ X має скінчену дисперсію $D(X)$ і математичне сподівання $M(X)$. Тоді за будь–якого $\varepsilon > 0$ справедливі такі твердження.

<u>Лема 6.1</u> (*нерівність Маркова*). Якщо випадкова величина X невід'ємна ($X \geq 0$) і $M(X) < \infty$, то

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}. \tag{6.5}$$

Нерівність Маркова дає ймовірнісну оцінку того, що значення невід'ємної випадкової величини перевершить деяку константу через відоме математичне сподівання. Якщо ніяких інших даних про розподіл немає, нерівність дає деяку інформацію, хоча часто оцінка груба чи тривіальна.

Наслідок. Оскільки події $X > \varepsilon$ і $X \leq \varepsilon$ протилежні, то нерівність Маркова матиме вигляд

$$P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}. \tag{6.6}$$

Якщо відомі як математичне сподівання $M(X)$ так і дисперсія $D(X)$ для ВВ (і вони скінчені), можна застосовувати нерівність Чебишова, яка показує, що ВВ набуває значень близьких до середнього (математичного сподівання) і дає оцінку ймовірності великих відхилень.

<u>Лема 6.2</u> (*нерівність Чебишова*). Імовірність того, що відхилення ВВ X від її математичного сподівання (середнього значення) за абсолютною величиною менше додатного числа ε, не менше, ніж $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (6.7)$$

Нерівність Чебишова застосовується для теоретичних досліджень. Нерівність Чебишова корисна лише при відносно великих ε, оскільки при малих ε дає грубі оцінки або тривіальний результат.

Наслідок. Імовірність того, що відхилення ВВ X від її математичного сподівання за абсолютною величиною не менше додатного числа ε, не більше, ніж $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|>\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (6.8)$$

Нерівність Чебишова застосовується до будь-яких випадкових величин. У формулі (6.8) вона встановлює верхню межу, а у формулі (6.7) – нижню межу ймовірності події, що розглядається.

Статистична стійкість відносної частоти появи успіху у серії незалежних випробувань доводиться в теоремі Бернуллі:

Теорема 6.2 (*теорема Бернуллі*). Якщо ймовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань постійна і дорівнює p, то для довільного будь- якого малого $\varepsilon>0$ справедлива гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1, \qquad (6.9)$$

де m – число успіхів у серії з n випробувань.

Теорема Бернуллі встановлює зв'язок між імовірністю появи події та її відносною частотою появи і дозволяє передбачити, якою буде приблизно ця частота в n випробуваннях. З теореми Бернуллі видно, що відносна частота $\frac{m}{n}$ має властивість стійкості при необмеженому зростанні числа випробувань $(n \to \infty)$. У зв'язку з цим практично замість ймовірності зазвичай використовують відносну частоту. Зазначимо, що зв'язок між відносною частотою та ймовірністю пов'язує теорію ймовірностей та математичну статистику.

Якщо ВВ X розподілена за біноміальним законом (m – число появ події в n випробуваннях) з математичним сподіванням $M(X) = np$ і дисперсією $D(X) = npq$, то формула (6.7) матиме вигляд

$$P(|m - np| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} . \qquad (6.10)$$

Для відносної частоти $\frac{m}{n}$ появи події в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких вона може з'явитися з однаковою ймовірністю $M\left(\frac{m}{n}\right) = p$ і дисперсією $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$, матимемо

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} . \qquad (6.11)$$

Ця нерівність відома, як нерівність з тереми Бернуллі.

Середнє арифметичне достатньо великої кількості незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, дисперсії яких рівномірно обмежені, втрачає характер випадкової величини.

Приклад 89. Для визначення середньої врожайності поля в 5000 га запропоновано взяти на вибір по $1\,\text{м}^2$ з кожного гектара площі і точно підрахувати їх урожайність. Оцінити ймовірність того, що середня вибіркова врожайність відрізняється від середньої врожайності загальної площі не більше, ніж на $0{,}2$ ц, якщо припустити, що середнє квадратичне відхилення врожайності на кожному га не перевищує 5 ц.

Розв'язання. Нехай X – середня врожайність загальної площі; $M(X)=a$ – вибіркова середня врожайність. За умовою $\varepsilon=0,2$. Використовуємо нерівність Чебишова (6.7). Обчислимо середнє квадратичне відхилення σ для загальної площі. Враховуємо, що середнє арифметичне n взаємно незалежних і однаково розподілених випадкових величин має: а) середнє значення – те ж саме, що й кожна зі складових величин; б) середнє квадратичне відхилення – у $\sqrt{n}$ разів менше, ніж кожна зі складових величин.

Маємо: $\sigma=\dfrac{5}{\sqrt{5000}}=\dfrac{1}{10\sqrt{2}}$; $D(X)=\sigma^2=\dfrac{1}{200}=0,005$. Тоді отримаємо

$$P(|X-a|\le 0,2)\ge 1-\frac{0,005}{(0,2)^2}=1-\frac{0,005}{0,04}=1-0,125=0,875.$$

Відповідь: $P(|X-a|\le 0,2)\ge 0,875$.

Приклад 90. Середня кількість сонячних днів на рік у Запоріжжі дорівнює 225. Оцінити ймовірність того, що протягом року буде не більше 245 сонячних днів.

Розв'язання. Нехай ВВ X – протягом року буде не більше 245 сонячних днів. За умовою $\varepsilon=245$, $M(X)=225$. Згідно з формулою (6.6), матимемо

$$P(X\le 245)\ge 1-\frac{225}{245}\approx 1-0,9184=0,0816.$$

Відповідь: $P(X\le 245)\ge 0,0816$.

Приклад 91. Середня кількість викликів, що надходять на номер 103 протягом години, дорівнює 120. Оцінити ймовірність того, що протягом наступної години кількість викликів на номер 103: а) перевищить 150; б) буде не більше 200.

Розв'язання. Нехай ВВ X – кількість викликів на номер 103 протягом наступної години. За умовою $M(X)=120$. а) $\varepsilon=150$. Згідно з формулою (6.5), матимемо $P\left(X>150\right)\leq\frac{120}{150}=0{,}8$.

б) $\varepsilon=200$. Згідно з формулою (6.6), матимемо

$$P\left(X\leq 200\right)\geq 1-\frac{120}{200}=1-0{,}6=0{,}4\,.$$

Відповідь: а) $P\left(X>150\right)\leq 0{,}8$; б) $P\left(X\leq 200\right)\geq 0{,}4$.

Приклад 92. Електричний генератор забезпечує вихідну напругу, яка може відхилятися від номінальної на значення, що не перевищує 1,5 В, з ймовірністю $0{,}9$. Які значення дисперсії вихідної напруги можна очікувати?

Розв'язання. Нехай ВВ X – величина вихідної напруги. За умовою $\varepsilon=1{,}5$; $P=0{,}9$. Згідно з формулою (6.4), матимемо

$$0{,}9\geq 1-\frac{D\left(X\right)}{1{,}5^2}\;\Rightarrow\;D\left(X\right)\geq\;0{,}1\cdot 2{,}25=0{,}225\,.$$

Відповідь: $D\left(X\right)\geq\;0{,}225\,B^2$.

Приклад 93. При стрільбі з пістолету (дистанція 10 м) по мішені, що є колом радіусу 15,5 см, середня величина відхилення від центру мішені дорівнює 4 см. За допомогою нерівності Маркова оцінити ймовірність ураження мішені при одному пострілі.

Розв'язання. Нехай ВВ X – поразка мішені при одному пострілі. Очевидно, що мішень буде вражена у разі, якщо станеться подія $X\leq 15{,}5$. Середня величина відхилення від центру мішені дорівнює $M\left(X\right)=4$. Тоді за допомогою формули (6.6) отримуємо таку оцінку

$$P\left(X\leq 15{,}5\right)\geq 1-\frac{4}{15{,}5}\approx 0{,}7419\,.$$

Відповідь: $P\left(X\leq 15{,}5\right)\geq 0{,}7419$.

Приклад 94. Для визначення середньої тривалості горіння ламп розжарювання в партії із 150 однакових ящиків було взято навмання з кожного ящика по одній такій лампі. Оцінити ймовірність того, що середня тривалість горіння відібраних 150 ламп розжарювання відрізняється від середньої тривалості їх горіння в усій партії не більше ніж на 6 годин (за абсолютною величиною), якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння ламп розжарювання в кожному ящику менше 9 годин.

Розв'язання. Нехай ВВ X_i – тривалість горіння електролампи, взятої з i-го ящика. За умовою $\varepsilon = 6$, дисперсія $D(X) = 9^2 = 81$ $\left(i = \overline{1,150}\right)$. Застосуємо теорему Чебишова. Очевидно, що середня тривалість відібраних ламп: $\frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} X_i$, а середня тривалість горіння ламп у всій партії: $\frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} M(X_i)$, $C = 81$. Згідно з формулою (6.2), матимемо

$$P\left(\left|\frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} X_i - \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} M(X_i)\right| < 5\right) > 1 - \frac{81}{150 \cdot 6^2} \approx 0{,}985 .$$

Відповідь: Тобто не менш ніж $0{,}985$.

Приклад 95. Виготовлено партію болтів, у яких середнє значення довжини дорівнює 40 см, а середнє квадратичне відхилення дорівнює $0{,}15$ см. Оцінити знизу ймовірність того, що довжина навмання взятого болта виявиться не менше $39{,}5$ см і не більше $40{,}5$ см.

Розв'язання. Нехай ВВ X – довжина деталі. Вона має скінчену дисперсію $D(X) = \sigma^2(X) = 0{,}0225$ і математичне сподівання $M(X) = 40$. Тому для оцінки «знизу» ймовірності X застосовуємо нерівність Чебишова (6.7). Оскільки $39{,}5 \le X \le 40{,}5$, то $-0{,}5 \le X - 40 \le 0{,}5$, звідки $| X - 40 | \le 0{,}5$. Тобто

$$P(| X - 50 | \le 0{,}5) \ge 1 - (0{,}0225 \,/\, 0{,}25) = 0{,}91 .$$

Відповідь: $P(| X - 50 | \le 0{,}5) \ge 0{,}91$.

Приклад 96. Середня витрата води в одному з мікрорайонів Запоріжжя становить 1500 л за день, а середнє відхилення цієї випадкової величини не перевищує 500 л. Оцінити ймовірність того, що витрата води на районі у будь-який вибраний день не перевищить

3000 л, використовуючи: а) нерівність Маркова; б) нерівність Чебишова.

Розв'язання. Нехай ВВ X – витрата води в мікрорайоні за день. За умовою $M(X)=1500$, $\varepsilon = 3000$.

а) Використовуємо нерівність Маркова (6.6). Матимемо

$$P(X \le 3000) \ge 1 - \frac{1500}{3000} = 0{,}5 \text{, тобто не менш ніж } 0{,}5 .$$

б) За умовою $\sigma = 500$. Дисперсія $D(X) = \sigma^2 = 500^2 = 250000$. Оскільки межі інтервалу $0 \le X \le 3000$ симетричні відносно математичного сподівання $M(X)=1500$, то для оцінки ймовірності шуканої події можна застосувати нерівність Чебишова (6.7)

$$P(X \le 3000) = P(0 \le X \le 3000) = P(|X - 1500| \le 1500) \ge 1 - \frac{500^2}{1500^2} = 0{,}89 ,$$

тобто не менш ніж $0{,}96$.

Відповідь: Оцінку ймовірності події, знайдену за допомогою нерівності Маркова $(P \ge 0{,}5)$, вдалося уточнити за допомогою нерівності Чебишова $(P \ge 0{,}89)$.

Приклад 97. З 900 виробів, що відправляються в складальний цех, було обстежено 250 відібраних випадковим чином виробів. Серед них було 30 бракованих. Прийнявши частку бракованих виробів серед відібраних за можливість виготовлення бракованого виробу, оцінити ймовірність того, що в усій партії бракованих виробів виявиться не більш ніж $15\,\%$ і не менш ніж $9\,\%$.

Розв'язання. Нехай ВВ X – в усій партії бракованих виробів виявиться не більш ніж $15\,\%$ і не менш ніж $9\,\%$. $X = \frac{m}{n}$. Знайдемо ймовірність появи бракованого виробу $p = \frac{m}{n} = \frac{30}{250} = 0{,}12$, $q = 0{,}88$.

Треба оцінити ймовірність $P\left(0{,}09 \le \frac{m}{n} \le 0{,}15\right)$.

Віднімемо p від кожної частини нерівності, матимемо:

$P\left(0{,}09-0{,}12\le\frac{m}{n}-0{,}12\le 0{,}15-0{,}12\right)=P\left(-0{,}03\le\frac{m}{n}-0{,}12\le 0{,}03\right)$ або

$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}12\right|\le 0{,}03\right)$. Звідси $\varepsilon=0{,}03$. За умовою $n=900$ Для оцінки ймовірності застосуємо формулу (6.11):

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le 0{,}03\right)\ge 1-\frac{0{,}12\cdot 0{,}88}{900\cdot 0{,}03^2}=1-\frac{0{,}1056}{0{,}81}\approx 0{,}8696.$$

Відповідь: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le 0{,}03\right)\ge 0{,}8696$.

Приклад 98. Пристрій складається з 8 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює $0{,}06$. Застосовуючи нерівність Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом відмов за час t буде: а) не більше трьох, б) знайти точне значення вказаної ймовірності, в) більше трьох.

Розв'язання. а) Нехай ВВ X – число елементів, що відмовили за час t. Тоді за законом Бернуллі ($n=8$, $p=0{,}06$, $q=0{,}94$) матимемо

$$M(X)=np=8\cdot 0{,}06=0{,}48;\ D(X)=npq=8\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94=0{,}4512.$$

За умовою $\varepsilon=3$. За формулою (6.7)

$$P(|X-0{,}48|\le 3)\ge 1-\frac{0{,}4512}{3^2}\approx 1-0{,}0501=0{,}9499.$$

б) Для точної відповіді на запитання використовуємо біноміальний закон та формулу Бернуллі

$$P(|X-0{,}48|\le 3)=P(-3\le X-0{,}48\le 3)=P(-2{,}52\le X\le 3{,}48)=$$
$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$
$$=C_8^0\cdot 0{,}06^0\cdot 0{,}94^8+C_8^1\cdot 0{,}06^1\cdot 0{,}94^7+C_8^2\cdot 0{,}06^2\cdot 0{,}94^6+$$
$$+C_8^3\cdot 0{,}06^3\cdot 0{,}94^5=0{,}94^8+0{,}48\cdot 0{,}94^7+0{,}1008\cdot 0{,}94^6+0{,}012096\cdot 0{,}94^5=$$
$$=0{,}94^5\cdot\left(0{,}94^3+0{,}48\cdot 0{,}94^2+0{,}1008\cdot 0{,}94+0{,}012096\right)=0{,}9993.$$

в) Події $|X-0{,}48|\le 3$ і $|X-0{,}48|>3$ протилежні, тому сума їх імовірностей дорівнює одиниці. Тоді

$$P\left(\left|X-0{,}48\right|>3\right)\le 1-0{,}9499=0{,}0501.$$

Відповідь: а) $P\left(\left|X-0{,}48\right|\le 3\right)\ge 0{,}9499$; б) $P\left(\left|X-0{,}48\right|\le 3\right)\ge 0{,}9993$;

в) $P\left(\left|X-0{,}48\right|>3\right)\le 0{,}0501$.

Приклад 99. Діаметр виготовлених чавунних болванок є випадковою величиною. Скільки треба зробити вимірів діаметрів виготовлених чавунних болванок, щоб їх середній діаметр відрізнявся від істинного значення не більше ніж на $1{,}5$ см з ймовірністю, не меншою $0{,}95$. Середнє квадратичне відхилення діаметрів чавунних болванок не перевищує 6 см.

Розв'язання. Нехай n – кількість вимірів, які треба зробити. За умовою $\varepsilon=1{,}5$, $\sigma=6$, а $D(X)=\sigma^2=6^2=36$. Скористаємося теоремою Чебишова. За формулою (6.4) матимемо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<1{,}5\right)>1-\frac{36}{n\cdot 1{,}5^2}=1-\frac{16}{n}.$$

За умовою $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<1{,}5\right)\ge 0{,}95$. Тоді $1-\frac{16}{n}\ge 0{,}95$ або $\frac{16}{n}\le 0{,}05$. Звідси $n\ge 320$.

Відповідь: $n\ge 320$.

Приклад 100. На верстаті виготовляють деталі. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює $0{,}97$. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що кількість бракованих серед 1800 деталей знаходиться в межах від 39 до 69 (включно). Уточнити можливість тієї ж події за допомогою інтегральної теореми Муавра-Лапласа. Пояснити відмінність одержаних результатів.

Розв'язання. Нехай ВВ $X=m$ – число бракованих деталей. За умовою ймовірність того, що деталь бракована, дорівнює $p=1-0{,}97=0{,}03$. ВВ X має біноміальний закон розподілу. Значення $39\le X\le 69$, з межами симетричними щодо математичного сподівання $a = M(X) = np = 1800 \cdot 0{,}03 = 54$. Отже, оцінку ймовірності шуканої події $P(39 \le X \le 69) = P(-15 \le X - 54 \le 15) = P(|X - 54| \le 15)$ знайдемо за формулою (6.10)

$$P(|m - 54| \le 15) \ge 1 - \frac{1800 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}{15^2} = 1 - 0{,}2328 = 0{,}7672,$$

тобто не менш ніж $0{,}7672$.

Застосовуючи наслідок (3.22) інтегральної теореми Муавра-Лапласа, отримаємо

$$P(|m - 54| \le 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1800 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}}\right) = 2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{52{,}38}}\right) = 2\Phi(2{,}07) = 0{,}9615,$$

тобто ймовірність шуканої події дорівнює $0{,}9615$

Отриманий результат $P = 0{,}9615$ не суперечить оцінці, знайденій за допомогою нерівності Чебишова – $P = 0{,}7672$. Відмінність результатів пояснюється тим, що нерівність Чебишова дає лише нижню межу оцінки ймовірності події для будь-якої випадкової величини, а інтегральна теорема Муавра-Лапласа дає досить точне значення самої ймовірності P (тим точніше, чим більше n), оскільки вона застосовна лише для випадкової величини, що має певний, а саме – біноміальний закон розподілу.

Відповідь: $P(|m - 54| \le 15) \ge 0{,}7672$; $P(|m - 54| \le 15) = 0{,}9615$.

6.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання	Відповідь
1. Для визначення потреби в рідкому металі та сировині вибірковим шляхом встановлюють середню вагу виливки гільзи до автомобільного двигуна, оскільки вага виливки, розрахована за металевою моделлю, відрізняється від фактичної ваги. Скільки потрібно взяти виливок, щоб з імовірністю, більшою за $0{,}9$, можна було стверджувати, що середня вага відібраних виливок відрізняється від розрахункового, прийнятого за математичне сподівання ваги, не більше ніж на $0{,}2$ кг?	$n > 50$.

Завдання	Відповідь
2. Для деякого автопарку середня кількість автобусів, що відправляються в ремонт після місяця експлуатації на міських лініях, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що після місяця в даному автопарку буде відправлено в ремонт менше 15 автобусів, якщо інформація про дисперсію відсутня.	0,67.
3. Імовірність наявності друкарської помилки на одній сторінці рукопису дорівнює $0{,}2$. Знайти ймовірність того, що в рукописі, що містить 400 сторінок, відносна частота появи друкарської помилки відрізняється від відповідної ймовірності за модулем менше, ніж $0{,}05$.	$p \geq 0{,}84$.
4. Для правильної організації складання вузла необхідно оцінити ймовірність, з якою розміри деталей відхиляються від середини поля допуску лише на 2 мм. Відомо, що середина поля допуску збігається з математичним очікуванням розмірів деталей, що обробляються, а середнє квадратичне відхилення дорівнює $0{,}25$ мм.	$0{,}9844$.
5. Глибина моря вимірюється приладом, який не має систематичної помилки. Середнє квадратичне відхилення виміру не перевищує 15 м. Скільки потрібно зробити незалежних вимірів, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, можна було би стверджувати, що середнє арифметичне цих вимірів відрізняються від a (глибини моря) за модулем менше, ніж на 5 м?	$n \geq 90$.
6. При штампуванні платівок із пластмаси брак становить 3%. Знайти ймовірність того, що під час перевірки партії у 1000 платівок виявиться відхилення від встановленого відсотка браку менше ніж на 1%.	$\geq 0{,}709$.
7. За статистичними даними, у середньому 87% новонароджених доживають до 50 років. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що з 1000 новонароджених частка тих, хто дожив до 50 років, відрізнятиметься від ймовірності цієї події не більше ніж на $0{,}04$ (за абсолютною величиною).	$\geq 0{,}929$.

Завдання	Відповідь
8. При контрольній перевірці приладів, що виготовляються, було встановлено, що в середньому 15 із 100 мають дефекти. Оцінити ймовірність того, що відносна частота приладів з дефектами серед 400 виготовлених буде відрізнятися від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше ніж на $0{,}05$.	$\geq 0{,}8725$.
9. Імовірність того, що виріб є якісним, дорівнює $0{,}9$. Скільки слід перевірити виробів, щоб з імовірністю, не меншою за $0{,}95$, можна було стверджувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти якісних виробів від $0{,}9$ не перевищить $0{,}01$?	$n \geq 18000$.
10. Середньодобове споживання електроенергії у населеному пункті дорівнює 20000 кВт·год, а середньоквадратичне відхилення – 200 кВт·год. Якого споживання електроенергії в цьому населеному пункті можна очікувати найближчої доби з імовірністю, не меншою за $0{,}96$?	від 19000 до 21000.

7. Системи випадкових величин

Крім одновимірних випадкових явищ, нерідко доводиться мати справу з двома і більш ніж двома випадковими величинами. Такі величини прийнято називати – багатовимірними (відповідно двовимірними, тривимірними, …, n-вимірними). Спільний розгляд декількох ВВ приводить до системи випадкових величин (випадкового вектору).

Умовно систему випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ записують у вигляді вектору $\overline{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ або точки $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ простору відповідної вимірності. Кожна одновимірна ВВ X_i називається *компонентами* або *складовими* n-вимірної випадкової величини. Наприклад, складається модель витрат випадково вибраної сім'ї: X_1 – одяг, X_2 – взуття, X_3 – харчування, X_4 – транспорт. Ці витрати є випадковими величинами на одному просторі елементарних подій.

Основною характеристикою n-вимірної випадкової величини є n-вимірна функція розподілу

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n). \qquad (7.1)$$

Означення 7.1. *Законом розподілу системи випадкових величин* називається співвідношення, що встановлює зв'язок між областями можливих значень системи випадкових величин та ймовірністю появи системи у цих областях.

Розрізняють дискретні (складові цих величин дискретні) і неперервні (складові цих величин неперервні) багатовимірні випадкові величини.

На багатовимірні ВВ поширюються майже без змін основні поняття та визначення, що належать до одновимірних випадкових величин.

Геометрична інтерпретація системи: 1) систему двох випадкових величин (X, Y) розглядають як випадкову точку на площині xOy або як випадковий вектор із складовими X, Y; 2) систему трьох випадкових величин (X, Y, Z) розглядають як випадкову точку у просторі $Oxyz$ або як випадковий вектор із складовими X, Y, Z і т. д.

Обмежимося вивченням двовимірних випадкових величин. Основні поняття, визначення та твердження можуть бути узагальнені на випадки більшої кількості компонентів.

Означення 7.2. Сукупність двох випадкових величин (X, Y), що розглядаються разом, називається *системою двох випадкових величин* або двовимірним випадковим вектором.

Систему двох випадкових величин можна розглядати як випадкову точку $M(X, Y)$ або як вектор $\overline{OM}$ на площині xOy.

Означення 7.3. *Функцією* $F(x, y)$ *спільного розподілу* системи двох випадкових величин (X, Y) називається ймовірність одночасного виконання двох нерівностей: $X < x$, $Y < y$, тобто

$$F(x, y) = P(X < x, \ Y < y). \tag{7.2}$$

З геометричної точки зору функція розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини є ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапить у нескінченний прямокутник з вершиною в точці (x, y), розташований ліворуч і нижче цієї точки, тобто у ту частину площини, всі точки якої задовольняють нерівності $X < x$ та $Y < y$ (рис. 7.1).

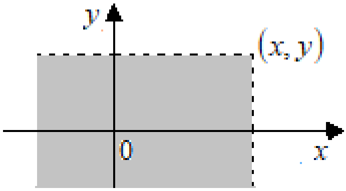


Рисунок 7.1

Аналогічно, з геометричної точки зору, функція розподілу першої компоненти X двовимірної випадкової величини – $F_1(x)$, є ймовірність попадання випадкової точки в напівплощину, обмежену праворуч абсцисою x (рис. 7.2). Функція розподілу другої компоненти Y двовимірної випадкової величини – $F_2(y)$, є ймовірність попадання в напівплощину, обмежену зверху ординатою y (рис. 7.3)

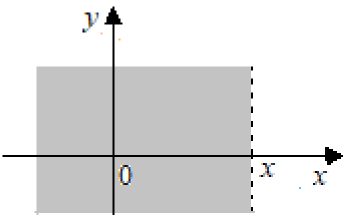


Рисунок 7.2

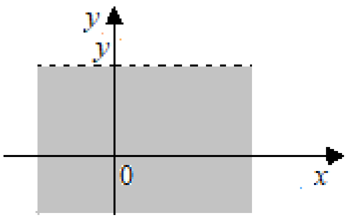


Рисунок 7.3

Властивості функції $F(x,y)$:

а) $0 \le F(x,y) \le 1$;

б) $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$ для $x_1 \le x_2$ і $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$ для $y_1 \le y_2$;

в) $F(-\infty,-\infty)=0$, $F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$, $F(\infty,\infty)=1$;

г) $F(\infty,y)=F_2(y)$ і $F(x,\infty)=F_1(x)$, де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ – функції розподілу одновимірних випадкових величин, тобто по багатомірному розподілу можна відновити одномірний розподіл.

Імовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник $ABCD$: $A(x_1,y_1)$, $B(x_1,y_2)$, $C(x_2,y_2)$, $D(x_2,y_1)$ обчислюється за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2) = (F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)) - \\ - (F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)). \tag{7.3}$$

<u>Означення 7.4</u>. Випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яке значення прийняла інша величина, тобто їх спільна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу одновимірних ВВ X і Y: $F(x,y) = P(X < \mathrm{x}) \cdot P(Y < y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

7.1 Система дискретних випадкових величин (X,Y)

<u>Означення 7.5</u>. *Системою дискретних випадкових величин* (X,Y) називають систему випадкових величин, складові X і Y якої дискретні, тобто кожна з випадкових величин X і Y приймає лише лічену кількість можливих значень.

<u>Означення 7.6</u>. Імовірність того, що ДВВ X набуде значення x_i, а ДВВ Y – значення y_j, називають *законом розподілу двовимірної дискретної випадкової величини*, тобто

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)), \tag{7.4}$$

де p_{ij} – спільна ймовірність.

Закон розподілу ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин (X,Y) може бути заданий таблицею, у рядках якої вказані можливі значення x_i випадкової величини X, а в стовпцях – можливі значення y_j випадкової величини Y, на перетинах рядків та стовпців зазначені відповідні ймовірності p_{ij}. Нехай випадкова величина X може приймати n значень, а випадкова величина Y – m значень. Тоді закон розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) має вигляд

Y	X						
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	p_{n1}	$P(Y=y_1)$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	p_{n2}	$P(Y=y_2)$
….	…	…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}	$P(Y=y_j)$
….	…	…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{im}	…	p_{nm}	$P(Y=y_m)$
$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$P(X=x_i)$	…	$P(X=x_n)$	1

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P(X=x_i) = P(x_i), \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P(Y=y_j) = P(y_j).$$

Умова нормування

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1. \tag{7.5}$$

Для системи двох дискретних випадкових величин (дискретного двовимірного випадкового вектора) значення сумісної функції розподілу в точці (x, y) є сумою ймовірностей p_{ij} по усіх точках (x_i, y_j), які потрапили усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y) (рис. 7.1) та записується:

$$F_{XY}(x,y)=\sum_{\substack{i=1 \\ x_i<x}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ y_j<y}}^{m} p_{ij} . \tag{7.6}$$

Зрозуміло, що $F_{XY}(x,y)=0$, якщо $x \le x_1$ або $y \le y_1$. Іншу частину площини зручно розбити на області: $\{(x,y): x_i < x \le x_{i+1}; y_j < y \le y_{j+1}\}$, $(i=1,2,\ldots,n-1; j=1,2,\ldots,m-1)$. Якщо $i=n$, то маємо $x > \mathrm{x}_n$, якщо $j=m$, то матимемо $y > \mathrm{y}_m$.

Означення 7.7. Дискретні ВВ X і Y *незалежні* тоді і тільки тоді, коли $p_{ij} = P(x_i) \cdot P(y_j)$, де $P(x_i) = P(X = x_i)$ і $P(y_j) = P(Y = y_j)$.

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) заданий таблицею, можна знайти закон розподілу окремих її компонентів X і Y. Для цього знаходять суми ймовірностей «по рядках» – для змінної Y (7.7), і «по стовпцях» – для змінної X (7.8).

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \ j = \overline{1,m}; \tag{7.7}$$

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \ i = \overline{1,n} . \tag{7.8}$$

При підрахунку ймовірностей законів розподілу окремих змінних слід пам'ятати про етап контрольної перевірки, тобто про нормування (7.5).

Однак на практиці частіше важливішим є зворотне завдання: по розподілу ймовірностей окремих компонентів X і Y побудувати закон розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) за допомогою виконання математичних операцій над випадковими величинами.

Приклад 101. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X,Y) законом розподілу

$Y \setminus X$	1	3	5	$\sum$
0	0,1	0,1	0,1	0,3
2	0	0,3	0,1	0,4
4	0,1	0,1	0,1	0,3
$\sum$	0,2	0,5	0,3	1

Знайти закони розподілу компонент X та Y і ймовірність того, що $X+Y<6$.

Розв'язання. Додаючи стовпчики і рядки таблиці закону

розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y), отримуємо відповідні закони розподілу випадкових величин X та Y.

X	1	3	5
p	0,2	0,5	0,3

Y	0	2	4
p	0,3	0,4	0,3

Для знаходження ймовірності того, що $X+Y<6$ розглянемо можливі поєднання значень компонент X та Y і додаємо ймовірності тих з них, для яких виконується нерівність $X+Y<6$. Матимемо

$$P(X+Y<6)=P(X=1,\ Y=0)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=1,\ Y=4)+$$
$$+P(X=3,\ Y=0)+P(X=3,\ Y=2)+P(X=5,\ Y=0)=0{,}1+0+0.1+$$
$$+0{,}1+0{,}3+0{,}1=0{,}7\ .$$

Відповідь: $P(X+Y<6)=0{,}7$.

Приклад 102. Дві незалежні дискретні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілу ймовірностей:

X	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

Y	0	2	3	4
p	0,3	0,4	0,1	0,2

Знайти: 1) закон розподілу ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин (X,Y), 2) обчислити $P(1<X\le 3,\ 2\le Y<4)$, $P(X\le 2,\ Y<3)$, $P(Y>4)$ ймовірності того, що випадкова величина (X,Y) набуде значення відповідних двовимірних областей.

Розв'язання. 1) Складемо закон розподілу ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин (X,Y).

$Y \setminus X$	1	2	3	$\sum$
0	p_{11}	p_{21}	p_{31}	0,3
2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	0,4
3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	0,1
4	p_{14}	p_{24}	p_{34}	0,2
$\sum$	0,5	0,3	0,2	1

Позначимо ймовірності, з якими випадкова величина X набуває своїх значень, як $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$, а для випадкової величини Y – $\overline{p}_1=0{,}3$; $\overline{p}_2=0{,}4$; $\overline{p}_3=0{,}1$; $\overline{p}_4=0{,}2$. Знайдемо p_{11} – імовірність того, що випадкова величина X набуде значення $x_1=1$ і випадкова величина Y набуде значення $y_1=0$. Оскільки випадкові величини X і Y незалежні, то за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $p_{11}=p_1\cdot\overline{p}_1=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15$. Аналогічно знайдемо інші ймовірності:

$p_{21}=p_2\cdot\overline{p}_1=0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09$; $p_{31}=p_3\cdot\overline{p}_1=0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}06$;

$p_{12}=p_1\cdot\overline{p}_2=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}20$; $p_{22}=p_2\cdot\overline{p}_2=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12$;

$p_{32}=p_3\cdot\overline{p}_2=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$; $p_{13}=p_1\cdot\overline{p}_3=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05$;

$p_{23}=p_2\cdot\overline{p}_3=0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}03$; $p_{33}=p_3\cdot\overline{p}_3=0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02$;

$p_{14} = p_1 \cdot \overline{p}_4 = 0,5 \cdot 0,2 = 0,10$; $p_{24} = p_2 \cdot \overline{p}_4 = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$;

$p_{34} = p_3 \cdot \overline{p}_4 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.

Закон розподілу ймовірностей системи двох ДВВ (X, Y)

$Y \setminus X$	1	2	3
0	0,15	0,09	0,06
2	0,20	0,12	0,08
3	0,05	0,03	0,02
4	0,10	0,06	0,04

2) Обчислимо ймовірність $P(1 < X \le 3,\ 2 \le Y < 4)$ того, що випадкова величина (X, Y) набуде значення з області $(1 < X \le 3,\ 2 \le Y < 4)$. Для цього простіше підсумувати ймовірності, що відповідають умовам $1 < X \le 3,\ 2 \le Y < 4$, тобто

$$P(1 < X \le 3,\ 2 \le Y < 4) = p_{22} + p_{32} + p_{23} + p_{33} =$$
$$= 0,12 + 0,08 + 0,03 + 0,02 = 0,25 .$$

Аналогічно знайдемо

$$P(X \le 2,\ Y < 3) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 0,15 + 0,09 + 0,20 + 0,12 = 0,56 .$$

$P(Y > 4) = 0$, оскільки випадкова величина X може приймати будь-яке значення, а випадкова величина Y повинна приймати значення більше чотирьох. Ця подія неможлива.

Відповідь: $P(1 < X \le 3,\ 2 \le Y < 4) = 0,25$; $P(X \le 2,\ Y < 3) = 0,56$;
$P(Y > 4) = 0$.

7.2 Система неперервних випадкових величин (X, Y)

Означення 7.8. *Системою неперервних випадкових величин* (X, Y) називають систему випадкових величин, складові X і Y якої неперервні, а функція розподілу $F(x, y)$ є неперервною диференційованою функцією по кожному з аргументів x та y і існує друга мішана похідна $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

<u>Означення 7.9</u> *Щільністю спільного розподілу ймовірностей* (двовимірною щільністю ймовірності) неперервної двовимірної випадкової величини (X,Y) називають мішану похідну 2-го порядку від функції розподілу $F(x,y)$ і позначають $f(x,y)$.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{7.9}$$

Властивості щільності спільного розподілу $f(x,y)$:

а) функція щільності розподілу невід'ємна: $f(x,y) \geq 0$,

б) подвійний невласний інтеграл на нескінчених проміжках від функції $f(x,y)$ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1. \tag{7.10}$$

Якщо $(X,Y) \in D$, то властивість набуває такого вигляду:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 1. \tag{7.11}$$

Знаючи щільність спільного розподілу, можна знайти функцію розподілу за формулою:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{7.12}$$

Імовірність попадання випадкової точки (X,Y) в довільну область D площини xOy знаходиться за формулою:

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (7.13)$$

З геометричної точки зору ймовірність попадання випадкової точки в область D площини xOy зображується об'ємом циліндричного тіла, обмеженого поверхнею розподілу, і спирається на цю область (рис. 7.4).

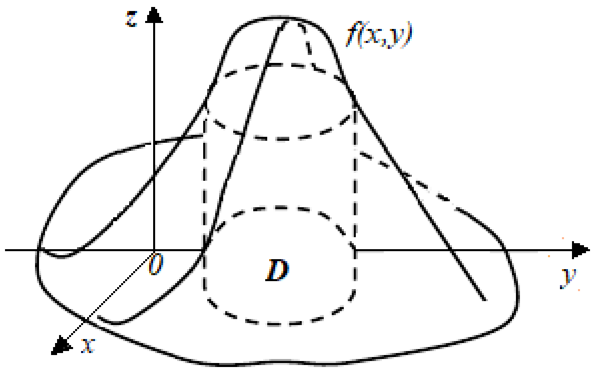


Рисунок 7.4

Якщо відома щільність спільного розподілу $f(x,y)$, то можна знайти функції розподілу і щільності ймовірностей компонент X і Y, що входять в систему випадкових величин (X,Y), за формулами:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \qquad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx, \qquad (7.14)$$

$$F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \qquad F_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{y} dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx. \qquad (7.15)$$

Означення 7.10. Випадкові величини X і Y, що входять у систему, називаються незалежними, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яке значення прийняла інша. Інакше вони називаються залежними.

Для того, щоб неперервні випадкові величини X і Y, що входять до системи, були незалежними, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \text{ або } F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y). \qquad (7.16)$$

Якщо X і Y неперервні незалежні випадкові величини з відомими щільностями розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в довільну область D площини xOy знаходиться за формулою:

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dx\,dy. \qquad (7.17)$$

Одним із найпростіших розподілів системи двох неперервних випадкових величин є рівномірний розподіл.

<u>Означення 7.11</u>. Система двох неперервних випадкових величин має рівномірний розподіл в області D площини xOy, якщо щільність спільного розподілу в точках області D постійна $(C=const)$ і дорівнює нулю в інших точках площини:

$$f(x,y)=\begin{cases} C, & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

З огляду на властивість (7.11) щільності спільного розподілу маємо, що $C=\dfrac{1}{S_D}$, де S_D- площа області D. Тоді ймовірність попадання випадкової точки в деяку область $d\subset D$ площини xOy знаходиться за формулою:

$$P((X,Y)\in d)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\frac{S_d}{S_D}. \qquad (7.18)$$

Приклад 103. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X,Y) задано функцією розподілу

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x\le 0,\ y\le 0,\\ 1-e^{-x}-e^{-2y}+e^{-x-2y}, & x>0,\ y>0.\end{cases}$$

Знайти $f(x,y)$ і $P(0<X<1,\ 0<Y<2)$.

Розв'язання. Щільність розподілу системи (X,Y) знайдемо за формулою (7.9). Диференціюємо функцію $F(x,y)$ по змінній x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^{-x}-e^{-x-2y}$$

Отриманий вираз диференціюємо по змінній y:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=2\cdot e^{-x-2y}.$$

Шукану ймовірність знайдемо за формулою (7.3). Матимемо

$$P(0<X<1,\ 0<Y<2)=F(1,2)-F(0,2)-F(1,0)+F(0,0)=1-e^{-1}-e^{-4}+$$
$$+e^{-5}-1+e^{0}+e^{-4}-e^{-2}-1+e^{-1}+e^{0}-e^{-1}+1-e^{0}-e^{0}+e^{0}=$$
$$=1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-5}\approx 1-0{,}3679-0{,}1353-0{,}0067=0{,}4901.$$

Відповідь: $f(x,y)=2\cdot e^{-x-2y}$, $P(0<X<1,\ 0<Y<2)\approx 0{,}4901$.

Приклад 104. Задана щільність спільного розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}C\cdot\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le 9,\\ 0, & x^2+y^2>9.\end{cases}$$

Знайти: а) значення сталої C, б) імовірність попадання випадкової точки в круг $x^2+y^2\le 4$.

Розв'язання. а) Знайдемо значення сталої C, застосовуючи формулу $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=1$, де область D: $x^2+y^2\le 9$. Матимемо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D C\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=\begin{bmatrix}x=\rho\cos\varphi, dx\,dy=\rho\, d\rho d\varphi\\ y=\rho\sin\varphi, \sqrt{x^2+y^2}=\rho\end{bmatrix}=$$

$$=\iint_D C(3-\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi=\begin{bmatrix}0\le\rho\le 3\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{bmatrix}=C\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3(3-\rho)\rho\, d\rho=$$

$$=C\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\left(3\rho-\rho^2\right)d\rho=2\pi C\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3\right)\Bigg|_0^3=2\pi C\left(\frac{27}{2}-9\right)=9\pi C\,.$$

Тоді $9\pi C=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{9\pi}$ і щільність спільного розподілу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{9\pi}\cdot\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le 9,\\ 0, & x^2+y^2>9.\end{cases}$$

б) Знайдемо ймовірність попадання значень випадкової величини до кола $x^2+y^2\le 4$ – область D_1. Імовірність знаходимо за формулою (7.13). Інтеграл знаходимо по області D_1, перейшовши в полярну систему координат, аналогічно попередньому випадку. Для області D_1: $0\le\rho\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi$. Матимемо

$$P((X,Y)\in D_1)=\iint_{D_1}\frac{1}{9\pi}\cdot\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=\frac{1}{9\pi}\iint_{D_1}(3-\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi=$$

$$=\frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(3-\rho)\rho\, d\rho=\frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(3\rho-\rho^2\right)d\rho=2\pi\frac{1}{9\pi}\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3\right)\Bigg|_0^2=$$

$$2\pi\frac{1}{9\pi}\left(6-\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{3}=\frac{20}{27}\approx 0{,}7407\,.$$

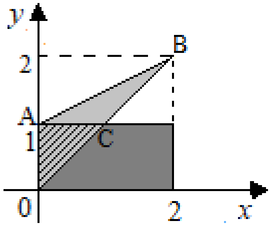
Відповідь: а) $C=\dfrac{1}{9\pi}$, б) $P((X,Y)\in D_1)\approx 0{,}7407$.

Приклад 105. Задана щільність спільного розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}2x^2+xy, & x\in[0,2],\ y\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,2],\ y\notin[0,1].\end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання випадкової точки в трикутник з вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(2,2)$.

Розв'язання. Щільність спільного розподілу задана в прямокутнику. Область перетину прямокутника з заданим трикутником показана на рисунку (заштрихований трикутник OAC), обмежена знизу прямою $y = x$, зверху – прямою $y = 1$, зліва – прямою $x = 0$. Імовірність попадання випадкової точки в трикутник OAC знайдемо за формулою (7.13), де область D – трикутник OAC.



$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D \left(2x^2+xy\right)dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y\left(2x^2+xy\right)dx=\int\limits_0^1 dy\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2y}{2}\right)\Bigg|_0^y=\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3}y^3+\frac{y^3}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{7}{6}\int\limits_0^1 y^3dy=\frac{7}{6}\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{7}{24}\approx 0{,}2917\,.$$

Відповідь: $P((X,Y)\in D)\approx 0{,}2917$.

7.3 Числові характеристики двовимірних випадкових величин

1. <u>Математичне сподівання двовимірної ВВ</u> (X,Y)

<u>Означення 7.12</u>. *Математичним сподіванням двовимірної ВВ* (X,Y) називається впорядкована пара чисел $(M(X),M(Y))$.

Математичне сподівання дискретних випадкових величин X та Y, що входять до системи (X,Y):

$$M(X)=m_X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\,,$$

$$. \qquad (7.19)$$

$$M(Y)=m_Y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\,.$$

Математичне сподівання неперервних випадкових величин X та Y, що входять до системи (X,Y):

$$M(X)=m_X=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$M(Y)=m_Y=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)\,dx\,dy. \tag{7.20}$$

Математичне сподівання (m_X, m_Y) – координати середньої точки, щодо якої розкидані випадкові точки (X,Y) іноді називають *центром розсіювання*.

Для знаходження математичного сподівання $M(XY)$ добутку випадкових величин X та Y можна скласти закон розподілу добутку двох дискретних випадкових величин і знайти $M(XY)$ або, знаючи закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y), знайти $M(XY)$ за формулою:

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} . \tag{7.21}$$

2. Дисперсія двовимірної ВВ (X,Y)

Означення 7.13. *Дисперсією двовимірної ВВ* (X,Y) називається впорядкована пара чисел $(D(X), D(Y))$.

Дисперсія дискретних випадкових величин X та Y, що входять до системи (X,Y):

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_X)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\sum_{j=1}^{m}p_{ij}-(m_X)^2,$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j-m_Y)^2 p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}(y_j)^2.\sum_{i=1}^{n}p_{ij}-(m_Y)^2. \tag{7.22}$$

Дисперсія неперервних випадкових величин X та Y, що входять до системи (X,Y):

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2 f(x,y)dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,y)dx\,dy-(m_X)^2,$$

$$D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-m_Y)^2 f(x,y)dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x,y)dx\,dy-(m_Y)^2. \qquad (7.23)$$

Дисперсія випадкових величин X і Y, що входять до системи (X,Y) – характеристика розсіювання випадкової точки у напрямку осей Ox і Oy.

3. <u>Середнє квадратичне відхилення двовимірної ВВ</u> (X,Y)

<u>Означення 7.14</u>. *Середнє квадратичне відхилення двовимірної ВВ* (X,Y) обчислюють за формулами:

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)},\quad \sigma_Y=\sqrt{D(Y)}. \qquad (7.24)$$

4. <u>Початковий момент</u> $\nu_{k,s}$ <u>порядку</u> $k+s$ <u>двовимірної ВВ</u> (X,Y)

<u>Означення 7.15</u>. *Початковим моментом* $\nu_{k,s}$ *порядку* $k+s$ *двовимірної ВВ* (X,Y) називають математичне сподівання добутку $X^k\cdot Y^s$.

Для дискретної випадкової величини (X,Y):

$$\nu_{k,s}=M\left(X^k\cdot Y^s\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}x_i^k y_j^s. \qquad (7.25)$$

Для неперервної випадкової величини (X,Y):

$$\nu_{k,s} = M\left(X^k \cdot Y^s\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) x^k y^s \, dxdy. \quad (7.26)$$

Зокрема, початкові моменти першого порядку:

$$\nu_{1,0} = M\left(X^1 Y^0\right) = M(X) = m_X,$$
$$\nu_{0,1} = M\left(X^0 Y^1\right) = M(Y) = m_Y.$$

5. <u>Центральний момент</u> $\mu_{k,s}$ <u>порядку</u> $k+s$ <u>двовимірної ВВ</u> (X,Y)

<u>Означення 7.16</u>. *Центральним моментом* $\mu_{k,s}$ *порядку* $k+s$ *двовимірної ВВ* (X,Y) називають математичне сподівання добутку відхилень відповідно до k - го і s - го степенів:

$$\mu_{k,s} = M\left((X - M(X))^k \cdot (Y - M(Y))^s\right). \quad (7.27)$$

Для дискретної випадкової величини (X,Y):

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - M(X)\right)^k \left(y_j - M(Y)\right)^s p_{ij}. \quad (7.28)$$

Для неперервної випадкової величини (X,Y):

$$\mu_{k,s} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M(X)\right)^k \left(y - M(Y)\right)^s f(x,y)\, dxdy. \quad (7.29)$$

Зокрема, центральні моменти першого порядку: $\mu_{1,0} = 0$, $\mu_{0,1} = 0$; центральні моменти другого порядку:

$$\mu_{2,0} = M\left((X - m_x)^2 (Y - m_y)^0\right) = D(X),$$
$$\mu_{0,2} = M\left((X - m_x)^0 (Y - m_y)^2\right) = D(Y).$$

6. Кореляційний момент K_{XY} (коваріація) системи ВВ (X,Y)

Означення 7.17. *Кореляційним моментом* K_{XY} (*коваріацією*) *системи ВВ* (X,Y) називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин:

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\big((X - m_X)\cdot(Y - m_Y)\big) \tag{7.30}$$

або

$$K_{XY} = M(\mathrm{XY}) - M(X)\cdot M(Y).$$

Для дискретної випадкової величини (X,Y):

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_X)(y_j - m_Y)\,p_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\,y_j\,p_{ij} - m_X m_Y. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Для неперервної випадкової величини (X,Y):

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)(y - m_Y)\cdot f(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy - m_X m_Y. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Якщо функція щільності розподілу $f(x,y)$ набуває значення в деякій області D площини xOy, то

$$K_{XY} = \iint_D x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy - \iint_D x f(x,y)\,dx\,dy\cdot\iint_D y\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{7.33}$$

<u>Означення 7.18</u>. Випадкові величини називаються *корельованими*, якщо їх кореляційний момент відмінний від нуля, і *некорельованими*, якщо їх кореляційний момент дорівнює нулю.

Якщо випадкові величини незалежні, то вони і некорельовані, але з некорельованості не можна зробити висновок про їх незалежність.

Якщо дві величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

Часто по заданій щільності розподілу системи випадкових величин можна визначити залежність або незалежність цих величин.

Властивості кореляційного моменту:

а) $K_{XY} = K_{YX}$;

б) $cov(X+a, Y) = cov(X, Y+b) = cov(X+a, Y+b) = cov(X, Y)$;

в) якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K_{XY} = 0$;

якщо $K_{XY} \neq 0$, то випадкові величини X і Y залежні;

г) $cov(cX, Y) = c \cdot cov(X, Y) = cov(X, cY)$;

д) $\mathrm{D}(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2 \cdot K_{XY}$;

е) $|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$.

Кореляційний момент служить для того, щоб охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами. Кореляційний момент має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X і Y. Цей факт є недоліком цієї числової характеристики, тому що при різних одиницях виміру виходять різні кореляційні моменти, що ускладнює порівняння кореляційних моментів різних випадкових величин. У зв'язку з цим, щоб усунути зазначений недолік, вводять нову числову характеристику коефіцієнт кореляції:

<u>Означення 7.19</u>. *Кореляційною матрицею системи ВВ* (X, Y) називається симетрична матриця, елементами якої є другі центральні моменти (D_X та D_Y) і коваріації K_{XY}:

$$K = \begin{pmatrix} D_X & K_{XY} \\ K_{XY} & D_Y \end{pmatrix}. \tag{7.34}$$

7. <u>Коефіцієнт кореляції</u>

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною характеристикою зв'язку між ВВ X і Y. Визначається формулою

$$r_{XY} = cov\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}, \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{7.35}$$

Він характеризує степінь тісноти лінійного зв’язку між випадковими величинами: якщо $|r_{XY}| \to 1$, то зв’язок сильніше; якщо $|r_{XY}| \to 0$, то зв’язок слабкіше.

Властивості коефіцієнта кореляції:

а) $|r_{XY}| \le 1$;

б) для незалежних ВВ $r_{XY} = 0$, але зворотне твердження не завжди справедливо;

в) якщо ВВ X і Y пов’язані лінійною функціональною залежністю $Y = aX + b, a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$, причому $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ і $r_{XY} = -1$ при $a < 0$ і навпаки.

<u>Означення 7.20</u>*. Нормованою кореляційною матрицею системи ВВ* (X, Y) називається матриця

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{XY} \\ r_{XY} & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.36}$$

Наведені формули для системи двох ВВВ (X, Y) узагальнюються на випадок довільного числа ВВ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Приклад 106. Заданий закон розподілу ймовірностей системи двох ДВВ (X,Y)

$Y \setminus X$	1	2	3
0	0,18	0,11	0,05
2	0,20	0,10	0,08
4	0,12	0,09	0,07

Знайти числові характеристики m_X, m_Y, r_{XY}.

Розв'язання. Знайдемо m_X, m_Y за формулами (7.19).

$$m_X = \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1 \cdot (0{,}18 + 0{,}20 + 0{,}12) + 2 \cdot (0{,}11 + 0{,}10 + 0{,}09) +$$

$$+ 3 \cdot (0{,}05 + 0{,}08 + 0{,}07) = 0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}7 .$$

$$m_Y = \sum_{j=1}^{3} y_j \sum_{i=1}^{3} p_{ij} = 0 \cdot (0{,}18 + 0{,}11 + 0{,}05) + 2 \cdot (0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}08) +$$

$$+ 4 \cdot (0{,}12 + 0{,}09 + 0{,}07) = 0 + 0{,}76 + 1{,}12 = 1{,}88 .$$

Знайдемо $D(X)$, $D(Y)$ за формулами (7.22).

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 \sum_{j=1}^{3} p_{ij} - (m_X)^2 = 1^2 \cdot (0{,}18 + 0{,}20 + 0{,}12) +$$

$$+ 2^2 \cdot (0{,}11 + 0{,}10 + 0{,}09) + 3^2 \cdot (0{,}05 + 0{,}08 + 0{,}07) - 1{,}7^2 = 0{,}5 +$$
$$+ 1{,}2 + 1{,}8 - 2{,}89 = 0{,}61 .$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^{3} (y_j)^2 . \sum_{i=1}^{3} p_{ij} - (m_Y)^2 = 0 \cdot (0{,}18 + 0{,}11 + 0{,}05) +$$

$$+ 2^2 \cdot (0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}08) + 4^2 \cdot (0{,}12 + 0{,}09 + 0{,}07) - 1{,}88^2 = 1{,}52 +$$
$$+ 2{,}24 - 3{,}5344 = 0{,}2256 .$$

За формулою (7.31) знайдемо K_{XY}.

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \, y_j \, p_{ij} - m_X m_Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} y_j \, p_{ij} - m_X m_Y =$$

$$= 1 \cdot (0 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}20 + 4 \cdot 0{,}12) + 2 \cdot (0 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}10 + 4 \cdot 0{,}09) +$$

$$+3\cdot\left(0\cdot 0{,}05+2\cdot 0{,}08+4\div 0{,}07\right)-1{,}7\cdot 1{,}88=3{,}32-3{,}196=0{,}124\,.$$

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}61}\approx 0{,}781\,;\ \sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}2256}\approx 0{,}475\,.$$

Коефіцієнт кореляції r_{XY} знайдемо за формулою (7.35)

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{0{,}124}{0{,}781\cdot 0{,}475}\approx 0{,}334\,.$$

Відповідь: $m_X=1{,}7$; $m_Y=1{,}88$; $r_{XY}\approx 0{,}334$.

Приклад 107. Задано щільність розподілу системи двох неперервних ВВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{144}(2x+6y), & (x,y)\in D:(0\le x\le 6,\,0\le y\le 2),\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання значення ВВ (X,Y) в область $D_1\left(4\le x\le 8,\ 0\le y\le 3\right)$, ймовірність попадання значення X в інтервал $4\le x\le 8$, математичні сподівання ВВ (X,Y) m_X, m_Y і кореляційний момент K_{XY}.

Розв'язання. Ймовірність попадання значення ВВ (X,Y) в область $D_1\left(4\le x\le 8,\ 0\le y\le 3\right)$ знайдемо за формулою (7.13)

$$P((X,Y)\in D_1)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}\frac{1}{144}(2x+6y)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{72}\int_0^2 dy\int_4^6(x+3y)dx=\frac{1}{72}\int_0^2 dy\left(\frac{x^2}{2}+3xy\right)\Bigg|_4^6=\frac{1}{72}\int_0^2(6y+10)dy=$$

$$=\frac{1}{72}\left(3y^2+10y\right)\Big|_0^2=\frac{1}{72}(12+20)=\frac{32}{72}\approx 0{,}4444\,.$$

Знайдемо щільність розподілу складової X ВВ (X,Y) за формулою

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\frac{1}{144}\int_0^2(2x+6y)\,dy=\frac{1}{72}\left(xy+\frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{36}(x+3).$$

Тоді ймовірність попадання значення X в інтервал $4\le x\le 8$

$$P\left(4 \le X \le 8\right) = \int_4^6 f_1(x)\,dx = \frac{1}{36}\int_4^6 (x+3)\,dx = \frac{1}{36}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_4^6 = \frac{1}{36}\cdot 16 \approx$$

$$\approx 0{,}4444.$$

Математичні сподівання m_X, m_Y знайдемо за формулами (7.20)

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^6\int_0^2 x\cdot\frac{1}{144}\left(2x+6y\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{144}\int_0^6 x dx\int_0^2 \left(2x+6y\right)\,dy = \frac{1}{144}\int_0^6 x dx\cdot\left(2xy+3y^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{144}\int_0^6 x\left(x+3\right)dx = \frac{1}{36}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^6 = \frac{1}{36}\cdot 126 = 3{,}5.$$

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^6\int_0^2 y\cdot\frac{1}{144}\left(2x+6y\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{144}\int_0^2 y\,dy\int_0^6 \left(2x+6y\right)dx = \frac{1}{144}\int_0^2 y\,dy\cdot\left(x^2+6xy\right)\Big|_0^6 =$$

$$= \frac{36}{144}\int_0^2 y\left(y+1\right)dy = \frac{1}{4}\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{14}{3} = \frac{7}{6}.$$

Кореляційний момент K_{XY} знайдемо за формулою (7.32)

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy - m_X m_Y = \int_0^6\int_0^2 x\,y\cdot\frac{1}{144}\left(2x+6y\right)dx\,dy -$$

$$-3{,}5\cdot\frac{7}{6} = \frac{2}{144}\int_0^6 x dx\int_0^2 y\cdot\left(x+3y\right)\,dy - \frac{49}{12} = \frac{1}{72}\int_0^6 x dx\cdot\left(\frac{xy^2}{2}+y^3\right)\Bigg|_0^2 - \frac{49}{12} =$$

$$= \frac{1}{72}\int_0^6 x\left(2x+8\right)dx - \frac{49}{12} = \frac{1}{72}\left(\frac{2}{3}x^3+8x\right)\Bigg|_0^6 - \frac{49}{12} = \frac{1}{36}\cdot 120 - \frac{49}{12} = -0{,}75.$$

Відповідь: $P((X,Y)\in D_1) = 0{,}4444$; $P\left(4 \le X \le 8\right) = 0{,}4444$; $m_X = 3{,}5$;

$$m_Y = \frac{7}{6};\ K_{XY} = -0{,}75.$$

7.4 Умовні закони розподілу

Якщо ВВ X і Y, що утворюють двовимірну ВВ (X, Y), залежні, то для характеристики цієї залежності вводять поняття умовного розподілу. Закон розподілу може бути виражений через закони розподілу окремих випадкових величин, які входять у систему ВВ (X, Y).

<u>Означення 7.21</u>. *Умовним законом розподілу випадкової величини* X, що входить до системи випадкових величин (X, Y), називається її закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина Y прийняла певне значення (або потрапила в певний інтервал).

Умовний закон розподілу можна задавати або як умовну функцію розподілу $F(x/y)$, або як умовну щільність розподілу $f(x/y)$.

Для довільного типу систем випадкових величин (X, Y) (дискретних або неперервних) умовна функція розподілу може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X < x,\ Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y / X < x) = \\ &= F_1(x) \cdot P(Y < y / X < x). \end{aligned} \tag{7.37}$$

<u>Означення 7.22</u>. Умовна ймовірність $P(Y < y / X < x)$, тобто ймовірність події $Y < y$ при умові, що величина X прийняла значення менше ніж x, називається *умовною функцією розподілу величини* Y *при умові* $X < x$ і позначається

$$F_2(y / X < x) = P(Y < y / X < x).$$

Таким чином, маємо

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y / X < x) = F_2(y) \cdot F_1(x / Y < y). \tag{7.38}$$

Для залежних ДВВ X і Y умовні ймовірності обчислюються за формулами:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

або , (7.39)

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(y_j)},$$

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

або , (7.40)

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(x_i)}.$$

Умови нормування: $\sum_{i=1}^{n} P(x_i / y_j) = 1, \qquad \sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) = 1$.

Властивість умовних розподілів використовують для контролю обчислень. Якщо безумовні й умовні ймовірності $P(x_i)$ і $P(x_i / y_j)$, $P(y_j)$ і $P(y_j / x_i)$ відрізняються, то величини X і Y залежні, а якщо збігаються – незалежні.

Для залежних НВВ X і Y *умовні щільності розподілу* (або щільності ймовірності умовного розподілу) випадкових величин X і Y, що входять у систему, позначаються: $\varphi(x / y)$ – умовна щільність розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина $Y = y$; $\psi(y / x)$ – умовна щільність розподілу випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X = x$

Теорема 7.1 (множення щільностей). Спільна щільність розподілу системи двох залежних неперервних випадкових величин (X, Y) дорівнює добутку щільності однієї з них на умовну щільність іншої при заданому значенні першої:

$$f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\cdot\psi\left(y/x\right),\qquad(7.41)$$

$$f\left(x,y\right)=f_2\left(y\right)\cdot\varphi\left(x/y\right).\qquad(7.42)$$

Тоді умовні щільності розподілу визначаються формулами:

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)},\quad f_2(y)\neq 0,\qquad(7.43)$$

$$\psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)},\quad f_1(x)\neq 0.\qquad(7.44)$$

Умовні щільності розподілу мають ті ж самі властивості, що і звичайні.

Для незалежних випадкових величин $\varphi(x/y)=f_1\left(x\right)$ і $\psi(y/x)=f_2\left(y\right)$, тому $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\cdot f_2\left(y\right)$.

7.5 Числові характеристики умовних розподілів

1. Умовні математичні сподівання

Умовним математичним сподіванням ВВ X *при* $Y=y_{\mathrm{j}}$, де y_j – одне з можливих значень ВВ Y, називається:

для дискретної випадкової величини

$$M(X/Y=y_{\mathrm{j}})=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i/Y=y_j),\qquad(7.45)$$

для неперервної випадкової величини

$$M(X/y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x/y)\,dx.\qquad(7.46)$$

Умовним математичним сподіванням ВВ Y при $X = x_i$, де x_i – одне з можливих значень ВВ X, називається:

для дискретної випадкової величини

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} y_j P(Y = y_j / X = x_i), \tag{7.47}$$

для неперервної випадкової величини

$$M(Y / x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \psi(y / x) \, dy. \tag{7.48}$$

Означення 7.22. Умовне математичне сподівання $M(X / y)$ є функцією y і називається *функцією регресії X на Y*, а умовне математичне сподівання $M(Y / x)$ є функцією x і називається *функцією регресії Y на X*.

2. Умовна дисперсія

Умовною дисперсією ВВ X при $Y = y_{\mathrm{j}}$, де y_j – одне з можливих значень ВВ Y, називається:

для дискретної випадкової величини

$$D(X / Y = y_{\mathrm{j}}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} - M^2(X / Y = y_{\mathrm{j}}), \tag{7.49}$$

для неперервної випадкової величини

$$D(X / y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x / y) \, dx - M^2(X / y). \tag{7.50}$$

Умовною дисперсією ВВ Y при $X = x_i$, де x_i – одне з можливих значень ВВ X, називається:

для дискретної випадкової величини

$$D(Y / X = x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^2 P(Y = y_j ; X = x_i)}{P(X = x_i)} - M^2 (Y / X = x_i) , \qquad (7.51)$$

для неперервної випадкової величини

$$D(Y / x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \, \psi(y / x) \, dy - M^2 (Y / x) . \qquad (7.52)$$

Приклад 108. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y) законом розподілу.

$Y \setminus X$	$x_1 = 1{,}7$	$x_2 = 1{,}8$	$x_3 = 1{,}9$	$x_4 = 2{,}0$
$y_1 = 2{,}7$	0,01	0,02	0,04	0,04
$y_2 = 2{,}8$	0,01	0,08	0,11	0,33
$y_3 = 2{,}9$	0,05	0,05	0,09	0,1
$y_4 = 3{,}0$	0,01	0,03	0,02	0,01

Треба: а) знайти граничні закони для кожної ВВ X та Y, одновимірні функції розподілу $F_1(x)$ та $F_2(y)$; б) знайти числові характеристики: математичне сподівання m_X та m_Y, середнє квадратичне відхилення σ_X та σ_Y; в) побудувати двовимірну функцію розподілу $F_{XY}(x, y)$, обчислити ймовірність події $P(1{,}7 < X \le 2{,}0;\ 2{,}8 \le Y < 3)$; г) записати кореляційну матрицю, обчислити коефіцієнт кореляції r_{XY}; д) побудувати умовні закони розподілу та обчислити умовні математичні сподівання $M(X / Y = 2{,}9)$ та $M(Y / X = 1{,}8)$.

Розв'язання. а) Знайдемо граничні закони ВВ X та Y :

X	1,7	1,8	1,9	2,0
p	0,08	0,18	0,26	0,48

Y	2,7	2,8	2,9	3,0
p	0,11	0,53	0,29	0,07

$$F_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 1{,}7;\\ 0{,}08, & \text{при } 1{,}7<x\le 1{,}8;\\ 0{,}26, & \text{при } 1{,}8<x\le 1{,}9;\\ 0{,}52, & \text{при } 1{,}9<x\le 2;\\ 1, & \text{при } x>2.\end{cases} \qquad F_1(y)=\begin{cases} 0, & \text{при } y\le 2{,}7;\\ 0{,}11, & \text{при } 2{,}7<y\le 2{,}8;\\ 0{,}64, & \text{при } 2{,}8<y\le 2{,}9;\\ 0{,}93, & \text{при } 2{,}9<y\le 3;\\ 1, & \text{при } y>3.\end{cases}$$

б) Знайдемо числові характеристики: математичне сподівання m_X та m_Y, середнє квадратичне відхилення σ_X та σ_Y.

Математичне сподівання ВВ X:

$$m_X=M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i=1{,}7\cdot 0{,}08+1{,}8\cdot 0{,}18+1{,}9\cdot 0{,}26+2\cdot 0{,}48=1{,}914\,.$$

Математичне сподівання ВВ Y :

$$m_Y=M(Y)=\sum_{j=1}^{4}y_j p_j=2{,}7\cdot 0{,}11+2{,}8\cdot 0{,}53+2{,}9\cdot 0{,}29+3\cdot 0{,}07=2{,}832\,.$$

Дисперсія ВВ X:

$$D_X=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 p_i-(m_X)^2=1{,}7^2\cdot 0{,}08+1{,}8^2\cdot 0{,}18+1{,}9^2\cdot 0{,}26+$$
$$+2^2\cdot 0{,}48-(1{,}914)^2=3{,}673-3{,}663396=0{,}009604\,.$$

Дисперсія ВВ Y :

$$D_Y=\sum_{j=1}^{4}y_j^2 p_j-(m_Y)^2=2{,}7^2\cdot 0{,}11+2{,}8^2\cdot 0{,}53+2{,}9^2\cdot 0{,}29+$$
$$+3^2\cdot 0{,}07-(2{,}832)^2=8{,}026-8{,}020224=0{,}005776.$$

Середнє квадратичне відхилення ВВ X:

$$\sigma_X=\sqrt{D_X}=\sqrt{0{,}009604}\approx 0{,}098\,.$$

Середнє квадратичне відхилення ВВ Y:

$$\sigma_Y=\sqrt{D_Y}=\sqrt{0{,}005776}\approx 0{,}076\,.$$

в) Побудуємо двовимірну функцію розподілу $F_{XY}(x,y)$. Для цього знайдемо її значення за формулою (7.6).

Зрозуміло, що $F_{XY}(x,y)=0$, якщо $x\le 1{,}7 \cup y\le 2{,}7$. Знайдемо значення функції розподілу в наступних областях:

1) $\{(x,y): 1{,}7<x\le 1{,}8;\ 2{,}7<y\le 2{,}8\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)=0{,}01$;

2) $\{(x,y): 1{,}8<x\le 1{,}9;\ 2{,}7<y\le 2{,}8\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}8;Y=2{,}7)=0{,}01+0{,}02=0{,}03$;

3) $\{(x,y): 1{,}9<x\le 2{,}0;\ 2{,}7<y\le 2{,}8\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}8;Y=2{,}7)+P(X=1{,}9;Y=2{,}7)=$
$=0{,}01+0{,}02+0{,}04=0{,}07$;

4) $\{(x,y): x>2{,}0;\ 2{,}7<y\le 2{,}8\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}8;Y=2{,}7)+P(X=1{,}9;Y=2{,}7)+$
$+P(X=2{,}0;Y=2{,}7)==0{,}01+0{,}02+0{,}04+0{,}04=0{,}11$;

5) $\{(x,y): 1{,}7<x\le 1{,}8;\ 2{,}8<y\le 2{,}9\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}7;Y=2{,}8)=0{,}01+0{,}01=0{,}02$;

6) $\{(x,y): 1{,}8<x\le 1{,}9;\ 2{,}8<y\le 2{,}9\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}7;Y=2{,}8)+P(X=1{,}8;Y=2{,}7)+$
$+P(X=1{,}8;Y=2{,}8)=0{,}01+0{,}01+0{,}02+0{,}08=0{,}12$;

7) $\{(x,y): 1{,}9<x\le 2{,}0;\ 2{,}8<y\le 2{,}9\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}7;Y=2{,}8)+P(X=1{,}8;Y=2{,}7)+$
$+P(X=1{,}8;Y=2{,}8)+P(X=1{,}9;Y=2{,}7)+P(X=1{,}9;Y=2{,}8)=0{,}01+$
$+0{,}01+0{,}02+0{,}08+0{,}04+0{,}11=0{,}27$;

8) $\{(x,y): x>2{,}0;\ 2{,}8<y\le 2{,}9\}$

$F_{XY}(x,y)=P(X=1{,}7;Y=2{,}7)+P(X=1{,}7;Y=2{,}8)+P(X=1{,}8;Y=2{,}7)+$
$+P(X=1{,}8;Y=2{,}8)+P(X=1{,}9;Y=2{,}7)+P(X=1{,}9;Y=2{,}8)+$
$+P(X=2{,}0;Y=2{,}7)+P(X=2{,}0;Y=2{,}8)=0{,}01+0{,}01+0{,}02+0{,}08+$
$+0{,}04+0{,}11+0{,}04+0{,}33=0{,}64$;

9) $\{(x,y): 1{,}7<x\le 1{,}8;\ 2{,}9<y\le 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) =$
$+\,0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}05 = 0{,}07$;

10) $\{(x,y): 1{,}8 < x \le 1{,}9;\ 2{,}9 < y \le 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}8; Y=2{,}7) + P(X=1{,}8; Y=2{,}8) + P(X=1{,}8; Y=2{,}9) = 0{,}01 +$
$+\,0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}05 = 0{,}22$;

11) $\{(x,y): 1{,}9 < x \le 2{,}0;\ 2{,}9 < y \le 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}8; Y=2{,}7) + P(X=1{,}8; Y=2{,}8) + P(X=1{,}8; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}9; Y=2{,}7) + P(X=1{,}9; Y=2{,}8) + P(X=1{,}9; Y=2{,}9) = 0{,}01 +$
$+\,0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}09 = 0{,}46$;

12) $\{(x,y): x > 2{,}0;\ 2{,}9 < y \le 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}8; Y=2{,}7) + P(X=1{,}8; Y=2{,}8) + P(X=1{,}8; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}9; Y=2{,}7) + P(X=1{,}9; Y=2{,}8) + P(X=1{,}9; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=2{,}0; Y=2{,}7) + P(X=2{,}0; Y=2{,}8) + P(X=2{,}0; Y=2{,}9) = 0{,}01 + 0{,}01 +$
$+\,0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}33 + 0{,}10 = 0{,}93$;

13) $\{(x,y): 1{,}7 < x \le 1{,}8;\ y > 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}7; Y=3{,}0) = 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}01 = 0{,}08$;

14) $\{(x,y): 1{,}8 < x \le 1{,}9;\ y > 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}7; Y=3{,}0) + P(X=1{,}8; Y=2{,}7) + P(X=1{,}8; Y=2{,}8) +$
$+\,P(X=1{,}8; Y=2{,}9) + P(X=1{,}8; Y=3{,}0) = 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}01 +$
$+\,0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}03 = 0{,}26$;

15) $\{(x,y): 1{,}9 < x \le 2{,}0;\ y > 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+\,P(X=1{,}7; Y=3{,}0) + P(X=1{,}8; Y=2{,}7) + P(X=1{,}8; Y=2{,}8) +$
$+\,P(X=1{,}8; Y=2{,}9) + P(X=1{,}8; Y=3{,}0) + P(X=1{,}9; Y=2{,}7) +$

$+ P(X=1{,}9; Y=2{,}8) + P(X=1{,}9; Y=2{,}9) + P(X=1{,}9; Y=3{,}0) = 0{,}01 + 0{,}01 +$
$+ 0{,}05 + 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}02 = 0{,}52$;

16) $\{(x,y): x > 2{,}0;\ \ y > 3{,}0\}$

$F_{XY}(x,y) = P(X=1{,}7; Y=2{,}7) + P(X=1{,}7; Y=2{,}8) + P(X=1{,}7; Y=2{,}9) +$
$+ P(X=1{,}7; Y=3{,}0) + P(X=1{,}8; Y=2{,}7) + P(X=1{,}8; Y=2{,}8) +$
$+ P(X=1{,}8; Y=2{,}9) + P(X=1{,}8; Y=3{,}0) + P(X=1{,}9; Y=2{,}7) +$
$+ P(X=1{,}9; Y=2{,}8) + P(X=1{,}9; Y=2{,}9) + P(X=1{,}9; Y=3{,}0) +$
$+ P(X=2{,}0; Y=2{,}7) + P(X=2{,}0; Y=2{,}8) + P(X=2{,}0; Y=2{,}9) +$
$+ P(X=2{,}0; Y=3{,}0) = 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}03 +$
$+ 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}33 + 0{,}10 + 0{,}01 = 1{,}0$.

Функцію розподілу $F_{XY}(x,y)$ зручно складати у вигляді таблиці

$F_{XY}(x,y)$	$x \le 1{,}7$	$1{,}7 < x \le 1{,}8$	$1{,}8 < x \le 1{,}9$	$1{,}9 < x \le 2{,}0$	$x > 2{,}0$
$y \le 2{,}7$	0	0	0	0	0
$2{,}7 < y \le 2{,}8$	0	0,01	0,03	0,07	0,11
$2{,}8 < y \le 2{,}9$	0	0,02	0,12	0,27	0,64
$2{,}9 < y \le 3{,}0$	0	0,07	0,22	0,46	0,93
$y > 3{,}0$	0	0,08	0,26	0,52	1,0

Обчислимо ймовірність $P(1{,}7 < X \le 2{,}0;\ 2{,}8 \le Y < 3)$ того, що випадкова величина (X, Y) набуде значення з області $(1{,}7 < X \le 2{,}0;\ 2{,}8 \le Y < 3)$. Для цього підсумуємо ймовірності, що відповідають умовам $1{,}7 < X \le 2{,}0;\ 2{,}8 \le Y < 3$, тобто з закону розподілу матимемо:

$$P(1{,}7 < X \le 2{,}0;\ 2{,}8 \le Y < 3) = 0{,}08 + 0{,}11 + 0{,}33 + 0{,}05 + 0{,}09 + 0{,}1 = 0{,}76.$$

г) Знайдемо кореляційну матрицю за формулою (7.34). Для цього обчислимо кореляційний момент за формулою (7.30); $K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$ або за формулою (7.31) для ДВВ: $K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \, y_j \, p_{ij} - m_X m_Y$. Скористаємося формулою (7.30).

Закон розподілу ДВВ $(X\,Y)$ записуємо у вигляді таблиці, перший рядок якої є добуток значень ВВ X та Y, а другий – ймовірності $p_{i\,j}$, з якими набуваються ці значення:

$(X\,Y)$	4,59	4,76	4,93	5,1	4,86	5,04	5,22	5,4
p	0,01	0,01	0,05	0,01	0,02	0,08	0,05	0,03

$(X\,Y)$	5,13	5,32	5,51	5,7	5,4	5,6	5,8	6,0
p	0,04	0,11	0,09	0,02	0,04	0,33	0,1	0,01

Знайдемо математичне сподівання $M(XY)$:

$$M(XY) = \sum_i (xy)_i \, p_i = 4{,}59 \cdot 0{,}01 + 4{,}76 \cdot 0{,}01 + 4{,}93 \cdot 0{,}05 + 5{,}1 \cdot 0{,}01 +$$
$$+ 4{,}86 \cdot 0{,}02 + 5{,}04 \cdot 0{,}08 + 5{,}22 \cdot 0{,}05 + 5{,}4 \cdot 0{,}03 + 5{,}13 \cdot 0{,}04 +$$
$$+ 5{,}32 \cdot 0{,}11 + 5{,}51 \cdot 0{,}09 + 5{,}7 \cdot 0{,}02 + 5{,}4 \cdot 0{,}04 + 5{,}6 \cdot 0{,}33 +$$
$$+ 5{,}8 \cdot 0{,}10 + 6{,}0 \cdot 0{,}01 = 5{,}4187.$$

$$K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = 5{,}4187 - 1{,}914 \cdot 2{,}832 = 5{,}4187 -$$
$$- 5{,}420448 = -0{,}001748 .$$

$K_{XY} \neq 0$. Це означає, що випадкові величини X і Y залежні.

Кореляційна матриця

$$K = \begin{pmatrix} D_X & K_{XY} \\ K_{XY} & D_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}009604 & -0{,}001748 \\ -0{,}001748 & 0{,}005776 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції за формулою:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}001748}{0{,}098 \cdot 0{,}076} = \frac{-0{,}001748}{0{,}007448} \approx -0{,}2347 .$$

д) Побудуємо умовні закони розподілу і обчислимо умовні математичні сподівання $M(X / Y = 2{,}9)$ та $M(Y / X = 1{,}8)$;

Умовні ймовірності $P(X = x_i / Y = y_k)$ знайдемо за формулою:

$$P(X = x_i / Y = y_k) = \frac{P(X = x_i; Y = y_k)}{P(Y = y_k)}.$$

З таблиці закону розподілу для ВВ Y маємо, що $P(Y = 2,9) = 0,29$. Тоді

$$P(X = x_1 / \mathrm{Y} = 2,9) = 0,05 / 0,29 \approx 0,172,$$
$$P(X = x_2 / Y = 2,9) = 0,05 / 0,29 \approx 0,172,$$
$$P(X = x_3 / Y = 2,9) = 0,09 / 0,29 \approx 0,311,$$
$$P(X = x_4 / Y = 2,9) = 0,1 / 0,29 \approx 0,345.$$

Умовний закон ВВ X при $Y = 2,9$:

X	1,7	1,8	1,9	2.0
$P(X / Y = 2,9)$	0,172	0,172	0,311	0,345

Умовне математичне сподівання $M(X / Y = 2,9)$ знайдемо за формулою: $M(X / Y = y_{\mathrm{j}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i / Y = y_j)$. Отже,

$$M(X / Y = 2,9) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i / Y = 2,9) = 1,7 \cdot 0,172 +$$
$$+ 1,8 \cdot 0,172 + 1,9 \cdot 0,311 + 2,0 \cdot 0,345 \approx 1,883.$$

Умовні ймовірності $P(Y = y_j / X = x_k)$ знайдемо за формулою:

$$P(Y = y_j / X = x_{\mathrm{k}}) = \frac{P(X = x_k; Y = y_j)}{P(X = x_k)}.$$

З таблиці закону розподілу для ВВ X маємо, що $P(X = 1,8) = 0,18$. Тоді

$$P(\mathrm{Y} = y_1 / \mathrm{X} = 1,8) = 0,02 / 0,18 \approx 0,111,$$
$$P(\mathrm{Y} = y_2 / \mathrm{X} = 1,8) = 0,08 / 0,18 \approx 0,444,$$
$$P(\mathrm{Y} = y_3 / \mathrm{X} = 1,8) = 0,05 / 0,18 \approx 0,278,$$
$$P(\mathrm{Y} = y_4 / \mathrm{X} = 1,8) = 0,03 / 0,18 \approx 0,167.$$

Умовний закон ВВ Y при $X = 1,8$:

Y	2,7	2,8	2,9	3,0
$P(Y/X=1,8)$	0,111	0,444	0,278	0,167

Умовне математичне сподівання $M(Y/X=1,8)$ знайдемо за формулою: $M(Y/X=x_i)=\sum_{j=1}^{m} y_j P(Y=y_j/X=x_i)$. Отже,

$$M(Y/X=1,8)=\sum_{j=1}^{4} y_j P(Y=y_j/X=1,8)=2,7\cdot 0,111+$$
$$+2,8\cdot 0,444+2,9\cdot 0,278+3,0\cdot 0,167\approx 2,850.$$

Відповідь: б) $m_X=1,914$, $m_Y=2,832$, $\sigma_X\approx 0,098$, $\sigma_Y\approx 0,076$;
г) $r_{XY}\approx -0,2347$; д) $M(X/Y=2,9)\approx 1,883$; $M(Y/X=1,8)\approx 2,85$.

Приклад 109. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X,Y) законом розподілу.

$Y\setminus X$	1	3	4
2	0,10	0,05	0,35
4	0,05	0,20	0,25

Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y. Встановити, чи є залежними величини X і Y.

Розв'язання. Знайдемо m_X, m_Y за формулами (7.19).

$$m_X=\sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{j=1}^{2} p_{ij}=1\cdot(0,1+0,05)+3\cdot(0,05+0,20)+4\cdot(0,35+0,25)=3,3.$$

$$m_Y=\sum_{j=1}^{2} y_j \sum_{i=1}^{3} p_{ij}=2\cdot(0,1+0,05+0,35)+4\cdot(0,05+0,20+0,25)=3$$

За формулою (7.31) знайдемо K_{XY}.

$$K_{XY}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i\, y_j\, p_{ij}-m_X m_Y=\sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{j=1}^{2} y_j\, p_{ij}-m_X m_Y=$$
$$=1\cdot(2\cdot 0,1+4\cdot 0,05)+3\cdot(2\cdot 0,05+4\cdot 0,20)+4\cdot(2\cdot 0,35+4\cdot 0,25)-$$
$$-3,3\cdot 3=9,9-9,9=0.$$

Коефіцієнт кореляції r_{XY} визначається за формулою (7.35)

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 .$$

Те, що $r_{XY} = 0$, не означає незалежність X і Y. У даному випадку треба перевірити виконання умови незалежності

$$p_{ij} = P(x_i) \cdot P(y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

для будь-яких i та j.

Запишемо граничні закони ВВ X та Y:

X	1	3	4
p	0,15	0,25	0,60

Y	2	2
p	0,50	0,50

Знайдемо $P(X = x_1) \cdot P(Y = y_1) = 0{,}15 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$. За умовою $p_{11} = 0{,}1$. Оскільки $p_{11} \neq P(X = x_1) \cdot P(Y = y_1)$, то звідси можна зробити висновок, що випадкові величини X і Y залежні..

Відповідь: Випадкові величини X і Y є залежними.

Приклад 110. Задано щільність розподілу системи двох неперервних ВВ (X, Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D : (0 < x < 2, 0 < y < x) \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Встановити, чи є залежними величини X і Y. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

Розв'язання. Обчислимо математичні сподівання компонент X і Y:

$$M(X) = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^x x \cdot \frac{1}{2}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^2 x\, dx \cdot \int_0^x dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x\, dx \cdot y \Big|_0^x = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$M(Y)=m_Y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^x y\cdot\frac{1}{2}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\cdot\int_0^x y\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{2}{3}.$$

Обчислимо щільність розподілу компонент X і Y:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^x\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\cdot y\Big|_0^x=\frac{x}{2}\ \text{ при }\ 0<x<2\ \text{ і}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot x\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot 2=1\ \text{ при }\ 0<y<x.$$

Для того, щоб з'ясувати залежність випадкових величини X і Y, обчислимо умовні щільності ймовірностей компонент:

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}\ \text{ і }\ \psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot x}=\frac{1}{x}.$$

Оскільки $f_1(x)\neq\varphi(x/y)$ і $f_2(y)\neq\psi(y/x)$, то випадкові величини X і Y є залежними.

Знайдемо кореляційний момент:

$$K_{XY}=\iint_D xy\,f(x,y)\,dx\,dy-M(X)\cdot M(Y)=\iint_D xy\,\frac{1}{2}\,dx\,dy-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 x\,dx\int_0^x y\,dy-\frac{8}{9}=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x-\frac{8}{9}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^3}{2}\,dx-\frac{8}{9}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2-\frac{8}{9}=$$

$$=\frac{16}{16}-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}.$$

Знайдемо дисперсії компонент:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\,dx\,dy-M^2(X)==\int_0^2\int_0^x x^2\cdot\frac{1}{2}\,dx\,dy-\left(\frac{4}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx\cdot\int_0^x dy-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx\cdot y\Big|_0^x-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3\,dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2-\frac{16}{9}=$$

$$=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9},$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\,dx\,dy-M^2(Y)=\int_0^2\int_0^x y^2\cdot\frac{1}{2}\,dx\,dy-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\cdot\int_0^x y^2\,dy-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^x-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^3}{3}dx-\frac{4}{9}=\frac{1}{6}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2-\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції за формулою (7.35):, де

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ і } \sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$ Матимемо:

$$r_{XY}=\frac{1}{9}:\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{9}:\frac{2}{9}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Це означає, що випадкові величини X і Y залежні.

Відповідь: Випадкові величини X і Y залежні, $r_{XY}=0{,}5$.

Приклад 111. Задано щільність розподілу системи двох неперервних ВВ (X,Y):

$$f(x,y)=e^{-(x+y)},\ x\ge 0,\ y\ge 0.$$

Встановити, чи є залежними величини X і Y.

Розв'язання. Насамперед перевіримо виконання умови (7.10).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx\,dy=\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\int_0^{\infty} e^{-y}dy=\left.\left(-e^{-x}\right)\right|_0^{\infty}\cdot$$

$$\cdot\left.\left(-e^{-y}\right)\right|_0^{\infty}=1\cdot 1=1.$$

Зазначимо, що умову (7.10) корисно перевіряти завжди. Якщо вона не виконується, то щільність розподілу задана невірно і подальше розв'язування задачі не має сенсу.

Знайдемо щільності розподілу компонент X і Y:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}dy=e^{-x}\cdot\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{\infty}=e^{-x}.$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(x+y)}dx=e^{-y}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx=e^{-y}\cdot\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty}=e^{-y}.$$

Перевіримо умову $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$:

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}=e^{-x}\cdot e^{-y}=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Таким чином, випадкові величини X і Y незалежні.

Відповідь: Випадкові величини X і Y незалежні.

7.6 Завдання для самостійної роботи

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>1. Дві незалежні ДВВ X та Y задані своїми законами розподілу:

X	-2	1	4
p	0,2	0,3	0,5

Y	-1	0	1	2	3
p	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Знайти закон розподілу ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин (X,Y).</td><td>

$Y\setminus X$	-2	1	4
-1	0,06	0,09	0,15
0	0,02	0,03	0,05
1	0,04	0,06	0,1
2	0,06	0,09	0,15
3	0,02	0,03	0,05

</td></tr>
<tr><td>2. Заданий закон розподілу системи двох ДВВ (X,Y)

$Y\setminus X$	-2	1	4
-1	0,06	0,09	0,15
0	0,12	0,06	0,10
2	0,07	0,15	0,20

Знайти $P(X+Y\ge 3)$, $P(X<0,\ Y\ge 0)$, $P(X\le 4, Y\ge 2)$, $P(X\ge 1,\ -1\le Y<2)$, того, що ВВ (X,Y) набуде значення відповідних двовимірних областей.</td><td>$P(X+Y\ge 3)=0{,}4$;

$P(X<0,\ Y\ge 0)=0{,}19$;

$P(X\le 4, Y>1)=0{,}42$;

$P(X\ge 1,\ -1<Y<2)=0{,}4$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>3. Задана щільність розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X,Y)

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу $F(x,y)$. Визначити ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у квадрат D: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$.</td><td>$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\right);$$

$$P((X,Y)\in D)\approx\frac{1}{16}.$$</td></tr>
<tr><td>4. Заданий закон розподілу системи двох ДВВ (X,Y)
<table>
<tr><td>$X \backslash Y$</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,3</td><td>0,15</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,15</td><td>0,10</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,05</td><td>0,05</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,05</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
Знайти числові характеристики m_X, m_Y, r_{XY}.</td><td>$m_X=3{,}06$;
$m_Y=2{,}2$;
$r_{XY}\approx-0{,}06832$.</td></tr>
<tr><td>5. Задано щільність розподілу системи двох неперервних ВВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y),\ (x,y)\in D,\\ 0,\ (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$$D:\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$$

Знайти математичні сподівання ВВ (X,Y) m_X, m_Y і кореляційний момент K_{XY}.</td><td>$m_X\approx0{,}7854$;
$m_Y\approx0{,}7854$;
$K_{XY}\approx-0{,}0461$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>6. Заданий закон розподілу системи двох ДВВ (X,Y)
<table>
<tr><td>$Y \backslash X$</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,15</td><td>0,3</td><td>0,35</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,05</td><td>0,12</td><td>0,03</td></tr>
</table>
Знайти: а) умовний закон розподілу компоненти X при умові $Y=4$,
б) умовний закон розподілу компоненти Y при умові $X=5$.</td>
<td><table>
<tr><td>$X \backslash Y=4$</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,1875</td><td>0,375</td><td>0,4375</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$Y \backslash X=5$</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>p</td><td>$\frac{5}{7}$</td><td>$\frac{2}{7}$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>7. Задано щільність розподілу системи двох неперервних ВВ (X,Y): $f(x,y)=\dfrac{15-x-y}{2}$, $(x,y)\in D$, де $D:(0\le x\le 4, 0\le y\le 8)$. Знайти умовні щільності ймовірностей компонент X і Y.</td>
<td>$\varphi(x/y)=\dfrac{15-x-y}{52-4y}$,

$\psi(y/x)=\dfrac{15-x-y}{88-8x}$.</td></tr>
</table>

8 Елементи теорії кореляції і регресії

У природі багато явищ і процесів взаємопов'язано між собою. Наприклад, споживання електроенергії у житловому будинку і кількість мешканців, часу доби та температури; покращення результатів спортсмена і оптимально підібрані навантаження за їхнім видом, обсягом та інтенсивністю; величина додаткових втрат електроенергії в силовому трансформаторі з урахуванням середнього значення відхилення фазних напруг, середнього значення коефіцієнта потужності фаз тощо; зріст людини і її вага та інші.

Навіть у наведених прикладах неможливо врахувати вплив усіх факторів на кількісні співвідношення між двома основними величинами (показниками). Тому характеристика кожного такого взаємозв'язку за даними окремих спостережень має випадковий характер і лише за даними великої кількості спостережень можна встановити деякі закономірності.

Вплив одних ознак на інші може бути позитивним і негативним. Тому цікавить можливість передбачити поведінку (прийняті значення змінної) однієї змінної залежно від поведінки (значення змінної, що приймаються) іншої, тобто треба добре розбиратися в таких взаємозв'язках, усувати або зменшувати негативний вплив і вміти своєчасно використовувати корисні взаємозв'язки.

Розглянемо систему двох випадкових величин (X, Y). Коли маємо справу з двовимірними даними, завжди є можливість вивчати кожен вимір окремо як частину одномірної сукупності даних. Спільне вивчення обох вимірів дає можливість встановити взаємозв'язок між ними.

Існують два підходи, за допомогою яких аналізують двовимірні дані: кореляційний аналіз, що дозволяє оцінити ступінь взаємозв'язку між двома факторами (якщо такий взаємозв'язок взагалі існує), та регресійний аналіз, що показує, як можна передбачити або керувати однією з двох змінних за допомогою іншої.

Основними завданнями кореляційного аналізу є: 1) встановлення тісноти зв'язку, тобто оцінка ступеня розсіювання значень ВВ Y навколо лінії регресії для різних значень $X = x_i$ при кореляційній залежності Y на X (або розсіювання значень ВВ X для різних значень $Y = y_j$ при розгляді кореляційної залежності X на Y); 2) визначення форми зв'язку, тобто знаходження за кореляційною таблицею функції $y = g(x)$ або $x = \varphi(y)$.

Суть регресійного аналізу полягає у знаходженні важливіших факторів, що впливають на залежну змінну. Вона встановлює відносини між змінними. Регресія використовується у багатьох галузях: техніка, медицина, економіка, комп'ютерні і соціальні науки та інше. Її важливість зростає з доступністю великих даних. Регресія корисна для прогнозування відповіді на нові умови.

Регресія розглядає деяке явище та ряд спостережень. Кожне спостереження має дві та більше змінних. Припускаючи, що змінна залежить від інших, треба побудувати відносини з-поміж них, тобто потрібно знайти функцію, яка відображає залежність одних змінних або даних від інших.

Зазвичай у регресії є одна неперервна і необмежена залежна змінна. Вхідні змінні можуть бути необмеженими, дискретними тощо.

У регресійному аналізі розглядається одностороння залежність випадкової залежної змінної Y від однієї (або кількох) невипадкової незалежної змінної X. Змінні X і Y можуть бути пов'язані або функціональною залежністю, або статистичною, або бути незалежними.

Означення 8.1. *Функціональною* називається залежність між змінними X і Y у випадку, коли зміна однієї з них викликає відповідну зміну іншої.

Між змінними величинами іноді може існувати така залежність, коли кожному значенню однієї змінної відповідає не певне, а безліч можливих значень іншої змінної.

Означення 8.2. *Статистичною* (або стохастичною, імовірнісною) називається залежність між змінними X і Y у випадку, коли зміна однієї з них веде до зміни розподілу іншої.

Означення 8.3. Статистична залежність між двома змінними, за якої кожному значенню однієї змінної відповідає певне умовне математичне сподівання (середнє значення) іншої, називається *кореляційною*.

Інакше кореляційною залежністю між двома змінними величинами називається *функціональна залежність* між значеннями однієї з них і умовним математичним сподіванням іншої.

Кореляційна залежність може бути подана у вигляді:

$$g(x) = M(Y / x) \tag{8.1}$$

або

$$\varphi(y) = M(X / y). \tag{8.2}$$

Рівняння (8.1) і (8.2) називаються *рівняннями регресії* Y на X і X на Y відповідно, а функції $g(x)$ і $\varphi(y)$ називаються *функціями регресії*, а їх графіки – *лініями регресії*.

Передбачається, що $g(x) \neq \text{const}$ та $\varphi(y) \neq \text{const}$, тобто. якщо при зміні x або y умовні математичні сподівання $M(Y / x)$ і $M(X / y)$ не змінюються, то кажуть, що кореляційна залежність між змінними X і Y відсутня.

<u>Означення 8.4</u>. Кореляційна залежність між випадковими величинами X та Y називається *лінійною*, якщо обидві функції регресії $g(x)$ та $\varphi(y)$ є лінійними.

8.1 Лінійна регресія. Прямі лінії середньоквадратичної регресії

Розрізняють лінійні та нелінійні регресії. Розглянемо лінійну регресію.

Лінійна регресія – це найпростіший вид регресії. Однією з його переваг є простота обчислювальних алгоритмів, наочність та легкість інтерпретації результатів.

Розглянемо систему двох випадкових величин (X,Y), де X і Y – залежні випадкові величини. Лінійна регресія передбачає побудову такої прямої лінії, при якій значення показників, що лежать на ній, будуть максимально наближені до фактичних і, продовжуючи цю пряму, одержуємо значення прогнозу. Процес продовження прямої називається *екстраполяцією*. Відповідно до цього постає задача визначити цю пряму, тобто рівняння цієї прямої.

Нехай величини X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю. Будемо вважати, що величина Y є лінійною функцією величини X:

$$Y \cong g(X) = aX + b, \tag{8.3}$$

де a і b – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

<u>Означення 8.5</u>. Функція $g(X)$ називається *найкращим наближенням випадкової величини Y в сенсі методу найменших квадратів*, якщо математичне сподівання $M(Y - g(X))^2$ приймає найменше можливе значення.

Також функція $g(X)$ називається *середньоквадратичною регресією* Y *на* X.

Теорема 8.1. Лінійна середньоквадратична регресія Y на X обчислюється за формулою:

$$g(X) = m_Y + r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X), \tag{8.4}$$

де $m_X = M(X)$, $m_Y = M(Y)$, $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)}$, $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ – коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

Означення 8.6. Величину $a = r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ називають *коефіцієнтом регресія* Y *на* X.

Коефіцієнт регресії є мірою залежності змінної Y від змінної X або мірою впливу, що надається зміною змінної X на змінну Y, тобто коефіцієнт регресії a показує на скільки одиниць у середньому по сукупності зміниться результуюча змінна Y, якщо змінна X збільшиться на одиницю.

З (8.4) матимемо $b = m_Y - a \cdot m_X$. Якщо $b > 0$, маємо додатну лінійну регресію, що показує зростання залежної змінної при збільшенні значень змінної X. Якщо $b < 0$, то маємо від'ємну лінійну регресію, при якій зі збільшенням значень X значення змінної Y спадають.

Означення 8.7. Пряму, що задана рівнянням

$$y - m_Y = r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X), \tag{8.5}$$

називають *прямою середньоквадратичної регресії* Y *на* X.

Для оцінки тісноти лінійного зв'язку між змінними використовують лінійний коефіцієнт парної кореляції r_{XY} для лінійної регресії: $r_{XY} = a \cdot \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

Коефіцієнт кореляції r_{XY} вказує на скільки величин σ_Y зміниться в середньому Y, якщо X збільшиться на одну величину σ_X.

За своїм характером кореляційний зв'язок може бути прямим і зворотним, а за силою – сильним, середнім, слабким. Крім того, зв'язок може бути відсутнім або бути повним. При оцінці сили зв'язку коефіцієнтів кореляції використовується шкала Чеддока (табл. 8.1):

Таблица 8.1

Сила зв’язку	Характер зв’язку	
	Прямий (+)	Зворотній (-)
Повна	1	-1
Дуже сильна	від 0,9 до 1	від -0,9 до -1
Сильна	від 0,7 до 0,9	від -0,7 до -0,9
Середня	від 0,5 до 0,7	від -0,5 до -0,7
Слабка	від 0,3 до 0,5	від -0,3 до -0,5
Дуже слабка	від 0 до 0,3	від 0 до -0,3
Зв’язок відсутній	0	0

Для оцінки якості підбору лінійної функції використовують квадрат лінійного коефіцієнта кореляції r_{XY}^2, який називається *коефіцієнтом детермінації* $R^2 = r_{XY}^2$.

<u>Означення 8.8</u>. Величину $\sigma_Y^2(1 - r_{XY}{}^2)$ називають *залишковою дисперсією випадкової величини* Y *відносно випадкової величини* X.

Ця величина характеризує величину похибки, що утворюється при заміні випадкової величини Y лінійною функцією $g\left(X\right)=aX+b$.

Аналогічно, лінійна середньоквадратична регресія X на Y обчислюється за формулою:

$$\varphi(Y)=m_X+r_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-m_Y)\,, \tag{8.6}$$

Пряма середньоквадратичної регресії X на Y визначається формулою:

$$x-m_X=r_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)\,. \tag{8.7}$$

Величина $a=r_{XY}\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ – *коефіцієнт регресії* X на Y і $\sigma_X^2(1-r_{XY}{}^2)$ – *залишкова дисперсія випадкової величини X відносно випадкової величини Y*.

Коефіцієнт регресії може приймати будь-які значення. Він не симетричний, тобто змінюється, якщо X і Y поміняти місцями.

Обидві прямі регресії проходять через точку $\left(M(X),M(Y)\right)$ – *центр спільного розподілу величин* X і Y.

Якщо $r_{XY}=\pm1$, то випадкові величини X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю. Вони лінійно залежні і залишкова дисперсія дорівнює нулю. Отже немає похибки при заміні Y на лінійну функцію від X і навпаки. Обидві прямі регресії співпадають.

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $r_{XY}=0$, тобто прямі регресії проходять через центр спільного розподілу паралельно координатним осям.

Якщо обидві функції регресії Y на X і X на Y лінійні, то величини X і Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю. У цьому випадку графіки функцій регресії є прямі лінії. Вони збігаються з прямими середньоквадратичної регресії.

Якщо двомірна випадкова величина $\left(X,Y\right)$ розподілена нормально, то X і Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю.

Регресійна залежність називається *лінійною регресією*, якщо вона може бути записана у вигляді рівняння прямої:

$$y = ax + b, \tag{8.8}$$

Про парну лінійну регресію говорять, коли встановлено залежність між двома змінними величинами x і y. Парна лінійна регресія називається також *однофакторною лінійною регресією*, оскільки один фактор (незалежна змінна x) впливає на результуючу змінну (залежну змінну y).

Розглянемо випадок, коли значення X і Y спостерігалися по одному разу, тобто

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Частіше для знаходження коефіцієнтів a і b рівняння (8.8) застосовують метод найменших квадратів, який дає найкращі лінійні незміщені оцінки, тобто очікувані значення коефіцієнтів регресії мають бути такими, що точки (x_i, y_i), побудовані за вихідними даними, повинні лежати якомога ближче до точок лінії регресії. Визначені коефіцієнти рівняння регресії за цим методом повинні забезпечити мінімум суми квадратів відхилень дослідних даних від значень, обчислених за рівнянням регресії (8.8), тобто мінімум функції:

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 \to \min .$$

Враховуючи, що $Y_i = a\, x_i + b$, матимемо рівняння суми квадратів відхилень у вигляді

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\, x_i - b)^2 .$$

Мінімум функції визначають, прирівнюючи нулю частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0 \text{ і } \frac{\partial F}{\partial b}=0 .$$

Розв’язування цих рівнянь зводиться до розв'язання системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\cdot b=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i. \end{cases} \quad (8.9)$$

Розв’язком її є значення коефіцієнтів a і b у вигляді:

$$a=\frac{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \qquad b=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \quad (8.10)$$

Нехай X та Y – залежні дискретні випадкові величини. Закон їхнього спільного розподілу заданий таблицею:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	…	x_n	$\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$P(Y=y_1)$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$P(Y=y_2)$
….	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\cdots$	p_{nm}	$P(Y=y_m)$
$\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$P(X=x_n)$	1

Тут у рядках вказані можливі значення x_i випадкової величини X, а в стовпцях – можливі значення y_j випадкової величини Y, на перетинах рядків та стовпців зазначені відповідні ймовірності p_{ij} того, що в результаті випробування парою випадкових величин (X,Y) буде прийнята пара значень (x_i, y_j) $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$.

Сума всіх ймовірностей, як сума ймовірностей подій, що становлять повну групу подій, повинна дорівнювати одиниці: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) заданий таблицею, можна знайти закон розподілу окремих її компонентів X і Y. Для цього знаходять суми ймовірностей «по рядках» – для змінної Y (8.11), і «по стовпцях» – для змінної X (8.12). При підрахунку ймовірностей законів розподілу окремих змінних слід пам'ятати про етап контрольної перевірки, тобто про нормування.

$$P(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ j = \overline{1,m}\ ; \tag{8.11}$$

$$P(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ i = \overline{1,n}\ . \tag{8.12}$$

Матимемо

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\ldots$	$P(x_n)$

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
p	$P(y_1)$	$P(y_2)$	$\ldots$	$P(y_m)$

Нехай $\overline{y}_x$ – середнє значення тих значень y_j величини Y, які відповідають даному значенню x величини X. Воно є умовне математичне сподівання величини Y при $X = x$:

$$\overline{y}_x = M(Y / X = x). \tag{8.13}$$

Оскільки кожному можливому значенню x_i випадкової величини X відповідатиме єдине значення $\overline{y}_x$, то це значення є функцією від x:

$$\overline{y}_x = g(x). \qquad (8.14)$$

Функціональна залежність (8.14) є *рівнянням регресії* Y *на* X, а її графік – *лінія регресії* Y *на* X.

Лінія регресії Y на X наочно показує, як у середньому змінюється випадкова величина Y за зміни випадкової величини X. Точки навколо лінії регресії символізують розкид можливих значень y_j величини Y навколо лінії регресії (8.14). Саме з цих значень Y для кожного x має бути знайдено їхнє середнє значення $\overline{y}_x$.

Середнє значення $\overline{y}_x$ величини Y для кожного можливого значення x_i величини X знаходять за формулою:

$$\overline{y}_{x_i} = g(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}}{P(x_i)}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (8.15)$$

Підрахувавши значення $\overline{y}_{x_i}$, складаємо закон розподілу випадкової величини $\overline{Y} = g(X)$:

$\overline{Y} = g(X)$	$\overline{y}_{x_1}$	$\overline{y}_{x_2}$	$\cdots$	$\overline{y}_{x_n}$
p	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\ldots$	$P(x_n)$

(Імовірності значень $\overline{y}_{x_i}$ величини $\overline{Y}$ такі самі, як і ймовірності значень x_i величини X).

Якщо коефіцієнт лінійної кореляції $r_{XY} \neq 0$, то величини X і Y лінійно корельовані, отже, і залежні. Своєю величиною він характеризує тісноту цього зв'язку. Однак не будь-якого, а лише лінійного кореляційного зв'язку між X і Y. Максимальна тіснота зв'язку відповідає випадкам, коли $r_{XY} = \pm 1$. При цьому між X і Y має місце жорсткий функціональний зв'язок, причому зв'язок обов'язково лінійний. У цьому випадку лінія регресії $\overline{y}_x = g(x)$ стане прямою, і ніякого розкиду навколо неї точок, що зображують можливі значення величини Y , не буде – всі вони лежатимуть на цій прямій.

Нагадуємо, що *коефіцієнт кореляції* визначається формулою:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}, \text{ де } K_{XY} = M(\mathrm{XY}) - M(X)\cdot M(Y),\ M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(x_i),$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j),\ M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij},\ D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2,$$

$$D(Y) = M\left(Y^2\right) - (M(Y))^2,\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)},\ \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

Для уточнення жорсткості функціонального зв'язку розглядають *кореляційне відношення величини Y до величини X* :

$$\eta_{YX} = \frac{\sigma(\overline{Y})}{\sigma(Y)} = \frac{\sqrt{D(g(X))}}{\sqrt{D(Y)}} = \sqrt{1 - \frac{M(Y - g(X))^2}{D(Y)}}\ . \tag{8.16}$$

$\eta_{YX} = 0$ при $D(\overline{Y}) = 0$, тобто за умови, що $\overline{Y} = g(X) - \mathrm{const}$. Тоді рівняння регресії Y на X має вигляд $\overline{y}_x = g(x) = \overline{Y}$, отже, випадкова величина Y не залежить кореляційно (в середньому) від величини X . Якщо $\eta_{YX} = 1$, то маємо, що $M(Y - g(X))^2$, звідки випливає, що $Y = g(X)$. Тобто випадкові величини X і Y пов'язані жорсткою функціональною залежністю $Y = g(X)$, причому $g(X) \neq \mathrm{const}$.

Зауваження 8.1. Чим ближче кореляційне відношення до одиниці, тим ближче кореляційна залежність Y від X до функціональної залежності, вона є тіснішою. Якщо кореляційне відношення ближче до нуля, то ця кореляційна залежність слабша.

Таким чином, кореляційне відношення випадкової величини Y до випадкової величини X є мірою і наявності, і тісноти будь-якої (а не тільки лінійної) кореляційної залежності величини Y від величини X.

Аналогічно, $\overline{x}_y$ – середнє значення тих значень x_i величини X, які відповідають даному значенню y величини Y. Воно є умовне математичне сподівання величини X при $Y = y$:

$$\overline{x}_y = M\left(X / Y = y\right) \tag{8.17}$$

і кожному можливому значенню y_j випадкової величини Y відповідає єдине значення $\overline{x}_y$, яке є функцією від y:

$$\overline{x}_y = \varphi\left(y\right). \tag{8.18}$$

Залежність виду (8.18) називається *рівнянням регресії X на Y*, а її графік – *лінією регресії X на Y*. Лінія регресії X *на* Y показує, як у середньому змінюється X за зміни випадкової величини Y.

Кореляційне відношення величини X до величини Y обчислюється за формулою

$$\eta_{XY} = \frac{\sigma\left(\overline{X}\right)}{\sigma\left(X\right)} = \frac{\sqrt{D\left(\varphi\left(Y\right)\right)}}{\sqrt{D\left(X\right)}} = \sqrt{1 - \frac{M\left(X - \varphi\left(Y\right)\right)^2}{D\left(X\right)}}\ , \tag{8.19}$$

яке оцінює наявність і тісноту кореляційної залежності величини X від Y де $\overline{x}_y = \varphi\left(y\right)$ – рівняння регресії X на Y.

Зауваження 8.2. На відміну від коефіцієнта лінійної кореляції, який симетричний щодо X і Y $\left(r_{XY} = r_{YX}\right)$, кореляційне відношення такої властивості не має $\left(\eta_{YX} \neq \eta_{XY}\right)$.

Найпростіший випадок, що зустрічається на практиці – це коли функція $\overline{y}_x = g\left(x\right)$ чи $\overline{x}_y = \varphi\left(y\right)$ лінійна, тобто коли її графік – пряма лінія. Тоді кореляційна залежність Y від X і відповідно кореляційна залежність X від Y називається *лінійною*, інакше – *нелінійною*.

Приклад 112. Задана щільність спільного розподілу ВВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases} \text{ де } D:\left(y\ge 0, x+y\le 2, x\ge 1\right).$$

Знайти: а) сталу C; б) рівняння лінії регресії Y на X.

Розв'язання. а) сталу C знайдемо з властивості щільності спільного розподілу:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow C\int_1^2 x\,dx\int_0^{2-x} y\,dy=C\cdot\frac{5}{24}=1 \quad\Rightarrow\quad C=4{,}8.$$

Тоді $f(x,y)=\begin{cases} 4{,}8\,xy, & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$ $D:\left(y\ge 0, x+y\le 2, x\ge 1\right)$.

б) знайдемо рівняння лінії регресії Y на X за формулою: $y-m_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$. Застосуємо формули: $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$,

$$m_X=\iint_D x\cdot f(x,y)\,dx\,dy,\ m_Y=\iint_D y\cdot f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$D(X)=\iint_B x^2 f(x,y)\,dx\,dy-(m_X)^2,\ D(Y)=\iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy-(m_Y)^2,$$

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)},\ \sigma_Y=\sqrt{D(Y)},\ K_{XY}=\iint_D xy f(x,y)\,dx\,dy-m_X\cdot m_Y.$$

Тоді

$$m_X=\iint_D x\cdot 4{,}8\,xy\,dx\,dy=4{,}8\int_1^2 x^2dx\int_0^{2-x} y\,dy=1{,}28,$$

$$m_Y=\iint_D y\cdot 4{,}8\,xy\,dx\,dy=4{,}8\int_1^2 x\,dx\int_0^{2-x} y^2\,dy=0{,}48,$$

$$D(X)=\iint_D x^2\cdot 4{,}8\,xy\,dx\,dy-(1{,}28)^2=4{,}8\int_1^2 x^3\,dx\int_0^{2-x} y\,dy-1{,}6384=0{,}0416,$$

$$D(Y)=\iint_D y^2\,4{,}8\,xy\,dx\,dy-(0{,}48)^2=4{,}8\int_1^2 x\,dx\int_0^{2-x} y^3\,dy-0{,}2304=54{,}0096,$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}0416} \approx 0{,}204, \qquad \sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{54{,}0096} \approx 7{,}349.$$

$$K_{XY} = \iint\limits_D xy \cdot 4{,}8\, xy\, dxdy - 1{,}28 \cdot 0{,}48 = 4{,}8\int\limits_1^2 x^2\, dx \int\limits_0^{2-x} y^2\, dy - 0{,}6144 = 0{,}0256$$

$$r_{XY} = \frac{0{,}0256}{0{,}204 \cdot 7{,}349} = 0{,}0171 .$$

Підставимо знайдені значення в рівняння лінії регресії:

$$y - 0{,}48 = 0{,}0171 \cdot \frac{7{,}349}{0{,}204}(x - 1{,}28).$$

Рівняння регресії Y на X матиме вигляд: $y = 0{,}616\, x - 0{,}3085$.

Відповідь: $y = 0{,}616\, x - 0{,}3085$.

Приклад 113. Задана щільність спільного розподілу ВВ (X, Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} 3 \cdot (x + y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases} \quad \text{де } D: (y \geq 0, x \geq 0, x + y \leq 1).$$

Знайти коефіцієнт кореляції r_{XY} і рівняння лінії регресії X на Y .

Розв'язання. Коефіцієнт кореляції r_{XY} знаходимо за формулою:

$r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$, де $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)}$; $K_{XY} = m_{XY} - m_X \cdot m_Y$;

$m_{XY} = \iint\limits_D xy f(x, y)\, dx\, dy$. Математичні сподівання m_X , m_Y і дисперсії $D(X)$, $D(Y)$ компонент X і Y можна знайти за допомогою подвійних інтегралів (перший спосіб):

$$m_X = \iint\limits_D x \cdot f(x, y)\, dx\, dy, \quad m_Y = \iint\limits_D y \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$D(X) = \iint\limits_B x^2 f(x, y)\, dx\, dy - (m_X)^2, \quad D(Y) = \iint\limits_D y^2 f(x, y)\, dx\, dy - (m_Y)^2$$

або за допомогою визначених інтегралів (другий спосіб):

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy , \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx, \quad m_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\, dx ,$$

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\, d\, y\,,\ D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx - (m_X)^2\,,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)\; dy - (m_Y)^2\;.$$

Застосуємо другий спосіб.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\ = \int_{0}^{1-x} 3(x+y)\, dy\ = 3\left.\frac{(x+y)^2}{2}\right|_0^{1-x} = \frac{3}{2}\left(1-x^2\right),$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_{0}^{1-y} 3(x+y)\, d\,x\ = 3\left.\frac{(x+y)^2}{2}\right|_0^{1-y} = \frac{3}{2}\left(1-y^2\right).$$

$$m_X\ = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\, dx\ = \frac{3}{2}\int_0^1 x \cdot \left(1-x^2\right) dx\ = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(x - x^3\right) dx\ =$$

$$= \frac{3}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8},$$

$$m_Y\ = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\, d\, y = \frac{3}{2}\int_0^1 y \cdot \left(1-y^2\right) dx\ = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(y - y^3\right) dx\ =$$

$$= \frac{3}{2}\left.\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}\,.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx - (m_X)^2 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right) dx - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx -$$

$$- \frac{9}{64} = \frac{3}{2}\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 - \frac{9}{64} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{9}{64} = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{19}{320}\,,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)\; dy - (m_Y)^2 = \frac{3}{2}\int_0^1 y^2\left(1-y^2\right) d\,y - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(y^2 - y^4\right) d\,y -$$

$$-\frac{9}{64}=\frac{3}{2}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1-\frac{9}{64}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\frac{9}{64}=\frac{1}{5}-\frac{9}{64}=\frac{19}{320}.$$

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{19}{320}}, \qquad \sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\frac{19}{320}}.$$

$$m_{XY}=\iint\limits_D xy\,f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D xy\cdot 3(x+y)\,dx\,dy=3\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y(x+y)\,dy=$$

$$=3\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}\left(xy+y^2\right)dy=3\int_0^1 x\left(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(3x^2(1-x)^2+\right.$$

$$\left.+2x(1-x)^3\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^4-3x^2+2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}-x^3+x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{10},$$

$$K_{XY}=m_{XY}-m_X\cdot m_Y=\frac{1}{10}-\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{10}-\frac{9}{64}=-\frac{13}{320},$$

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=-\frac{13}{320}\Big/\left(\sqrt{\frac{19}{320}}\cdot\sqrt{\frac{19}{320}}\right)=-\frac{13}{19}\approx-0{,}6842.$$

Маємо, що $r_{XY}<0$, а $|r_{XY}|$ достатньо близький до одиниці. Це означає, що між випадковими величинами X і Y існує досить тісна від'ємна лінійна залежність, тобто при збільшенні однієї з них інша має деяку тенденцію зменшуватись.

Рівняння лінії регресії X на Y знаходимо за формулою: $x-m_X=r_{XY}\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)$. Матимемо $x-\dfrac{3}{8}=-\dfrac{13}{19}\cdot\left(y-\dfrac{3}{8}\right)$ або $8x+5{,}4736\,y-5{,}0526=0$.

Відповідь: $r_{XY}\approx-0{,}6842$; $8x+5{,}4736\,y-5{,}0526=0$.

Приклад 114. За незгрупованими даними x_i і y_i $(i=1,2,\ldots,10)$ результатів досліджень ВВ X і Y:

x_i	-3,0	-0,7	0,9	1,3	2,0	2,8	3,6	4,5	4,8	5,9
y_i	-2,1	1,4	2,9	3,7	4,1	5,7	6,4	7,3	7,5	8,3

скласти рівняння прямої лінії регресії Y на X, застосовуючи метод найменших квадратів. В системі координат xOy побудувати графік прямої лінії регресії та показати результати досліджень.

Розв'язання. Рівняння прямої лінії регресії $y = ax + b$, де коефіцієнти a і b знайдемо методом найменших квадратів із системи двох рівнянь: $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$

Знайдемо суми, що входять до системи:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = -3,0 + (-0,7) + 0,9 + 1,3 + 2,0 + 2,8 + 3,6 + 4,5 + 4,8 + 5,9 = 22,1;$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = -2,1 + 1,4 + 2,9 + 3,7 + 4,1 + 5,7 + 6,4 + 7,3 + 7,5 + 8,3 = 45,2;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = (-3,0)^2 + (-0,7)^2 + 0,9^2 + 1,3^2 + (2,0)^2 + 2,8^2 + 3,6^2 + 4,5^2 + $$

$$+ 4,8^2 + 5,9^2 = 114,89;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = (-3,0)\cdot(-2,1) + (-0,7)\cdot 1,4 + 0,9\cdot 2,9 + 1,3\cdot 3,7 + 2,0\cdot 4,1 + 2,8\cdot 5,7 + $$

$$+ 3,6\cdot 6,4 + 4,5\cdot 7,3 + 4,8\cdot 7,5 + 5,9\cdot 8,3 = 177,76.$$

Маємо систему двох лінійних рівнянь: $\begin{cases} 22,1 \cdot \alpha + 10 \cdot b = 45,2 \\ 114,89 \cdot \alpha + 22,1 \cdot b = 177,76 \end{cases}.$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера:

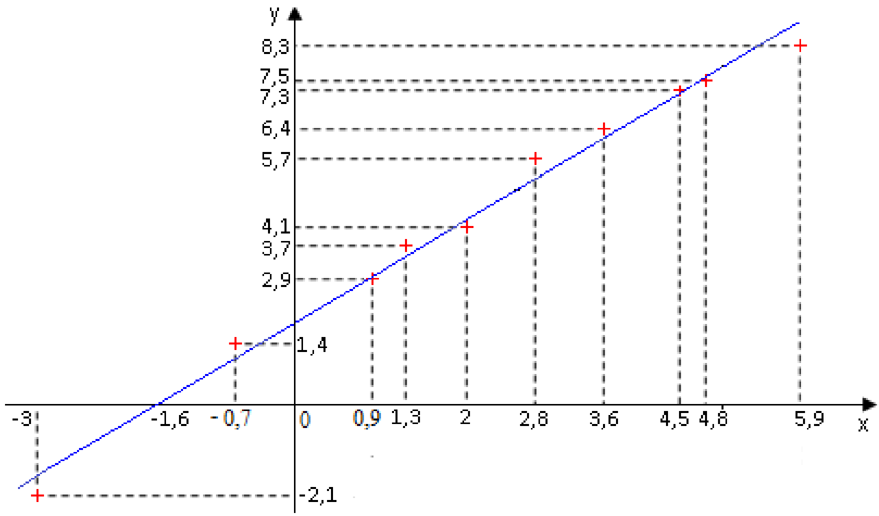
$$\Delta = \begin{vmatrix} 22,1 & 10 \\ 114,89 & 22,1 \end{vmatrix} = 22,1^2 - 10 \cdot 114,89 = -660,49;$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 45,2 & 10 \\ 177,76 & 22,1 \end{vmatrix} = 45,2 \cdot 22,1 - 10 \cdot 177,76 = -778,68;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 22,1 & 45,2 \\ 114,89 & 177,76 \end{vmatrix} = 22,1 \cdot 177,76 - 45,2 \cdot 114,89 = -1264,532.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{-778,68}{-660,49} \approx 1,1789; \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-1264,532}{-660,49} \approx 1,9145.$$

Отже, вибіркове рівняння лінії регресії Y на X має вигляд: $y = 1,1789\,x + 1,9145$. Побудуємо графік прямої лінії регресії за результатами досліджень.



Відповідь: $y = 1,1789\,x + 1,9145$.

Приклад 115. За даними результатів досліджень ВВ X і Y знайти рівняння лінії регресії Y на X та X на Y.

x_i	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
y_i	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

Розв'язання. Рівняння ліній регресії Y на X та X на Y знайдемо методом найменших квадратів.

1) Лінія регресії Y на X: $y = ax + b$, де коефіцієнти a і b є розв'язком системи двох рівнянь: $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$

За умовою $n = 12$. Знайдемо суми, що входять до системи:

$\sum\limits_{i=1}^{12} x_i = 1015$; $\sum\limits_{i=1}^{12} y_i = 553$; $\sum\limits_{i=1}^{12} x_i y_i = 48888$; $\sum\limits_{i=1}^{12} x_i^2 = 90667$; $\sum\limits_{i=1}^{12} y_i^2 = 26807$;

$\left(\sum\limits_{i=1}^{12} x_i\right)^2 = 1030225$; $\left(\sum\limits_{i=1}^{12} y_i\right)^2 = 305809$. За формулами (8.10) знаходимо

$$a = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{12 \cdot \sum\limits_{i=1}^{12} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{12} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{12} y_i}{12 \cdot \sum\limits_{i=1}^{12} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{12} x_i\right)^2} = 0{,}4389,$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{12} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{12} y_i - \sum\limits_{i=1}^{12} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{12} x_i y_i}{12 \cdot \sum\limits_{i=1}^{12} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{12} x_i\right)^2} = 8{,}9571.$$

Лінія регресії Y на X: $y = 0{,}4389\,x + 8{,}9571$.

2) Лінія регресії X на Y: $x = ay + b$, де коефіцієнти a і b є розв'язком системи двох рівнянь: $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} y_i + n \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$

Коефіцієнти a і b знаходимо за формулами:

$$a=\frac{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}=\frac{12\cdot\sum\limits_{i=1}^{12}x_i y_i-\sum\limits_{i=1}^{12}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{12}y_i}{12\cdot\sum\limits_{i=1}^{12}y_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{12}y_i\right)^2}=1{,}5975,$$

$$b=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i}{12\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}=10{,}96.$$

Лінія регресії X на Y: $x=1{,}5975\,y+10{,}96$.

Відповідь: $y=0{,}4389\,x+8{,}9571$, $x=1{,}5975\,y+10{,}96$.

Приклад 116. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X,Y) законом розподілу.

$Y \setminus X$	2	5	8
4	0,15	0,25	0,3
6	0,05	0,1	0,15

Знайти рівняння лінії регресії Y на X.

Розв'язання. Запишемо закони розподілу величин X та Y окремо. Для цього знайдемо суми ймовірностей «по рядках» – для змінної Y (8.11):

$$P(y_1)=P(Y=y_1)=\sum_{i=1}^{3}p_{i1}=p_{11}+p_{21}+p_{31}=0{,}15+0{,}25+0{,}3=0{,}7;$$

$$P(y_2)=P(Y=y_2)=\sum_{i=1}^{3}p_{i2}=p_{12}+p_{22}+p_{32}=0{,}05+0{,}1+0{,}15=0{,}3;$$

і «по стовпцях» – для змінної X (8.12):

$$P(x_1)=P(X=x_1)=\sum_{j=1}^{2}p_{1j}=p_{11}+p_{12}=0{,}15+0{,}05=0{,}2;$$

$$P(x_2)=P(X=x_2)=\sum_{j=1}^{2}p_{2j}=p_{21}+p_{22}=0{,}25+0{,}1=0{,}35;$$

$$P(x_3) = P(X = x_3) = \sum_{j=1}^{2} p_{3j} = p_{31} + p_{32} = 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}45 .$$

X	2	5	8
P	0,2	0,35	0,45

Y	4	6
P	0,7	0,3

Знайдемо для випадкових величин X та Y математичні сподівання, дисперсії і середнє квадратичне відхилення:

$$m_X = M(X) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + .x_3 P(x_3) = 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}35 + 8 \cdot 0{,}45 = 5{,}75;$$

$$m_Y = M(\mathrm{Y}) = y_1 P(y_1) + y_2 P(y_2) = 4 \cdot 0{,}7 + 6 \cdot 0{,}3 = 4{,}6;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} \cdot P(x_i) - (M(X))^2 = 2^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}35 + 8^2 \cdot 0{,}45 - (5{,}75)^2 =$$

$$= 0{,}8 + 8{,}75 + 28{,}8 - 33{,}0625 = 38{,}35 - 33{,}0625 = 5{,}2875;$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i^{\,2} \cdot P(y_i) - (M(Y))^2 = 4^2 \cdot 0{,}7 + 6^2 \cdot 0{,}3 - (4{,}6)^2 =$$

$$= 11{,}2 + 10{,}8 - 21{,}16 = 22{,}0 - 21{,}16 = 0{,}84;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}2875} \approx 2{,}2995; \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}9165 .$$

Коефіцієнт кореляції r_{XY} знаходимо за формулою: $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$,

де $K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i\, y_j\, p_{ij} - m_X \cdot m_Y = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} x_i\, y_j\, p_{ij} - 5{,}75 \cdot 4{,}6 =$

$$= 2 \cdot (4 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}05) + 5 \cdot (4 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}1) + 8 \cdot (4 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}15) -$$

$$- 26{,}45 = 26{,}6 - 26{,}45 = 0{,}15 .$$

Тоді $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{0{,}15}{2{,}2995 \cdot 0{,}9165} \approx 0{,}0712$. $r_{XY} \neq 0$, тому величини X і Y лінійно корельовані, а отже, і залежні. Маємо, що $r_{XY} > 0$ і достатньо близький до нуля. Це означає, що між випадковими величинами X і Y існує досить слабка лінійна залежність.

Знайдемо кореляційне відношення η_{YX} величини Y до величини X. Для цього спочатку для кожного значення величини X знайдемо середнє значення величини Y. Використовуючи формули (8.15), отримаємо:

$$\overline{y}_{x=2} = \frac{4 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}05}{0{,}2} = 4{,}5\,; \quad \overline{y}_{x=5} = \frac{4 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}1}{0{,}35} \approx 4{,}5714\,;$$

$$\overline{y}_{x=8} = \frac{4 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}15}{0{,}45} \approx 4{,}6667\,.$$

Отримані дані дозволяють записати закон розподілу функції $\overline{Y} = g(X)$ випадкової величини X:

$\overline{Y} = g(X)$	4,5	4,5714	4,6667
p	0,2	0,35	0,45

З цієї таблиці знаходимо:

$M(\overline{Y}) = 4{,}5 \cdot 0{,}2 + 4{,}5714 \cdot 0{,}35 + 4{,}6667 \cdot 0{,}45 \approx 4{,}6\,;$

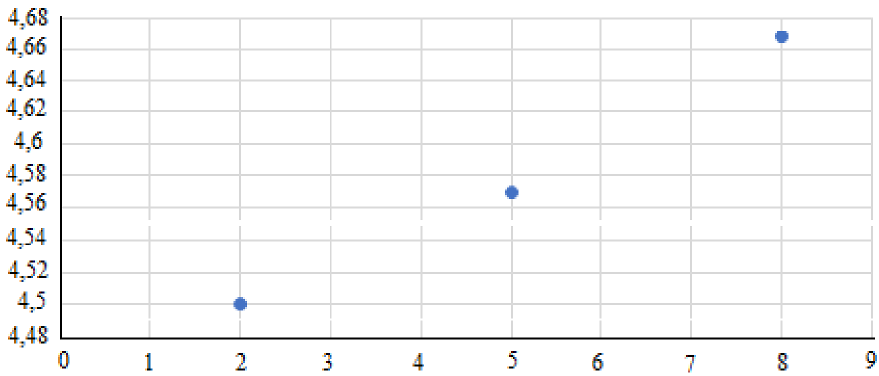
$D(\overline{Y}) = (4{,}5)^2 \cdot 0{,}2 + (4{,}5714)^2 \cdot 0{,}35 + (4{,}6667)^2 \cdot 0{,}45 - (4{,}6)^2 \approx 0{,}0043\,;$

$\sigma(\overline{Y}) = \sqrt{D(\overline{Y})} = \sqrt{0{,}0043} \approx 0{,}0656\,.$

Тоді $\eta_{YX} = \dfrac{\sigma(\overline{Y})}{\sigma(Y)} = \dfrac{0{,}0656}{0{,}9165} \approx 0{,}0716$. Величина η_{YX} більша, ніж r_{XY} так і має бути. Якщо кореляційне відношення η_{YX} ближче до нуля ніж до одиниці, то кореляційна залежність Y від X слабша. Однак і вона невелика, що свідчить про малу тісноту кореляційної залежності Y і X. Оскільки різниця між r_{XY} і η_{YX} незначна, то кореляційна залежність Y від X близька до лінійної. Цей висновок має підтвердити лінія регресії $\overline{y}_x = g(X)$. Її слід будувати за трьома точками:

X	2	5	8
$\overline{y}_x$	4,5	4,5714	4,6667

Матимемо



Можна записати рівняння лінії регресії Y на X $\overline{y}_x = g(X) = aX + b$, де коефіцієнт регресії $a = r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ і $b = m_Y - a \cdot m_X$ згідно формули: $\overline{y}_x = g(X) = m_Y + r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X)$.

$$\overline{y}_x = 4{,}6 + 0{,}0712 \cdot \frac{0{,}9165}{2{,}2995}(X - 5{,}75) = 0{,}0284X + 4{,}4368.$$

Відповідь: $\overline{y}_x = 0{,}0284X + 4{,}4368$.

Приклад 117. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y) законом розподілу.

$Y \setminus X$	1	3	4
2	0,1	0,05	0,12
3	0,2	0,14	0,08
5	0,15	0,11	0,05

Знайти рівняння лінії регресії X на Y.

Розв'язання. Запишемо закони розподілу величин X та Y окремо. Для цього знайдемо суми ймовірностей «по рядках» – для змінної Y (8.11) і «по стовпцях» – для змінної X (8.12):

X	1	3	4
P	0,45	0,3	0,25

Y	2	3	5
P	0,27	0,42	0,31

Знайдемо для випадкових величин X та Y математичні сподівання, дисперсії і середнє квадратичне відхилення:

$$m_X = M(X) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + .x_3 P(x_3) = 1 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,25 = 2,35;$$

$$m_Y = M(\text{Y}) = y_1 P(y_1) + y_2 P(y_2) + y_3 P(y_3) = 2 \cdot 0,27 + 3 \cdot 0,42 + 5 \cdot 0,31 = 3,35;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} \cdot P(x_i) - (M(X))^2 = 1^2 \cdot 0,45 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,25 - (2,35)^2 =$$

$$= 0,45 + 2,7 + 4,0 - 5,5225 = 7,15 - 5,5225 = 1,6275;$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i^{\,2} \cdot P(y_i) - (M(Y))^2 = 2^2 \cdot 0,27 + 3^2 \cdot 0,42 + 5^2 \cdot 0,31 - (3,35)^2 =$$

$$= 1,08 + 3,78 + 7,75 - 11,2225 = 12,61 - 11,2225 = 1,3875;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,6275} \approx 1,2757; \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{1,3875} \approx 1,1779.$$

Коефіцієнт кореляції r_{XY} знаходимо за формулою: $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$,

де $K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i\, y_j\, p_{ij} - m_X \cdot m_Y = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i\, y_j\, p_{ij} - 2,35 \cdot 3,35 =$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,15) + 3 \cdot (2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,14 + 5 \cdot 0,11) +$$

$$+ 4 \cdot (2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,08 + 5 \cdot 0,05) - 7,8725 = 7,68 - 7,8725 = -\,0,1925.$$

Тоді $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{-\,0,1925}{1,2757 \cdot 1,1779} \approx -\,0,1281$. $r_{XY} \neq 0$, тому величини X і Y лінійно корельовані, а отже, і залежні. Маємо, що $r_{XY} < 0$ і достатньо близький до нуля. Це означає, що між випадковими величинами X і Y існує досить слабка лінійна залежність.

Знаходимо рівняння лінії регресії X на Y $\bar{x}_y = \varphi(Y) = aY + b$, де коефіцієнт регресії $a = r_{XY} \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ і $b = m_X - a \cdot m_Y$ згідно з формулою:

$$\bar{x}_y = \varphi(Y) = m_X + r_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (Y - m_Y).$$

$$\bar{x}_y = 2{,}35 - 0{,}1281 \cdot \frac{1{,}2757}{1{,}1779}(Y - 3{,}35) = -0{,}1387 \cdot Y + 2{,}8148.$$

Відповідь: $\bar{x}_y = -0{,}1387 \cdot Y + 2{,}8148$.

8.2 Завдання для самостійної роботи

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>1. Задана щільність спільного розподілу ВВ (X,Y):
$f(x,y) = \begin{cases} C\sqrt{xy}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$ у трикутнику ABC :
$A(0;0)$, $B(-1;-1)$, $C(-1;0)$. Знайти: а) сталу C ;
б) рівняння лінії регресії Y на X .</td><td>а) $C = -4{,}5$;
б) $y + 0{,}00005 =$
$= 0{,}5999\ x$</td></tr>
<tr><td>2. Задана щільність спільного розподілу ВВ (X,Y):
$f(x,y) = \begin{cases} 4(x + y^2), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$ де $D: \begin{pmatrix} x + y \le 1, \\ y \ge 0, x \ge 0 \end{pmatrix}$.
Знайти рівняння лінії регресії Y на X .</td><td>$y = -0{,}7493\ x +$
$+ 0{,}6664$</td></tr>
<tr><td>3. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X,Y) законом розподілу:
<table><tr><td>$Y \backslash X$</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>0,12</td><td>0,24</td><td>0,22</td></tr><tr><td>3</td><td>0,2</td><td>0,15</td><td>0,07</td></tr></table>Знайти рівняння лінії регресії X на Y .</td><td>$\bar{x}_y = -0{,}377y + 5{,}34$</td></tr>
<tr><td>4. За даними результатів досліджень ВВ X і Y знайти рівняння лінії регресії Y на X .
<table><tr><td>x_i</td><td>1,2</td><td>2,4</td><td>2,8</td><td>4,2</td><td>5,9</td><td>6,8</td><td>8,1</td><td>9,2</td><td>10,1</td><td>11</td></tr><tr><td>y_i</td><td>7</td><td>12</td><td>17</td><td>24</td><td>29</td><td>38</td><td>46</td><td>45</td><td>54</td><td>68</td></tr></table></td><td>$y = 5{,}6189\ x -$
$- 0{,}6689$</td></tr>
<tr><td>5. За даними результатів досліджень ВВ X і Y знайти рівняння лінії регресії Y на X та X на Y .
<table><tr><td>x_i</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>y_i</td><td>4,5</td><td>7</td><td>8</td><td>7,5</td><td>9</td></tr></table></td><td>$y = 0{,}475\ x - 4{,}35$
$x = 1{,}0082\ y -$
$- 1{,}055$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>6. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X,Y) законом розподілу:

$Y \setminus X$	0	1	2
-1	0,1	0	0,2
0	0,1	0,2	0,1
3	0,3	0	0

Знайти рівняння лінії регресії Y на X.</td><td>$\overline{y}_x = -1{,}16x + 1{,}57$</td></tr>
</table>

9 Функції двох випадкових аргументів

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться мати справу з математичними операціями над випадковими величинами.

<u>Означення 9.1</u>. Якщо кожній парі можливих випадкових величин X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називають *функцією двох випадкових аргументів* X *та* Y і записують $Z = \varphi(X,Y)$.

Нехай задана система випадкових величин (X,Y) з відомим законом розподілу та випадкова величина $Z = \varphi(X,Y)$ де $\varphi(X,Y)$ – невипадкова скалярна функція двох аргументів, область визначення якої містить множину можливих значень системи випадкових величин (X,Y). Потрібно знайти закон розподілу для випадкової величини Z.

Розглянемо систему дискретних випадкових величин (X,Y), яка містить скінчену кількість значень (x_i, y_j) $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$ з відомими ймовірностями $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$. Тоді $Z = \varphi(X,Y)$ – дискретна випадкова величина з можливими значеннями z_l $(l = 1,2,\ldots,k)$, які знаходяться серед значень $\varphi(x_i, y_j)$. Імовірності значень z_l визначаються за формулою:

$$P\left(Z = z_{ij} = \varphi(x_i . y_j)\right) = p_{ij},\ \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \qquad (9.1)$$

Нехай (X, Y) – система дискретних випадкових величин, яка містить скінчену кількість значень (x_i, y_j) $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$ з відомими ймовірностями $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$, то $Z = X + Y$ – дискретна випадкова величина з можливими значеннями z_l, $(l = 1,2,\ldots,k)$, які є різними серед значень $x_i + y_j$. Імовірності значень z_l визначаються за формулою

$$P(Z = z_l) = \sum_{(i,j):\, x_i + y_j = z_l} P(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = z_l - x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = z_l - y_j, Y = y_j), \quad l = \overline{1,k} \qquad (9.2)$$

Якщо аргументи X і Y – незалежні дискретні випадкові величини, задані відповідними законами розподілу ймовірностей $P(x_i) = P(X = x_i)$ і $P(y_j) = P(Y = y_j)$, то закон розподілу ймовірностей суми $Z = X + Y$ знаходиться за правилом:

а) треба знайти всі можливі значення $Z = z_{ij}$. Для цього достатньо додати кожне можливе значення X з усіма можливими значеннями Y, тобто $z_{ij} = x_i + y_j$;

б) імовірності p_{ij} можливих значень $Z = z_{ij}$ обчислюються як добутки

$$p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P_{X = x_i}(Y = y_j) \qquad (9.3)$$

або

$$p_{ij} = P(x_i) \cdot P(y_j). \qquad (9.4)$$

Якщо (X, Y) – система неперервних випадкових величин зі щільністю розподілу $f(x, y)$, то для визначення $g(z)$ обчислюємо функцію розподілу величини Z:

$$G(z) = P(Z < z) = P(\varphi(X, Y) < z)$$

або

$$G(z) = P((X,Y) \subset D(z)) = \iint\limits_{D(z)} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{9.5}$$

де $D(z)$ – область на площині xOy, в якій $\varphi(x,y) < z$. Щільність розподілу $g(z)$ отримуємо диференціюванням функції розподілу: $g(z) = G'(z)$.

У загальному випадку функцію розподілу величини $Z = \varphi(X,Y)$ системи неперервних випадкових величин (X,Y) визначаємо за схемою:

1) шукаємо область зміни системи випадкових величин (X,Y);

2) обчислюємо найбільше та найменше значення функції $Z = \varphi(X,Y)$ в цій області;

3) розглядаємо сімейство кривих $z = \varphi(x,y)$ і встановлюємо, скільки аналітичних виразів матиме $g(z)$;

4) будуємо на площині xOy лінію $z = \varphi(x,y)$ і визначаємо область $D(z)$, множина точок якої задовольняє нерівності $\varphi(x,y) < z$;

5) інтегруємо щільність розподілу $f(x,y)$ на множині $D(z)$ і маємо функцію розподілу $G(z)$;

6) для знаходження $g(z)$ диференціюємо функцію розподілу $G(z)$, враховуючи, що коли $G(z) = \int\limits_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dx \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y)\,dy$, то

$$g(z) = G'(z) = \int\limits_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \left(f(x, \psi_2(x,z)) \cdot \psi_2'(x,z) - f(x, \psi_1(x,z)) \cdot \psi_1'(x,z) \right) dx.$$

Для практики важливе значення має задача визначення закону розподілу величини $Z = X + Y$, $Z = X - Y$, $Z = X \cdot Y$, $Z = X / Y$ двох випадкових аргументів: X та Y.

Будемо вважати, що для системи неперервних випадкових величин (X,Y) відома щільність розподілу $f(x,y)$.

Розглянемо обчислення закону розподілу ймовірностей:

1) для випадкової величини Z, яка є сумою $Z = X + Y$.

Для цього побудуємо на площині xOy лінію, рівняння якої $x + y = z$. Це пряма, що відтинає на осях відрізки, рівні z. Пряма $x + y = z$ ділить площину xOy на дві частини: правіше і вище за неї ($X + Y > z$), ліворуч і нижче ($X + Y < z$).

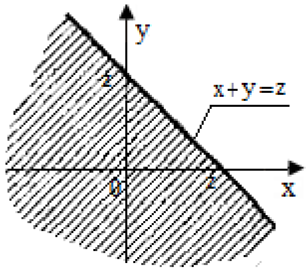


Рисунок 9.1

Область $D(z)$ є множина точок площини xOy, координати яких задовольняють нерівності $X + Y < z$ (заштрихована). Обчислюємо функцію розподілу величини Z. Відповідно до формули (9.5) маємо:

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dy \right) dx . \quad (9.6)$$

Диференціюємо $G(z)$ за змінною z (верхня межа внутрішнього інтеграла), матимемо загальну формулу для щільності розподілу суми двох випадкових величин X та Y:

$$g(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,dx \quad \text{або} \quad g(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\,dy . \qquad (9.7)$$

2) для випадкової величини Z, яка є різницею $Z = X - Y$.

Для цього побудуємо на площині xOy лінію, рівняння якої $x - y = z$. Це пряма, що відтинає на осях відрізки, рівні z. Пряма

$x - y = z$ ділить площину xOy на дві частини: правіше і вище за неї ($X + Y > z$), ліворуч і нижче ($X + Y < z$).

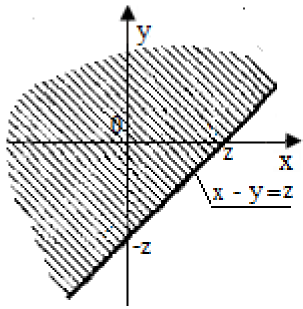


Рисунок 9.2

Область $D(z)$ є множина точок площини xOy, координати яких задовольняють нерівності $X - Y < z$ (заштрихована). Обчислюємо функцію розподілу величини Z. Відповідно до формули (9.5) маємо:

$$G(z) = \iint_{D(z)} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z+y} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z+y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (9.8)$$

Диференціюємо $G(z)$ за змінною z (верхня межа внутрішнього інтеграла), матимемо загальну формулу для щільності розподілу різниці двох випадкових величин X та Y:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z + y, y) dy \qquad \text{або} \qquad g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x - z) dx. \quad (9.9)$$

Це загальна формула для щільності розподілу різниці двох випадкових величин X та Y.

3) для випадкової величини Z, яка є добутком $Z = X \cdot Y$.

Для цього побудуємо на площині xOy лінію, рівняння якої $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}=\mathrm{z}$. Це гіпербола, асимптоти якої співпадають з осями координат.

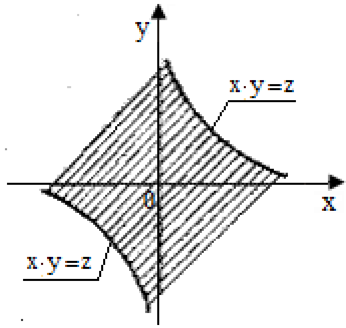


Рисунок 9.3

Область $D(z)$ є множина точок площини xOy, координати яких задовольняють нерівності $X\cdot Y<z$ (заштрихована). Обчислюємо функцію розподілу величини Z. Відповідно до формули (9.5) маємо:

$$G(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)d\,xd\,y=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{\infty} f(x,y)d\,xd\,y+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x,y)d\,xd\,y\,. \qquad (9.10)$$

Диференціюємо $G(z)$ за змінною z, матимемо загальну формулу для щільності розподілу добутку двох випадкових величин X та Y

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{z}{x}\right)d\,x+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{z}{x}\right)d\,x\,. \qquad (9.11)$$

4) для випадкової величини Z, яка є часткою $Z=X/Y$.

Для цього побудуємо на площині xOy лінію, рівняння якої $\mathrm{x}=y\cdot\mathrm{z}$. Це пряма, що проходить через початок координат – точку

О. Область $D(z)$ є множина точок площини xOy, координати яких задовольняють нерівності $X/Y<z$ (заштрихована).

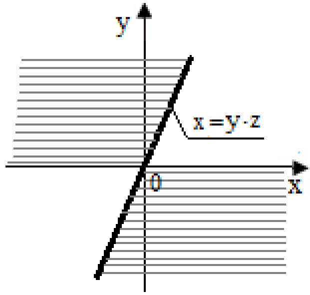


Рисунок 9.4

Обчислюємо функцію розподілу величини Z. Відповідно до формули (9.5) маємо:

$$G(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z\cdot y} f(x,y)dxdy+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{z\cdot y}^{\infty} f(x,y)dxdy. \qquad (9.12)$$

Диференціюємо $G(z)$ за змінною z, матимемо загальну формулу для щільності розподілу частки двох випадкових величин X та Y

$$g(z)=-\int\limits_{-\infty}^{0} y f(zy,y)dy+\int\limits_{0}^{\infty} y f(zy,y)dy. \qquad (9.13)$$

Якщо аргументи X і Y – незалежні неперервні випадкові величини, задані відповідними щільностями розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ (за умови, що щільність розподілу хоча б одного з аргументів задана в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ однією формулою), то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z=X+Y$ обчислюється за формулами:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx \text{ або } g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy. \qquad (9.14)$$

Формули (9.14) називають *формулами згортки*, або *формулами композиції двох розподілів*, а функцію $g(z)$ – *згорткою функцій* $f_1(x)$ та $f_2(y)$. Закон розподілу суми $Z=X+Y$ двох незалежних випадкових величин називають *композицією (згорткою) законів розподілу доданків*.

Якщо можливі значення X і Y є невід'ємними, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z=X+Y$ обчислюється за формулами:

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx \text{ або } g(z)=\int_{0}^{z} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy. \qquad (9.15)$$

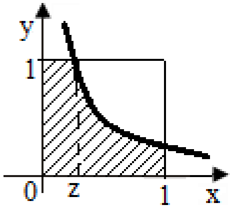
У випадку, коли обидві щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ задані на кінцевих інтервалах, для знаходження щільності розподілу $g(z)$ величини $Z=X+Y$ доцільно спочатку знайти функцію розподілу $G(z)$, а потім продиференціювати її за z: $g(z)=G'(z)$.

Якщо аргументи X і Y – незалежні випадкові величини, задані відповідними щільностями розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D дорівнює подвійному інтегралу по цій області від добутку щільностей розподілу

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx\,dy. \qquad (9.16)$$

Приклад 118. Задана система неперервних випадкових величин (X,Y) зі щільністю розподілу $f(x,y)=\begin{cases} x+y, x\in[0;1], y\in[0;1], \\ 0, x\notin[0;1], y\notin[0;1]. \end{cases}$ Знайти функцію розподілу випадкової величини $Z=X\cdot Y$.

Розв’язання. Визначимо область $D(z)$. $D(z)$ – множина точок площини xOy, для яких справедливо $x \cdot y < z$ з урахуванням того, що $x \in [0;1], y \in [0;1]$ (заштрихована).



Функцію розподілу випадкової величини $Z = X \cdot Y$ знайдемо за формулою (9.5) для області $D(z)$. При $z \le 0$, очевидно, що $G(z) = 0$, тому що поза квадратом $f(x, y) = 0$. Якщо $0 < z \le 1$, то

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y) dx dy = \int_0^z dx \int_0^1 (x + y) dy + \int_z^1 dx \int_0^{\frac{z}{x}} (x + y) dy = \int_0^z \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 dx +$$

$$+ \int_z^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{z}{x}} dx = \int_0^z \left(x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_z^1 \left(z + \frac{z^2}{2x^2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \right) \Bigg|_0^z +$$

$$+ \left(zx - \frac{z^2}{2x} \right) \Bigg|_z^1 = \frac{z^2}{2} + \frac{z}{2} + z - \frac{z^2}{2} - z^2 + \frac{z}{2} = 2z - z^2 .$$

Якщо $z > 1$, то

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x + y) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Матимемо функцію $G(z)$ розподілу випадкової величини $Z = X \cdot Y$:

$$G(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0, \\ 2z-z^2, & 0<z\le 1, \\ 1, & z>1. \end{cases}$$

Відповідь: $G(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0, \\ 2z-z^2, & 0<z\le 1, \\ 1, & z>1. \end{cases}$

Приклад 119. Дві незалежні дискретні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілу ймовірностей:

X	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

Y	-1	2	3	4
p	0,3	0,4	0,1	0,2

Знайти розподіл випадкових величин: а) $Z = X + Y$, б) $Z = X - 2Y$, в) $Z = X \cdot Y$, г) $Z = X^2 Y$.

Розв'язання. Для зручності складемо таблицю з усіма можливими значеннями Z.

X	Y	$Z = X+Y$	$Z = X-2Y$	$Z = X \cdot Y$	$Z = X^2 Y$	$P(Z) = P(X)\cdot P(Y)$
1	-1	0	3	-1	-1	$0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}15$
1	2	3	-3	2	2	$0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}20$
1	3	4	-5	3	3	$0{,}5\cdot 0{,}1 = 0{,}05$
1	4	5	-7	4	4	$0{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}10$
2	-1	1	4	-2	-4	$0{,}3\cdot 0{,}3 = 0{,}09$
2	2	4	-2	4	8	$0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$
2	3	5	-4	6	12	$0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}03$
2	4	6	-6	8	16	$0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}06$
3	-1	2	5	-3	-9	$0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}06$
3	2	5	-1	6	18	$0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$
3	3	6	-3	9	27	$0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}02$
3	4	7	-5	12	36	$0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}04$
						1,00

Для складання відповідних розподілів випадкових величин об'єднаємо однакові значення Z, розташувавши їх у порядку зростання.

Матимемо наступні розподіли:

$Z = X + Y$	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0,15	0,09	0,06	0,20	0,17	0,21	0,08	0,04

$Z = X - 2Y$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	3	4	5
P	0,10	0,06	0,09	0,03	0,22	0,12	0,08	0,15	0,09	0,06

$Z = X \cdot Y$	-3	-2	-1	2	3	4	6	8	9	12
P	0,06	0,09	0,15	0,20	0,05	0,22	0,11	0,06	0,02	0,04

$Z = X^2 Y$	-9	-4	-1	2	3	4	8	12	16	18	27	36
P	0,06	0,09	0,15	0,20	0,05	0,10	0,12	0,03	0,06	0,08	0,02	0,04

Приклад 120. Дві дискретні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілу ймовірностей:

X	-1	1
p	0,3	0,7

Y	-1	0	1
p	0,27	0,33	0,4

Знайти розподіл випадкової величини $Z = X^2 + Y^2 - 1$.

Розв'язання. Запишемо сумісний розподіл випадкових величин X та Y

$Y \setminus X$	-1	1
-1	0,07	0,2
0	0,10	0,23
1	0,13	0,27

Знайдемо значення функції $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Матимемо

$\varphi(-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 - 1 = 1$, $\varphi(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 - 1 = 0$,

$\varphi(-1,1) = (-1)^2 + 1^2 - 1 = 1$, $\varphi(1,-1) = 1^2 + (-1)^2 - 1 = 1$,

$\varphi(1,0)=1^2+0^2-1=0$, $\varphi(1,1)=1^2+1^2-1=1$.

Бачимо, що випадкова величина Z має два можливих значення: $z_1=0$ і $z_2=1$. Імовірність можливого значення $z_1=0$ дорівнює сумі ймовірностей несумісних подій $(X=-1, Y=0)$ і $(X=1, Y=0)$, тобто $p_1=0{,}1+0{,}23=0{,}33$. Імовірність можливого значення $z_2=1$ дорівнює сумі ймовірностей несумісних подій $(X=-1, Y=-1)$, $(X=-1, Y=1)$, $(X=1, Y=-1)$ і $(X=1, Y=1)$, тобто $p_2=0{,}07+0{,}13+0{,}2+9{,}27=0{,}67$.

Розподіл випадкової величини Z має вигляд:

Z	0	1
p	0,33	0,67

Приклад 121. Знайти щільність розподілу $g(z)$ суми $Z=X+Y$, якщо випадкові величини X та Y незалежні й кожна з них розподілена рівномірно на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Маємо

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<0,\ x>1\end{cases} \text{ і } f_2(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & y<0,\ y>1.\end{cases}$$

Випадкова величина $Z=X+Y$ у цьому випадку буде приймати значення на відрізку $[0;2]$, а поза ним щільність розподілу $g(z)$ дорівнює нулю.

При $0\le z\le 1$ матимемо: $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\cdot f_2(z-t)dt=\int\limits_0^z 1\cdot 1dt=z$.

Оскільки при $t<0$ дорівнює нулю перший множник $f_1(t)$ підінтегрального виразу, а при $t>z$ дорівнює нулю другий множник $f_2(z-t)$, замінимо інтервал по всій осі інтервалом по відрізку $[0;z]$.

При $1\le z\le 2$ матимемо: $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\cdot f_2(z-t)dt=\int\limits_{z-1}^{1} 1\cdot 1dt=2-z$.

При $t<z-1$ дорівнює нулю другий множник $f_2(z-t)$, інакше $z-t>1$, а при $t>1$ дорівнює нулю перший множник $f_1(t)$.

Таким чином,

$$g(z)=\begin{cases} \text{z}, & 0\le z\le 1, \\ 2-z, & 1\le z\le 2, \\ 0, & z\in(-\infty;0)\cup(2;\infty). \end{cases}$$

Відповідь: $g(z)=\begin{cases} \text{z}, & 0\le z\le 1, \\ 2-z, & 1\le z\le 2, \\ 0, & z\in(-\infty;0)\cup(2;\infty). \end{cases}$

9.1 Числові характеристики функцій двох випадкових аргументів

1. Математичне сподівання для функції двох випадкових аргументів знаходиться за означенням:

якщо випадкові величини X та Y дискретні і задані ймовірності $p_{ij}=P(X=x_i;Y=y_j)$, то для дискретної випадкової величини $Z=\varphi(X,Y)$ маємо

$$m_Z=M(Z)=M(\varphi(X,Y))=\sum_i\sum_j\varphi(x_i,y_j)p_{ij}\ ; \tag{9.17}$$

якщо система неперервних випадкових величин (X,Y) розподілена в області $D(z)$ площини xOy зі щільністю розподілу $f(x,y)$, то для випадкової величини $Z=\varphi(X,Y)$, не знаходячи щільність розподілу $g(z)$, матимемо

$$m_Z=M(Z)=M(\varphi(X,Y))=\iint\limits_{D(z)}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy\ ; \tag{9.18}$$

якщо система неперервних випадкових величин (X,Y) розподілена на всій площини xOy, то матимемо

$$m_Z=M(Z)=M(\varphi(X,Y))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy\ , \tag{9.19}$$

за умови збіжності інтегралу.

2. Дисперсія для функції двох випадкових аргументів знаходиться за формулами:

для дискретних випадкових величин

$$D_Z = D(Z) = D(\varphi(X,Y)) = \sum_i \sum_j \left(\varphi(x_i, y_j) - m_Z\right)^2 p_{ij} \qquad (9.20)$$

або

$$D_Z = D(Z) = D(\varphi(X,Y)) = \sum_i \sum_j \left(\varphi(x_i, y_j)\right)^2 p_{ij} - (m_Z)^2; \qquad (9.21)$$

для неперервних випадкових величин

$$D_Z = D(Z) = D(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x,y) - m_Z)^2 f(x,y)dxdy \qquad (9.22)$$

або

$$D_Z = D(Z) = D(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x,y))^2 f(x,y)dxdy - (m_Z)^2. \qquad (9.23)$$

Аналогічні формули мають місце для всіх інших початкових і центральних моментів для функції двох випадкових аргументів.

<u>Зауваження 9.1</u>. Таким чином, для обчислення числових характеристик функції двох випадкових аргументів $Z = \varphi(X,Y)$ необов'язково знати закон розподілу випадкової величини Z, а достатньо знати закон сумісного розподілу випадкових величин X та Y.

Приклад 122. Закон сумісного розподілу випадкових величин X та Y заданий таблицею

$Y \setminus X$	1	2	3
-1	0,17	0	0,33
1	0,33	0,17	0

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = X + Y$ двома способами: а) склавши закон розподілу випадкової величини Z, б) не складаючи закон розподілу випадкової величини Z.

Розв'язання. а) склавши закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$, знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z. Визначимо значення функції $\varphi(x, y) = x + y$. Матимемо

$\varphi(-1,1) = -1 + 1 = 0$, $\varphi(-1,2) = -1 + 2 = 1$, $\varphi(-1,3) = -1 + 3 = 2$,

$\varphi(1,1) = 1 + 1 = 2$, $\varphi(1,2) = 1 + 2 = 3$, $\varphi(1,3) = 1 + 3 = 4$.

Випадкова величина Z має п'ять можливих значень:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2,\ z_4 = 3,\ z_5 = 4.$$

Імовірність можливого значення $z_3 = 2$ дорівнює сумі ймовірностей несумісних подій $\{X = -1,\ Y = 3\}$ і $\{X = 1,\ Y = 1\}$, тобто $0{,}33 + 0{,}33 = 0{,}66$. Виключаємо значення $z_2 = 1$ і $z_5 = 4$, оскільки їх ймовірності рівні нулю. Тому ряд розподілу випадкової величини Z має вигляд:

Z	0	2	3
p	0,17	0,66	0,17

Функція розподілу $G(z)$ випадкової величини Z має вигляд:

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 0{,}17, & 0 < z \le 2, \\ 0{,}83, & 2 < z \le 3, \\ 1, & z > 3. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = X + Y$:

$$m_Z = M(Z) = M(X + Y) = \sum_{i=1}^{3} z_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}17 + 2 \cdot 0{,}66 + 3 \cdot 0{,}17 = 1{,}83,$$

$$D_Z = D(Z) = D(X + Y) = 0^2 \cdot 0{,}17 + 2^2 \cdot 0{,}66 + 3^2 \cdot 0{,}17 - 3{,}3489 = 0{,}8211.$$

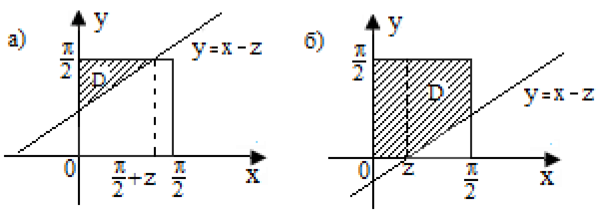
б) не складаючи закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$, для випадкової величини Z знайдемо математичне сподівання за формулою (9.17) і дисперсію за формулою (9.21):

$$m_Z = M(Z) = M(\varphi(X,Y)) = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij} = (-1+1)\cdot 0{,}17 +$$
$$+(-1+2)\cdot 0 + (-1+3)\cdot 0{,}33 + (1+1)\cdot 0{,}33 + (1+2)\cdot 0{,}17 + (1+3)\cdot 0 =$$
$$= 0 + 0 + 0{,}66 + 0{,}66 + 0{,}51 + 0 = 1{,}83$$
$$D_Z = D(Z) = D(\varphi(X,Y)) = \sum_i \sum_j (\varphi(x_i, y_j))^2 p_{ij} - (m_Z)^2 =$$
$$= (-1+1)^2 \cdot 0{,}17 + (-1+2)^2 \cdot 0 + (-1+3)^2 \cdot 0{,}33 + (1+1)^2 \cdot 0{,}33 +$$
$$+(1+2)^2 \cdot 0{,}17 + (1+3)^2 \cdot 0 - (1{,}83)^2 = 0 + 0 + 4\cdot 0{,}33 + 4 \cdot 0{,}33 +$$
$$+ 9 \cdot 0{,}17 + 0 - 3{,}3489 = 1{,}32 + 1{,}32 + 1{,}53 - 3{,}3489 = 0{,}8211.$$

Відповідь: $M(Z) = 1{,}83$; $D(Z) = 0{,}8211$.

Приклад 123. Задана система неперервних випадкових величин (X,Y) зі щільністю розподілу $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x+y) \text{ при } (x,y) \in D, \\ 0 \text{ при } (x,y) \notin D, \end{cases}$ де $D: 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$. Знайти щільність розподілу $g(z)$ і математичне сподівання $M(Z)$ випадкової величини $Z = X - Y$.

Розв'язання. Побудуємо на площині xOy лінію, рівняння якої $x - y = z$. Вона відтинає на осях відрізки, рівні z. Область D – множина точок, які задовольняють нерівності $x - y < z$ (знаходяться вище прямої $y = x - z$, z – довільне число).



При $z \le -\dfrac{\pi}{2}$ матимемо $G(z) = 0$ так як $f(x,y) = 0$ поза $D: 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

При $-\frac{\pi}{2}<z\le 0$ (випадок а)) матимемо

$$G(z)=\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}+z}dx\int_{x-z}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}+z}\left(-\cos(x+y)\right)\Big|_{x-z}^{\frac{\pi}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}+z}\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2x-z)\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin(2x-z)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}+z}=\frac{1}{2}\left(-\sin(\pi+z)+\frac{1}{2}\sin(\pi+z)+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin(-z)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin z-\frac{1}{2}\sin z+1+\frac{1}{2}\sin z\right)=\frac{1}{2}(1+\sin z).$$

При $0<z\le\frac{\pi}{2}$ (випадок б)) матимемо

$$G(z)=\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{z}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x-z}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{z}\left(-\cos(x+y)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos(x+y)\right)\Big|_{x-z}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{z}\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos x\right)dx+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2x-z)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{z}(\sin x+\cos x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos(2x-z))dx=\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{z}+\frac{1}{2}\left(-\cos x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin(2x-z)\right)\Bigg|_z^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(-\cos z+\sin z+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(\pi-z)+\cos z+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin z\right)=\frac{1}{2}(1+2\sin z).$$

При $z > \dfrac{\pi}{2}$ матимемо

$$G(z) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x+y))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx = \frac{1}{2}(-\cos x +$$

$$+ \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 - \sin 0\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Функція розподілу $G(z)$ випадкової величини Z має вигляд:

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1 + \sin z), & -\dfrac{\pi}{2} < z \le 0, \\ \dfrac{1}{2}(1 + 2\sin z), & 0 < z \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & z > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Функція щільності розподілу $g(z)$ має вигляд:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\cos z, & -\dfrac{\pi}{2} < z \le 0, \\ \cos z, & 0 < z \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & z > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Математичне сподівання $M(Z)$ випадкової величини Z знайдемо за формулою (9.19)

$$M(Z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x-y)\sin(x+y)dy=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=x-y & du=-dy \\ dv=\sin(x+y)dy & v=-\cos(x+y)\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\left(-(x-y)\cdot\cos(x+y)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos x-\sin(x+y)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin x+x\cos x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot\sin x+(x-1)\cos x\right)dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x-\frac{\pi}{2}+1 & du=dx \\ dv=\sin x dx & v=-\cos x\end{array}\right]\quad\text{і}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} u=x-1 & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x\end{array}\right]=\frac{1}{2}\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\right.$$

$$\left.+(x-1)\cdot\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}+\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}-1+\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(1-1)=0\,.$$

Відповідь: $M(Z)=0$

Приклад 124. Задана система неперервних випадкових величин (X,Y) зі щільністю розподілу $f(x,y)=\frac{1}{8\pi}\left(x^2+y^2\right)$ у крузі

$x^2 + y^2 \le 4$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Z = X^2 \cdot Y^2$.

Розв'язання. Математичне сподівання $M(Z)$ випадкової величини Z знайдемо за формулою (9.18)

$$M(Z) = \iint\limits_{D(z)} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{D(z)} x^2 \cdot y^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) dx dy =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{D(z)} x^2 \cdot y^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) dx dy = \left[x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, dxdy = \rho d\rho d\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{D(z)} \rho^2 \cos^2\varphi \cdot \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^7 d\rho =$$

$$= \frac{1}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^8}{8}\right|_0^2 = \frac{1}{32\pi} \cdot \frac{2^8}{8} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\left.\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$$

Відповідь: $M(Z) = 1$.

9.2 Завдання для самостійної роботи

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>1. Дві незалежні дискретні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілу ймовірностей:

X	2	4
p	0,4	0,6

Y	1	3
p	0,3	0,7

Записати закон розподілу ВВ $Z = X + Y$.</td><td>

Z	3	5	7
p	0,12	0,46	0,42

</td></tr>
<tr><td>2. Двовимірна випадкова величина (X, Y) рівномірно розподілена в крузі $x^2 + y^2 \le 1$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = X \cdot Y$.</td><td>$M(Z) = 0$,
$D(Z) = 1/24$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповідь</th></tr>
<tr><td>

3. Розподіл двовимірної випадкової величини (X,Y) задається таблицею

$Y \setminus X$	10	12	14
1	0,08	0,02	0,1
2	0,32	0,08	0,4

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X - 2Y - 8$.

</td><td>

Z	-2	0	2	4
p	0,32	0,16	0,42	0,1

</td></tr>
<tr><td>

4. Маса деталей – випадкова величина рівномірно розподілена на проміжку $(2; 2{,}5]$. Знайти щільність розподілу $g(z)$ маси двох деталей $Z = X + Y$.

</td><td>

$$g(z) = \begin{cases} 0, z \le 4, \\ \dfrac{z-4}{4}, 4 < z \le 4{,}5, \\ \dfrac{5-z}{4}, 4{,}5 < z \le 5, \\ 0, z > 5. \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>

5. Знайти щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$, якщо випадкові величини X і Y незалежні, задані щільностями розподілу

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}, x \ge 0, \\ 0, \quad x < 0, \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}}, y \ge 0, \\ 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

</td><td>

$$g(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z}{4}} - e^{-\frac{z}{3}}, z \ge 0, \\ 0, z < 0. \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>

6. Закон сумісного розподілу дискретних випадкових величин X та Y заданий таблицею

$Y \setminus X$	-2	3
1	0,32	0,18
4	0,13	0,37

Знайти математичне сподівання випадкової величини $Z = X^2 + Y^2$.

</td><td>

$M(Z) = 15{,}25$.

</td></tr>
</table>

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В. В. Теорія імовірностей та математична статистика : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.

2. Вигоднер І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання. / І. В. Вигоднер, Т. П. Білоусова, Т. П. Ляхович. – Херсон : "ОЛДІ-ПЛЮС", 2019. – 336 с.

3. Вища математика: зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння мат. фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і мат. статистики. Методи оптимізації і задачі керування. Варіаційне числення. Числові методи : навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / П. П. Овчинников, П. С. Кропив'янський, С. П. Полушкін та ін. ; за заг. ред. П. П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2004. – 376 с.

4. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.

5. Дорош А. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навч. посібник / А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – К. : НТУУ "КПІ", 2006. – 268 с.

6. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, Г. О. Михалін. – Полтава : «Довкілля-К», 2009. – 509 с.

7. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Б. Жильцов; за ред. Г. О. Михаліна. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

8. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч.1. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – вид. 2-ге, без змін. – К. : КНЕУ, 2007. – 304 с.

9. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посібник / Г. І. Кармелюк. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.

10. Конспекти лекцій з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» [Електронний ресурс]. –

Харків, 2018. – Режим доступу : URL : https://pns.hneu.edu.ua/mod/resource/view.php?id=120021.

11. Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів заочної форми навчання транспортного факультету. Частина 1 (теоретичний матеріал) / Уклад. : І. М. Килимник, Т. Г. Полякова. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2019. – 110 с.

12. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 : Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / П. П. Овчинников, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2004. – 792 с.

17. Огірко О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів : ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.

18. Borkar V. S. Probability theory : an advanced course. / V. S. Borkar. – Springer Science & Business Media, 2012. – 138p.

19. Klenke A. Probability theory: a comprehensive course. / A. Klenke. – Springer Science & Business Media, 2013. – 637p.

20. Rohatgi V. K. An introduction to probability and statistics. / V. K. Rohatgi, AK Md Ehsanes Saleh. – John Wiley & Sons, 2015. – 597p.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0, 3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

Продовження Таблиці А.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця А.2 – Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,11	0,0438	0,22	0,0871	0,33	0,1293
0,01	0,0040	0,12	0,0478	0,23	0,0910	0,34	0,1331
0,02	0,0080	0,13	0,0517	0,24	0,0948	0,35	0,1368
0,03	0,0120	0,14	0,0557	0,25	0,0987	0,36	0,1406
0,04	0,0160	0,15	0,0596	0,26	0,1026	0,37	0,1443
0,05	0,0199	0,16	0,0636	0,27	0,1064	0,38	0,1480
0,06	0,0239	0,17	0,0675	0,28	0,1103	0,39	0,1517
0,07	0,0279	0,18	0,0714	0,29	0,1141	0,40	0,1554
0,08	0,0319	0,19	0,0753	0,30	0,1179	0,41	0,1591
0,09	0,0359	0,20	0,0793	0,31	0,1217	0,42	0,1628
0,10	0,0398	0,21	0,0832	0,32	0,1255	0,43	0,1664

Продовження Таблиці А.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508	1,34	0,4099
0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531	1,35	0,4115
0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554	1,36	0,4131
0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577	1,37	0,4147
0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599	1,38	0,4162
0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621	1,39	0,4177
0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643	1,40	0,4192
0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665	1,41	0,4207
0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686	1,42	0,4222
0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708	1,43	0,4236
0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729	1,44	0,4251
0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749	1,45	0,4265
0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770	1,46	0,4279
0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790	1,47	0,4292
0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810	1,48	0,4306
0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830	1,49	0,4319
0,60	0,2257	0,90	0,3159	1,20	0,3849	1,50	0,4332
0,61	0,2291	0,91	0,3186	1,21	0,3869	1,51	0,4345
0,62	0,2324	0,92	0,3212	1,22	0,3883	1,52	0,4357
0,63	0,2357	0,93	0,3238	1,23	0,3907	1,53	0,4370
0,64	0,2389	0,94	0,3264	1,24	0,3925	1,54	0,4382
0,65	0,2422	0,95	0,3289	1,25	0,3944	1,55	0,4394
0,66	0,2454	0,96	0,3315	1,26	0,3962	1,56	0,4406
0,67	0,2486	0,97	0,3340	1,27	0,3980	1,57	0,4418
0,68	0,2517	0,98	0,3365	1,28	0,3997	1,58	0,4429
0,69	0,2549	0,99	0,3389	1,29	0,4015	1,59	0,4441
0,70	0,2580	1,00	0,3413	1,30	0,4032	1,60	0,4452
0,71	0,2611	1,01	0,3438	1,31	0,4049	1,61	0,4463
0,72	0,2642	1,02	0,3461	1,32	0,4066	1,62	0,4474
0,73	0,2673	1,03	0,3485	1,33	0,4082	1,63	0,4484

Продовження Таблиці А.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,30	0,4893	2,63	0,4957
1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,31	0,4896	2,64	0,4959
1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,32	0,4898	2,65	0,4960
1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,33	0,4901	2,66	0,4961
1,68	0,4535	2,01	0,4778	2,34	0,4904	2,67	0,4962
1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,35	0,4906	2,68	0,4963
1,70	0,4554	2,03	0,4788	2,36	0,4909	2,69	0,4964
1,71	0,4564	2,04	0,4793	2,37	0,4911	2,70	0,4965
1,72	0,4573	2,05	0,4798	2,38	0,4913	2,71	0,4966
1,73	0,4582	2,06	0,4803	2,39	0,4916	2,72	0,4967
1,74	0,4591	2,07	0,4808	2,40	0,4918	2,73	0,4968
1,75	0,4599	2,08	0,4812	2,41	0,4920	2,74	0,4969
1,76	0,4608	2,09	0,4817	2,42	0,4922	2,75	0,4970
1,77	0,4616	2,10	0,4821	2,43	0,4925	2,76	0,4971
1,78	0,4625	2,11	0,4826	2,44	0,4927	2,77	0,4972
1,79	0,4633	2,12	0,4830	2,45	0,4929	2,78	0,4973
1,80	0,4641	2,13	0,4834	2,46	0,4931	2,79	0,4974
1,81	0,4649	2,14	0,4838	2,47	0,4932	2,80	0,4974
1,82	0,4656	2,15	0,4842	2,48	0,4934	2,81	0,4975
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,49	0,4936	2,82	0,4976
1,84	0,4671	2,17	0,4850	2,50	0,4938	2,83	0,4977
1,85	0,4678	2,18	0,4854	2,51	0,4940	2,84	0,4977
1,86	0,4686	2,19	0,4857	2,52	0,4941	2,85	0,4978
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,53	0,4943	2,86	0,4979
1,88	0,4699	2,21	0,4864	2,54	0,4945	2,87	0,4979
1,89	0,4706	2,22	0,4868	2,55	0,4946	2,88	0,4980
1,90	0,4713	2,23	0,4871	2,56	0,4948	2,89	0,4981
1,91	0,4719	2,24	0,4875	2,57	0,4949	2,90	0,4981
1,92	0,4726	2,25	0,4878	2,58	0,4951	2,91	0,4982
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,59	0,4952	2,92	0,4982
1,94	0,4738	2,27	0,4884	2,60	0,4953	2,93	0,4983
1,95	0,4744	2,28	0,4887	2,61	0,4955	2,94	0,4984
1,96	0,4750	2,29	0,4890	2,62	0,4956	2,95	0,4984

Продовження Таблиці А.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,96	0,4985	3,23	0,4994	3,50	0,4998	3,77	0,4999
2,97	0,4985	3,24	0,4994	3,51	0,4998	3,78	0,4999
2,98	0,4986	3,25	0,4994	3,52	0,4998	3,79	0,4999
2,99	0,4986	3,26	0,4994	3,53	0,4998	3,80	0,4999
3,00	0,49865	3,27	0,4995	3,54	0,4998	3,81	0,4999
3,01	0,4987	3,28	0,4995	3,55	0,4998	3,82	0,4999
3,02	0,4687	3,29	0,4995	3,56	0,4998	3,83	0,4999
3,03	0,4988	3,30	0,4995	3,57	0,4998	3,84	0,4999
3,04	0,4988	3,31	0,4995	3,58	0,4998	3,85	0,4999
3,05	0,4989	3,32	0,4995	3,59	0,4998	3,86	0,4999
3,06	0,4989	3,33	0,4996	3,60	0,4998	3,87	0,4999
3,07	0,4989	3,34	0,4996	3,61	0,4998	3,88	0,4999
3,08	0,4990	3,35	0,4996	3,62	0,4999	3,89	0,4999
3,09	0,4990	3,36	0,4996	3,63	0,4999	3,90	0,4999
3,10	0,4990	3,37	0,4996	3,64	0,4999	3,91	0,4999
3,11	0,4991	3,38	0,4996	3,65	0,4999	3,92	0,4999
3,12	0,4991	3,39	0,4997	3,66	0,4999	3,93	0,4999
3,13	0,4991	3,40	0,4997	3,67	0,4999	3,94	0,4999
3,14	0,4992	3,41	0,4997	3,68	0,4999	3,95	0,4999
3,15	0,4992	3,42	0,4997	3,69	0,4999	3,96	0,4999
3,16	0,4992	3,43	0,4997	3,70	0,4999	3,97	0,4999
3,17	0,4992	3,44	0,4997	3,71	0,4999	3,98	0,4999
3,18	0,4993	3,45	0,4997	3,72	0,4999	3,99	0,4999
3,19	0,4993	3,46	0,4997	3,73	0,4999	4,00	0,5
3,20	0,4993	3,47	0,4997	3,74	0,4999		
3,21	0,4993	3,48	0,4997	3,75	0,4999		
3,22	0,4994	3,49	0,4998	3,76	0,4999		

Таблиця А.3 – Значення функції $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065

Продовження Таблиці А.3

k	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016
5				0,0001	0,0002
k	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}9$	
0	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6		0,0001	0,0002	0,0003	
k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
0	0,3679	0,1353	0,498	0,0183	0,0067
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363
10			0,0008	0,0053	0,0181
11			0,0002	0,0019	0,0082
12			0,0001	0,0006	0,0034
13				0,0002	0,0013
14				0,0001	0,0005
15					0,0002
k	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005

Продовження Таблиці А.3

k	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
2	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18		0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19		0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20			0,0002	0,0006	0,0019
21			0,0001	0,0003	0,0009
22				0,0001	0,0004
23					0,0002
24					0,0001

Навчальне видання

КИЛИМНИК Ірина Михайлівна

ПРАКТИКУМ З ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Комп’ютерний набір: *Килимник І.М.*
Комп’ютерна верстка: *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 28.03.2024. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 14,9.
Тираж 100 прим. Зам. № 309.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.