

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

ЗАТВЕРДЖУЮ
ректор ЗНТУ
проф. _____ С. Б. Беліков
« ____ » _____ 2018 р.

КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

«Дослідження операцій в транспортних системах»

для студентів денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

Частина II. Методичні вказівки до виконання практичних занять
Розділ 1. *Лінійне програмування. Цілочислове програмування.*

Факультет: Транспортний
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина II, розділ 1) / Склали: доц. Кузькін О. Ф., доц. Лашених О. А. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 51 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук Кузькін О. Ф.
доц., канд. техн. наук Лашених О. А.

Рецензент: проф., д-р техн. наук Турпак С. М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні
Вченої ради Транспортного
факультету ЗНТУ
Протокол № ____ від «___» _____ 2018 р.

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то екстремального значення цільова функція набуває в одній з вершин багатокутника розв'язків.

Для розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом необхідно:

1) в прямокутній системі координат (x_1, x_2) побудувати прямі лінії, рівняння яких отримуються заміною в системі обмежень задачі знаків нерівностей на знаки рівностей;

2) визначити і побудувати півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі;

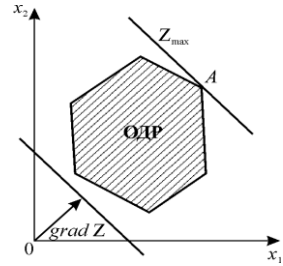
3) визначити багатокутник розв'язків задачі;

4) побудувати вектор градієнту $\text{grad } \bar{Z} = \{c_1, c_2\}$, що спрямований у бік зростання значень цільової функції задачі;

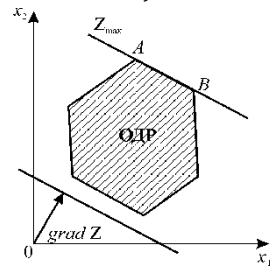
5) побудувати будь-яку пряму, перпендикулярну вектору $\text{grad } \bar{Z}$, що перетинає багатокутник розв'язків;

6) переміщуючи цю пряму у напрямі вектору $\text{grad } \bar{Z}$ (для задач максимізації) чи у протилежному напрямі (для задач мінімізації), знайти граничну вершину багатокутника розв'язків, у якій цільова функція досягає екстремального значення;

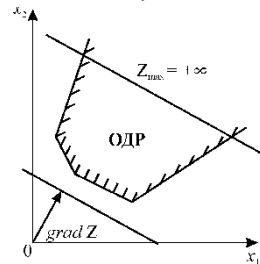
7) визначити координати знайденої таким чином вершини багатокутника розв'язків та обчислити значення цільової функції у цій точці.



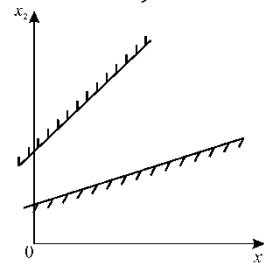
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.1 — Випадки розв'язків задачі ЛП графічним методом

При розв'язуванні задачі лінійного програмування графічним методом можливі наступні випадки (рис. 1.1):

а) задача має єдиний оптимальний розв'язок, що досягається у одній вершині багатокутника розв'язків (рис. 1.1, а);

б) задача має безліч оптимальних розв'язків, всі з яких належать відрітку на границі багатокутника розв'язків (рис. 1.1, б);

в) задача не має оптимального розв'язку, оскільки цільова функція не обмежена згори чи знизу (рис. 1.1, в);

г) задача не має оптимального розв'язку, оскільки система обмежень задач несумісна та багатокутника розв'язків не існує (рис. 1.1, г);

При цьому слід зауважити, що задача може мати оптимальний розв'язок за необмеженості області допустимих розв'язків.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Оптовий склад загальною площею $S = 1000 \text{ м}^2$ надає послуги зі зберігання вантажів двох типів А і Б. Для забезпечення належного зберігання склад має в наявності $N = 500$ одиниць складської тари. Зберігання тонни вантажу А потребує a_1 (м^2) складських площ та b_1 одиниць тари, зберігання тонни вантажу Б потребує a_2 (м^2) складських площ та b_2 одиниць тари. Прибуток складу на місяць від зберігання тонни вантажу А складає α грн., вантажу Б — β грн. Визначити, яку кількість кожного вантажу необхідно зберігати на складі, щоб отримати найбільший прибуток при виконанні додаткових умов:

1) *варіанти 1–8*: кількість вантажу А на складі повинна перевищувати кількість вантажу Б щонайменше на c тонн;

2) *варіанти 9–16*: кількість вантажу Б на складі повинна перевищувати кількість вантажу А щонайменше на c тонн;

3) *варіанти 17–23*: кількість вантажу А на складі повинна перевищувати кількість вантажу Б щонайменше у c разів;

4) *варіанти 24–30*: кількість вантажу Б на складі повинна перевищувати кількість вантажу А щонайменше у c разів.

Вихідні дані задачі за варіантами наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 1.

Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c	Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c
1	3	7	4	2	25	40	50	16	6	4	9	5	30	15	18
2	5	6	3	7	10	25	30	17	6	5	1	3	15	20	1,5
3	4	7	3	4	15	25	40	18	4	7	6	5	30	25	2
4	2	5	3	2	25	18	45	19	18	14	6	7	15	20	1,2
5	4	3	8	5	15	10	30	20	7	5	5	11	17	40	2,5
6	7	5	4	9	12	21	15	21	10	4	5	9	10	25	3
7	6	5	8	3	16	11	35	22	8	3	6	11	20	10	1,4
8	9	5	3	5	15	19	40	23	12	17	3	5	14	24	2
9	6	4	5	9	15	23	30	24	10	11	5	4	25	20	2
10	4	7	5	6	10	12	30	25	9	5	6	7	20	30	3
11	8	7	6	11	15	12	45	26	4	7	9	3	10	16	3
12	7	4	4	9	10	25	15	27	8	3	7	8	14	15	2,5
13	10	5	6	7	21	16	30	28	9	12	4	5	21	9	1,5
14	5	8	7	6	21	32	15	29	8	5	4	9	16	15	2
15	4	11	3	1	20	10	12	30	3	7	10	8	20	15	2

Приклад виконання завдання

Оптовий склад загальною площею $S = 300 \text{ м}^2$ надає послуги зі зберігання вантажів двох типів А і Б. Для забезпечення належного зберігання склад має в наявності $N = 180$ одиниць складської тари. Зберігання тонни вантажу А потребує $3,0 \text{ м}^2$ складських площ та 3 одиниці тари, зберігання тонни вантажу Б потребує $5,0 \text{ м}^2$ складських площ та 2 одиниці тари. Прибуток складу на місяць від зберігання тонни вантажу А складає $10,0 \text{ грн.}$, вантажу Б — $30,0 \text{ грн.}$ Визначити, яку кількість вантажів А і Б необхідно зберігати на складі, щоб отримати найбільший прибуток, якщо кількість вантажу Б на складі не повинна бути більшою ніж кількість вантажу А на 30 тонн.

Розв'язок.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1 та x_2 — відповідно кількість вантажів А і Б, що необхідно зберігати на складі. Тоді, за умовою задачі, необхідно максимізувати місячний прибуток складу

$$Z = 10x_1 + 30x_2 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на складські площі

$$3x_1 + 5x_2 \leq 300;$$

– на наявну кількість складської тари

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180;$$

– на відношення між кількістю вантажів різних видів, що знаходиться на зберіганні

$$-x_1 + x_2 \leq 30;$$

– на невід'ємність змінних задачі

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Задача має дві незалежні змінні, тому її можна розв'язати графічним методом. Побудуємо в системі координат x_1, x_2 прямі, що відповідають обмеженням задачі, обернувши нерівності на рівності. Багатокутник OABC визначає область допустимих рішень задачі (заштрихована на рис. 1.2). Координати будь-якої з її точок задовольняють систему обмежень задачі.

Для знаходження точки, у якій цільова функція задачі досягає найбільшого значення побудуємо з початку координат вектор $\text{grad } \bar{Z} = \{10; 30\}$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі.

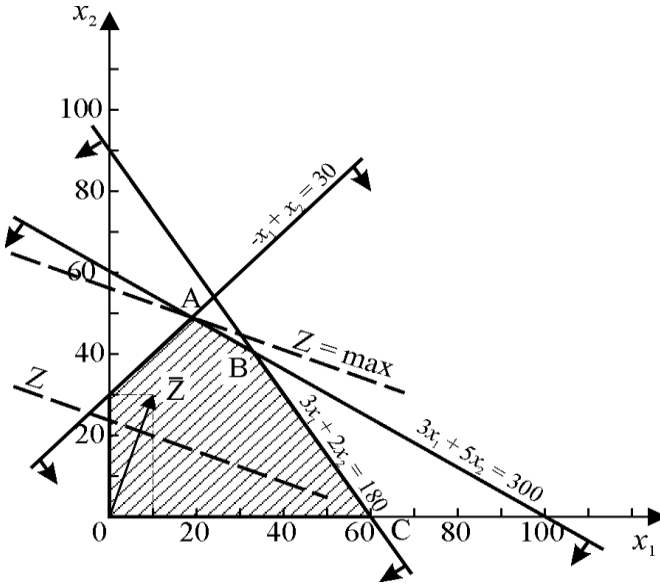


Рисунок 1.2 — Розв'язання задачі графічним методом

Вектор \vec{Z} задає напрямок збільшення значень цільової функції. Проведемо перпендикулярно йому будь-яку пряму, а потім пересуватимемо її паралельно самій собі у напрямі вектора \vec{Z} доти, доки він не торкнеться крайньої точки на області допустимих рішень (відповідні прямі показані на рис. 1.2 пунктирною лінією). Такою точкою буде точка A, координати якої визначають оптимальне рішення задачі.

Для точного знаходження координат точки A необхідно вирішити систему двох лінійних рівнянь, що відповідають двом прямим, які перетинаються у цій точці:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 300; \\ -x_1 + x_2 = 30. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь отримаємо: $x_1 = 18,75$; $x_2 = 48,75$, тобто для досягнення максимального прибутку на складі необхідно зберігати 18,75 тонн вантажу А та 48,75 тонн вантажу Б. За таких умов місячний прибуток складу складе $Z_{\max} = 10 \cdot 18,75 + 30 \cdot 48,75 = 1650$ грн.

Проаналізуємо використання складських площ та тари. Складські площі, очевидно, будуть використані повністю. Це витікає з того, що пряма $3x_1 + 5x_2 = 300$ (вона виражає обмеження на складські площі) проходить через екстремальну точку А. Підставляючи оптимальні значення змінних задачі у нерівність, що відповідає обмеженню на складську тару, отримаємо

$$3 \cdot 18,75 + 2 \cdot 48,75 = 153,75 < 180.$$

Таким чином, $180 - 153,75 = 26,75 \approx 26$ одиниць складської тари не будуть використані для зберігання вантажів.

Контрольні запитання

1. Дайте формулювання задачі лінійного програмування в загальному вигляді.
2. За яких умов задачу лінійного програмування можна розв'язати графічним методом?
3. Що таке область допустимих рішень задачі та які її властивості?
4. Як графічно зображується цільова функція задачі? Як визначити напрямок її зростання та спадання?
5. У яких випадках задача лінійного програмування має один розв'язок? Не має розв'язків? Має безліч розв'язків?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ ПОЧАТКОВОГО ДОПУСТИМОГО БАЗИСНОГО РІШЕННЯ

Мета заняття: вивчення алгоритму симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування за наявності початкового допустимого базисного рішення.

Стисла теоретична довідка

Симплекс-метод є обчислювальною процедурою, що застосовується для рішення задачі лінійного програмування, записаній у стандартному (канонічному) вигляді. У задачі лінійного програмування, записаній у стандартному вигляді, цільова функція повинна бути *мінімізована*, а всі обмеження повинні бути задані у вигляді *рівностей з невід'ємними змінними*. Звести задачу з загального вигляду до канонічного можна за допомогою наступних правил:

а) *максимізація* цільової функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ рівнозначна *мінімізації* цільової функції, у якій знаки при змінних замінені на протилежні: $Z' = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$;

б) обмеження у вигляді нерівностей « \leq » перетворюються на рівності введенням до них додаткової невід'ємної змінної з коефіцієнтом $+1$. Наприклад, нерівність $3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$ перетворюється на рівність $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5$, де нова змінна $x_4 \geq 0$;

в) обмеження у вигляді нерівностей « \geq » перетворюються на рівності введенням до них додаткової невід'ємної змінної з коефіцієнтом -1 . Наприклад, нерівність $5x_1 - x_2 + x_3 \geq 4$ перетворюється на рівність $5x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4$, де нова змінна $x_5 \geq 0$;

г) якщо деяка змінна x_k може набувати будь-яких значень, а не тільки невід'ємних, її можна привести до виду $x_k = x'_k - x''_k$, де $x'_k \geq 0$ та $x''_k \geq 0$.

Таким чином, зведення задачі лінійного програмування до канонічного вигляду може викликати необхідність введення додаткових невід'ємних змінних.

Базисним допустимим розв'язком задачі, що має n змінних та m обмежень, називається вектор значень незалежних змінних задачі, що задовольняє обмеженням задачі, та у якому m компонентів є невід'ємними (*базисні змінні*), а інші $(n - m)$ компонентів дорівнюють нулю (*вільні змінні*). Базисні змінні утворюють *базис*. Якщо одна чи декілька з базисних змінних набувають нульового значення, то такий базис називають *виродженим*.

Процес розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом зручно проводити у так званій *симплекс-таблиці* (таблиця 2.1).

У стовпчику *Базис* записують базисні змінні поточного базисного допустимого розв'язку (*опорного плану*) задачі у тій послідовності, в якій вони розташовуються у системі обмежень задачі.

У стовпчику *C* (стовпчик вільних членів) записуються відповідні значення базисних змінних поточного опорного плану задачі.

Таблиця 2.1 — Симплекс-таблиця

Базис	C	x_1	x_2	...	x_n
x_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
x_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
x_m	b_m
$-Z$	$-Z_0$	c_1	c_2	...	c_n

У наступних стовпчиках, кількість яких відповідає кількості змінних задачі (враховуючи додані), записують відповідні коефіцієнти кожного обмеження задачі.

Нижній рядок симплекс-таблиці називається *індексним рядком*. У стовпчику вільних членів цього рядка записують поточне значення цільової функції задачі. У інших стовпчиках цього рядка на початку розв'язування записують коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі.

Симплекс-алгоритм розв'язування задачі полягає у виконанні чотирьох кроків:

1) перевірка поточного опорного плану задачі на оптимальність. Якщо всі елементи індексного рядка у симплекс-таблиці (за виключенням значення у стовпчику C) є невід'ємними, то даний опорний план є оптимальним розв'язком задачі і процес рішення припиняється. Інакше виконують крок 2;

2) знаходження змінної для включення до базису. Відшукують у індексному рядку стовпчик, з мінімальним від'ємним значенням (якщо таких значень декілька, можна вибрати будь-який з них). Цей стовпчик називається *провідним стовпчиком*, а вільна змінна, що відповідає цьому стовпчику, у наступному опорному плані задачі стане базисною;

3) знаходження змінної для виключення з базису. Відшукують рядок, якому відповідає найменше додатне відношення чисел зі стовпчика вільних членів C до відповідних чисел провідного стовпчика. Цей рядок називається *провідним рядком*, а базисна змінна, що відповідає цьому рядку, у наступному опорному плані задачі стане вільною. На перетині провідного рядка та провідного стовпчика знаходиться *провідний елемент*. Зауважимо, що якщо всі елементи провідного рядка від'ємні чи дорівнюють нулю, то задача лінійного програмування не має розв'язку з причини необмеженого зростання цільової функції задачі і процес рішення припиняється.

4) побудова нового опорного плану задачі. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюють за наступними правилами:

а) коригують набір базисних змінних, записуючи у стовпчику *Базис* замість змінної у провідному рядку змінну з провідного стовпчика;

б) всі значення у провідному рядку ділять на провідний елемент;

в) всі значення у провідному стовпчику заповнюють нулями;

г) інші елементи симплекс-таблиці перераховуються за формулою:

$$HЗ = ПЗ - \frac{EP \times EC}{EP}, \quad (1)$$

де НЗ — нове значення елемента; ПЗ — попереднє значення елемента; ЕР — елемент, що стоїть навпроти шуканого у провідному рядку; ЕС — елемент, що стоїть навпроти шуканого у провідному стовпчику; ЕП — провідний елемент.

Зміст практичного заняття
та вихідні дані до його виконання

Автотранспортне підприємство здійснює доставку клієнтам трьох видів вантажів (I, II, III). Для виконання перевезень вантажів підприємство має ресурси у кількості: транспортні засоби — 200 *автомобіле-годин*, вантажники — 400 *людино-годин*, навантажувально-розвантажувальні механізми — 90 *машино-годин*. Витрати кожного виду ресурсів на доставку 1 *тонни* вантажу різних видів неоднакові та подані у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 — Витрати ресурсів на доставку 1 *тонни* вантажів

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на доставку 1 <i>тонни</i> вантажів		
	I	II	III
Транспортні засоби, <i>автомобіле-годин/т</i>	a_1	b_1	c_1
Вантажники, <i>людино-годин/т</i>	a_2	b_2	c_2
Навантажувально-розвантажувальні механізми, <i>маш.-годин/т</i>	a_3	b_3	c_3

Прибуток автотранспортного підприємства від доставки клієнтам 1 *тонни* вантажу I складають α *грн.*, вантажу II — β *грн.*, вантажу III — γ *грн.*

Визначити, яку кількість вантажу кожного виду необхідно доставляти клієнтам, щоб прибуток підприємства був максимальним.

Вихідні дані для розв'язування задачі по варіантах наведені у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 2

Вар.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
1	3	5	2	6	5	1	2	8	3	4	5	10
2	7	3	1	3	2	2	4	4	3	6	7	10
3	4	5	1	6	5	3	2	6	1	7	9	6
4	9	5	0	5	3	2	4	6	3	15	8	9
5	5	6	3	2	5	2	5	6	1	11	6	5
6	8	3	2	6	5	1	4	7	2	7	4	4
7	3	8	1	2	7	2	4	4	1	3	5	3
8	5	10	1	3	9	1	4	7	3	9	7	8
9	3	5	2	6	5	2	2	8	3	7	9	10
10	9	3	1	3	2	1	4	4	3	8	3	6
11	4	5	1	6	5	3	2	4	1	8	5	7
12	6	7	1	5	4	3	5	2	1	7	10	4
13	4	7	2	3	5	1	5	5	3	8	5	10
14	4	9	2	6	7	0	5	8	3	9	10	10
15	5	6	2	4	10	3	2	9	1	7	8	4
16	4	5	2	6	4	2	2	8	1	9	5	8
17	7	3	2	3	5	1	4	2	2	8	5	7
18	6	4	4	4	3	2	6	5	3	8	4	6
19	5	4	1	5	5	2	1	2	2	12	14	9
20	7	5	2	6	4	3	2	4	1	15	8	5
21	3	4	3	6	3	1	5	2	2	8	15	12
22	6	4	1	4	7	2	6	5	1	8	9	6
23	3	6	1	2	5	2	5	8	1	5	6	5
24	3	5	2	5	5	1	2	4	4	15	14	9
25	4	5	1	6	3	2	1	6	2	15	10	12
26	3	5	1	7	5	0	2	6	1	10	5	9
27	3	9	1	2	7	2	8	8	1	7	9	10
28	8	3	1	3	6	2	4	4	1	10	5	5
29	8	5	1	6	9	1	6	5	1	5	8	7
30	5	4	2	5	7	1	1	3	0	8	15	5

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
2	4	1	4	5	1	5	2	2	5	6	10

Розв'язок.

Позначимо як x_1, x_2, x_3 — відповідно кількість вантажу I, II та III виду, яку доставляє підприємство клієнтам. Тоді математичну модель задачі можна подати у наступному вигляді.

Максимізувати прибуток підприємства від перевезень

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на транспортні ресурси

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200;$$

– на трудові ресурси

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 400;$$

– на ресурси навантажувально-розвантажувальних механізмів

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90;$$

– на невід'ємність змінних задачі

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Для рішення задачі симплекс-методом зведемо її до канонічного виду. Помножимо праву частину виразу для цільової функції

на -1 (для отримання задачі мінімізації) та перетворимо нерівності виду « \leq » на рівності шляхом введення до них додаткових невід'ємних змінних x_4 , x_5 та x_6 . Отримаємо задачу:

мінімізувати

$$Z' = -5x_1 - 6x_2 - 10x_3 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 200;$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 400;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 90;$$

$$x_1 \dots x_6 \geq 0.$$

Початкове допустиме базисне рішення очевидне (його утворюють додані змінні та праві частини рівнянь задачі, поданої у канонічному вигляді):

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 200, x_5 = 400, x_6 = 90, Z' = 0.$$

Складемо початкову симплекс-таблицю задачі (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4 — Початковий опорний план задачі

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	200	2	4	5	1	0	0
x_5	400	4	5	2	0	1	0
x_6	90	1	1	2	0	0	1
$-Z'$	0	-5	-6	-10	0	0	0

У стовпчик *Базис* записуємо базисні змінні x_4 , x_5 та x_6 . У стовпчик вільних членів C записуємо їх значення у початковому базисному рішенні, що відповідають правим частинам системи обмежень задачі. У стовпчики $x_1 - x_6$ записуємо коефіцієнти при відповідних змінних у системі обмежень задачі. У індексному рядку стовпчика C записуємо поточне значення цільової функції $Z' = 0$

, а у стовпчики $x_1 - x_6$ — коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції задачі.

Початковий опорний план задачі *не є оптимальним*, оскільки у індексному рядку наявні елементи з від'ємними значеннями.

Відшукуємо у індексному рядку *мінімальне від'ємне значення*. Воно знаходиться у стовпчику x_3 та дорівнює -10 . Стовпчик x_3 є *провідним стовпчиком*, а вільну змінну x_3 у наступному опорному плані задачі включимо до базису.

Для визначення змінної, яку слід виключити з базису, розділимо значення у стовпчику C на відповідні значення провідного стовпчика:

$$\begin{aligned} \text{рядок } x_4 : 200 / 5 &= 40; & \text{рядок } x_5 : 400 / 2 &= 200; \\ \text{рядок } x_6 : 90 / 2 &= 45. \end{aligned}$$

Таким чином, змінну x_4 , якій відповідає *найменше додатне* з знайдених значень у наступному опорному плані слід виключити з базису, а рядок x_4 є *провідним рядком*. На перетині провідного рядка та провідного стовпчика стоїть *провідний елемент*, що дорівнює 5.

Побудуємо покращений опорний план у новій симплекс-таблиці (таблиця 2.5) за наступними правилами:

- 1) замість змінної x_4 у стовпчик *Базис* записуємо змінну x_3 ;
- 2) всі елементи провідного рядка ділимо на 5;
- 3) у провідному стовпчику у всіх рядках, окрім провідного записуємо нулі;
- 4) інші елементи нової симплекс-таблиці розраховуємо за формулою (1). Наприклад, елемент, що знаходився у рядку x_6 і стовпчику x_2 та дорівнював 1, розраховується наступним чином. Навпроти цього елемента у провідному рядку стоїть значення 4, а навпроти цього елемента у провідному стовпчику стоїть значення 2. Так як провідний елемент дорівнює п'яти, то за формулою (1) маємо:

$$\text{Нове значення} = 1 - \frac{4 \times 2}{5} = 1 - 1,6 = -0,6.$$

Використані для розрахунку значення показані у таблиці 2.4 напівжирним курсивом та стрілками.

Таблиця 2.5 — Покращений опорний план задачі (2 ітерація)

Базис	<i>C</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	<i>x</i> ₅	<i>x</i> ₆
<i>x</i> ₃	40	0,4	0,8	1	0,2	0	0
<i>x</i> ₅	320	3,2	3,4	0	-0,4	1	0
<i>x</i> ₆	10	0,2	-0,6	0	-0,4	0	1
- <i>Z</i> '	400	-1	2	0	2	0	0

Переглянувши індексний рядок бачимо, що отриманий новий опорний план задачі не є оптимальним, оскільки містить від'ємне значення (-1) у стовпчику *x*₁. Діючи аналогічно описаному вище, вводимо до базису змінну *x*₁, виключаємо з базису змінну *x*₆, та переходимо до нового опорного плану (таблиця 2.6).

Таблиця 2.6 — Покращений опорний план задачі (3 ітерація)

Базис	<i>C</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	<i>x</i> ₅	<i>x</i> ₆
<i>x</i> ₃	20	0	2	1	1	0	-2
<i>x</i> ₅	160	0	13	0	6	1	-16
<i>x</i> ₁	50	1	-3	0	-2	0	5
- <i>Z</i> '	450	0	-1	0	0	0	5

Цей опорний план також не є оптимальним, оскільки у індексному рядку міститься від'ємне значення (-1) у стовпчику *x*₂. Вводячи до базису змінну *x*₂ та виключаючи з базису змінну *x*₃ переходимо до нового опорного плану задачі (таблиця 2.7).

Таблиця 2.7 – Оптимальний план задачі

Базис	<i>C</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	<i>x</i> ₅	<i>x</i> ₆
<i>x</i> ₂	10	0	1	0,5	0,5	0	-1
<i>x</i> ₅	30	0	0	-6,5	-0,5	1	-3
<i>x</i> ₁	80	1	0	1,5	-0,5	0	2
- <i>Z</i> '	460	0	0	0,5	0,5	0	4

Цей опорний план є *оптимальним* (у індексному рядку немає від'ємних значень). Таким чином, оптимальний розв'язок задачі знайдено (змінні беремо зі стовпчика *Базис*, а їх значення зі стовпчика *C*):

$$x_1 = 80; \quad x_2 = 10; \quad Z_{\max} = 460.$$

Для досягнення максимального прибутку у 460 грн., підприємству необхідно доставити 80 тонн вантажу I та 10 тонн вантажу II.

До процедури розв'язування та оптимального розв'язку задачі слід зробити деякі зауваження:

– при розрахунках у стовпчику *C* у рядках змінних задачі *ніколи не може з'явитися від'ємне значення*. Така ситуація свідчить про невірні обчислення чи неправильний вибір провідного стовпчика;

– обсяги доставки вантажу III виду дорівнюють нулю, оскільки змінна x_3 не є базисною. Знаходження у базисі змінної x_5 , яка входить в обмеження за трудовими ресурсами, показує, що $x_5 = 30$ *людино-годин* будуть не використані. Ресурси ж транспорту та навантажувально-розвантажувальних механізмів будуть використані повністю.

Контрольні запитання

1. Що таке канонічний вид задачі лінійного програмування? Як звести задачу, подану у загальному вигляді, до канонічного вигляду?

2. Дайте наступні визначення: *базис, базисне допустиме рішення, базисна змінна, вільна змінна, вироджений план?*

3. Як складається симплекс-таблиця?

4. У якому випадку опорний план задачі, записаний у симплекс-таблиці буде оптимальним?

5. Як визначити провідний рядок, провідний стовпчик та провідний елемент симплекс-таблиці?

6. Викладіть симплекс-алгоритм та правила перетворення симплекс-таблиць.

Складова цільової функції $W = Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \dots + Mx_{n+m}$ називається *штучною цільовою функцією*. Тоді процес знаходження початкового базисного рішення полягає у мінімізації штучної цільової функції та отриманні опорного плану задачі, у якому кожна зі *штучних* змінних $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ буде дорівнювати нулю, а відповідно, і значення штучної цільової функції також буде нульовим.

Процес рішення задачі лінійного програмування у загальному вигляді описати у вигляді наступної послідовності дій:

- 1) привести задачу до канонічного виду;
- 2) додати у кожне рівняння, утворене з обмежень виду « \geq » та « $=$ » по одній штучній змінній з коефіцієнтом $+1$. Ці штучні змінні у сполученні зі змінними, що додані у обмеження виду « \leq » будуть утворювати початковий опорний план задачі;
- 3) утворити штучну цільову функцію з доданку штучних змінних;
- 4) виразити штучну цільову функцію через вільні змінні;
- 5) скласти початкову симплекс таблицю. Симплекс-таблиця розширеної задачі містить нижче індексного рядка ще один рядок — індексний рядок для штучної цільової функції (таблиця 3.1);

Таблиця 3.1 — Симплекс-таблиця розширеної M -задачі

Базис	С	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
...	0	0	...	0
x_{n+m}	b_m	0	0	...	1
$-Z$	$-Z_0$	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0
$-W$	$-W_0$	m_1	m_2	...	m_n	0	0	...	0

б) до складеної таблиці застосовують симплекс-алгоритм (див. практичне заняття №2) до досягнення мінімізації штучної цільової функції, тобто до моменту, коли у індексному рядку штучної цільової функції задачі всі значення будуть невід'ємні. При цьому провідний стовпчик обирають за значеннями нижнього рядка симплекс-таблиці;

7) після мінімізації штучної цільової функції можливі два випадки:

а) якщо штучна цільова функція мінімізована, але її значення *не дорівнює нулю* і у базисі задачі наявні штучні змінні, то вирішувана задача лінійного програмування *не має жодного допустимого базисного розв'язку* і процес розв'язування припиняється;

б) якщо штучна цільова функція мінімізована, її значення дорівнює нулю у базисі задачі немає жодної штучної змінної, то перший етап розв'язування закінчено — отриманий початковий допустимий базисний розв'язок задачі.

8) з симплекс таблиці видаляють стовпчики, що відповідають штучним змінним розширеної задачі та індексний рядок штучної цільової функції, і застосовують надалі симплекс-алгоритм до досягнення оптимального рішення задачі.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Підприємству необхідно перевезти залізницею вироби трьох видів: виробів I виду не більше p_1 одиниць, виробів II виду не менше p_2 одиниць, виробів III виду не менше p_3 одиниць.

Залізниця для перевезення може виділити спеціально обладнані вагони трьох типів: А, В і С. Для повного завантаження вагону до нього необхідно завантажувати вироби всіх трьох видів. При цьому до вагону типу А входять a_1 виробів I виду, a_2 виробів II виду, a_3 виробів третього виду; до вагону типу В входять b_1 виробів I виду, b_2 виробів II виду, b_3 виробів третього виду; до вагону типу С входять c_1 виробів I виду, c_2 виробів II виду, c_3 виробів третього виду.

Плата за перевезення вантажів у вагоні типу А складає α грн., у вагоні типу В — β грн., у вагоні типу С — γ грн.

Визначити, скільки вагонів кожного типу слід використати для перевезення, щоб сумарна плата від перевезення вантажів була найменшою.

Вихідні дані для розв'язування задачі по варіантах наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 3

Вар.	p_1	p_2	p_3	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
1	562	176	282	8	4	4	9	1	6	10	7	1	210	180	200
2	340	328	525	7	8	9	4	2	6	3	4	6	190	225	270
3	150	120	150	2	2	8	8	4	5	6	19	7	110	180	200
4	190	200	120	5	10	2	4	2	5	9	7	5	250	150	220
5	320	188	190	7	6	9	6	3	1	9	6	8	250	220	510
6	140	160	120	2	4	2	6	6	5	8	4	4	150	360	300
7	240	180	210	5	5	4	6	4	7	3	3	9	200	190	150
8	418	237	180	10	2	9	2	1	2	9	7	1	290	390	300
9	300	220	210	8	5	6	4	7	3	6	5	3	250	220	200
10	140	200	180	4	7	8	8	5	6	7	4	5	290	200	300
11	165	205	180	1	4	5	8	9	4	5	5	6	225	190	180
12	160	190	240	8	5	6	4	7	9	6	3	5	190	280	220
13	270	160	210	6	4	7	6	5	8	9	5	8	290	280	250
14	302	306	277	3	7	2	2	2	7	10	6	4	290	150	250
15	270	260	300	3	4	6	3	8	9	10	2	7	190	360	280
16	270	360	400	2	3	6	5	6	3	8	5	6	170	260	250
17	546	316	530	8	6	6	8	2	7	2	2	6	210	175	300
18	240	200	260	6	3	7	2	4	8	7	5	5	295	245	200
19	250	280	200	7	4	6	4	6	5	6	4	5	205	320	190
20	285	260	385	2	7	7	5	3	6	8	5	7	340	200	250
21	390	280	200	6	4	9	8	3	6	8	7	5	200	200	360
22	420	260	240	5	3	9	7	3	4	7	5	8	200	185	370
23	250	240	250	7	4	6	4	5	9	3	4	2	250	260	200
24	206	110	386	3	1	6	3	3	4	4	2	8	150	260	310
25	140	90	50	4	6	2	7	2	2	10	6	3	200	205	270
26	160	150	150	8	2	2	7	8	2	2	2	8	240	210	280
27	220	180	180	10	6	5	2	6	7	8	4	3	220	250	200
28	160	240	175	8	8	5	5	7	8	3	5	2	180	200	320
29	180	220	200	6	8	4	4	5	7	9	6	3	200	300	250
30	320	396	380	5	4	2	4	6	10	3	5	3	150	300	200

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:

p_1	p_2	p_3	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
300	500	420	8	4	5	2	6	5	5	5	2	300	350	150

Розв'язок.

Позначимо як x_1, x_2, x_3 — відповідно кількість використаних вагонів типів А, В, С. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

мінімізувати плату підприємства за перевезення

$$Z = 300x_1 + 350x_2 + 150x_3 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях на обсяги перевезень виробів

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 300; \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 500; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 420; \end{cases}$$

та невід'ємність змінних задачі

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Зведемо задачу до канонічного виду, перетворивши обмеження-нерівності на рівності. Для цього у першу нерівність виду « \leq » введемо додаткову невід'ємну змінну x_4 з коефіцієнтом $+1$, а до другої і третьої нерівності виду « \geq » додаткові невід'ємні змінні x_5 та x_6 з коефіцієнтами -1 . Отримаємо наступну задачу.

Мінімізувати

$$Z = 300x_1 + 350x_2 + 150x_3 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 300; \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_5 = 500; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_6 = 420; \\ x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Для цієї задачі немає очевидного початкового допустимого базисного рішення. Для утворення *штучного базису* введемо до другого та третього обмеження (утворених з нерівностей виду « \geq ») по одній додатковій *штучній* невід'ємній змінній x_7 та x_8 з коефіцієнтом $+1$. Тоді система обмежень задачі набуває вигляду:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 300; \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_5 + x_7 = 500; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_6 + x_8 = 420; \\ x_1, \dots, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

Тепер початкове допустиме базисне рішення очевидне:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0 \text{ (вільні змінні);} \\ x_4 = 300; x_7 = 500; x_8 = 420 \text{ (базисні змінні).} \end{aligned}$$

До базису входять дві штучні змінні — x_7 та x_8 . Таким чином, *штучна цільова функція* матиме вигляд $W = x_7 + x_8$.

Для виключення базисних змінних з виразу для штучної цільової функції віднімаємо «у стовпчик» з нього обмеження, що містять ці змінні. Отримуємо:

$$\begin{array}{r} W = x_7 + x_8 \\ - \\ 500 = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_5 + x_7 \\ \hline W - 500 = -4x_1 - 6x_2 - 5x_3 + x_5 + x_8 \\ - \\ 420 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_6 + x_8 \\ \hline W - 920 = -9x_1 - 11x_2 - 7x_3 + x_5 + x_6 \end{array}$$

Складаємо початкову симплекс-таблицю розширеної задачі (таблиця 3.3).

З таблиці 3.5 бачимо, що у базисі немає штучних змінних та значення штучної цільової функції дорівнює нулю. Таким чином, *перший етап розрахунків завершено і отриманий початковий допустимий базисний розв'язок задачі. Він має вигляд:*

$$x_1 = 2; x_2 = 82; x_3 = 0; x_4 = 120; x_5 = x_6 = 0; Z = 29300.$$

У подальших розрахунках *виключаємо* з таблиці індексний рядок штучної цільової функції та стовпчики штучних змінних x_7 та x_8 . Отриманий опорний план не є оптимальним, оскільки у індексному рядку цільової функції задачі (рядок $-Z$) є від'ємне значення у стовпчику x_3 . Отже, рішення необхідно продовжувати. Вводимо до базису змінну x_3 , а виключаємо з базису змінну x_4 (таблиця 3.6).

Таблиця 3.6 — Оптимальний план задачі (ітерація 4)

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	10	0	0	1	0,083	-0,25	0,333
x_2	65	0	1	0	-0,142	-0,075	-0,167
x_1	15	1	0	0	0,108	0,175	-0,167
$-Z$	-28750	0	0	0	4,583	11,25	58,33

У індексному рядку симплекс-таблиці немає від'ємних значень, отже отримано оптимальний розв'язок задачі: $x_1 = 15$; $x_2 = 65$; $x_3 = 10$; $Z_{\min} = 28750$.

Таким чином, щоб досягти найменшої плати за перевезення вантажів у розмірі 28750 грн., підприємству необхідно використати для перевезення 15 вагонів типу А, 65 вагонів типу В та 10 вагонів типу С.

Для визначення кількості перевезених виробів кожного виду необхідно підставити знайдені оптимальні значення змінних задачі до системи обмежень. У нашому прикладі перевозиться рівно 300 виробів виду I, 500 виробів виду II та 420 виробів виду III.

1. У яких випадках використовується метод штучного базису?
2. Дайте визначення штучного базису та штучної змінної.
3. Як складається симплекс-таблиця розширеної M -задачі та у чому полягає її відмінність від симплекс-таблиці звичайної задачі лінійного програмування?
4. На які етапи поділяється процес розв'язку задачі лінійного програмування методом штучного базису ?
5. Яка ознака того, що задача не має жодного допустимого плану?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

МЕТОД «ВІДГАЛУЖЕНЬ І МЕЖ» РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета заняття: вивчення ідеї методу «відгалужень і меж» та його застосування для розв'язування задач цілочислового та частково цілочислового лінійного програмування.

Стисла теоретична довідка

У практичних задачах, що зводяться до задачі лінійного програмування, нерідко трапляються випадки, коли одна чи декілька змінних задачі мають набувати цілих значень (наприклад, коли йдеться про кількість транспортних засобів). В такому разі кажуть про задачу *цілочислового лінійного програмування*, загальна постановка якої записується таким чином:

знайти максимум (мінімум) цільової функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \max(\min),$$

за умови обмежень на змінні

оптимальному розв'язкові менше (більше) ніж значення цільової функції задачі з цілочисловим рішенням, то будують дві задачі, аналогічні попереднім.

4. Обидві задачі мають розв'язки та обидві у оптимальних планах мають дробові значення змінних. Тоді для побудови двох задач беруть ту задачу, для якої значення цільової функції є більшим (меншим).

Таким чином, описаний вище процес можна проілюструвати «деревом», на якому початкова вершина відповідає вихідній послабленій задачі, а гілки — відповідають оптимальним планам задач I і II. Біля кожної вершини вказується значення цільової функції, значення змінних у оптимальному плані та додаткове обмеження, що вводиться до вихідної задачі. Кожна з вершин може мати власні відгалуження. На кожному кроці обирається та вершина, яка має найбільше (найменше) значення цільової функції серед вершин, з яких можливі відгалуження. Якщо у цій вершині розв'язок є цілочисловим, то він і буде оптимальним розв'язком вихідної задачі.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Для виконання перевезень у трьох виробничих цехах транспортний цех підприємства має у розпорядженні n тягачів та m причепів до них. При цьому у першому цеху тягач може працювати з a причепами, у другому цеху — з b причепами, у третьому цеху — з c причепами. Змінна продуктивність тягача у першому цеху дорівнює P_1 т/зміну, у другому цеху — P_2 т/зміну, у третьому цеху — P_3 т/зміну. Необхідно розподілити тягачі та причепа між цехами таким чином, щоб їх сумарна змінна продуктивність була максимальною.

Вихідні дані для виконання завчання по варіантах наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 4

Вар.	n	m	a	b	c	P_1	P_2	P_3
1	14	19	4	1	3	25	10	25
2	10	15	3	4	1	24	30	16
3	15	16	3	1	3	26	15	24
4	8	15	4	3	1	28	26	15
5	10	17	1	1	3	20	30	35
6	12	20	4	3	3	25	20	35
7	9	10	1	2	3	26	24	30
8	12	21	2	4	2	16	27	24
9	7	10	3	3	1	26	25	20
10	8	11	3	1	1	25	24	20
11	12	25	1	3	4	24	30	28
12	11	16	1	2	4	20	24	35
13	8	13	1	2	4	28	28	35
14	9	15	3	1	2	60	20	50
15	14	21	2	3	1	35	45	26
16	12	17	2	2	4	28	25	30
17	10	15	3	3	2	40	34	28
18	7	10	3	2	3	24	20	35
19	10	15	3	2	2	30	35	20
20	15	21	3	2	4	35	25	45
21	11	13	4	1	3	48	20	25
22	8	13	4	2	4	48	30	50
23	15	23	2	3	2	38	45	40
24	5	13	2	1	4	25	20	30
25	10	19	2	3	4	22	35	45
26	6	10	4	2	3	50	26	45
27	8	15	1	4	2	32	48	36
28	9	13	4	3	2	44	40	26
29	11	18	3	2	1	50	40	35
30	12	20	4	3	1	48	30	25

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:

n	m	a	b	c	P_1	P_2	P_3
5	15	3	2	4	25	20	35

Розв'язок.

Позначимо як x_1 , x_2 , x_3 — відповідно, кількість тягачів, що виділяються для роботи у першому, другому та третьому цехах. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

максимізувати сумарну продуктивність тягачів

$$Z = 25x_1 + 20x_2 + 35x_3 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на кількість тягачів

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5;$$

– на кількість причепів

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15;$$

– на цілочисловість змінних (кількість тягачів не може бути дробовим)

$$x_1, x_2, x_3 \text{ — цілі;}$$

– на невід'ємність змінних

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Розв'язуємо *послаблену* задачу без накладення умови цілочисловості змінних. В результаті отримуємо розв'язок:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2,5; \quad x_3 = 2,5; \quad Z = 137,5.$$

В отриманому оптимальному плані *послабленої* задачі є дві змінні, що мають дробові значення. Оберемо для відгалуження змінну x_2 . Тоді отримуємо дві задачі:

<i>Задача 1.</i>	<i>Задача 2.</i>
$Z = 25x_1 + 20x_2 + 35x_3 \Rightarrow \max,$	$Z = 25x_1 + 20x_2 + 35x_3 \Rightarrow \max$
за умов	за умов
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ x_2 \geq 3 \end{cases}$

Хід розв'язування будемо зображувати на дереві (рис. 4.1). Вершина дерева — результат розв'язку *послабленої* задачі.

В результаті розв'язку *задачі 1* маємо:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 2,75; \quad Z = 136,25.$$

В результаті розв'язку *задачі 2* маємо:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 2; \quad Z = 130.$$

Розв'язок задачі 2 є цілочисловим, але значення цільової функції для неї ($Z = 130$) менше ніж значення цільової функції для задачі 1 ($Z = 136,25$), у оптимальному плані якої є дробове значення змінної $x_3 = 2,75$. Тому відгалуження продовжуємо з вершини, що відповідає розв'язку задачі 1 (випадок 3). Беремо для побудови наступних задач дробову змінну x_3 та розв'язуємо наступні дві задачі: №3 та №4:

отримання оптимального плану задачі. Остаточне оптимальне рішення має вид:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 2; Z_{\max} = 135.$$

Отже, для досягнення максимальної змінної продуктивності 135 т/зміну необхідно направити один тягач у перший цех та по два тягачі до другого та третього цехів.

Зауважимо, що оптимальний розв'язок не можна отримати шляхом округлення значень змінних у оптимальному розв'язковій послабленій задачі.

Контрольні запитання

1. Запишіть постановку задачі цілочислового лінійного програмування та частково цілочислового лінійного програмування.
2. У чому полягає суть методу «відгалужень і меж» для розв'язування задачі лінійного програмування?
3. Як організується відгалуження при рішенні задачі?
4. Які випадки можуть трапитися при вирішенні задач при кожному розгалуженні вершини?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Мета заняття: вивчення методів рішення задачі цілочислового лінійного програмування з бульовими змінними методом Мака та угорським методом.

Стисла теоретична довідка

Задача про призначення (іноді її називають *проблемою вибору*) є важливим окремим випадком задачі цілочислового лінійного програмування. Постановка задачі про призначення у загальному випадку є такою.

Необхідно виконати n різного роду робіт A_1, A_2, \dots, A_n . Наявні n виконавців (колективів, агрегатів, машин) B_1, B_2, \dots, B_n , кожний з яких в змозі більш чи менш ефективно виконати кожен з робіт. Нехай c_{ij} — показник, що характеризує ефективність виконання роботи A_i виконавцем B_j . Значення показників для всіх робіт та виконавців зведений у квадратну матрицю ефективностей розміром $n \times n$:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Необхідно знайти такий варіант закріплення виконавців за роботами, який дає *найбільший* сумарний ефект.

Якщо позначити

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i\text{-го виконавця призначено для виконання } j\text{-ї роботи;} \\ 0, \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

то математично задача про призначення формулюється наступним чином.

Знайти максимум цільової функції

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на кожен роботу повинен бути призначений тільки один виконавець

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n};$$

– кожний виконавець повинен бути призначений для виконання тільки однієї роботи

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

– значення змінних задачі повинні бути невід’ємними та цілими

$$x_{ij} \geq 0, \text{ цілі } (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}).$$

Застосовувати для розв’язання задачі про призначення симплекс-метод можна, але він не є ефективним. Для ефективного розв’язування розроблені два методи: *метод Мака* та *угорський метод*. Обидва методи розроблені для розв’язування задачі на мінімум цільової функції. Для застосування методу Мака та угорського методу попередньо необхідно виконати *підготовчий етап* (підготовчий етап можна не виконувати при розв’язуванні задачі методом Мака на мінімум цільової функції).

Підготовчий етап.

1. При розв’язуванні на мінімум цільової функції у кожному стовпчику матриці ефективностей C знайти *найменший* елемент та відняти його з усіх елементів даного стовпчика.

При розв’язуванні на максимум цільової функції у кожному стовпчику матриці ефективностей C знайти *найбільший* елемент та відняти від нього всі елементи даного стовпчика.

2. У отриманій таким чином матриці знайти *найменший* елемент у кожному рядку та відняти його з усіх елементів даного рядка.

В результаті підготовчого етапу отримуємо матрицю, у кожному рядку та стовпчику міститься хоча б один нульовий елемент.

Метод Мака.

Крок 1. Знайти у кожному рядку матриці C мінімальні елементи та підкреслити їх. Якщо при цьому у кожному стовпчику матриці знаходиться рівно по одному підкресленому елементу, то *розв’язок знайдено* (його утворюють підкреслені елементи матриці), інакше перейти до кроку 2.

Крок 2. Вибрати з непозначених знаком «+» стовпчиків (на початку рішення таких стовпчиків немає) стовпчик, що містить більше одного підкресленого елемента та позначити його знаком «+».

Крок 3. Нехай елемент з стовпчику, позначеного знаком «+» у рядку i дорівнює b_i , а мінімальний елемент зі стовпчику, що не позначений знаком «+» у цьому рядку дорівнює a_i . Нехай

$$\min_i(a_i - b_i) = a'_r - b_r.$$

Крок 4. Збільшити всі елементи у стовпчиках, позначених знаком «+» на $a'_r - b_r$.

Крок 5. Позначити елемент a'_r знаком «*».

Крок 6. Переглянути стовпчик, що містить значення a'_r . Якщо в ньому вже є підкреслений елемент, то позначити цей стовпчик знаком «+» та перейти до кроку 3, інакше перейти до кроку 7.

Крок 7. Підкреслити елемент a'_r , зняти з нього позначку «*».

Крок 8. Знайти підкреслений елемент у рядку, що містить a'_r . Прибрати підкреслення цього елемента.

Крок 9. Переглянути стовпчик, у якому щойно було зняте підкреслення. Якщо він містить підкреслені елементи, то перейти до кроку 10, інакше знайти у цьому стовпчику елемент, позначений знаком «*», позначити його як a'_r та перейти до кроку 7.

Крок 10. Якщо є стовпчики, що не мають підкреслених елементів, то зняти всі позначки «+» та перейти до кроку 2.

Угорський метод.

Крок 1. Закреслити мінімальною кількістю прямих ліній всі нульові значення матриці.

Крок 2. Якщо кількість ліній дорівнює розмірності матриці ефективностей, то оптимальний розв'язок знайдено, інакше перейти до кроку 3.

Крок 3. Знайти у матриці ефективностей найменший з елементів, через які не проходить жодної лінії.

Крок 4. Відняти значення цього елементу з усіх елементів, крізь які не проходять лінії та додати значення цього елементу до всіх елементів, які лежать на перетині двох ліній. Повернутися до кроку 1.

Угорський метод у даному (спрощеному) викладі може бути використаний для розв'язування задач невеликого розміру, оскільки задача закреслення мінімальною кількістю прямих ліній нульових значень матриці у задачах великого розміру є досить складною та нетривіальною.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Для виконання навантажувально-розвантажувальних робіт на п'яти (А–Д) складах сипких вантажів можуть бути використані п'ять (I–V) вантажних механізмів. *Знайти* оптимальний розподіл механізмів по складах, що забезпечує їх *максимальну* сумарну продуктивність (*варіанти 1–15*) чи *мінімальні* сумарні витрати від їх використання (*варіанти 16–30*), якщо:

- 1) *варіанти 1–15*: задана продуктивність машин на складах;
- 2) *варіанти 16–30*: задані витрати від використання машин на складах.

Матриця продуктивностей, t /зміну (витрат, грн./зміну) задана у вигляді

	I	II	III	IV	V
А	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
Б	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
В	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
Г	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}
Д	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}

Вихідні дані для виконання завдання у вигляді матриці продуктивностей (варіанти 1–15) чи матриці витрат (варіанти 16–30) наведені на рис. 5.1. Розв'язування задачі виконати двома методами: методом Мака та угорським методом.

$$1. \begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 & 16 & 19 \\ 17 & 20 & 28 & 30 & 28 \\ 32 & 24 & 38 & 26 & 23 \\ 30 & 25 & 36 & 30 & 24 \\ 35 & 27 & 38 & 26 & 29 \end{pmatrix}; 2. \begin{pmatrix} 17 & 19 & 24 & 28 & 36 \\ 21 & 20 & 20 & 25 & 32 \\ 20 & 25 & 28 & 29 & 30 \\ 18 & 24 & 23 & 30 & 38 \\ 23 & 24 & 27 & 26 & 30 \end{pmatrix}; 3. \begin{pmatrix} 46 & 54 & 39 & 32 & 36 \\ 24 & 42 & 37 & 25 & 34 \\ 30 & 48 & 30 & 28 & 30 \\ 35 & 38 & 32 & 30 & 24 \\ 28 & 50 & 36 & 27 & 32 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 32 & 24 & 60 & 29 & 28 \\ 28 & 30 & 54 & 16 & 31 \\ 50 & 44 & 52 & 40 & 36 \\ 30 & 34 & 50 & 30 & 35 \\ 19 & 35 & 45 & 35 & 20 \end{pmatrix}; 5. \begin{pmatrix} 32 & 30 & 36 & 52 & 40 \\ 28 & 35 & 38 & 48 & 35 \\ 30 & 29 & 24 & 45 & 32 \\ 44 & 40 & 20 & 56 & 28 \\ 64 & 58 & 45 & 49 & 54 \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} 58 & 54 & 40 & 48 & 50 \\ 52 & 35 & 30 & 32 & 30 \\ 44 & 32 & 28 & 25 & 39 \\ 47 & 27 & 24 & 22 & 27 \\ 49 & 20 & 34 & 29 & 30 \end{pmatrix};$$

$$7. \begin{pmatrix} 36 & 28 & 36 & 48 & 26 \\ 32 & 24 & 35 & 42 & 28 \\ 38 & 40 & 40 & 54 & 34 \\ 62 & 54 & 56 & 50 & 58 \\ 30 & 41 & 35 & 58 & 38 \end{pmatrix}; 8. \begin{pmatrix} 36 & 48 & 35 & 37 & 24 \\ 55 & 42 & 56 & 58 & 44 \\ 28 & 50 & 39 & 32 & 18 \\ 30 & 52 & 24 & 25 & 30 \\ 41 & 54 & 40 & 39 & 36 \end{pmatrix}; 9. \begin{pmatrix} 20 & 54 & 29 & 26 & 42 \\ 55 & 52 & 53 & 58 & 44 \\ 36 & 60 & 37 & 40 & 37 \\ 40 & 45 & 30 & 38 & 35 \\ 35 & 42 & 32 & 36 & 30 \end{pmatrix};$$

$$10. \begin{pmatrix} 29 & 34 & 20 & 58 & 35 \\ 32 & 40 & 26 & 54 & 25 \\ 35 & 30 & 34 & 50 & 38 \\ 38 & 25 & 38 & 42 & 29 \\ 50 & 51 & 48 & 46 & 19 \end{pmatrix}; 11. \begin{pmatrix} 28 & 50 & 39 & 32 & 38 \\ 34 & 40 & 33 & 31 & 27 \\ 40 & 54 & 35 & 30 & 25 \\ 64 & 51 & 55 & 48 & 49 \\ 24 & 52 & 29 & 37 & 36 \end{pmatrix}; 12. \begin{pmatrix} 39 & 44 & 28 & 24 & 36 \\ 42 & 46 & 38 & 34 & 32 \\ 55 & 51 & 58 & 49 & 53 \\ 40 & 50 & 36 & 28 & 30 \\ 36 & 48 & 32 & 35 & 31 \end{pmatrix};$$

$$13. \begin{pmatrix} 30 & 31 & 33 & 26 & 55 \\ 42 & 46 & 48 & 44 & 50 \\ 24 & 34 & 38 & 25 & 60 \\ 35 & 30 & 32 & 27 & 54 \\ 32 & 29 & 28 & 40 & 44 \end{pmatrix}; 14. \begin{pmatrix} 24 & 36 & 58 & 38 & 28 \\ 45 & 49 & 54 & 50 & 52 \\ 34 & 40 & 42 & 29 & 31 \\ 39 & 27 & 46 & 35 & 37 \\ 30 & 33 & 49 & 26 & 32 \end{pmatrix}; 15. \begin{pmatrix} 55 & 40 & 48 & 54 & 52 \\ 26 & 42 & 33 & 38 & 34 \\ 35 & 48 & 37 & 33 & 32 \\ 36 & 50 & 35 & 28 & 40 \\ 25 & 38 & 26 & 36 & 30 \end{pmatrix};$$

$$16. \begin{pmatrix} 32 & 31 & 38 & 41 & 24 \\ 36 & 40 & 50 & 42 & 18 \\ 35 & 45 & 40 & 31 & 22 \\ 44 & 44 & 35 & 37 & 30 \\ 22 & 26 & 29 & 24 & 25 \end{pmatrix}; 17. \begin{pmatrix} 31 & 25 & 39 & 35 & 52 \\ 23 & 30 & 26 & 20 & 14 \\ 44 & 18 & 32 & 36 & 50 \\ 36 & 21 & 33 & 34 & 35 \\ 40 & 24 & 33 & 40 & 41 \end{pmatrix}; 18. \begin{pmatrix} 43 & 32 & 16 & 36 & 40 \\ 41 & 30 & 21 & 37 & 38 \\ 30 & 27 & 24 & 22 & 17 \\ 45 & 35 & 25 & 44 & 39 \\ 36 & 34 & 18 & 34 & 41 \end{pmatrix};$$

$$19. \begin{pmatrix} 31 & 41 & 37 & 30 & 35 \\ 24 & 20 & 21 & 23 & 19 \\ 36 & 39 & 42 & 16 & 38 \\ 41 & 44 & 40 & 19 & 44 \\ 38 & 41 & 46 & 24 & 33 \end{pmatrix}; 20. \begin{pmatrix} 24 & 19 & 17 & 26 & 24 \\ 20 & 31 & 41 & 32 & 36 \\ 28 & 38 & 44 & 35 & 38 \\ 21 & 34 & 32 & 30 & 42 \\ 25 & 37 & 40 & 36 & 39 \end{pmatrix}; 21. \begin{pmatrix} 32 & 40 & 36 & 38 & 28 \\ 44 & 38 & 40 & 35 & 25 \\ 41 & 42 & 34 & 46 & 23 \\ 36 & 39 & 48 & 52 & 23 \\ 31 & 27 & 19 & 25 & 24 \end{pmatrix};$$

$$22. \begin{pmatrix} 41 & 34 & 38 & 19 & 36 \\ 32 & 40 & 39 & 22 & 33 \\ 35 & 39 & 37 & 23 & 38 \\ 24 & 30 & 19 & 28 & 20 \\ 35 & 32 & 36 & 30 & 37 \end{pmatrix}; 23. \begin{pmatrix} 28 & 25 & 24 & 20 & 30 \\ 32 & 25 & 35 & 38 & 33 \\ 36 & 20 & 42 & 40 & 44 \\ 34 & 22 & 39 & 32 & 36 \\ 37 & 23 & 40 & 34 & 39 \end{pmatrix}; 24. \begin{pmatrix} 32 & 21 & 48 & 35 & 36 \\ 35 & 28 & 34 & 33 & 32 \\ 32 & 30 & 38 & 42 & 40 \\ 31 & 25 & 30 & 26 & 20 \\ 33 & 23 & 46 & 40 & 34 \end{pmatrix};$$

$$25. \begin{pmatrix} 29 & 30 & 25 & 35 & 30 \\ 32 & 34 & 24 & 48 & 33 \\ 33 & 36 & 26 & 32 & 31 \\ 18 & 28 & 20 & 24 & 21 \\ 42 & 37 & 21 & 36 & 44 \end{pmatrix}; 26. \begin{pmatrix} 19 & 20 & 26 & 24 & 23 \\ 35 & 43 & 36 & 28 & 41 \\ 41 & 34 & 35 & 20 & 38 \\ 36 & 38 & 15 & 33 & 37 \\ 39 & 36 & 40 & 30 & 15 \end{pmatrix}; 27. \begin{pmatrix} 21 & 17 & 27 & 23 & 22 \\ 14 & 16 & 18 & 17 & 20 \\ 24 & 20 & 25 & 25 & 26 \\ 23 & 22 & 28 & 28 & 30 \\ 26 & 19 & 30 & 30 & 24 \end{pmatrix};$$

$$28. \begin{pmatrix} 17 & 32 & 30 & 33 & 34 \\ 19 & 36 & 38 & 34 & 35 \\ 20 & 28 & 26 & 25 & 30 \\ 25 & 34 & 29 & 39 & 33 \\ 23 & 38 & 40 & 32 & 25 \end{pmatrix}; 29. \begin{pmatrix} 35 & 25 & 56 & 40 & 41 \\ 46 & 30 & 45 & 33 & 52 \\ 34 & 27 & 40 & 44 & 38 \\ 31 & 20 & 22 & 27 & 29 \\ 39 & 32 & 50 & 37 & 35 \end{pmatrix}; 30. \begin{pmatrix} 24 & 30 & 25 & 33 & 19 \\ 38 & 16 & 43 & 40 & 46 \\ 45 & 21 & 49 & 15 & 15 \\ 44 & 24 & 47 & 41 & 45 \\ 36 & 26 & 40 & 42 & 44 \end{pmatrix}.$$

Рисунок 5.1 — Вихідні дані до виконання
практичного заняття 5

Приклад виконання завдання

Для виконання навантажувально-розвантажувальних робіт на п'яти (А–Д) складах сипких вантажів можуть бути використані п'ять (I–V) вантажних механізмів. Знайти такий варіант розподілу механізмів поміж складами, який забезпечує їх максимальну сумарну продуктивність. Матриця продуктивностей механізмів подана у вигляді:

	I	II	III	IV	V
A	9	20	60	15	21
Б	38	71	69	49	60
B	28	13	80	28	34
Г	58	34	13	37	25
Д	30	3	53	20	21

Розв'язок.

Так як розв'язується задача на *максимум*, то виконаємо *підготовчий етап*:

а) знаходимо у стовпчиках максимальні елементи (позначені напівжирним шрифтом у вихідній матриці) та віднімаємо їх з усіх елементів даних стовпчиків (рис. 5.2, а);

б) знаходимо у рядках отриманої матриці найменші елементи та віднімаємо їх з усіх елементів даних рядків (рис. 5.2, б).

$$\begin{pmatrix} 49 & 51 & 20 & 34 & 39 \\ 20 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & 0 & 21 & 26 \\ 0 & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 28 & 68 & 27 & 29 & 39 \end{pmatrix}$$

а)

$$\begin{pmatrix} 29 & 31 & 0 & 14 & 19 \\ 20 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & 0 & 21 & 26 \\ 0 & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

б)

Рисунок 5.2 — Підготовчий етап розв'язування задачі

Метод Мака.

Крок 1. Знаходимо у рядках матриці мінімальні елементи та підкреслюємо їх. У стовпчиках 4 та 5 немає жодного підкресленого елемента, тому переходимо до кроку 2.

$$\begin{pmatrix} 29 & 31 & \underline{0} & 14 & 19 \\ 20 & \underline{0} & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & \underline{0} & 21 & 26 \\ \underline{0} & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & \underline{0} & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Крок 2. Позначаємо знаком «+» стовпчик 3, що містить більше одного підкресленого елемента.

Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчика 3:

– рядок 1: підкреслено елемент 0, мінімальна різниця $14 - 0 = 14$;

– рядок 3 : підкреслено елемент 0, мінімальна різниця $21 - 0 = 21$;

– рядок 5: підкреслено елемент 0, мінімальна різниця $1 - 0 = 1$.

Мінімальна різниця 1 досягається у рядку 5.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 29 & 31 & \underline{0} & 14 & 19 \\
 20 & \underline{0} & 11 & 0 & 0 \\
 30 & 58 & \underline{0} & 21 & 26 \\
 \underline{0} & 37 & 67 & 12 & 35 \\
 1 & 41 & \underline{0} & 2 & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчика 3 на 1.

Крок 5. Позначаємо елемент 1 у стовпчику 1 знаком «*».

Крок 6. Переглядаємо стовпчик 1. Цей стовпчик вже має підкреслений елемент у рядку 4. Позначаємо стовпчик 1 знаком «+» та переходимо до кроку 3.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 29 & 31 & \underline{1} & 14 & 19 \\
 20 & \underline{0} & 12 & 0 & 0 \\
 30 & 58 & \underline{1} & 21 & 26 \\
 \underline{0} & 37 & 68 & 12 & 35 \\
 1^* & 41 & \underline{1} & 2 & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчиків 1 та 3:

– рядок 1: підкреслено елемент 1, мінімальна різниця $14 - 1 = 13$;

– рядок 3: підкреслено елемент 1, мінімальна різниця $21 - 1 = 20$;

– рядок 4: підкреслено елемент 0, мінімальна різниця $12 - 0 = 12$;

– рядок 5: підкреслено елемент 1, мінімальна різниця $2 - 1 = 1$.

Мінімальна різниця 1 досягається у рядку 5.

Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчиків 1 та 3 на 1.

Крок 5. Позначаємо елемент 2 у стовпчику 4 знаком «*».

Крок 6. Переглядаємо стовпчик 4. У ньому немає жодного підкресленого елемента. Переходимо до кроку 7.

$$\begin{array}{cccccc}
 & + & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 29 & 31 & \underline{1} & 14 & 19 \\
 20 & \underline{0} & 12 & 0 & 0 \\
 30 & 58 & \underline{1} & 21 & 26 \\
 \underline{0} & 37 & 68 & 12 & 35 \\
 1^* & 41 & \underline{1} & 2 & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & + & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 30 & 31 & \underline{2} & 14 & 19 \\
 21 & \underline{0} & 13 & 0 & 0 \\
 31 & 58 & \underline{2} & 21 & 26 \\
 \underline{1} & 37 & 69 & 12 & 35 \\
 2^* & 41 & \underline{2} & 2^* & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 7. Підкреслюємо елемент 2 у стовпчику 4, знімаємо з нього позначку «*».

Крок 8. Знімаємо підкреслення з елементу 2 у стовпчику 3.

Крок 9. Переглядаємо стовпчик 3. Він містить підкреслені елементи у рядках 1 та 3. Переходимо до кроку 10.

Крок 10. Матриця має стовпчик 5 без підкреслених елементів, знімаємо позначки «+» та «*» і переходимо до кроку 2.

$$\begin{array}{cccccc}
 & + & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 30 & 31 & \underline{2} & 14 & 19 \\
 21 & \underline{0} & 13 & 0 & 0 \\
 31 & 58 & \underline{2} & 21 & 26 \\
 \underline{1} & 37 & 69 & 12 & 35 \\
 2^* & 41 & 2 & \underline{2} & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 2. Позначаємо знаком «+» стовпчик 3, що містить більше одного підкресленого елемента.

Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчика 3:
 – рядок 1: підкреслено елемент 2, мінімальна різниця $14 - 2 = 12$;
 – рядок 3: підкреслено елемент 2, мінімальна різниця $21 - 2 = 19$.

Мінімальна різниця 12 досягається у рядку 1.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 30 & 31 & \underline{2} & 14 & 19 \\
 21 & \underline{0} & 13 & 0 & 0 \\
 31 & 58 & \underline{2} & 21 & 26 \\
 \underline{1} & 37 & 69 & 12 & 35 \\
 2 & 41 & 2 & \underline{2} & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчика 3 на 12.

Крок 5. Позначаємо елемент 14 у стовпчику 4 знаком «*».

Крок 6. Переглядаємо стовпчик 4. Цей стовпчик вже має підкреслений елемент у рядку 5. Позначаємо стовпчик 4 знаком «+» та переходимо до кроку 3.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & + & & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 30 & 31 & \underline{14} & 14^* & 19 \\
 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\
 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\
 \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\
 2 & 41 & 14 & \underline{2} & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчиків 3 та 4:

– рядок 1: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця $19 - 14 = 5$;
 – рядок 3: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця $26 - 14 = 12$;
 – рядок 5: підкреслений елемент 2, мінімальна різниця $2 - 2 = 0$.

Мінімальна різниця 0 досягається у рядку 1.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & + & + & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 30 & 31 & \underline{14} & 14^* & 19 \\
 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\
 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\
 \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\
 2 & 41 & 14 & \underline{2} & 12
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Крок 4. Після збільшення значень у стовпчиках 3 та 4 на 0 матриця незмінна.

Крок 5. Позначаємо елемент 2 у стовпчику 1 знаком «*».

Крок 6. Переглядаємо стовпчик 1. Цей стовпчик вже має підкреслений елемент у рядку 4. Позначаємо стовпчик 1 знаком «+» та переходимо до кроку 3.

$$\begin{array}{cccccc} & & + & + & & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 30 & 31 & \underline{14} & 14^* & 19 \\ 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\ 2^* & 41 & 14 & \underline{2} & 12 \end{array} \right) \end{array}$$

Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчиків 1, 3, та 4:

– рядок 1: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця $19 - 14 = 5$;

– рядок 3: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця $26 - 14 = 12$;

– рядок 4: підкреслений елемент 1, мінімальна різниця $35 - 1 = 34$;

– рядок 5: підкреслений елемент 2, мінімальна різниця $12 - 2 = 10$.

Мінімальна різниця 5 досягається у рядку 1.

Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчиків 1, 3 та 4 на 5.

Крок 5. Позначаємо елемент 19 у стовпчику 5 знаком “*”.

Крок 6. Переглядаємо стовпчик 5. У ньому немає жодного підкресленого елемента. Переходимо до кроку 7.

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & + & & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 30 & 31 & \underline{14} & 14^* & 19 \\ 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\ 2^* & 41 & 14 & \underline{2} & 12 \end{array} \right) \end{array}$$

Крок 7. Підкреслюємо елемент 19 у стовпчику 5, знімаємо з нього позначку «*».

Крок 8. Знімаємо підкреслення з елементу 19 у стовпчику 3 рядка 1.

Крок 9. Переглядаємо стовпчик 3, у якому була знято підкреслення. Він має лише один підкреслений елемент у рядку 3. Переходимо до кроку 10.

Крок 10. У матриці не залишилось жодного стовпчика, у якому немає не підкреслених елементів. Таким чином, знайдено оптимальний розв’язок.

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & + & & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 35 & 31 & \underline{19} & 19^* & 19^* \\ 26 & \underline{0} & 30 & 5 & 0 \\ 36 & 58 & \underline{19} & 26 & 26 \\ \underline{6} & 37 & 86 & 17 & 35 \\ 7^* & 41 & 19 & \underline{7} & 12 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & + & & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 35 & 31 & 19 & 19^* & \underline{19} \\ 26 & \underline{0} & 30 & 5 & 0 \\ 36 & 58 & \underline{19} & 26 & 26 \\ \underline{6} & 37 & 86 & 17 & 35 \\ 7^* & 41 & 19 & \underline{7} & 12 \end{array} \right) \end{array}$$

Підкреслюємо відповідні елементи вихідної матриці. Оптимальний розв'язок: на склад А призначити механізм V, на склад Б механізм II, на склад В механізм III, на склад Г механізм I, на склад Д механізм IV. Максимальна продуктивність складе $58+71+80+20+21 = 250 \text{ т/зміну}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 20 & 60 & 15 & \underline{21} \\ 38 & \underline{71} & 69 & 49 & 60 \\ 28 & 13 & \underline{80} & 28 & 34 \\ \underline{58} & 34 & 13 & 37 & 25 \\ 30 & 3 & 53 & \underline{20} & 21 \end{pmatrix}$$

Угорський метод.

Крок 1. Закреслюємо мінімальною кількістю прямих ліній матрицю, отриману після виконання попереднього етапу.

Крок 2. Кількість ліній 3, що менше 5. Переходимо до кроку 3.

$$\begin{pmatrix} \underline{29} & 31 & 0 & 14 & 19 \\ 20 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & 0 & 21 & 26 \\ 0 & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Крок 3. Мінімальний елемент, через який не проходить жодна лінія, дорівнює 2 (рядок 5, стовпчик 4).

Крок 4. Віднімаємо 2 від всіх елементів, що не закреслені лініями та додаємо 2 до всіх елементів, що закреслені двома лініями. Переходимо до кроку 1.

Крок 1. Закреслюємо нульові елементи.

Крок 2. Кількість ліній дорівнює $4 < 5$.

Крок 3. Мінімальний елемент, через який не проходить жодна лінія, дорівнює 12 (рядок 1, стовпчик 4).

Крок 4. Віднімаємо 12 від всіх елементів, що не закреслені лініями та додаємо 12 до всіх елементів, що закреслені двома лініями. Переходимо до кроку 1.

Крок 1. Закреслюємо нульові елементи.

Крок 2. Кількість ліній дорівнює $4 < 5$.

$$\begin{pmatrix} 29 & 29 & 0 & 12 & 17 \\ \underline{22} & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 30 & 56 & 0 & 19 & 24 \\ 0 & 35 & 67 & 10 & 33 \\ 1 & 39 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{17} & 17 & 0 & 0 & 5 \\ \underline{22} & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 18 & 44 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 35 & 79 & 10 & 33 \\ 1 & 39 & 12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Крок 3. Мінімальний елемент, через який не проходить жодна лінія, дорівнює 5 (рядок 1, стовпчик 5).

Крок 4. Віднімаємо 5 від всіх елементів, що не закреслені лініями та додаємо 5 до всіх елементів, що закреслені двома лініями. Переходимо до кроку 1.

Крок 1. Закреслюємо нульові елементи.

Крок 2. Кількість ліній дорівнює $5=5$, отже знайдено оптимальний розв'язок.

$$\begin{array}{ccccc|c} 17 & 12 & 0 & 0 & 0 & \\ 27 & 0 & 30 & 5 & 0 & \\ 18 & 39 & 0 & 7 & 7 & \\ 0 & 30 & 79 & 10 & 28 & \\ 1 & 34 & 12 & 0 & 5 & \end{array}$$

Для отримання оптимального варіанту призначення за угорським методом знаходимо рядок, що має лише одне нульове значення (якщо таких рядків декілька, можна взяти будь-який з них). У нашому випадку це рядки 3, 4 та 5. Візьмемо рядок 3. Нульове значення міститься у стовпчику 3. Отже, призначаємо на склад В механізм III. Викреслюємо рядок 3 та стовпчик 3 (послідовність пошуку оптимального призначення показана на рис. 5.3).

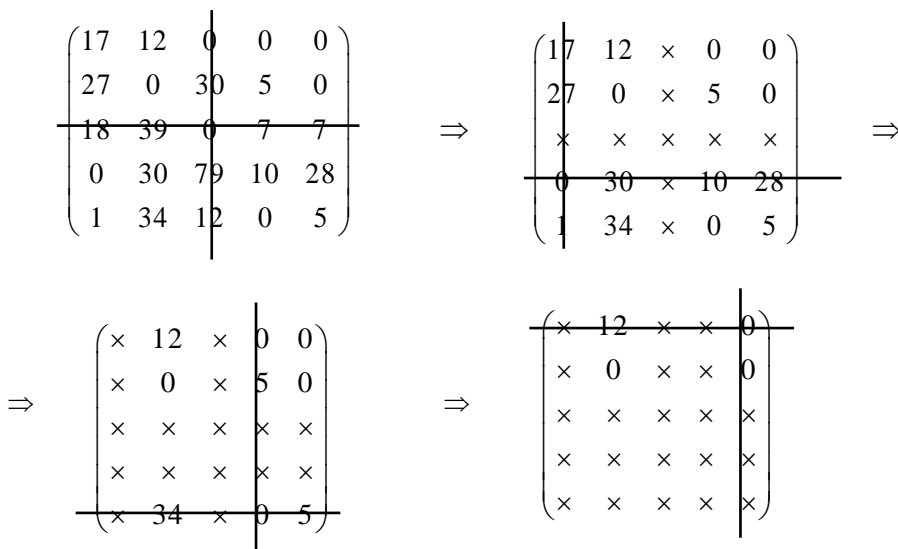


Рисунок 5.3 — Пошук оптимального призначення за угорським методом

Тепер єдине нульове значення мають рядки 4 та 5. Виберемо рядок 4. Нульове значення міститься у стовпчику 1. Отже, призначаємо на склад Г механізм I. Викреслюємо рядок 4 та стовпчик 1.

Єдине нульове значення міститься у рядку 5 та стовпчику 4. Призначаємо на склад Д механізм IV. Викреслюємо рядок 5 та стовпчик 4.

З отриманої матриці 2×2 (тепер єдиний нуль міститься у рядку 1 та стовпчику 5) остаточно вибираємо дві пари призначень (1,5) та (2,2), тобто призначаємо на склад А механізм V та на склад Б механізм II. Максимальна продуктивність дорівнює 250 т/зміну .

Цей розв'язок збігається з розв'язком, отриманим методом Мака.

Контрольні запитання

1. Дайте постановку задачі про призначення у загальному вигляді. У чому полягає її особливість у порівнянні з загальною задачею лінійного програмування?

2. Як виконується підготовчий етап рішення задачі? У якому випадку його можна не виконувати?

3. Викладіть алгоритм розв'язування задачі про призначення методом Мака.

4. Викладіть алгоритм розв'язування задачі про призначення угорським методом.

5. Як визначити оптимальні призначення за остаточною матрицею методом Мака? Угорським методом?