

УДК 621.3.01:519.876.5

Тиховод С. М.¹, Паталах Д.Г.²

¹ д-р техн. наук, доц. НУ "Запорізька політехніка"

² асп. НУ "Запорізька політехніка"

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ РОЗКЛАДАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ПОЛІНОМАМИ

Моделювання перехідних процесів в електричних колах в даний час виконують шляхом складання і розв'язання рівнянь стану на підставі законів Кірхгофа або шляхом використання готових програм, в яких рівняння стану складаються автоматично за заданою схемою кола. Перехідні процеси можуть бути досить тривалими, що призводить до значного часу розрахунку при використанні сучасних обчислювальних засобів. В роботі [1] для пришвидшення обчислювальних процесів використано поліноміальну апроксимацію розв'язку. Обмеження методу дає похибка обчислення похідної розв'язку.

Мета даної роботи – розробка швидкодійного методу розрахунку перехідних електромагнітних процесів, що використовує поліноміальну апроксимацію похідної розв'язку.

Для спрощення викладу розглянемо одноконтурне коло змінного струму, що містить резистивний (R), індуктивний (L) і ємнісний (C) елементи, включені послідовно. Нехай до комутації конденсатор був заряджений до напруги $u_c(t_0) = u_{c0}$. При підключенні в момент $t=t_0$ джерела змінної ЕРС $e(t)$ в колі відбувається перехідний процес, який описується лінійним інтегро-диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0) = e(t) \quad (1)$$

У запропонованому методі задаймо рішення для похідної струму, як функцію від часу, в інтервалі часу. Цю функцію від часу апроксимуємо алгебраїчним поліномом N -1-го ступеня [2]:

$$\frac{di(t)}{dt} \approx p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^{N-1} \quad (2)$$

Для апроксимуючого полінома (2) поставимо умову, що в точках t_k ділення інтервалу зміни аргументу значення похідної за часом струму збігаються з відповідними значеннями полінома:

$$i'(t_k) = p(t_k), \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Якщо умову (3) записати для кожної точки t_k , то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо прийняти, що $t_0 = 0$. Віднімемо з усіх рівнянь системи перше рівняння і отримаємо скорочену систему, яка в матричній формі має вигляд:

$$\mathbf{D} \mathbf{A} = \mathbf{I}' - \mathbf{I}'_0, \quad (4)$$

де $\mathbf{D}$ - матриця Вандермонда [2] без першого рядка і першого стовпця; $\mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \dots \ a_{N-1}]^T$ – вектор коефіцієнтів апроксимуючого полінома; $\mathbf{I}' = [i'(h) \ i'(2h) \dots \ i'((N-1)h)]^T$ – вектор значень похідних струму в вузлових точках 1, 2, ..., N-1.

Проінтегруємо вираз (2) від нуля до k -й точки при зміні номера k від 1 до N-1:

$$\begin{aligned} i(t_k) &= \int_0^{t_k} p(t) dt + i_0 = \int_0^{t_k} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{N-1} t^{N-1}) dt + i_0 = \\ &= a_0 t_k + \frac{1}{2} a_1 t_k^2 + \frac{1}{3} a_2 t_k^3 + \dots + \frac{1}{N} a_{N-1} t_k^N + i_0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $t_k = kh$.

Підстановка в інтеграли вираження (5) значень k від 1 до N-1 дає систему рівнянь в матричній формі

$$\mathbf{I} = \mathbf{V} \mathbf{A} + \mathbf{I}' \otimes \mathbf{H} + \mathbf{I}_0, \quad (6)$$

де $\mathbf{I}$ – вектор значень струму в опорних точках; $\mathbf{I}_0 = [i_0, i_0, i_0, \dots, i_0]^T$.

$$\mathbf{H} = [h \quad 2h \quad \dots \quad (N-1)h]^T, \quad (7)$$

де символ $\otimes$ означає поелементне множення векторе на кожен стовпець матриці, а символ T означає транспонування.

Займімося тепер обчисленням напруги на конденсаторі (третє і четверте складові в виразі (1)).

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t (a_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_2 t^3 + \dots + \frac{1}{N} a_{N-1} t^N + i_0) dt \right] + u_C(0). \quad (8)$$

Обчислимо інтеграл у виразі (8) і розпишемо цей вислів для точок $t = t_k = kh, k = 1, 2, \dots, N-1$. Отримаємо в матричній формі:

$$U_c = BWA + B \left[I_0 \otimes H + \frac{1}{2} I'_0 \otimes H_2 \right] + U_{c0}, \quad (9)$$

де B - зворотна величина ємності конденсатора: $B = \frac{1}{C}$;

$$W = \begin{bmatrix} \frac{h^3}{2 \cdot 3} & \frac{h^4}{3 \cdot 4} \dots & \dots & \frac{h^{N+1}}{N \cdot (N+1)} \\ \frac{(2h)^3}{2 \cdot 3} & \frac{(2h)^4}{3 \cdot 4} \dots & \dots & \frac{(2h)^{N+1}}{N \cdot (N+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2 \cdot 3} ((N-1)h)^3 & \frac{1}{3 \cdot 4} ((N-1)h)^4 & \dots & \frac{1}{N \cdot (N+1)} ((N-1)h)^{N+1} \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} h^2 \\ (2h)^2 \\ \vdots \\ ((N-1)h)^2 \end{bmatrix}; \quad U_{c0} = [u_{c0}, u_{c0}, \dots, u_{c0}]^T; \quad u_{c0} = u_c(0). \quad (11)$$

У рівняння (1) для опорних точок підставимо апроксимацію всіх доданків відповідно до виразів (4), (6), (9) і отримаємо матричне рівняння:

$$LDA + LI'_0 + RVA + R(I_0 + I'_0 \otimes H) + B \left[WA + I_0 \otimes H + \frac{1}{2} I'_0 \otimes H_2 \right] + U_{c0} = e. \quad (12)$$

Перетворимо рівняння (12):

$$(LD + +RV + BW)A = e - LI'_0 - R(I_0 + I'_0 \otimes H) - B \left[I_0 \otimes H + \frac{1}{2} I'_0 \otimes H_2 \right] - U_{c0}, \quad (13)$$

де e - вектор значень ЕРС джерела в точках 1, 2, ..., $N-1$ тимчасового інтервалу τ .

Рівняння (13) можна пояснити наступним чином. Нехай у вихідній вітки R-L-C протікає істинний струм $i(t)$. Тоді відповідно до рівняння (13) вихідної гілки відповідає вітка заміщення, в якій проходить так званий операційний ток A , який зображає вихідний струм $i(t)$. При цьому в галузі заміщення резистивний елемент має операторний опір $R \cdot V$ і послідовно з ним назустріч току включається джерело ЕРС $R(I_0 + I'_0 \otimes H)$ (см. рис. 1).

Індуктивний елемент має операторний опір $L \cdot D$ і послідовно з ним назустріч току включається джерело ЕРС, а ємнісний елемент має операторний опір - BW і послідовно з ним назустріч току включається джерело ЕРС

$$B \left[I_0 \otimes H + \frac{1}{2} I'_0 \otimes H_2 \right] + U_{C0}$$

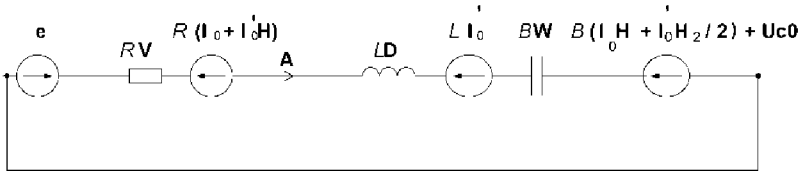


Рисунок 1 - інтерпретація рівняння (13).

Таким чином отримали другий закон Кірхгофа для зображень струмів **A** в схемі заміщення.

Можна довести, що в вузлах схеми заміщення для зображень **A** дотримується закон струмів Кірхгофа.

$$\sum_{k=1}^b A_k = 0. \quad (14)$$

При відомих значеннях струмів віток i_k і напруг на конденсаторах u_{Ck} в точці t_0 початку інтервалу τ система рівнянь, складена за законами Кірхгофа, для всіх вузлів без одного і для всіх головних контурів має єдине рішення. В результаті рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо вектори поліноміальних коефіцієнтів A_k для всіх віток. Знаючи для будь-якої вітки коефіцієнти полінома і значення i_0 в початковій точці t_0 , ми можемо отримати значення струму згідно (6) і напруги на конденсаторі у всіх довільних точках будь-якого з N відрізків в інтервалі часу τ .

Для випробування розробленої методики в системі GNU Octave [3] складено кілька комп'ютерних програм для розрахунку перехідних процесів в електричних колах. Розрахунки показали ефективність запропонованого методу.

Висновки

1. Запропоновано методику побудови схем заміщення електричного кола, яка дозволяє безпосередньо обчислювати коефіцієнти поліноміальної апроксимації шуканих струмів в перехідних режимах.

2. Вектори поліноміальних коефіцієнтів задовольняють законам струмів і напруг Кірхгофа для схеми заміщення і є рішеннями системи алгебраїчних рівнянь.

3. Запропонована методика відрізняється тим, що в ній відсутня операція обчислення похідної рішення, що дозволяє значно підвищити точність розрахунків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1987 . – 630 с.

2. Тиховод С.М. Метод численного расчета переходных процессов в электрических цепях и его схемная интерпретация / С.М. Тиховод, Н.А. Костин // Вестник НГУ. – 2013. – № 5. – С. 85-92.

3. GNU Octave [Електронний ресурс]. – режим доступу: <http://www.gnu.org/software/octave/index.html> . – заголовок с екрану. – Мова англ.