

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторного практикуму
з дисципліни
**„МАТЕМАТИЧНІ ПАКЕТИ ПРИКЛАДНИХ
ПРОГРАМ“**

для студентів спеціальностей
125 „Кібербезпека та захист інформації“,
освітні програми
„Системи технічного захисту інформації, автоматизація її обробки“,
„Безпека інформаційних і комунікаційних систем“;
175 „Інформаційно-вимірювальні технології“,
освітня програма
„Якість, стандартизація та сертифікація“
175 „Мікро- та наносистемна техніка“
освітня програма
„Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“
денної і заочної форм навчання

Методичні вказівки до лабораторного практикуму з дисципліни „Математичні пакети прикладних програм“ для студентів спеціальностей 125 „Кібербезпека та захист інформації“, освітні програми „Системи технічного захисту інформації, автоматизація її обробки“, „Безпека інформаційних і комунікаційних систем“; 175 „Інформаційно-вимірювальні технології“, освітня програма „Якість, стандартизація та сертифікація“, 175 „Мікро- та наносистемна техніка“ освітня програма „Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“ денної і заочної форм навчання / Укл.: В.І. Рева, Н.І. Павлище. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 93 с.

Укладачі: В.І. Рева доц., канд. фіз.-мат. наук
Н.І. Павлище, аспірант

Рецензент: А.В. Коротун, доц., канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний за випуск: А.В. Коротун, доц., канд. фіз.-мат. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
інформаційної безпеки та наноелектроніки
Протокол № 6 від 10.05.2024 р.

Рекомендовано до видання НМК факультету
інформаційної безпеки та електронних
комунікацій
Протокол № 7 від 14.05.2024 р

ЗМІСТ

Вступ	4
Підготовка до проведення лабораторної роботи та оформлення звіту	5
1 Лабораторна робота № 1 «Скалярні і матричні операції. Графіки і таблиці значень функцій»	6
1.1 Контрольне завдання	9
1.2 Контрольні питання	9
2 Лабораторна робота № 2 «Функції. Графіки і таблиці значень функцій»	14
2.1 Контрольне завдання	18
2.2 Контрольні питання	19
3 Лабораторна робота № 3 «Розв'язок рівнянь»	22
3.1 Контрольне завдання	29
3.2 Контрольні питання	29
4 Лабораторна робота № 4 «Символьні обчислення»	34
4.1 Контрольне завдання	39
4.2 Контрольні питання	40
5 Лабораторна робота № 5 «Елементи програмування у MATHCAD»	45
5.1 Контрольне завдання	51
5.2 Контрольні питання	51
6 Лабораторна робота № 6 «Обробка експериментальних даних»	51
6.1 Контрольне завдання	65
6.2 Контрольні питання	65
7 Лабораторна робота № 7 «Розв'язування диференціальних рівнянь»	70
7.1 Контрольне завдання	79
7.2 Контрольні питання	79
8 Лабораторна робота № 8 «Елементи математичної статистики»	83
8.1 Контрольне завдання	92
Додаток А Приклад оформлення титульної сторінки	93

ВСТУП

Рішення багатьох прикладних задач зводиться до вирішення алгебраїчних і диференціальних рівнянь або систем. Більшість рівнянь і систем рівнянь вирішити аналітично неможливо. У цьому випадку застосовуються чисельні методи рішення рівнянь і систем рівнянь.

Дані методичні вказівки дозволять познайомитися з методами вирішення систем алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної математики (пакетами MATH-CAD).

Продемонстровані способи вирішення систем алгебраїчних рівнянь за допомогою пакета MATHCAD.

Наведені приклади розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь за допомогою пакетів MATHCAD а також можливість побудови графіків отриманих рішень.

ПІДГОТОВКА ДО ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ ТА ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ

Лабораторна робота включає самостійне опрацювання теоретичного матеріалу, вивчення документації з програмних засобів, методик проведення розрахунків, програмування і моделювання, обробку й інтерпретацію результатів. При проведенні лабораторного практикуму необхідно:

- підготуватися до експрес-опитування з теоретичного матеріалу, необхідного для виконання роботи (щоб отримати допуск до лабораторної роботи);

- підготувати і оформити план виконання лабораторної роботи;

- після виконання лабораторної роботи провести необхідні розрахунки і оформити звіт, який повинен містити:

- 1) титульний аркуш (див. Додаток А);

- 2) мету роботи;

- 3) опис словами;

- 4) необхідні розрахунки;

- 5) текст розробленої програми;

- 6) основні результати моделювання;

- 7) стислі висновки по роботі, в яких:

- вказати, що досліджувалось;

- вказати методику (чи метод) дослідження;

- вказати особливості алгоритму роботи;

- визначити характер роботи;

- відзначити подібність і відмінність результатів моделювання від теоретичних даних;

- здати звіт з виконаної лабораторної роботи та відповісти на запитання викладача (отримати залік за виконану роботу).

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 «СКАЛЯРНІ І МАТРИЧНІ ОПЕРАЦІЇ. ГРАФІКИ І ТАБЛИЦІ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ»

Мета роботи: познайомитися з програмою інженерних і наукових обчислень MathCad. Навчитися вводити і виконувати базові математичні операції.

Завдання 1: Використання MathCad як супер-калькулятора.

У головній робочій області можна вводити арифметичні вирази, використовуючи стандартні знаки математичних операцій. Наприклад, спробуйте ввести такі вирази, обчислювання яких відбувається відразу після введення знаку =

$$2+5=$$

$$7*3.54=$$

$$-12.5/8.324=$$

Зверніть увагу, що дробова частина відокремлюється від цілої за допомогою точки, а не коми. Так само не намагайтеся перенести дані приклади з вікна браузера в робочу область MathCad методом "Copy - Paste", так як символи будуть інтерпретовані програмою, як текстова вставка (коментар). Збережіть документ в файл в ваш каталог.

Змініть одне зі значень в будь-якому прикладі. Результат зміниться при виході курсора з поля виразу. Для введення спеціальних математичних знаків, наприклад, знаку кореня, використовується спеціальна панель інструментів. Переконайтеся, що вона активована: меню програми **View** → **Toolbars** → **Calculator**. Спробуйте обчислити квадратний корінь з 7.36, 2.76 в ступені 1.13, модуль -3.42, факторіал 8.

При роботі з дійсними числами, результат виводиться з фіксованою кількістю знаків після десяткової коми. Ця кількість встановлюється в панелі **Format** → **Result** → **Number of decimal places**. Змініть точність виведення результатів розрахунків до 5 знаків після коми.

Завдання 2: Використання змінних.

У програмі MathCad можна використовувати змінні. Ім'я змінної задається літерами, після яких можуть слідувати цифри. Правильні імена змінних: a, b1, cc. Неправильне: 1d. MathCad не робить різниці між іменами змінних і функцій. Якщо спочатку визначити функцію $f(x)$, а потім змінну f , виявиться неможливо використовувати функцію $f(x)$ в розрахунках де-небудь після визначення змінної f . Імена змінних чутливі до регістру. Спочатку вводиться ім'я змінної, потім символ ":" (або знак $=$), потім число або вираз. Синій куточок показує поточний операнд виразу, він може бути розширений клавішею "Пробіл". Оголошеними змінними можна користуватися при арифметичних обчисленнях. $:=$ це оператор привласнення, $=$ це команда "Обчислити". Виконайте наступний приклад:

a:=5

b:=2.73

(a+b)/a=

c:=(a-b)*3.51

c=

p:= π *b²

p=

Тут була використана визначена константа π - число Пі. Для введення символу використовуйте панель математичних символів або комбінацію клавіш Ctrl-P.

Правило видимості: значення змінної є правіше і нижче її визначення. Якщо перемістити за допомогою курсору вираз, що використовує змінну, лівіше або вище виразу, в якому значення змінної задається оператором $:=$, через це з'явиться помилка в обчисленні. Глобальні змінні доступні скрізь на робочому аркуші і вводяться знаком $\equiv$, наприклад, введемо $N \equiv 100$:

Щоб написати текстовий коментар необхідно ввести знак подвійної лапки "", потім вводити текст. При досягненні кінця рядка відбувається автоматичне перенесення на наступну. Текстова область, як і будь-яка інша, може бути переміщена на робочому аркуші або

скопійована в буфер. Маркери текстової області дозволяють змінювати її розміри.

Завдання 3: Матричні операції.

Змінній може бути присвоєно значення матриці (вектор-стовпець – це матриця з одним стовпцем). Для цього використовуємо палітру векторів і матриць або комбінацію клавіш Ctrl-m.

A:=Тут натисніть Ctrl-m

У вікні, що з'явилося вкажіть кількість рядків і стовпців матриці. Наприклад, створіть матрицю розміром 3x3 і заповніть її будь-якими числами (так само можна використовувати раніше задані змінні). Рядки і стовпці матриці індексуються починаючи з 0. Викликати довільний елемент матриці можна, задавши його індекси. Наприклад, вираз:

$$A_{0,0}=$$

викликає лівий верхній елемент матриці.

З матрицями можна виконати всі допустимі операції: обчислити обернену матрицю, перемножити матриці, скласти і відняти. Можна також транспонувати матрицю:

Обернена матриця

$$A^{-1}=$$

Транспонована матриця

$$A^T=$$

Операція транспонування вибирається з палітри матричних операцій.

Можна вирішити систему лінійних рівнянь матричним способом. На додаток до матриці A розміром 3x3 задайте матрицю-стовпець B розміром 3x1. Вектор рішень отримаєте наступною операцією:

$$X:=A^{-1}*B$$

$$X=$$

Для двомірної матриці A можна викликати її окремий стовпець. Наприклад, вираз:

$$A^{<1>}=$$

Викличе перший (середній) стовпець матриці.

Команда:

$$|A|=$$

Обчислює визначник матриці.

Для вектора В (або одного зі стовпців матриці А) може бути обчислення сума елементів:

$$\Sigma B=$$

$$\Sigma A^{<1>}=$$

Можна обчислити скалярний і векторний добуток векторів:

Скалярний добуток

$$A^{<1>}*B=$$

Векторний добуток

$$B \times A^{<0>}=$$

1.1 Контрольне завдання

Обчислити арифметичний вираз, що заданий викладачем, з вказаною точністю (кількістю знаків після десяткової точки).

Вирішити квадратне рівняння, що задане викладачем. Коефіцієнти визначити, як змінні, розрахувати дискримінант і обидва кореня за відомими формулами.

Виконати матричні операції, задані викладачем.

1.2 Контрольні питання

За допомогою якого оператора можна обчислити вираз?

Як вставити текстову область у документ Mathcad?

Як змінити формат чисел для всього документа?

Як визначити дискретні змінні з довільним кроком? Який крок за замовчуванням?

Як переглянути вміст масиву, визначеного через дискретний аргумент?

Завдання 1. Обчислити заданий арифметичний вираз з вказаною точністю (кількістю знаків після десяткової точки)

1:	$\frac{\left(3^{-1} - \sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2} : 0.25}{\frac{37}{100} : 0.0925} + 12.5 \cdot 0.64$ 3 знаки
2:	$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[2]{(1 - \sqrt{2})^3}\right)^2$ 3 знаки
3:	$5\frac{4}{7} : \left(8.4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \left(6 - \frac{(2.3 + 5 : 6.25) \cdot 7}{8 \cdot 0.0125 + 6.9}\right) - 20.384 : 1.3\right)$ 4 знаки
4:	$\left(\frac{928 \cdot 10^{-2}}{0.8} - 0.6\right) : \left(\frac{\left(42 \cdot 3\frac{5}{6} + 3.3 : 0.03\right) : \frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4} : 0.625 - 0.84 : 0.8\right) : 0.03}\right)^{-1}$ 5 знаків
5:	$\frac{(0.6)^0 - (0.1)^{-1}}{(3 : 2^3)^{-1} \cdot (1.5)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$ 2 знаки
6:	$\left(\frac{\sqrt{561^2 - 459^2}}{4\frac{2}{7} \cdot 0.15 + 4\frac{2}{7} : \frac{20}{3}} + 4\sqrt{10}\right) : \frac{1}{3}\sqrt{40}$ 4 знаки
7:	

$\frac{2^{-2} + 5^0}{(0.5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4.75$	
5 знаків	
8:	$\frac{3\frac{1}{3} : 10 + 0.175 : 0.35}{1.75 - 1\frac{11}{17} \cdot \frac{51}{56}} - \frac{\left(\frac{11}{18} - \frac{1}{15}\right) : 1.4}{\left(0.5 - \frac{1}{9}\right) \cdot 3}$
5 знаків	
9:	$\frac{\sqrt{6.3 \cdot 1.7} \left(\sqrt{\frac{6.3}{1.7}} - \sqrt{\frac{1.7}{6.3}} \right)}{\sqrt{(6.3 + 1.7)^2 - 4 \cdot 6.3 \cdot 1.7}}$
2 знаки	
10:	$\frac{(3.4 - 1.275) \cdot \frac{16}{17}}{\frac{5}{18} \cdot \left(1\frac{7}{85} + 6\frac{2}{17}\right)} + 0.5 \left(2 + \frac{12.5}{5.75 + \frac{1}{2}} \right)$
2 знаки	

Завдання 2: Розв'язати квадратне рівняння. Коефіцієнти визначити, як змінні, розрахувати дискримінант і обидва кореня формулами

1: $3x^2 - 15x + 0 = 0$ $5x^2 + 80x - 180 = 0$ $5x^2 + 200x - 1125 = 0$	6: $3x^2 + 0x + 0 = 0$ $7x^2 + 7x - 1092 = 0$ $10x^2 + 4902x + 5940 = 0$
2: $7x^2 - 91x + 252 = 0$ $4x^2 + 104x + 640 = 0$ $13x^2 + 273x - 9126 = 0$	7: $3x^2 - 27x + 42 = 0$ $2x^2 - 32x + 78 = 0$ $18x^2 + 972x + 4410 = 0$
3: $4x^2 - 44x + 96 = 0$ $7x^2 - 56x - 588 = 0$ $10x^2 - 200x - 5250 = 0$	8: $6x^2 - 48x + 0 = 0$ $3x^2 - 30x - 168 = 0$ $15x^2 - 150x - 21285 = 0$

4: $5x^2 - 30x + 0 = 0$ $6x^2 - 102x + 360 = 0$ $19x^2 + 494x - 3648 = 0$	9: $4x^2 - 32x + 28 = 0$ $4x^2 - 84x + 432 = 0$ $11x^2 - 231x - 6512 = 0$
5: $6x^2 - 60x + 144 = 0$ $5x^2 - 5x - 1050 = 0$ $9x^2 + 720x + 13959 = 0$	10: $5x^2 - 35x + 0 = 0$ $6x^2 + 48x - 54 = 0$ $12x^2 + 252x + 15552 = 0$

Завдання 3: Виконати матричні операції, що задані викладачем

$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A1 – 1й стовпець матриці A, B1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A2=5 \cdot A$, $B2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5) Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті	$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A1 – 1й стовпець матриці A, B1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A2=5 \cdot A$, $B2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5) Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті
$A = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A1 – 1й стовпець матриці A, B1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A2=5 \cdot A$,	$A = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A1 – 1й стовпець матриці A, B1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A2=5 \cdot A$,

$B^2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті	$B^2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті
$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A_1 – 1й стовпець матриці A , B_1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A_2=5*A$, $B_2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті	$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A_1 – 1й стовпець матриці A , B_1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A_2=5*A$, $B_2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті
$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A_1 – 1й стовпець матриці A , B_1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A_2=5*A$, $B_2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену	$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ 1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A_1 – 1й стовпець матриці A , B_1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю $A_2=5*A$, $B_2=B^2$ 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену

матрицю В 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті	матрицю В 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті
$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$	$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$
1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A1 – 1й стовпець матриці A, B1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю A2=5*A, B2=B ² 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті	1) Знайти визначники обох матриць 2) Отримати вектори A1 – 1й стовпець матриці A, B1 – 2й стовпець матриці B 3) Отримати матрицю A2=5*A, B2=B ² 4) Отримати транспоновану матрицю A і обернену матрицю B 5)Пункти 1) і 4) розрахувати вручну у звіті

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2 «ФУНКЦІЇ. ГРАФІКИ І ТАБЛИЦІ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ »

Мета роботи: навчитися працювати з функціями в програмі MathCad.

Завдання 1: Функції.

У MathCad визначено ряд вбудованих функцій, наприклад, тригонометричні, логарифми і т.п. Також можна визначити власну функцію від однієї або більше змінних, яка задається у вигляді: ім'я функції (список змінних через кому): = вираз. Вимога до імен функцій таке ж, як і до імен змінних. Наприклад, визначте наступні функції:

$$y(x) := 2x^2 + 5x - 3$$

$$f(x, z) := x^2 \cos(z)$$

$$s(x, z, w) := x * \sin(z^w)$$

Значення функції обчислюються після підстановки конкретних значень або заданих змінних:

$$y(5.3) =$$

$$x := -1.6$$

$$f(x, -0.2) =$$

$$z := -13.1$$

$$w := 1.2$$

$$s(x, z, w)$$

$$s(x, z, w) =$$

Також, можна отримати таблицю значень функції для декількох значень змінної, занесених до списку:

A: = створить і заповнить матрицю-стовпець розміром 3x1

y(A) =

В результаті має бути отримана матриця значень функції $y(x)$.

Завдання 2: Табулювання функцій і побудова графіків.

Побудувати таблицю значень функції можна двома способами:

1. Задати інтервал зміни аргументу в форматі $x := \text{початкове значення} [, \text{початкове значення} + \text{крок}] .. \text{кінцеве значення}$ в дужках вказано необов'язковий параметр, якщо його немає, крок, по замовчуванню, дорівнює 1. Після чого можна визначити функцію від цього аргументу, наприклад:

$$x := 0, 0.1 \dots 5.5$$

$$f(x) := x * \sin(x^2)$$

$$f(x) =$$

2. Двокрапка ".." вводиться символом крапка з комою ";" або кнопкою арифметичної палітри. Остання команда

виводить таблицю значень функції для заданого діапазону аргументів.

3. Тепер можна побудувати графік. Скористаємося графічною палітрою, розкривши яку виберемо x-y графік. У позиції маркера осі x вкажіть змінну x, в позиції маркера осі y вкажемо функцію f(x). Більше можна нічого не вводити, просто клацнути мишкою поза графіком. Графік буде побудований. Можна також явно вказати межі зміни змінної і функції, відповідно, в правій і лівій позиції маркера по осі x і верхній і нижній позиції маркера по осі y.
4. Подвійний клік мишкою по графіку викликає меню настройки, де можна змінити багато його характеристик. Одночасно можна побудувати до 16 кривих із загальним аргументом, вказуючи функції через кому. Можна і аргументи вказувати через кому.
5. Визначити зміну цілого індексу і побудувати таблицю значень функції у вигляді вектор-стовпці. Зокрема, для попередньої задачі:

$$i:=0..15$$

$$x_i:=i/10$$

$$y_i:=x_i*\sin(x_i^2)$$

$$y=$$

6. Остання команда виводить таблицю значень функції.
7. Це важливо знати! У Mathcad прийнято, що індекс масиву відраховується від 0. Початковий індекс визначається системною змінною $ORIGIN = 0$.
8. Доступ до елементів масиву відбувається за індексом, наприклад:

$$y_0=$$

$$y_1=$$

$$y_2=$$

9. Вибір способу побудови функції не настільки важливий, однак при обчисленні значення функції як елементу масиву спрощується процедура звернення до його окремих значень.
10. Для двовимірного масиву звернення будується так: $M[i, j]$ а виходить M_i, j
11. Так само існує можливість швидкої побудови графіка функції. Для цього в позиції маркера осі x вказують аргумент функції, а в позиції маркера осі y - функцію (або кілька функцій через кому). Побудуйте таким чином в одній площині графіки функцій $\sin(x)$, $\cos(x)$ і $\sin(2x)$. Зверніть увагу на те, що якщо змінна x раніше вже визначалася в даному документі, то вам доведеться використовувати в якості аргументу функцій змінну з іншим ім'ям.

Завдання 3: Побудова графіка залежності по точкам.

Часто доводиться будувати графік деякої залежності по заданих точках даних. Для цього самі дані потрібно ввести в матрицю-стовпець. Наприклад, виконайте наступні дії:

$i := 0..9$ *завдання діапазону індексів вектору даних*

$F :=$ *тут створіть матрицю-стовпець розміром 10×1*

Тепер можна побудувати графік залежності. Викличте площину x - y графіка, в позиції маркера горизонтальній осі вкажіть індекс i , а в позиції маркера вертикальній осі - F_i . Викликавши меню властивостей графіка, спробуйте змінити стиль відображення даних: точки різного розміру, точки з'єднані суцільною лінією, стовпці і т.п.

Якщо по осі x потрібно відкласти не номер вимірюваного значення, а інші значення, то їх так само потрібно ввести у вигляді матриці-стовпця X того ж розміру, а в позиції маркера горизонтальній осі вказати, відповідно, X_i .

Завдання 4: Функції від двох змінних.

Двовимірний масив відповідає значенню функції двох змінних, наприклад:

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

$$i: = 0 \dots 10$$

$$j: = 0 \dots 10$$

$$x_i: = -5 + i$$

$$y_j: = -5 + j$$

побудуємо двовірну матрицю

$$M_{i,j}: = f(x_i, y_j)$$

$$M=$$

В якості єдиного аргументу двовірного графіка вказуємо ім'я матриці M .

Графік функції двох змінних таким же чином можна побудувати у вигляді карти ізоліній (ліній однакового значення функції).

Завдання 5: Графік в полярних координатах.

Побудуємо полярний графік, вибравши в якості кривої, наприклад, спіраль:

$$\varphi: = 0,0.1 \dots 4 * \pi$$

$$\rho(\varphi): = \varphi + \cos(\varphi)$$

Для введення символів ρ і φ використовуємо палітру грецьких символів. Побудуйте графік цієї функції, викликавши відповідну площину на палітрі графіків. Функцію $\rho(\varphi)$ потрібно вказати в позиції маркера зліва від графіка, а аргумент φ – знизу

Завдання 6: Побудова стовпчикових діаграм.

Для побудови стовпчикової діаграми необхідно задати матрицю значень, наприклад, розміром 3×3 . Побудуйте стовпчикову діаграму самостійно, викликавши відповідну площину на палітрі графіків. Кожна колонка матриці створює ряд значень.

2.1 Контрольне завдання

Отримайте таблицю значень і побудуйте графіки заданих функцій в декартових і полярних координатах;

Отримайте таблицю значень і побудуйте графіки функцій двох змінних.

2.2 Контрольні питання

Як побудувати графіки: поверхні; полярний; декартовий?

Як побудувати кілька графіків в одній системі координат?

Як змінити масштаб графіка?

Як визначити координату точки на графіку?

Як побудувати гістограму?

Завдання 1: Отримайте таблицю значень і побудуйте графік функції в декартових і полярних координатах

1:	$\frac{4 \cdot \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - \operatorname{tg}^2\left(2\alpha + \frac{5}{2}\pi\right)} - 1$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
2:	$\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos^{-2}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
3:	$\frac{3\cos^2(\alpha + 270^\circ) - \sin^2(\alpha - 270^\circ)}{3\sin^2(\alpha - 90^\circ) - \cos^2(\alpha + 90^\circ)}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
4:	$\frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 10\alpha - \cos 14\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha + \sin 10\alpha + \sin 14\alpha}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
5:	$\sin\left(2x - \pi\right)\cos\left(x - 3\pi\right) + \sin\left(2x - \frac{9}{2}\pi\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\alpha \in [0..360^\circ]$ з кроком 5°	
6:	$\frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha)^2 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
7:	$\sqrt[3]{\frac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
8:	$\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1)}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
9:	$\frac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{5}{4}\pi\right) + 1}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$
10:	$\frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}$ $\alpha \in [0..360^\circ] \text{ з кроком } 5^\circ$

Завдання 2: отримайте таблицю значень і побудуйте графіки функцій двох змінних, на заданій сітці

1:	$z = 2 \cos(x + y) + y \cos(x - y)$ $x \in [0..8] \text{ з кроком } 0,1, \ y \in [0..4] \text{ з кроком } 0,1$
2:	$z = \sin(x^2 + y^2)$ $x \in [-1,5..1,5], \ y \in [-1,5..1,5] \text{ з кроком } 0,1$
3:	$z = \arctg \frac{x + y}{1 - xy}$ $x \in [0..8], \ y \in [0..4] \text{ з кроком } 0,2$
4:	$z = e^x \sin(y)$ $x \in [0..8], \ y \in [0..4] \text{ з кроком } 0,1$
5:	$z = \left(\frac{2 + x^3}{\sqrt[6]{x^5 + 0.5}} - \frac{e^x}{x^4 - 5} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{(y)^2} + \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right) \right)$ $x \in [0..10] \text{ з кроком } 0,5, \ y \in \left[0.. \frac{20}{3} \pi\right] \text{ з кроком } \pi/3$
6:	$z = \sin(x) \sin(3y)$ $x \in [-\pi.. \pi], \ y \in [-\pi.. \pi] \text{ з кроком } 0,1$
7:	$z = \frac{x^2 - y^2}{0.1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$ $x \in [-0,9..3,1], \ y \in [-0,9..3,1] \text{ з кроком } 0,1$
8:	$z = x \sin 2y + y \cos 3x$ $x \in [-\pi.. \pi], \ y \in [-\pi.. \pi] \text{ з кроком } 0,1$

9:	$z = \sqrt{xy}$ $x \in [0..8]$ з кроком 0,2, $y \in [0..6]$ з кроком 0,1
10:	$z = x^3 + 3x^2y - 5xy^2 - y^3$ $x \in [-6..6]$ з кроком 0,2, $y \in [-6..6]$ з кроком 0,2

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 «РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ»

Мета роботи: навчитися розв'язувати рівняння засобами пакета MathCad.

Завдання 1: Чисельне розв'язування рівнянь.

Багато рівнянь і систем рівнянь не мають аналітичних розв'язків. В першу чергу це відноситься до більшості трансцендентних рівнянь. Доведено також, що не можна побудувати формулу, по якій можна було б вирішити довільне алгебраїчне рівняння степеня вище четвертого. Однак такі рівняння можуть вирішуватися чисельними методами із заданою точністю (не більше значення заданої системної змінної TOL).

Для найпростіших рівнянь виду $f(x) = 0$ розв'язання в Mathcad знаходиться за допомогою функції root в форматі $\text{root}(f(x1, x2, \dots), x1, a, b)$. Функція root повертає значення змінної $x1$, що належить відрізку $[a, b]$, при якому вираз чи функція $f(x)$ прагне до 0. Обидва аргументи цієї функції повинні бути скалярами. Функція повертає скаляр. $f(x1, x2, \dots)$ - функція, визначена де-небудь в робочому документі, або виразі. Вираз повинен повертати скалярні значення. $x1$ - ім'я змінної, яке використовується у виразі. Цією змінною перед використанням функції root необхідно привласнити числове значення. Mathcad використовує його як початкове наближення при пошуку кореня. a, b - необов'язкові, якщо використовуються, то повинні бути дійсними числами, причому $a < b$. Наближені значення коренів (початкові наближення) можуть бути:

1. Відомі з фізичного змісту задачі.

Відомі з рішення аналогічної задачі при інших вихідних даних.

2. Знайдено графічним способом.

Найбільш поширений графічний спосіб визначення початкових наближень. Беручи до уваги, що дійсні корені рівняння $f(x) = 0$ - це точки перетину графіка функції $f(x)$ з віссю абсцис, досить побудувати графік функції $f(x)$ і позначити точки перетину $f(x)$ з віссю Ox , або позначити на осі Ox відрізки, що містять по одному кореню. Побудову графіків часто вдається сильно спростити, замінивши рівняння $f(x) = 0$ рівносильним йому рівнянням: $f_1(x) = f_2(x)$, де функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ - більш прості, ніж функція $f(x)$. Тоді, побудувавши графіки функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, шукані корені одержимо як абсциси точок перетину цих графіків.

Приклад: знайти корінь рівняння $x * \log(x) = 1$.

Його зручніше перетворити на вигляд $\log(x) = 1 / x$ і позначити дві функції: $y_1 = 1/x$, $y_2 = \log(x)$. Побудуйте графіки цих функцій на одній площині. Вони перетинаються (а значить - порівнюються) на відрізку $x \in [2; 3]$.

*Перепишіть рівняння у вигляді $x * \log(x) - 1 = 0$ і знайдіть чисельно корінь вихідного рівняння командою:
`root(x*log(x) -1, x, 2,3) =`*

Що робити при відсутності збіжності функції root.

Якщо після багатьох ітерацій Mathcad не знаходить наближення, що підходить, то з'явиться повідомлення (відсутність збіжності). Ця помилка може бути викликана наступними причинами:

1. Рівняння не має коренів.
2. Корені рівняння розташовані далеко від початкового наближення.
3. Вираз має локальні $\max$ і $\min$ між початковим наближенням і коренями.
4. Вираз має розриви між початковими наближенням і коренями.
5. Вираз має комплексний корінь, а початкове наближення було дійсним.

Щоб встановити причину помилки, дослідіть графік $f(x)$. Він допоможе з'ясувати наявність коренів рівняння $f(x) = 0$ і, якщо вони є, то визначити приблизно їхні значення. Чим точніше вибрано

початкове наближення кореня, тим швидше буде root збігатися. Рекомендації по використанню функції root:

1. Для зміни точності, з яким функція root шукає корінь, потрібно змінити значення системної змінної TOL. Якщо значення TOL збільшується, функція root буде збігатися швидше, але відповідь буде менш точною. Якщо значення TOL зменшується, то функція root буде збігатися повільніше, але відповідь буде більш точною. Щоб змінити значення TOL в певній точці робочого документа, використовуйте визначення виду $TOL:=0.001$. Щоб змінити значення TOL для усього робочого документа, виберіть команду Математика ==> Параметри ==> Змінні ==> Допуск збіжності (TOL).
2. Якщо два кореня розташовані близько один від одного, слід зменшити TOL, щоб розрізнити їх.
3. Якщо функція $f(x)$ має малий нахил близько шуканого кореня, функція root ($f(x)$, x) може сходитися до значення r , що знаходиться від кореня досить далеко. У таких випадках для знаходження більш точного значення кореня необхідно зменшити значення TOL. Інший варіант полягає в заміні рівняння $f(x) = 0$ на $g(x) = 0$, де $g(x) = f(x) / (df(x)/dx)$.
4. Для вираження $f(x)$ з відомим коренем a пошук додаткових коренів $f(x)$ еквівалентний пошуку коренів рівняння $h(x) = f(x)/(x-a)$. Подібний прийом корисний для знаходження коренів, розташованих близько один до одного. Простіше шукати корінь виразу $h(x)$, ніж шукати інший корінь рівняння $f(x)=0$, вибираючи різні початкові наближення.

Завдання 2: Знаходження коренів полінома.

Для знаходження коренів виразу, що має вигляд $v_n x^n + \dots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0$, краще використовувати функцію polyroots, ніж root. На відміну від функції root, функція polyroots не вимагає початкового наближення і повертає відразу всі корені, як дійсні, так і комплексні.

Приклад: знайти корені полінома $0.15x^5 - x^3 + 2.17x^2 + 1.3x - 2.1$

Введіть даний поліном в робочу область

Поставте курсор навпроти змінної x і виберіть команду: Символи ==> Коефіцієнти полінома.

Буде створена матриця-стовпець з 5 рядків, що з'єднує коефіцієнти.

Виріжте її, оголосіть змінну

$v :=$

і надайте їй матрицю коефіцієнтів. Далі дайте команду:

$r := \text{polyroots}(v)$,

яка створить вектор коренів полінома - три дійсних і два уявних кореня.

Побудуйте графік полінома на ділянці, що містить дійсні корені і вкажіть їх положення точками на графіку.

Завдання 3: Розв'язання систем рівнянь.

MathCAD дає можливість вирішувати також і системи рівнянь. Максимальне число рівнянь і змінних дорівнює 50. Результатом розв'язання системи буде чисельне значення кореня, що шукається.

Для вирішення системи рівнянь необхідно виконати наступне:

1. Задати початкове наближення для всіх вхідних невідомих у системі рівнянь. Mathcad вирішує систему за допомогою ітераційних методів.
2. Надрукувати ключове слово Given. Воно вказує Mathcad, що далі йде система рівнянь.
3. Введіть рівняння і нерівності в будь-якому порядку. Використовуйте [Ctrl] = для друку символу =. Між лівими і правими частинами нерівностей може стояти будь-який із символів $<$, $>$, $\leq$ і $\geq$.
4. Введіть будь-який вираз, який включає функцію Find, наприклад: $a := \text{Find}(x, y)$. Функція $\text{Find}(z_1, z_2, \dots)$ повертає точне рішення системи рівнянь. Число аргументів має дорівнювати числу невідомих. Ключове слово Given, рівняння і нерівності, які слідують за ним, і будь-який вираз, що містить функцію Find, називають блоком рішення рівнянь.

Наступні вирази неприпустимі всередині блоку рішення:

1. Обмеження зі знаком $\neq$.
2. Дискретний аргумент чи вираз, що містить дискретний аргумент у будь-якій формі.
3. Нерівності виду $a < b < c$.

Блоки рішення рівнянь не можуть бути вкладені одна в одну, кожен блок може мати тільки одне ключове слово Given і ім'я функції

Find. Функція, яка завершує блок рішення рівнянь, може бути використана аналогічно будь-якій іншій функції. Можна зробити з нею наступні три дії:

1. Можна вивести знайдений розв'язок, надрукуювавши вираз виду: $\text{Find}(\text{var1}, \text{var2}, \dots) =$.

2. Визначити змінну за допомогою функції Find:

$a = \text{Find}(x)$ - скаляр,

$\text{var} = \text{Find}(\text{var1}, \text{var2}, \dots)$ - вектор.

Це зручно зробити, якщо потрібно використовувати рішення системи рівнянь в іншому місці робочого документа.

1. Визначити іншу функцію за допомогою $\text{Find } f(a, b, c, \dots) = \text{Find}(x, y, z, \dots)$.

2. Ця конструкція зручна для багаторазового рішення системи рівнянь для різних значень деяких параметрів $a, b, c, \dots$, які безпосередньо входять в систему рівнянь.

Повідомлення про помилку "No solution was found" (розв'язок не знайдено) при розв'язку рівнянь з'являється, коли:

1. Поставлена задача може не мати рішення.

2. Для рівняння, що не має дійсних розв'язків, як початкове наближення взяте дійсне число і навпаки.

3. В процесі пошуку рішення послідовність наближень потрапила в точку локального мінімуму нев'язки. Для пошуку шуканого рішення потрібно задати різні початкові наближення.

4. Можливо, поставлена задача не може бути розв'язана з заданою точністю. Спробуйте збільшити значення TOL.

Приклад 1 ілюструє розв'язок системи рівнянь в MathCAD:

Задаємо початкові наближення:

$x1 = 0 \quad x2 = 0 \quad x3 = 0$

Given

$100 \cdot x1 + 6 \cdot x2 - 2 \cdot x3 = 100$ знак = вводиться за допомогою [Ctrl] =

$6 \cdot x1 + 200 \cdot x2 - 10 \cdot x3 = 600$

$x1 + 2 \cdot x2 + 100 \cdot x3 = 500$

Find ($x1, x2, x3$) =

Приклад 2 ілюструє розв'язок системи рівнянь в символьному вигляді:

Given

$$x + 2 * \pi * y = a$$

$$4 * x + y = b$$

Find (x, y) →

Тут знак → означає символічний розв'язок.

Завдання 4: Рішення матричних рівнянь.

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь щодо n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Відповідно до правила множення матриць розглянута система лінійних рівнянь може бути записана в матричному вигляді:

$$AX = B,$$

де A - квадратна матриця коефіцієнтів рівнянь, X - матриця невідомих, B - матриця незалежних параметрів. Матриця A називається матрицею системи; матриця-стовпець B називається матрицею правої частини або просто правою частиною системи. Матриця-стовпець X називається розв'язком системи.

Якщо матриця A - неособлива, тобто $\det A \neq 0$ то система, або еквівалентне їй матричне рівняння, має єдине рішення. Справді, за умови $\det A \neq 0$ існує зворотна матриця A^{-1} . Помноживши обидві частини рівняння на матрицю A^{-1} одержимо:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Ця формула дає рішення матричного рівняння і воно єдине. Системи лінійних рівнянь зручно вирішувати за допомогою функції `lsolve (A, B)`.

Для вирішення системи з трьох лінійних рівнянь потрібно:

Задати матрицю A - матрицю системи

Задати матрицю B - матрицю-стовпець правій частині

Перевірити, чи не дорівнює визначник матриці A нулю

$|A| =$

Якщо ні, то отримати вектор рішень:

$$X := A^{-1}B$$

Або за допомогою функції `lsolve`:

`X: = lsolve (A, B)`

Наближені розв'язки.

Функція `Minerr` дуже схожа на функцію `Find` (використовує той же алгоритм). Якщо в результаті пошуку не може бути отримано подальше уточнення поточного наближення до розв'язання, `Minerr` повертає це наближення. Функція `Find` в цьому випадку повертає повідомлення про помилку. Правила використання функції `Minerr` такі ж, як і функції `Find`.

`Minerr (z1, z2,...)`

Повертає наближений розв'язок системи рівнянь. Число аргументів має дорівнювати числу невідомих. Якщо `Minerr` використовується в блоці розв'язку рівнянь, необхідно завжди включати додаткову перевірку достовірності результатів.

Символьний розв'язок рівнянь.

У `Mathcad` можна швидко і точно знайти чисельне значення кореня за допомогою функції `root`. Але є деякі завдання, для яких можливості `Mathcad` дозволяють знаходити рішення в символьному (аналітичному) вигляді. Рішення рівнянь в символьному вигляді дозволяє знайти точні або наближені корені рівняння:

1. Якщо рівняння має параметр, то рівняння в символьному виді може виразити шуканий корінь безпосередньо через параметр. Тому замість того, щоб розв'язувати рівняння для кожного нового значення параметра, можна просто замінити його значення в знайденому символьному вирішенні.

2. Якщо потрібно знайти всі комплексні корені полінома зі ступенем менше чи рівним 4, символьне рішення дасть їх точні значення в одному векторі в аналітичному чи цифровому вигляді. Команда `Символи ==> Змінні ==> Обчислити` дозволяє розв'язати рівняння щодо деякої змінної і виразити його корені через інші параметри рівняння. Щоб вирішити рівняння символьно, необхідно:

- Надрукувати вираз (для введення знаку рівності використовуйте комбінацію клавіш `[Ctrl]=`).
- Виділити змінну, щодо якої потрібно вирішити рівняння, клацнувши на ній мишею.

- Вибрати пункт меню Символи ==> Змінні ==> Обчислити. Немає необхідності прирівнювати вираз до нуля. Якщо MathCAD не знаходить знаку рівності, він передбачає, що потрібно прирівняти вираз до нуля.

3. Щоб вирішити систему рівнянь у символьному вигляді, необхідно виконати наступне:

- Надрукувати ключове слово Given.
- Надрукувати рівняння в будь-якому порядку нижче слова Given. Переконайтеся, що для введення знаку = використовується [Ctrl] =.
- Надрукувати функцію Find, що відповідає системі рівнянь.
- Натиснути [Ctrl]. (Клавіша CTRL, супроводжується точкою). Mathcad відобразить символьний знак рівності $\rightarrow$.
- Клацнути мишею на функції Find.

3.1 Контрольне завдання

1. Чисельно вирішити нелінійне рівняння. Побудувати графік функції і знайти її корінь на вказаному проміжку;
2. Виконати задані дії для полінома;
3. Розв'язати систему лінійних рівнянь;
4. Розв'язати систему нелінійних рівнянь;

3.2 Контрольні питання

1. Назвіть способи знаходження початкового наближення.
2. У яких випадках MathCAD не може знайти корінь рівняння?
3. Яка системна змінна відповідає за точність обчислень?
4. Як змінити точність, з якою функція root шукає корінь?
5. Опишіть структуру блоку рішення рівнянь.
6. Який знак рівності використовується в блоці розв'язок? Якою комбінацією клавіш вставляється в документ?
7. Опишіть способи використання функції Find.
8. Як вирішувати матричні рівняння? Назвіть способи вирішення матричних рівнянь.

Завдання 1: Чисельно розв'язати нелінійне рівняння. Побудувати графік функції і знайти її корінь на вказаному проміжку

1:	$y(x) = \sin(1.2x^{1.3} + 0.5x^{1.8}),$ $x \in [1, 2]$	6:	$y(x) = 2 \cdot x^{\sin(x)} - 3 \cdot x^{\cos(x)},$ $x \in [0, 1]$
2:	$y(x) = \sin(\ln(x)) + \cos(x),$ $x \in [2, 3]$	7:	$y(x) = x^2 \cdot \ln(1.3x) - \frac{x^3}{1+x},$ $x \in [1, 2]$
3:	$y(x) = \frac{x \sin(1.2x + 0.2) - \cos(2.1x - 0.1)}{\sin(2.3x + 1.1) - x \cdot \cos(x^2 - 3.1)},$ $x \in [0, 1]$	8:	$y(x) = 2.2x^2 + x \cdot \ln\left(\frac{x^{1.1}}{2+x}\right),$ $x \in [0.1, 0.3]$
4:	$y(x) = x^2 - (x + 1.8)^{\sin(1.2 \cdot x)},$ $x \in [1, 2]$	9:	$y(x) = 3 - \frac{2 \ln(x)}{x^2} - x^{\ln(x)},$ $x \in [2, 3]$
5:	$y(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - x \cdot \sin(1.1 \cdot x),$ $x \in [-2, -0.5]$	10:	$y(x) = 1 + x^2 \cdot \tan(1 - x^2),$ $x \in [0.5, 1.5]$

Завдання 2. Для полінома $g(x)$ виконати наступні дії:

1. Побудувати вектор V , що містить коефіцієнти полінома;
2. Розв'язати рівняння $g(x)=0$ за допомогою функції `polyroots`;
3. Розв'язати рівняння $g(x)=0$ в символьній формі.

Таблиця 3.1: Варіанти

№	$g(x)$	№	$g(x)$
1:	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	9:	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2:	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	10:	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3:	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	11:	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4:	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	12:	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$

5:	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 17x - 140$	13:	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6:	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	14:	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7:	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	15:	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
8:	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$	16:	$x^4 - 7x^3 + 4x - 15$

Завдання 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

1. За допомогою функції Find;
2. Матричним способом;
3. За допомогою функції Isolve.

№	система лінійних рівнянь	№	система лінійних рівнянь
1:	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	9:	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$
2:	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	10:	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$
3:	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_2 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	11:	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$

4:	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	12:	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_1 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 80 \end{cases}$
5:	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	13:	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$
6:	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	14:	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
7:	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$	15:	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$
8:	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$	16:	$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 12 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 18 \\ -3x_1 + 3x_2 + 7x_4 = 21 \end{cases}$

Завдання 4. Перетворити нелінійні рівняння системи до вигляду: $f_1(x) = y$ і $f_2(y) = x$. Побудувати графіки і визначити початковий наближений розв'язок. Розв'язати систему нелінійних рівнянь за допомогою функції Minerr.

Таблиця 3.2: Варіанти

№	<i>система нелінійних рівнянь</i>	№	<i>система нелінійних рівнянь</i>
1:	$\begin{cases} \sin(x) + 2y = 2 \\ \cos(y - 1) + x = 0.7 \end{cases}$	9:	$\begin{cases} \sin(y) + x = -0.4 \\ 2y - \cos(x + 1) = 0 \end{cases}$
2:	$\begin{cases} \sin(x + 0.5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$	10:	$\begin{cases} \sin(x + 2) - y = 1.5 \\ \cos(y - 2) + x = 0.5 \end{cases}$
3:	$\begin{cases} \cos(x) + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y - 0.5) = 1 \end{cases}$	11:	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) - y = 2 \\ \sin(y) - 2x = 1 \end{cases}$
4:	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) + y = 0.8 \\ \sin(y) - 2x = 1.6 \end{cases}$	12:	$\begin{cases} \cos(x - 2) + y = 0 \\ \sin(y + 0.5) - x = 1 \end{cases}$
5:	$\begin{cases} \sin(x - 1) = 1.3 - y \\ x - \sin(y + 1) = 0.8 \end{cases}$	13:	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) + y = 1 \\ \sin(y + 0.5) - x = 1 \end{cases}$
6:	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) + y = 1 \\ \sin(y) - 2x = 2 \end{cases}$	14:	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1 \\ \cos(y + 0.5) - x = 2 \end{cases}$
7:	$\begin{cases} -\sin(x + 1) + y = 0.8 \\ \sin(y - 1) + x = 1.3 \end{cases}$	15:	$\begin{cases} 2y - \sin(x - 0.5) = 1 \\ \cos(y) + x = 1.5 \end{cases}$
8:	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1 \\ \cos(y - 1) + x = 1.3 \end{cases}$	16:	$\begin{cases} \sin(y - 0.2) + x = -1.4 \\ y - \cos(x - 1) = 0 \end{cases}$

4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 «СИМВОЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ»

Мета роботи: навчитися виконувати символьні обчислення засобами пакета MathCad.

Системи комп'ютерної алгебри забезпечуються спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислювань. Його основою є ядро, що зберігає всю сукупність формул і формульних перетворень, за допомогою яких відбуваються аналітичні обчислення. Чим більше цих формул в ядрі, тим більш надійна робота символьного процесора і тим вірогідніше, що поставлена задача буде вирішена, якщо таке рішення існує в принципі (що буває далеко не завжди).

Ядро символьного процесора системи MathCAD – дещо спрощений варіант ядра відомої системи символьної математики Maple V фірми Waterloo Maple Software, у якій фірма MathSoft (розробник MathCAD) придбала ліцензію на його застосування, завдяки чому MathCAD стала (починаючи з версії 3.0) системою символьної математики. Символьні обчислення виконуються настільки ж просто (для користувача), як обчислення квадрата x .

Символьні операції можна виконувати двома способами:

1. Безпосередньо в командному режимі (використовуючи операції меню Символи);
2. За допомогою операторів символьного перетворення (використовуючи палітру інструментів Символи).

Розглянемо перший спосіб.

Виділення виразів для символьних обчислень

Щоб символьні операції виконувалися, процесору необхідно вказати, над яким виразом ці операції повинні виконуватись, тобто треба виділити вираз. Для ряду операцій треба не тільки вказати вираз, до якого вони належать, а й вказати змінну, щодо якої виконується та чи інша символьна операція. Сам вираз в такому випадку не виділяється. Таким чином, для виконання операцій з символьним процесором потрібно виділити об'єкт (цілий вираз або його частину) синіми суцільними лініями.

Символьні операції розбиті на п'ять характерних розділів. Першими йдуть найбільш часто використовувані операції. Вони можуть виконуватися з виразами, що містять комплексні числа чи мають розв'язок в комплексному вигляді.

Символьні операції з виділеними виразами.

Якщо в документі є виділений вираз, то з ним можна виконувати різні операції, представлені нижче:

Розрахунки

перетворити вираз з вибором виду перетворень з підменю.

Символічні [Shift] F9

виконати символічне перетворення виділеного виразу;

З плаваючою комою ...

обчислити виділений вираз в дійсних числах;

Комплексні

виконати обчислення в комплексному вигляді;

Спростити

спростити виділений вираз з виконанням таких операцій, як скорочення подібних, приведення до спільного знаменника, використання основних тригонометричних тотожностей і т.д.;

Розширити

розкрити вираз;

Фактор

розкласти число або вираз на множники;

Подібні

зібрати доданки, подібні до виділеного виразу, який може бути окремою змінною чи функцією зі своїм аргументом (результатом буде вираз, поліноміальний відносно обраного виразу);

Коефіцієнти Полінома

по заданій змінній знайти коефіцієнти полінома, що апроксимує вираз, в якому ця змінна використана.

Символьні операції з виділеними змінними.

Для ряду операцій треба знати, щодо якої змінної вони виконуються. В цьому випадку необхідно виділити змінну, встановивши на ній маркер введення. Після цього стають доступними наступні операції підменю Змінні:

Обчислити

знайти значення виділеної змінної, при яких вираз, що її містить стає рівним нулю;

Заміна

замінити зазначену змінну вмістом буфера обміну;

Диференціали

диференціювати вираз, що містить виділену змінну, по цій змінній (інші змінні розглядаються як константи);

Інтеграція

інтегрувати весь вираз, що містить змінну, по цій змінній;

Розкласти на складові ...

знайти кілька членів розкладання виразу в ряд Тейлора щодо виділеної змінної;

Перетворення в Часткові Частки

розкласти на елементарні дроби вирази, що розглядаються як раціональний дріб щодо виділеної змінної.

Операції з виділеними матрицями.

Операції з виділеними матрицями представлені позицією підменю Матриці, яка має своє підменю з наступними операціями:

Транспонування

отримати транспоновану матрицю;

Інвертування

створити обернену матрицю;

Визначник

обчислити детермінант (визначник) матриці.

Результати символьних операцій з матрицями часто виявляються надмірно громіздкими і тому погано доступні для огляду.

Операції перетворення.

У позиції Перетворення міститься розділ операцій перетворення, що створює підменю з наступними можливостями:

Фур'є

виконати пряме перетворення Фур'є щодо виділеної змінної;

Фур'є Зворотнє

виконати зворотнє перетворення Фур'є щодо виділеної змінної;

Лапласа

виконати пряме перетворення Лапласа щодо виділеної змінної (результат - функція змінної s);

Лапласа Зворотне

виконати зворотне перетворення Лапласа щодо виділеної змінної (результат - функція змінної t);

Z

виконати пряме Z-перетворення виразу відносно виділеної змінної (результат - функція змінної z);

Зворотне Z

виконати зворотне Z-перетворення щодо виділеної змінної (результат - функція змінної n).

Стиль представлення результатів обчислень

На наочність обчислень впливає стиль представлення їхніх результатів. Наступна команда дозволяє задати той чи інший стиль:

Стиль Обчислень ... – задати висновок результату символьної операції під основним виразом, поруч з ним або замість нього.

Приклади:

Символьна операція **Розрахунки** забезпечує роботу з математичними виразами, що містять вбудовані в систему функції і представленими в різному вигляді: поліноміальному, дрібно-раціональному, у вигляді сум і добутків, похідних і інтегралів і т. д. Операція прагне зробити всі можливі чисельні обчислення і представити вирази в найбільш простому вигляді. Вона можлива над матрицями з символьними елементами. Похідні і визначені інтеграли, символьні значення яких обчислюються, повинні бути представлені в своїй природній формі.

Введіть вираз: сума по n (n змінюється від 1 до 5) $n!/(n+2)! * 1/n^2 * (x-2)^n$. Знак Σ "сума" вводиться за допомогою палітри аналітичних обчислень. Якщо раніше привласнити конкретне значення змінної x , то значення виразу можна обчислити чисельно за допомогою знаку $=$. Використовуйте знак символьного обчислення $\rightarrow$, щоб перетворити суму в поліном.

Той же результат можна отримати, розширивши курсор на весь вираз і викликавши команду меню **Symbolics-> Evaluate-> Symbolicaly**

Спробуйте зробити інші приклади символьних обчислень: спрощення арифметичного виразу

$$17^{1/2} \rightarrow$$

$$5^{7/4} \rightarrow$$

інтеграли

$$\int a^b (x-2)^2 dx \rightarrow$$

$$\int 0^\infty e^{-2x} dx \rightarrow$$

похідні

$$d/dx \sin(x^2) * \cos(x) \rightarrow$$

$$d^3/dx^3 (3x^3 - 2x) / (x^2 + 3x - 5) \rightarrow$$

підстановка значення

$$x: = 8$$

$$y^2 - 3xy + x^2 \rightarrow$$

Особливо слід відзначити можливість виконання чисельних обчислень з підвищеною точністю – 20 знаків після коми. Для переходу в такий режим обчислень потрібно числові константи в об'єктах, що обчислюються, задавати з обов'язковою вказівкою десяткового дробу, наприклад 10.0 чи 3.0, а не 10 або 3. Ця ознака є вказівкою на проведення обчислень такого типу.

Спробуйте зробити інші приклади символьних обчислень:

обчислити вираз з точністю 25 знаків після коми

exp(2000)

розширте курсор на весь вираз і використовуйте команду Symbolics-> Evaluate-> Floating Point

У вікні, що з'явилося встановіть необхідне число знаків

Отримайте число π з точністю 100 знаків

Операція "expand" (розширити) розкриває вираз на складові. Ця, як і інші подібні операції, вводяться за допомогою спеціальної панелі:

$$(x + y)^3 \text{ expand} \rightarrow$$

$$(x - y) * (x + y) \text{ expand} \rightarrow$$

$$\tan(3 * x) + \cos(5 * x) \text{ expand} \rightarrow$$

Операція "factor" навпаки, розкладає вираз на множники:

$$x^2 - y^2 \text{ factor} \rightarrow$$

Операція "series" розкладає функцію в ряд Тейлора:
розкласти функцію $\sin(2x+y)$ в ряд Тейлора по змінній x і
вивести перші 5 доданків

$$\sin(2*x+y) \text{ series, } x, 5 \rightarrow$$

Операція "assume" – вважати, що виконується додаткова умова:
спроба аналітично вирішити вираз

$$\sqrt{x^2} \rightarrow$$

не приводить до успіху, оскільки рішень може бути два: $\pm x$
аналітичне рішення можливо, якщо вказати, що $x \geq 0$

$$\sqrt{x^2} \text{ assume, } x \geq 0 \rightarrow$$

Також, доступні і інші операції символьного перетворення
виразів алгебри. Наприклад, операція "Simplify" намагається
максимально спростити заданий вираз.

Обчислення границь:

Обчислити границю функції $\sin(x)/x$ при $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

Обчислити границю функції $\tan(x)$ при $x \rightarrow \pi/2$ праворуч і
ліворуч

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) \rightarrow \infty$$

4.1 Контрольне завдання

1. Використовуючи всі доступні в MathCad функції спростити
такий вираз;
2. Вирішити задані границі в символьному вигляді;

3. Отримати розклад функції в ряд Тейлора (3, 5 і 7 елементів ряду) в околицях заданої точки. Побудувати на одній площині графіки самої функції і результатів розкладання, порівняти точність;

4. Отримати в символьному вигляді похідні і інтеграл заданих функцій;

5. Отримати в символьному вигляді часткові похідні заданих функцій;

4.2 Контрольні питання

1. Який знак використовується для символьного рішення вираження?

2. Як вивести конкретне число з заданою кількістю знаків після коми?

3. Як задаються границі праворуч і ліворуч?

4. Як задати спрощення виразу, що містить декілька змінних, щодо однієї з них?

5. В яких випадках потрібно конкретизувати діапазон значень змінної?

Враховуючи область допустимих значень, максимально спростити наступні вирази, використовуючи символьні обчислення Mathcad (функції simplify, assume, substitute, expand, factor та їх комбінації)

1.	$\left(\frac{\frac{x^3 - 1}{x + 1} \cdot \frac{x}{x^3 + 1}}{\frac{(x + 1)^2 - x}{(x - 1)^2 + x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right)^{-\frac{1}{2}}$
2.	$\left(\frac{4m^2 n^2}{4mn - m^2 - 4n^2} - \frac{2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n}}{\frac{4}{mn} - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{m^2}} \right)^{1/2} : \frac{\sqrt{mn}}{m - 2n}$

3.	$\left(\sqrt{x^4 - a^4} - \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
4.	$\left(\frac{ x-1 }{x-1} x^2 - 2x \cdot \frac{ x+1 }{x+1} + 2x - 4 \right) : x-2 $
5.	$\sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{4x^{-1}}} - 2 + \sqrt{\frac{1}{4x^{-1}} + \frac{2^{-2}}{x} + \frac{1}{2}}$
6.	$\frac{\sqrt{a + 2\sqrt{b} + \frac{b}{a}} \cdot \sqrt{2a - 10\sqrt[6]{8a^3b^2} + 25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a} + \sqrt{2ab} - 5a\sqrt[3]{b} - 5\sqrt[6]{b^5}}$
7.	$\frac{\sqrt{3}x^{3/2} - 5x^{1/3} + 5x^{4/3} - \sqrt{3}x}{\sqrt{3x + 10\sqrt{3} \cdot x^{5/6} + 25x^{2/3}} \cdot \sqrt{1 - 2x^{-1} + x^{-2}}}$
8.	$\left(1 - \frac{2}{x} - \left(\frac{2x + x^2}{4 + 2x + x^2} + \frac{2x - x^2}{4 - 2x + x^2} \right) : \left(\frac{16 - 8x}{4 - 2x + x^2} - \frac{16 + 8x}{4 + 2x + x^2} \right) \right)^{1/2}$
9.	$\frac{\sqrt{16z^2 + z^{-2} - 8}}{(2z - z)(4z^3 - 2z^2 + z)^{-1}} - (z^3 - 1)$
10.	$\frac{2x + 5 + 4\sqrt{2x + 1}^{-1/2} + 2x + 5 - 4\sqrt{2x + 1}^{-1/2}}{2x + 5 + 4\sqrt{2x + 1}^{-1/2} - 2x + 5 - 4\sqrt{2x + 1}^{-1/2}}$
11.	$\frac{\sqrt{x - x\sqrt{x + 3} + 4}}{x^{1/2} - (x - 3)^{1/3} - \sqrt{3x + x^2} + \sqrt{x^2 - 9}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 3}}$

$$12. \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$$

Обчислити задані границі, використовуючи символіні $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{\ln x}$, $a > 0$ обчислення Mathcad. Повторно обчислюючи вручну, використовуючи правило Лопіталя

1.a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$	7. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x^2$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$	8. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x^2}$
3. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$	9. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$
4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$	10. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \sqrt{x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - e^{2x} \operatorname{ctgx}$	11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$ б)
6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} + x^{\frac{1}{x}}$	12. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^a}, \quad a > 0$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a}$

Розкладіть функцію в ряд Тейлора в околі вказаної точки, побудувати на одній площині графік функції і графік розкладу

1. $f(x) = \sin^2 x, \quad x = \frac{\pi}{4}$	7. $f(x) = x \cdot e^x, \quad x = 1$
2. $f(x) = \cos^2 x, \quad x = \frac{\pi}{4}$	8. $f(x) = (x+3)^2 \ln(x+1), \quad x = 0$
3. $f(x, y) = \ln(1+x+y), \quad (1, 2)$	9. $f(x) = \sin x \cdot e^x, \quad x = \pi$
4. $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2), \quad x = 1$	10. $f(x) = (x+3)^2 \ln(x+1), \quad x = 0$
5. $f(x) = 3^x, \quad x = 2$	11. $f(x) = \frac{7}{12 + x - x^2}, \quad x = 3$
6. $f(x) = \sqrt[3]{24 - x}, \quad x = -3$	12. $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z^2 + 2z}, \quad z = -2$

Знайдіть першу, другу та третю (якщо це можливо) похідні функцій, а також інтеграл, згідно варіанту. Обчислення першої похідної повторити вручну, представити у письмовому вигляді при здачі.

1. $y = \cos(\ln x)$ $y = (1 + tg)^2$	7. $r = 6\sqrt{\cos 2\gamma}$ $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $y = \frac{1 + \sin 2\gamma}{1 - \sin 2\gamma}$ $y = \arccos(2^x)$	8. $y = \sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}$ $y = 1 + x^2 \arctg x$
3. $r = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$ $y = \cos^2 \sqrt{x}$	9. $s = \sqrt{1 + \cos^2 t^2}$ $y = x \ln x - x^2$
4. $y = 4^{\arctg \sqrt{x^2 - 1}}$ $y = x^3 \ln^2 x$	10. $y = \ln \sin \frac{2x + 4}{x + 1}$ $y = a \cos^2 \frac{x}{a}$
5. $y = \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1 + tg x}}$ $y = \frac{\arctg x}{\sqrt{1 + x^2}}$	11. $y = \ln \ln tg(x)$ $y = \sqrt{1 - \cos x}$
6. $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ $y = x^2 + 1$	12. $y = e^{x^2} \sin 3x$ $y = 2^{\sin x}$

5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5 «ЕЛЕМЕНТИ ПРОГРАМУВАННЯ У MATHCAD»

Мета роботи: навчитися використовувати елементи програмування в MathCad.

MathCAD – це система, орієнтована на користувача, який не зобов'язаний знати абсолютно нічого про програмування. Творці MathCAD спочатку поставили перед собою таку задачу, щоб дати можливість професіоналам-математикам, фізикам і інженерам самостійно проводити складні розрахунки, не звертаючись за допомогою до програмістів. Не зважаючи на здійснення цих задумів, з'ясувалося, що зовсім без програмування MathCAD серйозно втрачає в своїй силі, в основному, через невдоволення користувачів, знайомих з технікою створення програм і бажаючих здійснити свої розрахунки в звичному для себе програмістському стилі.

Останні версії MathCAD мають не дуже потужну, але досить елегантну власну мову. З одного боку, він дає можливість програмісту ефективно застосовувати програмний код в документах MathCAD. З іншого, простота і інтуїтивність мови програмування дозволяє швидко їй навчитися. Нарешті, програмні модулі всередині документа MathCAD поєднують в собі і відособленість (тому їх легко відрізнити від інших формул), і простоту смислового сприйняття. Незважаючи на невелике число операторів, мова програмування MathCAD дозволяє вирішувати найрізноманітніші, в тому числі і досить складні, завдання і є серйозною підмогою для розрахунків.

Ступінчасті і розривні функції і вирази

Функції, що використані в розрахунках, не завжди бувають неперервними. Часто при різних значеннях аргументу функція описується різними виразами. Бувають функції ступінчасті або з розривом. При обчисленні похідних або інтегралів від таких функцій, їх доводиться брати по частинах. Умовний оператор дозволяє записати такі функції у вигляді одного виразу.

У MathCAD існує три способи введення умов:

1. за допомогою функції умови **if**;

2. за допомогою оператора **if** з панелі програмування;
3. з використанням булевих операторів.

Функція умови має такий вигляд: *if* (логічне вираз, висловлювання1, висловлювання2). Перевіряється значення логічного виразу. Якщо воно істинне - виконується висловлювання1, якщо помилкове - висловлювання2.

Використання функції умови: якщо x не від'ємний, обчислити корінь квадратний з x , інакше - корінь з x

$f1(x) := \text{if}(x \geq 0, \sqrt{x}, \sqrt{x})$

$f1(16) =$

$f1(-256) =$

вкладена умова:

$f2(x) := \text{if}(x < 0, \text{"negative"}, \text{if}(x > 0, \text{"positive"}, \text{"zero"}))$

$f2(-12.45) =$

$f2(18.3) =$

$f3(0) =$

приклад сходянкової функції:

$f3(x) := \text{if}(x \leq 5, x - x^2/2, \text{if}(x \geq 15, 7e^{-x/16} / 16, \sin(x)))$

побудуйте графік цієї функції на інтервалі аргументів від 0 до 20.

Дія умовного оператора складається з двох частин: спочатку перевіряється умова, записана праворуч від оператора **if**, і якщо вона вірна, виконується вираз, записаний зліва від оператора. Щоб використовувати оператор **if** з панелі програмування, слід: записати ім'я висловлювання і оператор присвоєння ($f4(x) :=$), на панелі програмування вибрати пункт **Add Line** стільки раз, скільки умов буде вводитися, в відповідному полі введення ввести вираз, після чого вибрати пункт **if** на панелі програмування і ввести умову, при якій має обчислюватися відповідний вираз. Останній вираз, як правило, визначається для випадку, коли не виконується жодне з раніше введених умов. Після нього слід додати ключове слово **otherwise** (інакше) з панелі програмування.

Побудуйте графік функції на інтервалі аргументів від -20 до 20

$$f_4(x) := \begin{cases} x^2 - 5x + 16 & \text{if } x \leq -4 \\ 2x^2 + 4x - 6 & \text{if } x \geq 10 \\ -5x^2 + 2x - 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Визначити функцію з більш складною умовою можна наступним чином: встановіть курсор в одне з полів умови і вибрати пункт **if** на панелі програмування. Встановіть курсор в позицію зліва від оператора **if** і на панелі програмування виберіть пункт **Add Line**. Буде додана можливість визначити підумови для даної умови. Наприклад, наступна функція дає коментар про температуру:

$$f_5(x) := \begin{cases} \text{if } x < 0 \\ \quad \begin{cases} \text{"very cold"} & \text{if } x < -20 \\ \text{"cold"} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{if } x > 0 \\ \quad \begin{cases} \text{"very hot"} & \text{if } x > 30 \\ \text{"hot"} & \text{if } x > 25 \wedge x \leq 30 \\ \text{"warm"} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{"zero"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

перевірте роботу цієї функції

$$f_5(-15) =$$

$$f_5(-25) =$$

$$f_5(18) =$$

$$f_5(27) =$$

$$f_5(32) =$$

$$f_5(0) =$$

Використання логічних (булевих) операторів полягає в множенні доданків заданого виразу на відповідний логічний оператор. Булеві оператори можуть повертати лише 0 (якщо умова не

виконується) або 1 (якщо умова виконується). В математичному вираженні множення на логічний оператор відповідно звертає вираз в 0 або не змінює його. Наприклад, наступна функція звертається в 0 всередині інтервалу значень аргументів $x \in [-5; 8]$ і обчислюється всюди, за межами даного інтервалу:

$$f6(x) = (x^2 - 5x + 4) * (x < -5 \vee x > 8)$$

$$f6(-15.1) =$$

$$f6(-4.5) =$$

$$f6(0) =$$

$$f6(6.2) =$$

$$f6(9.5) =$$

Знак $\wedge$ - логічна операція І, $\vee$ - логічна операція АБО, $\oplus$ - виключає АБО, $\neg$ - логічна операція НЕ, $=$ - логічна операція одно, $\neq$ - не дорівнює. Побудуйте графік цієї функції.

Оператори циклу

Найважливішим інструментом програмування є оператор циклу. У документі MathCad використання дискретної змінної (наприклад, $i:=0..10$) вже є циклом, оскільки вираз обчислюється циклічно для всіх значень дискретної змінної. Якщо циклічно потрібно обчислювати кілька виразів, то цикл потрібно організовувати, як програму. Панель програмування пропонує два оператора циклу: `for` і `while`. Оператор `for` використовують, коли число виконань циклу відомо. Якщо цикл повинен завершитися при виконанні деякої умови і цей момент заздалегідь не відомий, використовуйте оператор `while`.

1. Оператор while:

Цикл `while` виконується до тих пір, поки залишається істинним умова циклу. Щоб цикл не став нескінченним, десь всередині нього повинні виконуватися дії, що роблять умову циклу хибною. Якщо програма увійшла в нескінченний цикл, її потрібно зупинити натисканням клавіші ESC.

Щоб записати цикл, створіть область програми, установіть курсор в вільну позицію праворуч від вертикальної риски, виберіть іконку `while` на панелі програмування. З'явиться відповідний шаблон з

двома місцями введення. Праворуч від while введіть умову циклу, в поле, що залишилося введіть вираз, який обчислюється циклічно.

У наступному прикладі створюється масив значень функції v , обчисленої для дискретної змінної j . Потім програми t знаходить і повертає номер і значення першого елемента вектору, який стає більше 1.8.

$$j := 0..10$$

$$v_j = \sqrt[3]{j+1}$$

$$v^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1.26	1.442	1.587	1.71	1.817	1.913	...

$$t := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ k \leftarrow 1.8 \\ \text{while } |v_j| \leq k \\ j \leftarrow j+1 \\ \left(\begin{array}{c} j \\ v_j \end{array} \right) \end{array} \right. \quad t = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1.817 \end{array} \right)$$

2. Оператор $j \leftarrow 0$ - це оператор присвоєння значення локальної змінної j . Локальність цієї змінної означає, що вона існує і може використовуватися тільки усередині програми. Це не та змінна, яка використана для обчислення таблиці значень функції.

3. Наступний приклад демонструє табулювання функції $\sin(x)$ для аргументів від 0.0 до 10.0 з кроком 0.1 за допомогою циклу for.

```
Z :=
| k ← 0
| for x ∈ 0.0,0.1..10.0
|   Y0,k ← x
|   Y1,k ← sin(x)
|   k ← k+1
| Y
```

$Z^T =$

	0	1
0	0	0
1	0.1	0.1
2	0.2	0.199
3	0.3	0.296
4	0.4	0.389
5	0.5	0.479
6	0.6	0.565
7	0.7	0.644
8	0.8	0.717
9	0.9	0.783
10	1	0.841
11	1.1	0.891
12	1.2	0.932
13	1.3	0.964
14	1.4	0.985
15	1.5	...

5.1 Контрольне завдання

1. Введіть вираз і побудуйте графік сходящого функції, що задана викладачем, за допомогою функції та оператора if;
2. За допомогою програми створіть масив значень функції $\sin(x)$ для x від 0.0 до $11\pi/3$ з кроком 0.1 і за допомогою другої програми порахуйте, скільки він містить додатних значень;
3. За допомогою програми створіть масив значень функції $\sin(\sqrt{x})-x^3$ для x від 0.0 до $13\pi/4$ з кроком 0.1 і за допомогою другої програми знайдіть номер і значення максимального елемента масиву;

5.2 Контрольні питання

1. Які існують способи в MathCad визначити умовний вираз?
2. Які логічні операції можна використовувати при визначення умови?
3. Які оператори циклу використовуються в MathCad і в яких випадках?
4. Що таке нескінченний цикл і як його уникнути?
5. Що таке локальні змінні?

6 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6 «ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ»

Мета роботи: навчитися використовувати можливості пакета MathCad для обробки експериментальних даних.

Облік розмірностей обчислюваних величин

У MathCad можливі обчислення з урахуванням розмірностей використовуваних величин. Одиниці виміру не є обов'язковими, але можуть допомогти спростити введення і подання даних, полегшують пошук і виявлення помилок при введенні складних і громіздких формул. Присвоєння числа розмірності еквівалентно його множенню на розмірність. Внутрішній алгоритм множить число на передовий коефіцієнт, що відповідає вписаною розмірності, і всі обчислення

виконуються з безрозмірними числами, відповідними системі одиниць СІ.

Перед початком роботи з розмірними одиницями потрібно встановити систему одиниць, в якій ви будете працювати. Виберіть пункт меню **Tools** → **Worksheet Options** → **Unit System**. У вікні, що відкрилося виберіть необхідну вам систему одиниць і натисніть кнопку ОК. Якщо вибрати пункт **None**, то розмірності величин в розрахунках враховуватися не будуть. Щоб позначити розмірність величини, її числове значення повинно бути помножене на розмірність. Розмірність можна вставити, використовуючи пункт меню **Insert** → **Unit**. У панелі, що відкрилася виберіть потрібну розмірність для введеної фізичної величини. наприклад:

Порахувати вага тіла масою 52.5 кг

$$\text{mass} = 52.5 * \text{kg}$$

$$g =$$

$$p = \text{mass} * g$$

$$p =$$

Зверніть увагу, що прискорення вільного падіння g є однією з визначених в MathCad змінних і вводить його значення не потрібно. Так само слід зауважити, що буквою m позначаються метри і, якщо ви позначили масу змінної m , то станеться перевизначення змінної. В такому випадку, подальше використання одиниці довжини m (метр) буде сприйматися програмою, як множення на змінну m . Те ж саме відбувається і з іншими одиницями і зумовленими константами. MathCad попереджає про виникнення такої конфліктної ситуації, підкреслюючи ім'я змінної хвилястою зеленою лінією, якщо це ім'я визначено, як константа або одиниця довжини. Наприклад, якби щоб мати більшу вагу (сили тяжіння, що діють на тіло) ви використовували змінну F , MathCad попередив би вас, що F визначена як одиниця електричної ємності (фарад).

У попередньому прикладі вага обчислена в Ньютона (N). Додайте формулу для обчислення кінетичної енергії того ж тіла, що рухається зі швидкістю 80 км / год:

Порахувати кінетичну енергію

$$v = 80 * \text{km} / \text{hr}$$

$$E: = \text{mass} * v^2 / 2$$

$$E =$$

У цьому прикладі були використані похідні одиниці: кілометр і годину. У MathCad визначені правила перерахунку таких одиниць в основні. Так само можна вказати, в яких одиницях ви бажаєте отримати результат. У попередньому прикладі кінетична енергія була порахована в джоулях (J). Щоб висловити її, наприклад, в калоріях, в рядку виведення результату праворуч від знаку рівно правіше позиції, в якій з'являється результат розрахунку, вкажіть назву необхідної розмірності cal (калорії). Таким же чином можна вводити свої одиниці виміру, попередньо зв'язавши їх формулою з основними. Наприклад, порахуйте енергію кванта світла в еВ (електрон-вольтах):

Порахувати енергію кванта:

вводимо визначення електрон-вольта:

$$\text{eV}: = 1.6 * 10^{-19} * \text{J}$$

вводимо постійну Планка (вона в MathCad не визначена):

$$h: = 6.62 * 10^{-34} * \text{J} * \text{s}$$

довжина хвилі в нанометрах:

$$\lambda: = 280 * \text{nm}$$

$$E: = h * c / \lambda$$

тут c - швидкість світла у вакуумі. Це передбачена константа.

Далі потрібно вказати, що енергія обчислюється в еВ.

$$E = _ * \text{eV}$$

Доступ до файлів даних

Часто буває необхідно організувати обмін даними між програмою математичних обчислень MathCad та іншими програмами, які генерують дані, але не вміють їх розраховувати. Або, наприклад, необхідно за допомогою MathCad обробити дані, отримані в експерименті і зберігаються у вигляді файлу на диску. У списку доступних функцій MathCad в розділі File Access (доступ до файлів) містяться функції для зчитування і запису даних в файли на диску. Більшість з них призначені для роботи з даними з звукових файлів і файлів зображень і з ними, при необхідності, ви можете розібратися

самостійно, використовуючи книгу або вбудовану документацію. Окремо розглянемо чотири найбільш часто використовувані функції:

1. **WRITEPRN ("file")** – записує числові дані в файл. Тут рядок "file" містить повний шлях і ім'я файлу, в який будуть записані дані. Якщо такий файл вже існує, він буде переписаний, а старі дані в ньому будуть втрачені.

Записати в файл одновимірний масив значень функції $\sin(x)$

$i: = 0..100$

$x_i: = 2 * \pi / 100 * i$

$y: = \sin(x)$

WRITEPRN ("G: \ WhereIsMyFile \
sinusData.dat"); = y

2. У заданому місці буде створений текстовий файл, в якому у вигляді рядкового списку зберігаються значення функції синуса. Наступний приклад демонструє запис в файл двовимірного масиву, в якому перший стовпець містить значення аргументу, а другий – відповідне значення синуса.

Записати в файл масив значень аргументу і функції $\sin(x)$

$i: = 0..100$

$x_i: = 2 * \pi / 100 * i$

$Y_{i,0}: = x_i$

$Y_{i,1}: = \sin(x_i)$

WRITEPRN ("G: \ WhereIsMyFile \
sinusData.dat"); = Y

3. **READPRN ("file")** – зчитує числові дані з файлу. Файл з даними (одновимірними або двовимірними) повинен бути записаний в тому вигляді, як і в попередньому прикладі. Наступна команда завантажує дані з раніше записаного файлу в масив Z:

Завантажити з файлу масив значень аргументу і функції $\sin(x)$

Z: = READPRN ("G: \ WhereIsMyFile \
sinusData.dat")

$Z =$

4. **APPENDPRN ("file")** – дана функція дописує дані в уже існуючий файл. Вона діє подібно функції WRITEPRN за винятком того, що вона не стирає дані, що вже містяться в файлі.

5. **READFILE("file", "type", [colwidth], [rows], [cols], [emptyfill])** – дана функція з'явилася в останніх версіях MathCad і дозволяє завантажувати дані з файлів в різному форматі. Аргумент "file" - це шлях і ім'я файлу з даними, "type" - тип файлу даних. Тут в лапках потрібно вписати одне з наступних ключових слів:

- "delimited" – текстові файли, що містять колонки даних з будь-яким роздільником між ними;
- "Fixed" – таблиці з фіксованою шириною колонки;
- "Excel" – файли формату Excel.

Інші параметри функції є необов'язковими. [colwidth] – ширина колонки (кількість символів) для таблиць з фіксованою шириною колонки. Задається число зчитувальних позицій даних, якщо всі колонки рівної ширини, або вектор значень, якщо колонки мають різну ширину. [Rows] – задається одним числом - номер рядка, з якого потрібно починати зчитувати дані, або вектор з двох чисел - номери рядків, з якого по який будуть читатися дані. Без цього параметра будуть читатися всі рядки даних. [Cols] – ті самі, що і для попереднього параметра, але для колонок даних. [Emptyfill] – вказується, чим заповнювати значення матриці даних, якщо в файлі відсутнє відповідне число.

Перевірити дію останньої функції ви можете самостійно.

Апроксимація досліджуваних даних

При обробці експериментальних даних, як правило, виникає завдання апроксимації результатів експерименту аналогічною залежністю $y = f(x)$, яку можна використовувати в наступних розрахунках. Існує три можливості апроксимації досліджуваних даних:

1. Інтерполяція:

Апроксимуюча функція $y=f(x)$ має проходити через всі точки, що досліджуються. Такий спосіб апроксимації називається

інтерполяцією. Функції MathCad дозволяють виконувати інтерполяцію функціями різного ступеня гладкості.

Лінійна інтерполяція

При лінійній інтерполяції апроксимуюча функція з'єднує точки, що досліджуються, відрізками прямих ліній. Для цього використовується вбудована функція $\text{linterp}(x, y, t)$, де x – вектор значень аргументу, що досліджуються, y – вектор досліджуваних значень функції, t – значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююче значення функції. Наприклад, є десять значень сили струму (в мікроамперах), заміряють для десяти значень напруги (в вольтах):

вектор значень струму (вводиться як матриця):

$$I = (0 \ 1.2 \ 1.4 \ 1.8 \ 2.1 \ 2.2 \ 2.4 \ 2.7 \ 2.9 \ 3.1)^T \cdot \mu A$$

вектор значень напруги:

$$U = (1.5 \ 2.1 \ 2.9 \ 3.2 \ 3.7 \ 4.1 \ 4.9 \ 5.6 \ 6.4 \ 7.5)^T \cdot V$$

апроксимувати значення напруги методом лінійної інтерполяції для значення струму I

$$I = 2.52 \cdot \mu A:$$

$$\text{linterp}(I, U, 2.52 \cdot \mu A) =$$

Наступний приклад демонструє інтерполяцію для множини точок даних:

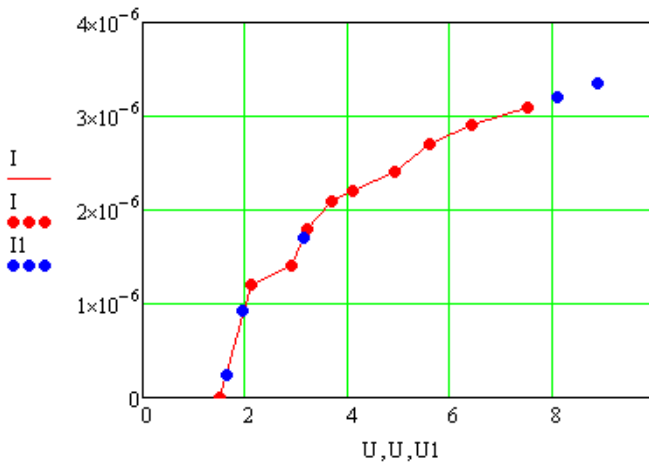
$$I = (0 \ 1.2 \ 1.4 \ 1.8 \ 2.1 \ 2.2 \ 2.4 \ 2.7 \ 2.9 \ 3.1)^T \cdot \mu A$$

$$U = (1.5 \ 2.1 \ 2.9 \ 3.2 \ 3.7 \ 4.1 \ 4.9 \ 5.6 \ 6.4 \ 7.5)^T \cdot V$$

$$\text{linterp}(I, U, 2.52 \cdot \mu A) = 5.133V$$

$$I1 = (0.25 \ 0.92 \ 1.7 \ 3.21 \ 3.35)^T \cdot \mu A$$

$$U1 = \text{linterp}(I, U, I1)$$



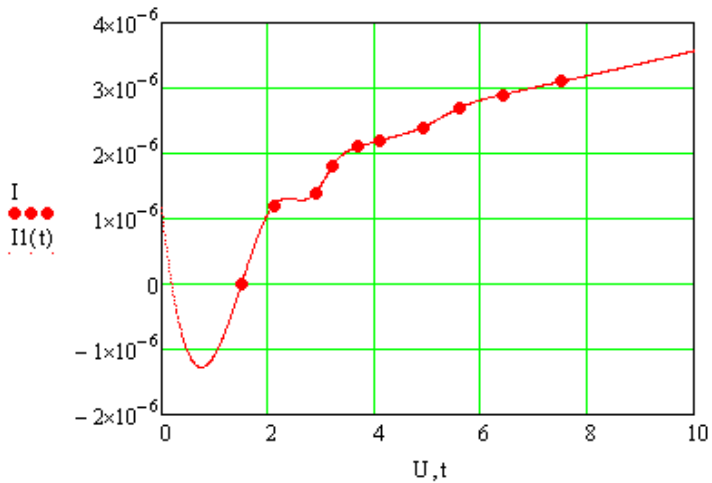
Кубічна сплайн-інтерполяція

Найчастіше експериментальні точки даних бажано з'єднувати не ламаною, а гладкою кривою. Метод кубічної сплайн-інтерполяції дозволяє проводити через безліч точок криву таким чином, що у всіх точках її перші і другі похідні неперервні. Ця крива створюється послідовним рядом кубічних поліномів, що проходять через три сусідні точки. Для цього використовується вбудована функція `interp(vs,X,Y,t)`, де `vs` – вектор других похідних, створений однією з трьох функцій `lspline(X,Y)`, `pspline(X,Y)` або `cspline(X,Y)`, `X` – вектор досліджуваних значень аргументу (повинні бути розташовані в порядку зростання), `Y` – вектор досліджуваних значень функції, `t` – значення аргументу, при якому обчислюється інтерполяційне значення функції. Сплайн-інтерполяція реалізована дещо складніше, ніж лінійна інтерполяція. Спочатку потрібно обчислити вектор `vs`:

- функція `lspline(X,Y)` створює вектор коефіцієнтів кривої, яка наближається до прямої лінії в граничних точках;
- функція `pspline(X,Y)` створює вектор коефіцієнтів кривої, яка наближається до квадратичної параболи в граничних точках;
- функція `cspline(X,Y)` створює вектор коефіцієнтів кривої, яка наближається до кубічної параболи в граничних точках.

Нижче показаний приклад застосування першого способу кубічної сплайн-інтерполяції для даних з попереднього прикладу. Самостійно спробуйте застосувати інші методи.

```
I: = (0 1.2 1.4 1.8 2.1 2.2 2.4 2.7 2.9 3.1)T · μA
U: = (1.5 2.1 2.9 3.2 3.7 4.1 4.9 5.6 6.4 7.5)T · V
I1(t):=interp (lspline(I, U),U,I,t)
```



В-сплайн інтерполяція

В-сплайн інтерполяція відрізняється від попередніх прикладів тим, що зшивання окремих сплайнів проводиться не в точках даних, а в точках, координати яких задаються користувачем. Для визначення коефіцієнтів сплайнів використовується функція `bspline (X,Y,XX,n)`, де X - вектор значень аргументу, що досліджуються (повинні бути розташовані в порядку зростання), Y - вектор значень функції, що досліджуються, XX - вектор значень аргументу, при яких обчислюються інтерполюючі значення функції, n - порядок поліномів сплайн-інтерполяції (1, 2 або 3). Розмір вектору XX повинен бути на $(n-1)$ менше, ніж розмір вектора X , перший елемент вектора XX повинен бути менше або дорівнює першому елементу вектора X , останній елемент вектора XX повинен бути більше або дорівнювати

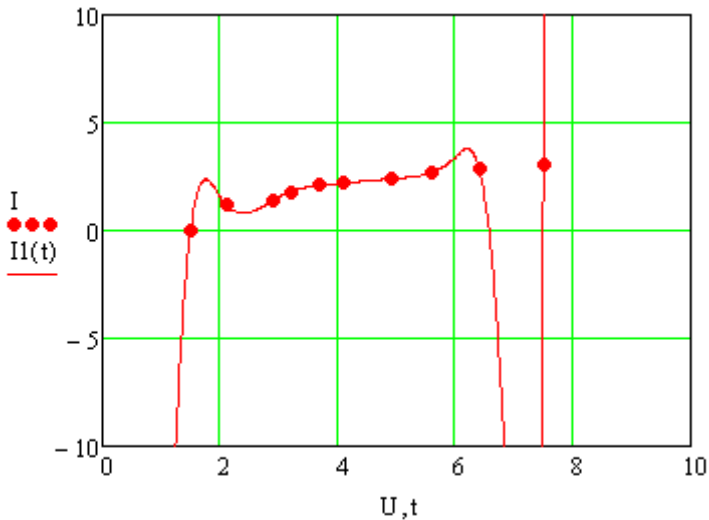
останньому елементу вектора X . Нижче показаний приклад застосування В-сплайн інтерполяції для даних з попередніх прикладів.

$$I := (0 \ 1.2 \ 1.4 \ 1.8 \ 2.1 \ 2.2 \ 2.4 \ 2.7 \ 2.9 \ 3.1)^T$$

$$U := (1.5 \ 2.1 \ 2.9 \ 3.2 \ 3.7 \ 4.1 \ 4.9 \ 5.6 \ 6.4 \ 7.5)^T$$

$$UU := (1.0 \ 2.0 \ 3.0 \ 4.0 \ 5.0 \ 6.0 \ 7.0 \ 8.0)^T$$

$$I1(t) := \text{interp}(\text{bspline}(U, I, UU, 3), U, I, t)$$



Регресія

Функції регресії створюють криві з мінімальним відхиленням від наявного набору даних. Ці функції розрізняються типом кривої, яку вони використовують щоб апроксимувати дані. На відміну від інтерполяції, апроксимуючі криві не обов'язково повинні проходити через точки даних.

У MathCad регресія з використанням одного полінома реалізується комбінацією вбудованих функцій регресії і інтерполяції.

$$YY(t) := \text{interp}(\text{regress}(X, Y, n), X, Y, t),$$

де X – вектор значень аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання, Y – вектор значень функції того ж розміру, t – значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція, n – ступінь апроксимуючого полінома (може бути будь-який).

Регресія з використанням декількох відрізків полінома так само реалізується комбінацією функцій регресії та інтерполяції.

$$\text{interp}(s, x, y, t) \text{ і } s := \text{loess}(x, y, \text{span}),$$

Параметр span задає ступінь згладжування даних. Він визначає розмір відрізків поліномів, з яких зшивається апроксимуюча крива. На практиці слід вибирати $0.2 < \text{span} < 2$. При $\text{span} = 2$ апроксимуюча крива майже точно описує будь-який набір даних.

Нижче показаний приклад використання функцій регресії.

$$Y := (-1.2 \ -0.6 \ -0.1 \ 0.15 \ 0.9 \ 1.6 \ 1.3 \ 0.8 \ 0.2 \ -0.4)^T$$

$$X := (-5 \ -3 \ -1 \ 0 \ 1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 8 \ 9)^T$$

$$N := 4 \quad \text{спінь полінома}$$

$$L := 2 \quad \text{характеристика довжини відрізків полінома}$$

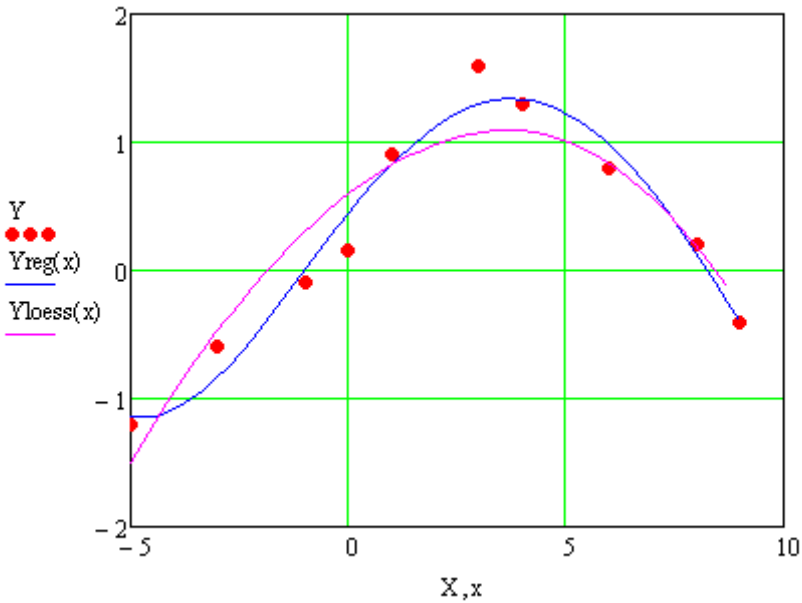
$$Y_{\text{reg}}(x) := \text{interp}(\text{bspline}(X, Y, N), X, Y, x)$$

$$Y_{\text{loess}}(x) := \text{interp}(\text{bspline}(X, Y, L), X, Y, x)$$

$$x_{\min} := \min(X)$$

$$x_{\max} := \max(X)$$

$$x := x_{\min}, x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{50} .. x_{\max}$$



Узагальнена регресія

У тому випадку, коли закон зміни вимірюваної величини відомий і потрібно підібрати його коефіцієнти, але сама апроксимуюча функція така, що використовувати функції спеціальної регресії неможливо, MathCad пропонує використовувати дві функції регресії загального вигляду: `linfit` і `genfit`.

Якщо передбачувана залежність являє собою лінійну комбінацію декількох функцій

$$y = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

і потрібно тільки підібрати коефіцієнти цих функцій, то використовується функція `linfit`. наприклад:

$$y = a_1 \sin(2x) + a_2 \cos(3x)$$

`linfit(x, y, F)` повертає вектор, що містить набір коефіцієнтів при функціях $f_i(x)$, $y(x)$ - вектор заданих значень функції при значеннях аргументу, що містяться у векторі x , F - вектор функцій, що входять в

лінійну комбінацію $y(x)$. Нижче наведено приклад використання функції `linfit`:

$$Y := (6.2 \ 5.1 \ 4.7 \ 6.15 \ 6.9 \ 6.3 \ 4.9 \ 2.8 \ 0.2 \ -0.4)^T$$

$$X := (-1 \ 0 \ 2 \ 3 \ 5 \ 7 \ 8 \ 9 \ 11 \ 13)^T$$

$$F(x) := \begin{pmatrix} x^4 \\ \cos(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{набір функцій, що входять в лінійну комбінацію.}$$

Функції можна змінити

$$f(x) := F(x) \cdot S \quad S = \begin{pmatrix} -2,655 \times 10^{-4} \\ 0.684 \\ 5.728 \end{pmatrix}$$

коефіцієнти функцій

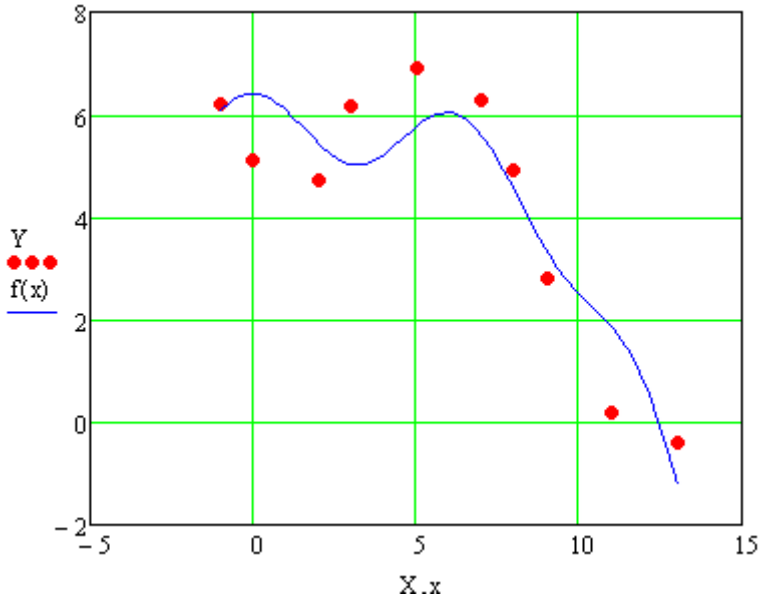
$$Y := (0.2 \ 0.5 \ 1.3 \ 1.9 \ 1.8 \ 1.1 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.2)^T$$

лінійна комбінація функцій

$$x_{\min} := \min(X)$$

$$x_{\max} := \max(X)$$

$$x := x_{\min}, x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{50} \dots x_{\max}$$



Для довільної функції з невідомими коефіцієнтами потрібно використовувати функцію `genfit(x,y,C,F)`. Наприклад:

$$y=2\sin(a_1x)+3\cos(a_2x)$$

`genfit(x, y, C, F)` повертає вектор, що містить n параметрів, найкращим чином апроксимуючи дані їх векторів x і y заданої функцією $f(x)$. Тут (x) - функція, яка повертає $(n + 1)$ -мірний вектор, що містить функцію $f(x)$ і її часткові похідні щодо невідомих параметрів; C - n -мірний вектор початкових значень для n невідомих параметрів. Нижче наведено приклад використання функції `genfit`:

$$f(x,a,b,c):=(a+b \cdot x) \cdot e$$

$$X:=(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9)^T$$

$f(x,a,b,c):=(a+b \cdot x) \cdot e$ запропонована функція символічне обчислення похідних за коефіцієнтами

$$\frac{d}{da} f(x,a,b,c) \rightarrow e^{-\frac{x^2}{c}} \qquad \frac{d}{db} f(x,a,b,c) \rightarrow e^{-\frac{x^2}{c}}$$

$$\frac{d}{dc} f(x,a,b,c) \rightarrow \frac{x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{c}} \cdot (a+b \cdot x)}{c^2}$$

$$k = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.0 \\ 1.4 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

початкове наближення
запропонована функція, і
її похідні

$K := \text{genfit}(X, Y, k, FF)$

$$K = \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.802 \\ 25.205 \end{pmatrix}$$

вектор знайдених
параметрів функції

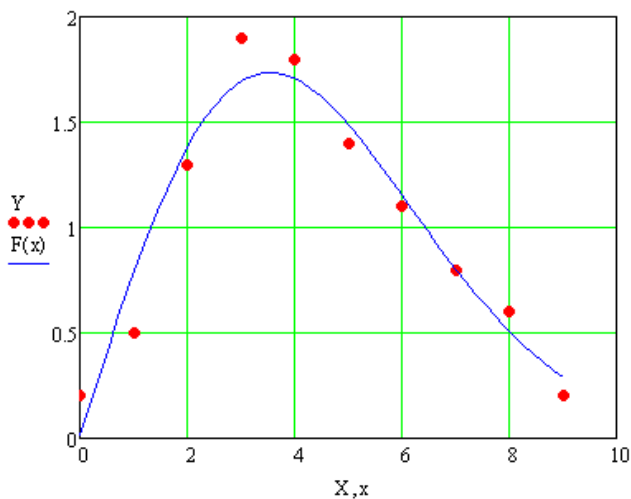
$x_{\min} := \min(X)$

$x_{\max} := \max(X)$

$F(x) := FF(x, K)_0$ шукана функція

$x := x_{\min}, x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{50} .. x_{\max}$

$$FF(x, k) = \begin{bmatrix} (k_0 + k_1 \cdot x) \cdot e^{-\frac{x^2}{k_2}} \\ e^{-\frac{x^2}{k_2}} \\ x \cdot e^{-\frac{x^2}{k_2}} \\ \frac{x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{k_2}} (k_0 + k_1 \cdot x)}{(k_2)^2} \end{bmatrix}$$



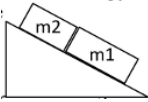
6.1. Контрольне завдання

1. Розв'яжіть фізичну задачу з урахуванням розмірностей даних;
2. Обробка даних;
3. Інтерполяція даних;

6.2 Контрольні питання

1. Як висловити значення розрахункової величини в заданих одиницях виміру?
2. Як здійснити запис результатів розрахунків в файл даних?
3. Як завантажити в MathCad файл даних?
4. Що таке апроксимація?
5. Що таке кусково-лінійна інтерполяція?
6. Що таке кубічна сплайн-інтерполяція?
7. Що таке регресія?
8. Розв'яжіть приведені нижче задачі, використовуючи розмірність. Побудувати графіки, вказані в завданні

1. Вільне падіння тіла пройшло останні $S = 30$ м за час	7.Заряд вилітає з гармати з початковою швидкістю
--	--

$\tau = 0,5$ с. З якої висоти H падало тіло? Отримайте графік зміни висоти кульки від часу.	$v_0 = 1000$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Скільки часу t заряд знаходиться у повітрі? На яку висоту H підніметься? На якій відстані L від гармати впаде на землю? Побудувати траєкторію руху заряду
2. На похилу площину після початкового поштовху знизу вверх вкачується кулька. На відстані $l = 30$ см від початку шляху він побував двічі: через $t_1 = 1$ с і $t_2 = 2$ с після початку руху. Вважаючи рух рівноприскореним, визначте початкову швидкість v_0 і прискорення a кульки. Побудувати графік змін координати кульки від часу	8. Під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту кинуте тіло з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Через який час t воно буде рухатися під кутом $\beta = 45^\circ$ до горизонту? Побудувати траєкторію руху заряду.
3. Тіло падає з висоти 100 м без початкової швидкості. За який час тіло проходить перший і останній метр свого шляху? Який шлях проходить тіло за першу секунду свого руху? За останню? Побудувати графік змін координати тіла від часу	9. Два бруска, що дотикаються ковзають по похилій дошці  Маса першого бруска $m_1 = 2$ кг, маса другого $m_2 = 3$ кг. Коефіцієнт тертя між бруском та дошкою дорівнює $k_1 = 0.1$ для бруска 1, і $k_2 = 0.2$ для бруска 2. Кут похилу дошки дорівнює $\alpha = 45^\circ$.

	Визначити прискорення a з яким рухаються бруски і силу F з якою вони тиснуть один на одного. Побудувати графіки змін координат брусків у часі
4. З яким проміжком часу відірвалися від карнизу даху дві краплі, якщо через 2с після початку падіння другої краплі відстань між ними стала дорівнювати 25м. Побудувати графік залежності координат обох крапель від часу	10. Тіло кинули під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Визначити кінетичну енергію тіла через 1с після початку руху. Маса тіла 2 кг, $g = 10$ м/с ² . Опором повітря знехтувати. Побудувати траєкторію руху тіла
5. Два тіла кинуті вертикально вгору з однієї й тої ж точки з однаковою початковою швидкістю $v_0 = 19,6$ м/с з проміжком часу $\tau = 0,5$ с. Через який час t після кидка другого тіла і на якій висоті h обидва тіла зустрінуться? Побудувати графіки залежності координат обох тіл від часу.	11. Похила площина утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом. Вздовж не вгору починає рух тіло з початковою швидкістю $v_0 = 4$ м/с. Визначити через який час τ тіло повернеться у початкову точку. Коефіцієнт тертя $\mu = 1$. Побудувати графік залежності швидкості тіла від часу
6. Лижник спускається з гір довжиною $s_t = 60$ м за $t_1 = 15$ с, а потім пройшов по горизонтальній ділянці ще $s_t = 30$ м до повної зупинки. Знайдіть швидкість v_1	12. Краплі води відриваються від даху будинку з інтервалом 0,3 с. Визначити відстань між краплями через 1,5 с після того, як від даху відірвалася перша крапля. Прискорення

лижника у кінці спуска і прискорення a_2 на горизонтальній ділянці. Побудувати графік залежності швидкості від часу.	вільного падіння $g = 10 \text{ м/с}^2$. Побудувати графіки залежності відстані від краю даху від часу для кожної з крапель.
--	---

9. Створити текстовий документ, в який занести значення аргументу x і двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Після закінчення створення, додати значення функції для діапазону аргументу x_2 . Імпортувати дані з текстового документа в таблиці Microsoft Excell, імпортувати дані з отриманої таблиці в середовище MathCad і зберегти їх у відповідні змінні $a = x$, $Z(a) = y_1(x)$, $Z_2(a) = y_2(x)$. Побудувати графіки функцій $Z_1(a)$ і $Z_2(a)$

1. $x_1 \in 10 \div 270^\circ$ $y_1 = 2 \sin^2(x)$ $y_2 = 3 \cos(x)$ $x_2 \in 270 \div 400^\circ$	7. $x_1 \in 0 \div 90^\circ$ $y_1 = \sin x / 2$ $y_2 = \cos(\sqrt{2}x)$ $x_2 \in 110 \div 360^\circ$
1. $x_1 \in 0 \div 180^\circ$ $y_1 = \sin(x) / 2$ $y_2 = \cos(4x)$ $x_2 \in 180 \div 270^\circ$	8. $x_1 \in 0 \div 90^\circ$ $y_1 = 1 - \sin 3x$ $y_2 = \lg^2 x$ $x_2 \in 180 \div 270^\circ$
3. $x_1 \in 5 \div 90^\circ$ $y_1 = \sin(2x)$ $y_2 = \cos^2(x)$ $x_2 \in 90 \div 180^\circ$	9. $x_1 \in 0 \div 90^\circ$ $y_1 = 1 - \operatorname{ctg} 3x$ $y_2 = \cos^2 x$ $x_2 \in 180 \div 270^\circ$
4. $x_1 \in 45 \div 90^\circ$ $y_1 = \sin(\sqrt{2}x)$ $y_2 = \cos(x - \pi)$ $x_2 \in 90 \div 270^\circ$	10. $x_1 \in 90 \div 180^\circ$ $y_1 = 1 + \lg^2 x$ $y_2 = \cos x - \sin x$ $x_2 \in 200 \div 360^\circ$

$x1 \in 25 \div 110^\circ$ 5. $y1 = \sin^3(x)$ $y2 = \cos(\sqrt{2x})$ $x2 \in 110 \div 360^\circ$	$x1 \in 0 \div 180^\circ$ 11. $y1 = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5}\right)$ $y2 = \cos x + \sin x$ $x2 \in 180 \div 360^\circ$
$x1 \in 0 \div 180^\circ$ 6. $y1 = \sqrt[3]{\sin x}$ $y2 = \cos(\sqrt{2x})$ $x2 \in 180 \div 360^\circ$	$x1 \in 0 \div 90^\circ$ 12. $y1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $y2 = \cos^2(x) - 1$ $x2 \in 90 \div 180^\circ$

10. Вам необхідно обрати 20 довільних значень, рівномірно розташувати в заданому діапазоні аргументів x і знайти відповідні їм значення функції $y(x)$. Для отриманих значень побудувати графік функцій, використовуючи метод кусково-лінійних інтерполяцій, кубічної сплайн-інтерполяції і методом регресії поліномом заданого порядку.

$x \in 0 \div 90^\circ$ 1. $y = \cos(\sqrt{2x})$	$x \in 10 \div 270^\circ$ 7. $y = 2\sin^2(x)$
$x \in 0 \div 90^\circ$ 2. $y = 1 + \sin 3x$	$x \in 0 \div 180^\circ$ 8. $y = \sin(x) / 2$
$x \in 0 \div 90^\circ$ 3. $y = 1 - \operatorname{ctg} 3x$	$x \in 5 \div 90^\circ$ 9. $y = \sin(2x)$
$x \in 90 \div 180^\circ$ 4. $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \in 45 \div 90^\circ$ 10. $y = \sin(\sqrt{2x})$

$x \in 0 \div 180^\circ$ 5. $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5}\right)$	$x \in 25 \div 110^\circ$ 11. $y = \sin^3(x)$
$x \in 0 \div 90^\circ$ 6. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$x \in 0 \div 180^\circ$ 12. $y = \cos(\sqrt{2x})$

7 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7 «РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»

Мета роботи: навчитися вирішувати диференціальні рівняння і системи диференціальних рівнянь засобами пакета MathCad.

Чисельний розв'язок диференціальних рівнянь.

Математично розв'язок диференціального рівняння є досить трудомістким завданням. Слід пам'ятати, що MathCad в основному використовується для чисельного, а не аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь. Для цього часто потрібні додаткові спрощення задачі з боку користувача. Розглянемо використання функції Odesolve, що дозволяє чисельно вирішувати диф. рівняння. Ця функція використовує більшість закладених в MathCad алгоритмів розв'язку диф. рівнянь, а в контекстному меню є можливість вибору конкретного способу розв'язання.

Використання функції Odesolve вимагає запису обчислювального блоку, що складається з трьох частин:

1. Ключове слово Given;
2. Диференціальне рівняння або система диференціальних рівнянь і початкові або граничні умови для них. Для вирішення диф. рівняння порядку n потрібно визначити n граничних або початкових умов;

3. Функція Odesolve (x,xk,n), де x – ім'я змінної, щодо якої вирішується рівняння, xk – кінець інтервалу інтегрування, n – внутрішній параметр (необов'язковий), що визначає число кроків інтегрування, який використовується при інтерполяції рішення. За замовчуванням, MathCad використовує $n = 1000$;

Крім зазначених елементів, всередині обчислювального блоку не повинно бути інших математичних виразів (виняток становить текстова область).

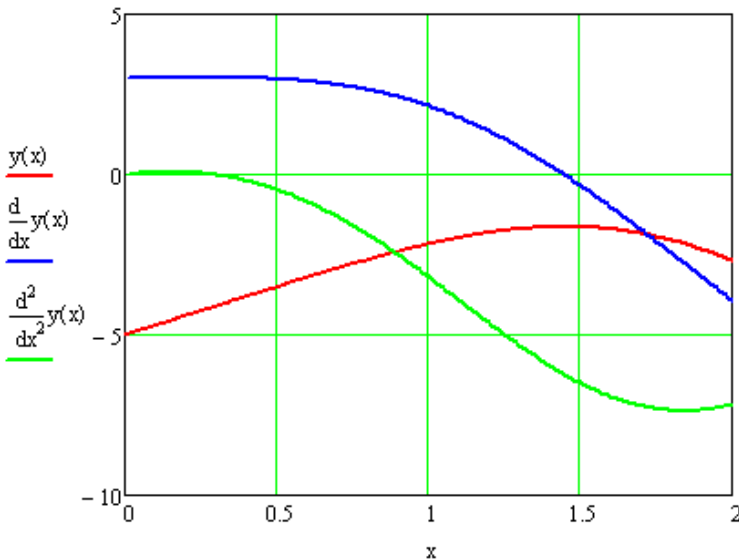
Приклад: рішення диференціального рівняння з початковими умовами - задача Коші:

Given

$$y'''(x) + 2x \cdot y'(x) - x^2 \cdot y(x) = \frac{e^x}{1 + \sin(x)} \cdot \cos(2x) \quad \text{диф. рівняння}$$

$$y(0) = -5 \quad y'(0) = 3 \quad y''(0) = 0 \quad \text{граничні умови}$$

$$y := \text{Odesolve}(x, 4) \quad x := 0, 0.01 \dots 3 \quad \text{інтервал інтегрування}$$



Символ похідної "штрих" вводиться комбінацією клавіш Ctrl + F7.

Функція **Odesolve** повертає рішення диф. рівняння у вигляді функції, а не у вигляді масиву, тому зі знайденим рішенням можна виконувати всі операції, визначені для функцій, і так само використовувати як користувацьку функцію в подальших розрахунках.

Функція **Odesolve** може вирішувати диф. рівняння як з початковими умовами, заданими на початку інтервалу інтегрування, так і з граничними умовами, заданими в двох точках. З них одна обов'язково на початку інтервалу, а інша - у довільному його місці.

Рішення диф. рівняння із ступінчастою функцією.

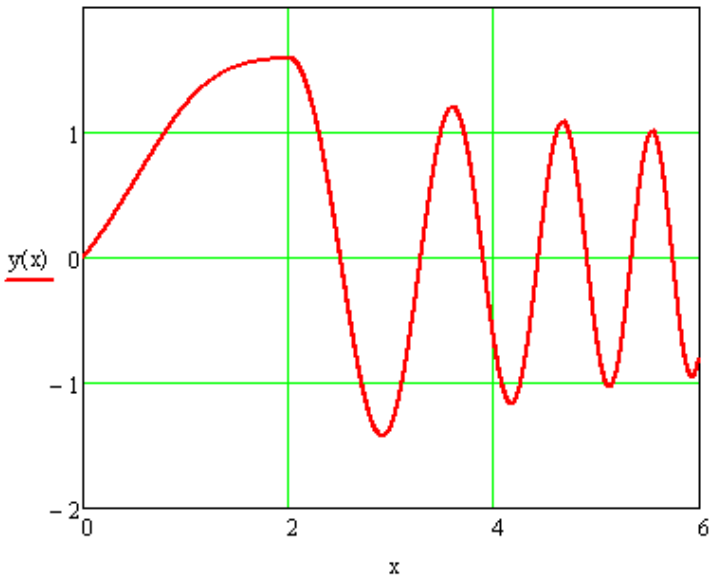
Якщо диф. рівняння змінює свій вигляд в різних діапазонах зміни аргументу, його можна задати за допомогою умовного оператора (фактично, вирішується два диф. рівняння на різних піддіапазонах заданого діапазону області визначення). Рішення такого диф. рівняння демонструється в наступному прикладі:

Given

$$y'''(x) + 2x^2 \cdot \text{if}(x < 2, y'(x), y(x)) - \frac{1}{x^2 + 1} = \text{if}(x < 2, 0, \cos(x))$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$y := \text{Odesolve}(x, 10) \quad x := 0,0001..6$$



Розв'язок систем звичайних диф. рівнянь.

Функція Odesolve може використовуватися так само для вирішення систем диф. рівнянь. Приклад такого використання показаний нижче:

Given

$$2x'(t) + y'(t) - 1.2x(t)y(t) = e^{2t}$$

$$1.5y'(t) + z'(t)x(t) = 0$$

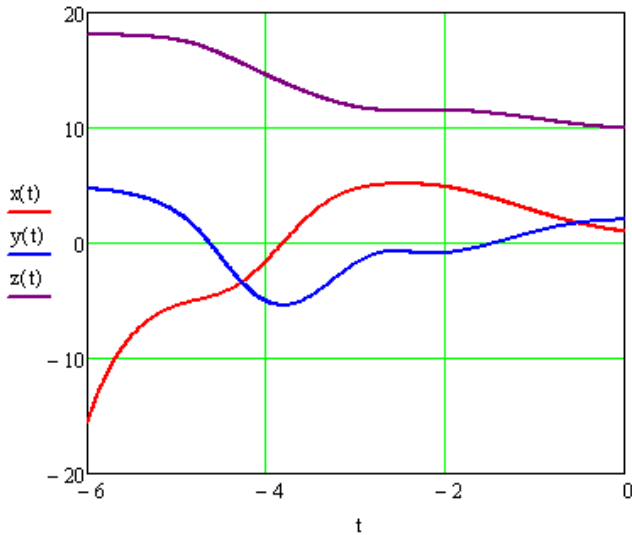
$$z''(t)x'(t) + 2y(t) - y'(t) = \cos(1.2t)$$

$$x(0) = 1 \quad x'(0) = -1 \quad z(0) = 10$$

$$z'(0) = 0 \quad y(0) = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t, -6 \right]$$

$$t := -6, -5.99..0$$



Граничні умови задані в точці $t=0$, кінцева точка інтервалу інтегрування $t=-6$, отже, інтервал інтегрування - від -6 до 0. Якщо графік будується для значень, що виходять за межі інтервалу інтегрування, MathCad екстраполюють функції за межі інтервалу. Це означає, що результат, екстрапольований за межі інтервалу інтегрування, швидше за все неправдоподібний. У завданнях з початковими умовами в систему в якості обмеження так само може включатися алгебраїчне рівняння.

Блок **Given – Odesolve** вирішує систему диф. рівнянь з початковими умовами і отримує масив значень функції і її похідної. Далі проводиться сплайн-інтерполяція масиву даних і, таким чином,

виходять шукані функції і їх похідні, які потім можна диференціювати та інтегрувати.

Розв'язування диференціальних рівнянь зі змінними параметрами.

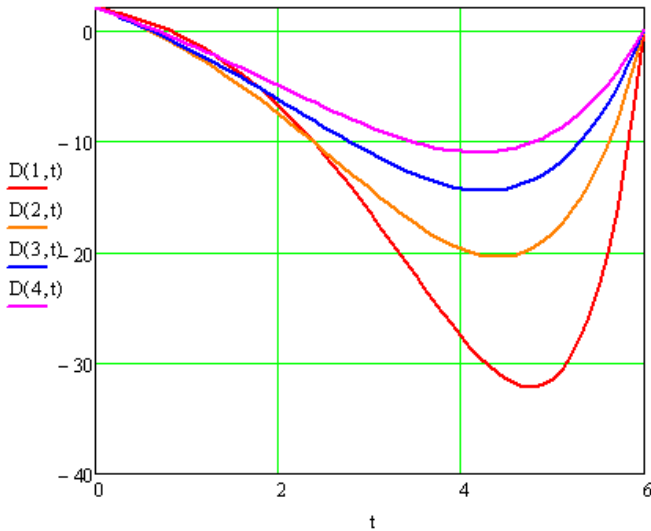
Функція Odesolve може використовуватися для вирішення диф. рівнянь зі змінними параметрами. Для цього потрібно за допомогою функції Odesolve створити незалежну від параметра для користувача функцію. Число змінних параметрів користувацької функції може бути будь-яким. Такий прийом дозволяє досліджувати параметричну залежність розв'язку диф. рівняння. Наступний приклад демонструє побудову сімейства кривих - рішень диф. рівняння для різних значень параметра:

Given

$$y'''(x) + 2x^2 \cdot \text{if}(x < 2, y'(x), y(x)) - \frac{1}{x^2 + 1} = \text{if}(x < 2, 0, \cos(x))$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$y := \text{Odesolve}(x, 10) \quad x := 0, 0001..6$$



Інші функції, які використовуються при розв'язуванні диференціальних рівнянь.

Функція Odesolve об'єднує в єдиний блок і використовує всі кращі функції для вирішення диф. рівнянь, напрацьовані на даний момент і включені в MathCad. При вирішенні системи диф. рівнянь можна вибрати один з доступних методів вирішення. Для цього потрібно встановити курсор на слові Odesolve і натиснути праву клавішу "миші". У панелі, представляється вибір методу рішення: Fixed – рішення з фіксованим кроком за допомогою функції rkfixed; Adaptive – розв'язок зі змінним кроком функцією Rkadapt; Radau – рішення жорсткої системи функцією Radau. У 14-й версії MathCad додані деякі нові функції: Adams – базується на методі Адамса і призначена для вирішення нежорстких систем; BDF – використовує формули зворотного диференціювання і призначена для розв'язання жорстких систем; AdamsBDF – гібридна.

Форма звернення до цих функцій однакова. Розглянемо їх використання на прикладі функції rkfixed:

rkfixed (y, x1, x2,m,D)

де y – вектор початкових умов розмірності n . Тут n – порядок диф. рівняння або число рівнянь в системі, x_1 і x_2 – межі інтервалу значень, на якому розв’язуються рівняння або система рівнянь. Початкові умови, задані в векторі y – це значення розв’язку в точці x_1 . m – число точок, не рахуючи початкової, в яких шукається наближене рішення. За допомогою цього аргументу знаходиться число рядків $(m+1)$ в матриці, що підлягає поверненню в якості рішення.

Функції `rfixed` і `Radau` для вирішення диф. рівнянь використовують метод Рунге-Куты 4 порядку, який не є найшвидшим, але майже завжди дає бажаний результат. Функція `rfixed` шукає рішення з постійним кроком, а функція `Radau` перевіряє, як швидко змінюється наближене рішення і відповідно адаптує крок інтегрування. Це дозволяє підвищити точність і скоротити час вирішення, використовуючи більш грубу сітку там, де рішення змінюється слабо і більш дрібну сітку там, де рішення змінюється швидко. Наступний приклад демонструє використання функції `rfixed`:

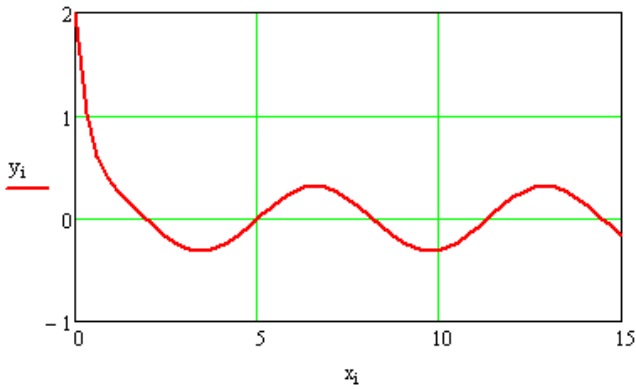
$$y' + 3 \cdot y \cdot \cos(x) = 0$$

$$n := 50 \quad y_0 := 2$$

$$D(x, y) := -3 \cdot y_0 + \cos(x)$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 15, n, D)$$

$$i := 0..n \quad x_i := Z_{i,0} \quad y_i := Z_{i,1}$$



При вирішенні диф. рівняння першого порядку з'являється одна довільна константа, тому потрібно ставити одну початкову умову y_0 . Далі вводиться функція двох змінних $D(x,y)$, яка містить вектор перших похідних від невідомих функцій. У разі нелінійного диф. рівняння, потрібно вирішити його алгебраїчно відносно похідної вищого порядку (в символьному вигляді) і підставити результат рішення в функцію $D(x,y)$. В результаті розв'язку виходить матриця Z , в першому стовпці якої містяться координати точок, в яких отримано рішення, а в другому стовпці - власне значення функції, що шукається. Наступний приклад демонструє розв'язок диф. рівняння четвертого порядку:

$$y''' + 2x \cdot y'' + y \cdot \sin(x) = 0$$

$$x1:=10 \quad x2:=12 \quad n:=200$$

граничні умови

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 2 \\ y'''(0) = 3 \end{matrix}$$

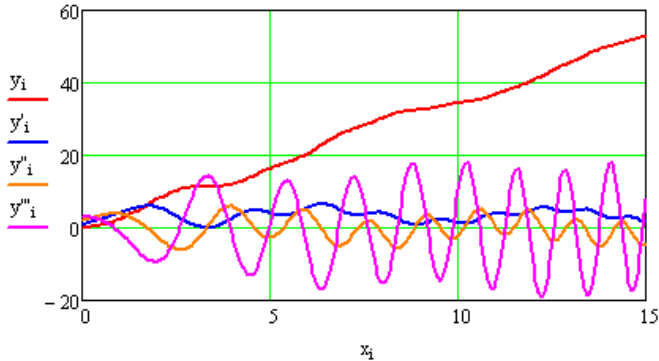
перші похідні

у явному вигляді

$$D(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -2x \cdot y_2 - \sin(x) \cdot y_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 = y' \\ y_2 = y'' \\ y_3 = y''' \\ y_4 \end{matrix}$$

$Z := \text{Bulstroer}(y, 0, 15, n, D)$

$i := 0..n \quad x_i := Z^{(0)} \quad y := Z^{(1)} \quad y' := Z^{(2)} \quad y'' := Z^{(3)} \quad y''' := Z^{(4)}$



Зауважимо, що система з n диф. рівнянь може бути перетворена в диф. рівняння порядку n шляхом заміни змінних. Надаємо студентам можливість самостійно розібратися, як використовуються описані вище функції для розв'язування систем диф. рівнянь.

7.1 Контрольне завдання

1. Вирішити задане диференціальне рівняння з початковими умовами. Побудувати графік знайденої функції;
2. Вирішити систему диференціальних рівнянь з початковими умовами. Побудувати графіки знайдених функцій;
3. Вирішити диференціальне рівняння, яке залежить від параметру. Побудувати сімейство графіків його розв'язку для різного значення параметра;

7.2 Контрольні питання

1. Назвіть способи знаходження початкового наближення.
2. У яких випадках MathCAD не може знайти корінь рівняння?
3. Яка системна змінна відповідає за точність обчислень?

4. Як змінити точність, з якою функція root шукає корінь?
5. Опишіть структуру блоку рішення рівнянь.
6. Який знак рівності використовується в блоці розв'язок? Якою комбінацією клавіш вставляється в документ?
7. Опишіть способи використання функції Find.
8. Як вирішувати матричні рівняння? Назвіть способи розв'язання матричних рівнянь.

Розв'язати диференціальне рівняння використовуючи функції Odesolve, rkfix і Rkadapt

1: $y''(e^x + 1) + y' = 0$ $y(0) = 2, y'(0) = 2$	6: $y'' + 9y = 36e^{2x}$ $y(0) = 2, y'(0) = 6$
2: $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	7: $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x,$ $y(0) = y'(0) = 0$
3: $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 2(1 + x^2)^2,$ $y(0) = 2, y'(0) = 0$	8: $y'' + y = 4x \cos x,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$
4: $yy'' - (y')^2 = y^4,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	9: $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x),$ $y(0) = -4, y'(0) = 5$
5: $y''' + x \sin y = 0$ $y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 0, y''(0) = 0$	10:

Розв'язати задану систему диф. рівнянь на заданому інтервалі. Побудувати графіки шуканої функції.

1. $x''(t) + 3 \cdot y(t) = z'(t) \cdot \cos(t)$ 6. $x''(t) + y(t) = e^{-t}$
 $2x'(t) - z'(t) = e^{-t}$ $2x'(t) + y'(t) - z'(t) = 1$
 $y''(t) + x(t) \cdot z'(t) - 3 = 0$ $y''(t) + z'(t) - 1 = 0$

$$x(0)=1$$

$$x'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=1$$

$$z(0)=1$$

$$x(0)=1$$

$$x'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=1$$

$$z(0)=1$$

$$2. \quad x''(t) + x(t) \cdot y(t) = \cos(2t)$$

$$y''(t) + 2y'(t) - z(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$$

$$x(t) + y(t) + z'(t) = 0$$

$$x(0)=1$$

$$x'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=1$$

$$z(0)=1$$

$$7. \quad x''(t) + x'(t) + y(t) = \cos(2t)$$

$$y''(t) + y'(t) + z(t) = \sin(2t)$$

$$x'(t) + y'(t) - z'(t) = 0$$

$$x(0)=1$$

$$x'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=1$$

$$z(0)=1$$

$$3. \quad x''(t) + y''(t) = z(t) \cdot \cos(t)$$

$$y''(t) + z(t) = x(t) \cdot \sin(2t)$$

$$x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$$

$$x(0)=1$$

$$x'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=1$$

$$z(0)=1$$

$$8. \quad x'(t) + y(t) = z(t)$$

$$y''(t) - x(t) = 1$$

$$x''(t) + y(t) + z(t) = 0$$

$$x(0)=0$$

$$x'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=0$$

$$z(0)=0$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & x'(t) + y''(t) = \cos(t) \\
& z'(t) - x''(t) = 1 \\
& x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 0 \\
& y(0) = 0 \\
& y'(0) = 0 \\
& z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & x'(t) - y''(t) = e^{-t} \cos(t) \\
& y'(t) - z'(t) + x(t) = e^{-t} \cdot \sin(t) \\
& x''(t) - y'(t) + z(t) = e^{-t} \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 0 \\
& y(0) = 0 \\
& y'(0) = 0 \\
& z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & x''(t) - x'(t) + y(t) = z^2(t) \\
& y''(t) - y'(t) + z(t) = 1 - x^2(t) \\
& z'(t) + y'(t) - x'(t) = 0 \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 0 \\
& y(0) = 0 \\
& y'(0) = 0 \\
& z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & x''(t) - x'(t) + z'(t) = \cos^2(t) \\
& y''(t) - y'(t) + x(t) = \sin^2(t) \\
& z'(t) + y'(t) + x'(t) = 0 \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 0 \\
& y(0) = 0 \\
& y'(0) = 0 \\
& z(0) = 0
\end{aligned}$$

Розв'язати диф. рівняння, що залежить від параметра. Побудувати родину графіків шуканої функції для різних значень параметра

$$\begin{aligned}
1. \quad & a \cdot x''(t) + x(t) \cdot x'(t) - 1 = 0 \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & x''(t) + x'(t) = x(t) \cdot \cos(-a \cdot t) \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & x''(t) + a \cdot x'(t) \cdot \cos(t) = 0 \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & x''(t) + a \cdot x'(t) = e^{-t} \\
& x(0) = 0 \\
& x'(0) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x''(t) + x(t) &= a \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad x''(t) + a \cdot x(t) &= a \cdot \sin(a \cdot t) \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad x''(t) + \frac{a}{x'(t)} &= 1 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad x''(t) + a \cdot x'(t) &= \cos^a(t) \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad a \cdot x''(t) + a^2 \cdot x'(t) &= 1 - a^{1.1} \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad x''(t) + a \cdot x'(t) + x(t) &= a^{-t} \cos(a \cdot t) \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

8 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8 «ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ»

Мета роботи: навчитися використовувати інструменти математичної статистики пакета MathCad.

Розрахунок основних статистичних характеристик.

Mathcad має великий набір функцій математичної статистик, що дозволяють обчислювати характеристики вибірки даних: середні величини, дисперсію, коефіцієнти кореляції і інші коефіцієнти, обчислювати щільності ймовірності, функції ймовірності, квантілі ймовірності для 17 різних видів розподілу випадкових величин. Крім того, в ньому є генератори випадкових чисел, які відповідають усім 17 видам розподілення, що дозволяють ефективно виконувати моделювання методом Монте-Карло.

MathCad містить 16 різних функцій для оцінки параметрів вибірки даних:

- mean (A) - повертає середнє значення елементів масиву A;

- $hmean(A)$ - повертає середнє гармонійне значення елементів масиву A ;
- $gmean(A)$ - повертає середнє геометричне значення елементів масиву A ;
- $var(A)$ - повертає дисперсію елементів масиву A ;
- $Var(A)$ - повертає незміщену дисперсію елементів масиву A ;
- $stdev(A)$ - повертає середнє квадратичне відхилення елементів масиву A ;
- $Stdev(A)$ - повертає незміщене середнє квадратичне відхилення елементів масиву A ;
- $median(A)$ - повертає медіану масиву A , яка ділить гістограму щільності ймовірностей на дві рівні частини;
- $mode(A)$ - повертає моду масиву A (найбільш часто зустрічається значення вибірки даних);
- $skew(A)$ - повертає коефіцієнт асиметрії масиву A (ступінь асиметричності гістограми щільності ймовірності щодо осі, що проходить через її центр ваги);
- $kurt(A)$ - повертає ексцес масиву A (ступінь згладженої щільності ймовірності в околиці головного максимуму);
- $stderr(A, B)$ - повертає стандартну помилку при лінійній регресії масивів A і B ;
- $ever(A, B)$ - повертає коваріацію елементів двох масивів, A і B ;
- $corr(A, B)$ - повертає коефіцієнт кореляції двох масивів, A і B ;
- $hist(int, y)$ - функція побудови гістограми масиву A ;
- $histogram(n, y)$ - функція побудови гістограми масиву A .

Формули для розрахунку даних показників наводяться нижче:
 $ORIGIN:=1$

$X:=(21 \ 15 \ 11 \ 29 \ 36 \ 23 \ 42 \ 11 \ 17 \ 9)^T$ вектор даних

$n:=rows(X) \quad n=10$

$mean(X)=21.4$ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = 21.4$ середнє арифметичне
 $m:=mean(X)$

$\text{gmean}(X)=18.921$	$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = 18.921$	середнє геометричне
$\text{gmean}(X)=16.79$	$\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} = 16.79$	середнє гармонічне
дисперсія $\text{var}(X)=112.84$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = 112.84$	зміщена оцінка
$\text{Var}(X)=125.378$	$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = 125.378$	незміщена оцінка
середнє квадратичне: $\text{stdev}(X)=10.623$	$\sqrt{\text{var}(X)} = 10.623$	зміщена оцінка
$\text{Stdev}(X)=11.197$	$\sqrt{\text{Var}(X)} = 11.197$	незміщена оцінка
$\text{median}(X) = 19$	медіана	
$\text{mode}(X)=11$	мода	
$\text{kurt}(X)=-0.48$	ексцес	
$\text{skew}(X)=0.771$	асиметрія	

Всі наведені вище функції можуть бути використані так само для роботи з двовимірними матрицями. При цьому статистичні значення розраховуються для всіх елементів матриці. Так само ці функції можна використовувати для розрахунку статистичних характеристик кількох сукупностей даних: наприклад, так $\text{mean}(A, B, M, a, b, c)$, де A, B - вектори значень, M - двовимірна матриця, a, b, c - окремі числа. Порядок вказівки масивів даних не має значення.

У MathCad є три функції для статистичної оцінки зв'язку двох сукупностей даних:

- $\text{stderr}(A, B)$ - повертає стандартну помилку при лінійній регресії масивів A і B ;
- $\text{cvar}(A, B)$ - повертає коваріацію елементів масивів A і B ;
- $\text{corr}(A, B)$ - повертає коефіцієнт кореляції масивів A і B ;

Функції розподілу ймовірностей.

У MathCad є вбудовані функції для оцінки 17 видів розподілу випадкових величин. Ці функції дозволяють розраховувати щільність ймовірності, функцію розподілу, квантиль ймовірності, генерують вектор випадкових чисел, розподілених за допомогою одного з 17 видів розподілів. Функції розрізняються за першою літерою імені, а основна частина - це назва розподілу:

- $d^*(x, \text{param})$ - щільність ймовірності;
- $p^*(x, \text{param})$ - функція розподілу;
- $q^*(P, \text{param})$ - квантиль розподілу;
- $r^*(M, \text{param})$ - вектор з M незалежних величин, розподілених за обраним законом;

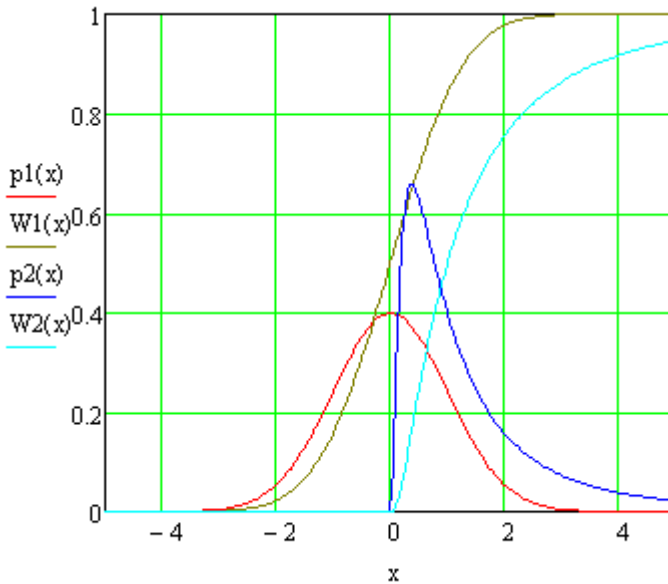
тут x - значення випадкової величини, P - значення ймовірності, param - список параметрів розподілу. Щоб використовувати ці функції для конкретних розподілів, замість зірочки потрібно підставити назву конкретного розподілу:

- * $\text{norm}(x, \mu, \sigma)$ - нормальний розподіл. Параметри: μ - математичне очікування, σ - середнє квадратичне відхилення;
- * $\beta(x, s1, s2)$ - бета-розподіл. $0 < x < 1$, параметри $s1$ і $s2 > 0$;
- * $\text{binom}(k, n, p)$ - біноміальний розподіл. k, n - цілі параметри $0 < k < n$. $0 < p < 1$ - ймовірність успіху одиничного випробування;
- * $\text{cauchy}(x, l, s)$ - розподіл Коші. l - параметр розкладання, $s > 0$ - параметр масштабу;
- * $\text{chisq}(x, d)$ - χ^2 (хі-квадрат) - розподіл. $d > 0$ - число ступенів свободи;
- * $\text{exp}(x, r)$ - експоненціальний розподіл. $r > 0$ - показник експоненти;
- * $F(x, d1, d2)$ - розподіл Фішера. $d1, d2 > 0$ - числа ступенів свободи;
- * $\gamma(k, p)$ - гамма-розподіл. $p > 0$ - параметр форми;
- * $\text{geom}(k, p)$ - геометричний розподіл. $0 < p < 1$ - ймовірність успіху одиничного випробування, $k > 0$ - ціле число;
- * $\text{hypergeom}(k, a, b, n)$ - гіпергеометричний розподіл. a, b, n - цілі числа;

- * $\lnorm(x, \mu, \sigma)$ - логарифмічне нормальне розподілення. μ - натуральний логарифм математичного очікування, $\sigma > 0$ - натуральний логарифм середнього квадратичного відхилення;
- * $\logis(x, l, s)$ - логарифмічний розподіл. l - математичне очікування, $s > 0$ - параметр масштабу;
- * $pbinom(k, n, p)$ - від'ємний біноміальний розподіл. $n > 0$ - ціле число, $0 < p < 1$;
- * $norm(x, \mu, \sigma)$ - нормальний розподіл. μ - математичне очікування, $\sigma > 0$ - середньоквадратичне відхилення;
- * $pois(k, \lambda)$ - розподіл Пуассона. $\lambda > 0$ - параметр;
- * $t(x, d)$ - розподіл Стюдента. $d > 0$ - число степеней волі;
- * $unif(x, a, b)$ - рівномірний розподіл. $a < b$ - границі інтервалу;
- * $weibull(x, s)$ - розподіл Вейбулла. $s > 0$ - параметр;

Нижче наведено приклад побудови графіків щільності ймовірності і функції розподілу нормального і логарифмічно нормального розподілів:

щільність ймовірності	функція розподілу
$p1(x) := dnorm(x, 0, 1)$	$W1(x) := pnorm(x, 0, 1)$
$p2(x) := dnorm(x, 0, 1)$	$W2(x) := plnorm(x, 0, 1)$



Генератори випадкових чисел.

Для кожного з вище перерахованих розподілів в MathCad є функція генератора випадкових чисел. Найпростіша - $\text{rnd}(N)$ - повертає одне випадкове число, яке лежить в інтервалі від 0 до N . Інші функції створюють вектор чисел, розподілених за обраним законом. У наведеному прикладі показано створення масиву розміром 5×5 нормально розподілених випадкових чисел:

Формування масиву випадкових чисел

$M:=5 \quad \mu:=2 \quad \sigma:=0.5 \quad N:=5$

$k:=0..N-1$

$\omega^{(k)} := \text{morm}(M, \mu, \sigma)$

$\omega = \begin{pmatrix} 0.55 & 2.05 & 1.795 & 2.257 & 2.214 \\ 0.921 & 2.385 & 1.663 & 2.37 & 1.762 \\ 2.103 & 2.153 & 1.934 & 1.992 & 1.652 \\ 1.692 & 2.006 & 2.509 & 2.139 & 3.524 \\ 1.401 & 1.618 & 2.09 & 2.081 & 1.857 \end{pmatrix}$

$\text{mean}(\omega) = 1.949$ середнє

$\text{stdev}(\omega) = 0.537$ середнє квадратичне

$\text{median}(\omega) = 2.006$ медіана

Побудова гістограм.

У MathCad є дві функції для побудови гістограм:

- $\text{histogram}(n, \text{data})$. n - число інтервалів гістограми, на які розбивається діапазон випадкових значень data . Ця функція повертає два стовпці, в першому містяться серединні точки інтервалів, а в другому - частоти потрапляння даних в інтервали. Нижче наводиться приклад побудови гістограми;

формування масиву випадкових чисел

$M:=25 \quad N:=25 \quad d:=5$

$k:=0..N-1$

$\omega^{(k)} := \text{rchisq}(M, d)$

$\text{mean}(\omega) = 5.014$ середнє

$\text{stdev}(\omega) = 2.94$ середнє квадратичне

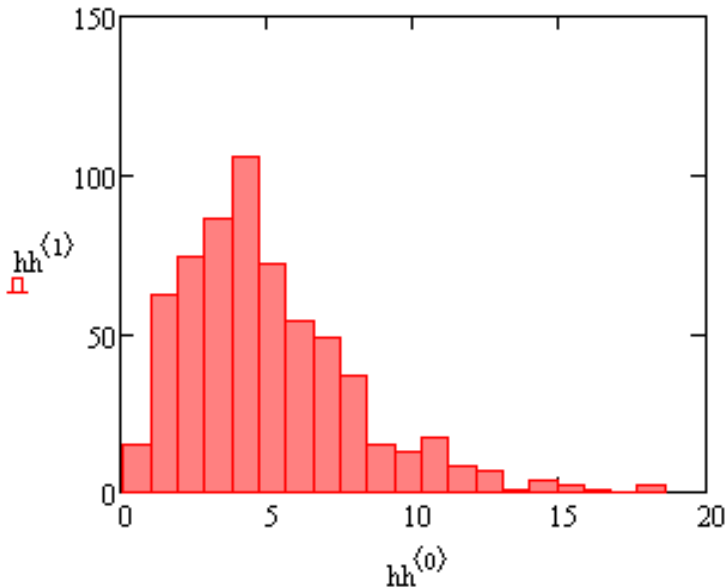
$\text{median}(\omega) = 4.412$ медіана

$\omega =$

	0	1	2
0	8.441	8.009	1.491
1	1.527	8.068	5.433
2	3.21	3.554	3.385
3	2.528	3.189	8.072
4	0.25	3.604	6.828
5	4.374	7.189	2.043
6	5.07	6.087	4.521
7	10.623	2.034	...

побудова гістограми

$n:=20$ $hh:=\text{histogram}(n,\omega)$



• $\text{hist}(n,\text{data})$. n – може бути вектором середини інтервалів (можна задати інтервали різної ширини), або число інтервалів масиву даних data . Нижче приводиться приклад побудови гістограми за допомогою цієї функції;

формування масиву випадкових чисел

$K:=1000$ $\lambda:=10$

$\omega:=\text{rpois}(K,\lambda)$

$\omega^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	8	9	14	7	13	11	13	6	10	...

$\text{mean}(\omega)=10.012$ середнє

$\text{stdev}(\omega)=3.157$ середнє квадратичне

$\text{median}(\omega)=10$ медіана

побудова гістограми

$n:=20$

$\text{mx}:=\max(\omega)=23$

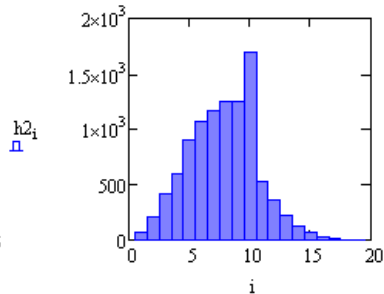
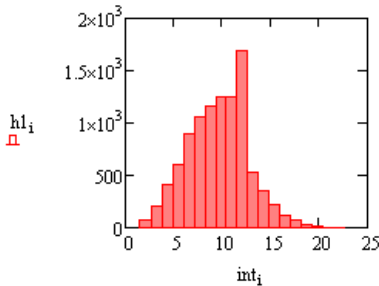
$\text{mn}:=\min(\omega)=1$

$i:=1..20$

$\text{int}_i := \frac{\text{mx}-\text{mn}}{n} \cdot i + \text{mn}$

$\text{h1}:=\text{hist}(\text{int},\omega)$

$\text{h2}:=\text{hist}(n,\omega)$



Розрахунок довірчого інтервалу.

Як приклад, розглянемо розрахунок довірчого інтервалу математичного очікування для малої вибірки K з 10 чисел. Для розрахунку використовується розподіл Стюдента. Квантиль розподілу визначає ширину довірчого інтервалу, він показує, скільки значень середнього квадратичного відхилення треба відкласти вліво і вправо від середнього арифметичного значення. Довірча ймовірність дорівнює 99%:

масив випадкових чисел

$K := (22.1 \ 23.4 \ 20.8 \ 21.6 \ 22.7 \ 23.1 \ 24.0 \ 20.8 \ 21.1 \ 23.2)^T$

$n := \text{rows}(K) = 10$

$K_{av} := \text{mean}(K) = 22.28$ середнє значення

$\text{conf} := 0.99$ довірчий інтервал

$t := \text{qt}(\text{conf}, n) = 2.764$ квантиль розподілу Стюдента

$di := t \cdot \text{stdev}(K) = 3.05$ відхилення від середнього арифметичного

$K_{left} := K_{av} - di$ $K_{right} := K_{av} + di$

$K_{left} = 19.23$ $K_{right} = 25.33$

$19.23 < K < 25.33$ довірчий інтервал

8.1 Контрольне завдання

Отримати масив випадкових чисел згідно із заданим параметром (розподіл і його параметри).

Розрахувати основні статистичні характеристики отриманого масиву випадкових чисел.

Побудувати гістограму отриманого масиву випадкових чисел, розрахувати довірчий інтервал для середнього значення.

Додаток А
Приклад оформлення титульної сторінки

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Запорізька політехніка»

Кафедра ІБтаН

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА

з дисципліни

„МАТЕМАТИЧНІ ПАКЕТИ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ“

(тема роботи)

Виконав:

студент ____ курсу, група РТ-____

(Ініціали, Прізвище)

Прийняв:

(посада)

(Ініціали, Прізвище)

20 __ р.