

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний Університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних робіт з дисципліни
«ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ В МАШИНОБУДУВАННІ
ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ»

для здобувачів освіти за другим (магістерським)
рівнем вищої освіти, спеціальності

G9 Прикладна механіка,
усіх освітніх програм та форм навчання

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Оптимізація процесів в машинобудуванні чисельними методами» для здобувачів освіти за другим (магістерським) рівнем вищої освіти, спеціальності G9 Прикладна механіка, усіх освітніх програм та форм навчання / Укл.: М. В. Фролов. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 40 с.

Укладач: М. В. Фролов, доц., к.т.н.

Рецензент: В. В. Циганов, доц., д.т.н.

Відповідальний за випуск: В. П. Загородній

Затвержено на засіданні
кафедри Металорізальних
верстатів та інструментів
Протокол № 1 від 21.08.25

Рекомендовано
до видання НМК
Машинобудівного
факультету.
Протокол № 1 від 26.08.25

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ПРАКТИЧНА РОБОТА №1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ТА ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ОДНОМІРНОЇ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ	5
1.1 Мета роботи:.....	5
1.2 Завдання на підготовку до практичної роботи	5
1.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи.....	5
1.4 Завдання, зміст роботи та звіту	7
1.5 Приклад розрахунку.....	8
2. ПРАКТИЧНА РОБОТА №2. БЕЗУМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ МЕТОДОМ ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ (ГАУССА)	16
2.1 Мета роботи:.....	16
2.2 Завдання на підготовку до практичної роботи	16
2.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи.....	16
2.4 Завдання, зміст роботи та звіту	17
2.5 Приклад розрахунку.....	19
3. ПРАКТИЧНА РОБОТА №3. УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ МЕТОДОМ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ.....	22
3.1 Мета роботи:.....	22
3.2 Завдання на підготовку до практичної роботи	22
3.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи.....	22
3.4 Завдання, зміст роботи та звіту	24
3.5 Приклад розрахунку.....	26
4. ПРАКТИЧНА РОБОТА №4. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	30
4.1 Мета роботи:.....	30
4.2 Завдання на підготовку до практичної роботи	30
4.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи.....	30
4.4 Завдання, зміст роботи та звіту	31
4.5 Приклад розрахунку.....	34
ЛІТЕРАТУРА	40

ВСТУП

Задачі оптимізації чи екстремальні задачі зустрічаються там, де існують багатоваріантні рішення по відношенню до явища чи об'єкта що досліджується. Тоді задачею є пошук оптимальних рішень, тобто найкращих в якомусь сенсі. Критерієм пошуку є критерій оптимальності. Для вирішення задач оптимізації визначається цільова функція яка є кількісним вираженням критерію оптимізації.

Сутність оптимізаційних задач полягає в пошуку екстремуму (максимуму або мінімуму) цільової функції. Аналітичне рішення задач оптимізації шляхом диференціювання функцій повністю вирішено в математичному аналізі, але при дослідженні технічних об'єктів, які, як відомо відносяться до «погано організованих» систем, функції, що описують ті чи інші їх характеристики не завжди диференціюються або їх диференціювання викликає деякі складнощі пов'язані із видом самих функцій. Крім того на фактори, що входять до цільової функції можуть бути накладені численні обмеження, що ускладнює процес оптимізації або пошуку найкращого рішення. Тому найкраще рішення, що відповідає існуючим обмеженням не завжди буде співпадати з екстремумом цільової функції. В загальному випадку цільова функція взагалі може не мати екстремумів – наприклад бути лінійної форми.

Викладені вище міркування для вирішення оптимізаційних задач вимагають застосування чисельних методів, спеціальних розрахункових процедур та алгоритмів ознайомленню з якими та набуттю практичних навичок і присвячені практичні роботи.

Зауважимо, що якщо безперервна функція $f(x)$ має в точці x^* мінімум, то функція $-f(x)$ в x^* має максимум. Тому для відшукування максимуму застосовуються ті ж методи, що і для відшукування мінімуму. Виходячи з цього далі ми будемо говорити тільки про завдання відшукування мінімуму безперервної на відрізу $[a, b]$ функції $f(x)$.

1. ПРАКТИЧНА РОБОТА №1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ТА ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ОДНОМІРНОЇ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1 Мета роботи

- Вивчити в чому полягає задача оптимізації;
- Засвоїти теоретичні відомості про: оптимізаційні моделі, їх структуру та принципи побудови; критерії оптимальності та цільові функції.
- Вивчити методи чисельної безумовної оптимізації функцій та побудови алгоритмів на їх основі;
- Ознайомитися з критеріями ефективності чисельних методів безумовної оптимізації та навчитися вибирати алгоритм найбільш зручний для вирішення поставленої задачі.

1.2 Завдання на підготовку до практичної роботи

Для підготовки до практичної роботи необхідно засвоїти: теоретичний матеріал присвячений постановці задачі оптимізації; основним термінам та визначенням; критеріям оптимальності та цільовим функціям; структурі оптимізаційних моделей та їх побудові. Особливу увагу приділити чисельним методам звуження інтервалу.

Рекомендовані джерела: лекції з курсу; [1] – С.4 – 25

1.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи

1. Яке рішення називається оптимальним?
2. З чого може складатися множина рішень при оптимізації технічного об'єкту?
3. Які особливості оптимізації існують при використанні обчислювальної техніки?
4. Які передумови необхідні для постановки задачі оптимізації?
5. В чому полягає математичний опис задачі оптимізації?

6. В чому полягає складання алгоритму оптимізації?
7. В чому полягає моделювання на основі принципу оптимізації?
8. Які елементи присутні в оптимізаційній моделі?
9. Що таке фактори?
10. Дайте визначення терміну «параметри».
11. Що таке критерій оптимальності?
12. Що таке цільова функція?
13. За якими принципами повинна будуватися цільова функція?
14. Яка функція називається унімодальною?
15. В чому полягає принцип однозначності?
16. В чому полягає принцип відповідності?
17. В чому полягає принцип керованості?
18. До чого зводиться задача оптимізації цільової функції?
19. Які характеристики зазвичай приймаються як критерії оптимальності?
20. Охарактеризуйте вимоги до критеріїв оптимальності.
21. Чим відрізняється статична та динамічна оптимізація?
22. Яка оптимізація називається одновимірною?
23. Що таке стаціонарна точка?
24. Що таке одновимірна безумовна оптимізація?
25. Чому переважно розглядається мінімізація функції?
26. Чому є необхідність застосування чисельних методів?
27. Що таке відрізок локалізації?
28. Яка трійка чисел називається вдалою?
29. Що таке ітерація?
30. Як визначається точність чисельного методу?
31. Які групи методів використовуються при одновимірній оптимізації.
32. Який інтервал називається інтервалом невизначеності?
33. В чому полягає метод загального пошуку мінімуму?
34. В чому полягає метод половинного ділення (діхотомії)?
35. В чому полягає метод золотого перетину?
36. Чому дорівнює «золоте відношення»?
37. Назвіть спосіб та алгоритм встановлення вихідного інтервалу невизначеності.

1.4 Завдання, зміст роботи та звіту

Для функції заданої відповідно варіанту Табл.1.1 визначити мінімум на заданому відрізку локалізації з точністю ε наступними чисельними методами:

- загального пошуку;
- діхотомії;
- золотого перетину.

Порівняти ефективність застосованих методів за кількістю ітерацій для досягнення заданої точності; кількістю арифметичних операцій в ітераціях; універсальністю по відношенню до цільової функції.

В ході роботи повинні бути виконані та відображені у звіті наступні дії, а також відомості:

1. Тема та мета роботи;
2. Вихідні данні;
3. Алгоритм пошуку з розрахунковими формулами;
4. Ітерації та рішення по кожному з методів;
5. Ескізи до розрахунків;
6. Висновок стосовно порівняння чисельних методів;

Розрахунки можуть виконуватися з використанням будь яких інструментів та програмного забезпечення, наприклад таблиць Microsoft Excel

Н.В. Після першої ітерації необхідно переконатися в існуванні «вдалої трійки чисел», та виконанні умови унімодальності для відрізка локалізації. При їх відсутності відрізок (інтервал) локалізації необхідно збільшувати в бік найменшого значення функції на його краях. В свою чергу, значне збільшення відрізка локалізації призведе до збільшення кількості ітерацій.

Таблиця 1.1 - Вихідні дані до практичної роботи

Варіант	Функція $f(x)$	[a, b]	ε
1	$f(x) = x \sin x + 2 \cos x$	-5; -4	0,02
2	$f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$	1,5; 2	0,05
3	$f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x$	-0.5; 0,5	0,01
4	$f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$	-1; 0	0,1
5	$f(x) = 10 \cdot x \cdot \ln(x) - x^2/2$	0,2; 1	0,02
6	$f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$	-1; 0	0,1
7	$f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 5x$	-3; -2	0,1
8	$f(x) = x^2 + 3x \cdot \ln(x) - 1$	0,5; 1	0,05
9	$f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos(x)$	0,5; 1	0,05
10	$f(x) = (x + 1)^4 - 2x^2$	-3; -2	0,05
11	$f(x) = (1 - e^x \sin(x))^2 - 2x^2$	0; 1	0,01
12	$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	-2; 0	0,01
13	$f(x) = 2x^2 + 3e^{-x}$	0; 1	0,02
14	$f(x) = -e^{-x} \ln(x)$	0; 1	0,01
15	$f(x) = -x \cdot \sin(\ln(x))$	10; 12	0,01

1.5 Приклад розрахунку

Функція: $f(x) = 90 + 10 \cdot (1 + \ln(2x))^2 \cdot \cos(x)$

Інтервал невизначеності: $[2, 4]$, $\varepsilon = 0,001$

1.5.1. Загальний пошук

Кількість інтервалів розбиття – $N = 20$.

Пояснення до методу див. Розділ 5.1.1 та Рис.5.3 [1]. Основні результати розрахунку зведено в Табл. 1.2

Таблиця 1.2 - Результати розрахунків методом загального пошуку

Ітерація	Інтервал невизначеності	Довжина інтервалу невизначеності D	Шаг δ	Розрах. точки a x^* b	f(x)	Похибка $\varepsilon = x_l^* - x_{l-1}^* $
1	[2,4]	2	0,1	2	66,3029	-
				3,3	7,6919	
				4	28,0152	
2	[3.2, 3.4]	0.2	0.01	3.2	8,5547	0,04
				3.34	7,6000	
				3.4	7,74058	
3	[3.33, 3.35]	0.02	0.001	3.33	7,6092	0,005
				3,345	7,5989	
				3.35	7,6001	
4	[3,344; 3,346]	0,002	0,0001	3,344	7,59897	0,0001
				3.3449	7,59893	
				3,346	7,59899	

Рішення: мінімальне значення функції при $x = 3.34489 - f(x) = 7.598934$

Зеленим кольором виділено мінімальне значення функції та відповідне значення аргументу

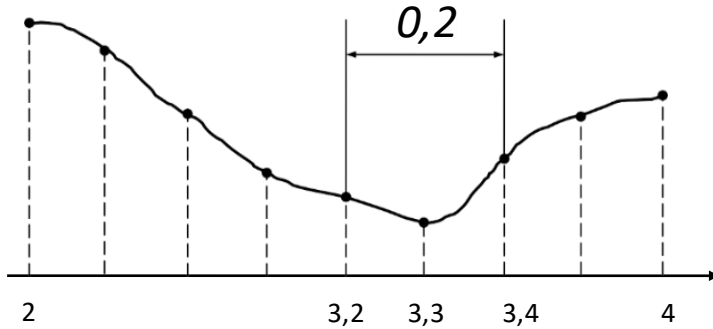


Рисунок 1.1 - Ескіз до методу загального пошуку

Кількість ітерацій – 5

Кількість арифметичних дій в ітераціях: розрахунок точок – 21,
розрахунок значення функції – 21. Загалом: $(21+21)*4 = 210$

1.5.2. Метод дихотомії

Пояснення до методу див. Розділ 5.1.2 та Рис.5.4 [1]

Виходячи з заданої точності, приймаємо $\delta = 0.001$

Результати розрахунку зведено в Табл. 1.3.

Зеленим кольором виділено мінімальне значення функції та відповідне значення аргументу; Сірим – значення що ввійдуть у наступну ітерацію як інтервал невизначеності

Таблиця 1.3 - Результати розрахунку методом дихотомії

Ітерація	Інтервал та/або довжина	Розрахункові точки		$f(x)$	Похибка
1	[2,4] / 2	X1	2	66,302931	
		X3- $\delta/2$	2,999995	12,84091	↓
		X3	3	12,840768	
		X3+ $\delta/2$	3,000005	12,84062	
		X2	4	28,015236	
2	1,00005	X1	2,999995		↑
		X3- $\delta/2$	3,499993	8,730558	
		X3	3,499998	8,730632	
		X3+ $\delta/2$	3,500003	8,730705	
		X2	4		
3	0,500008	X1	2,999995		↓
		X3- $\delta/2$	3,249994	8,011717	
		X3	3,249999	8,011674	
		X3+ $\delta/2$	3,250004	8,01163	
		X2	3,500003		
4	0,250009	X1	3,249994		↑
		X3- $\delta/2$	3,374993	7,641097	
		X3	3,374998	7,641111	
		X3+ $\delta/2$	3,375003	7,641126	
		X2	3,500003		
5	0,125009	X1	3,249994		↓
		X3- $\delta/2$	3,312493	7,647407	
		X3	3,312498	7,647392	
		X3+ $\delta/2$	3,312503	7,647377	
		X2	3,375003		
6	0,06251	X1	3,312493		↓
		X3- $\delta/2$	3,343743	7,59899496	
		X3	3,343748	7,5989944	

Ітерація	Інтервал та/або довжина	Розрахункові точки		$f(x)$	Похибка
		X3+ $\delta/2$	3,343753	7,5989939	
		X2	3,375003		
7	0,03126	X1	3,343743		
		X3- $\delta/2$	3,359368	7,608674	
		X3	3,359373	7,608681	0,015
		X3+ $\delta/2$	3,359378	7,608688	
		X2	3,375003		
8	0,015635	X1	3,343743		
		X3- $\delta/2$	3,351556	7,600999	
		X3	3,351561	7,601002	0,008
		X3+ $\delta/2$	3,351566	7,601005	
		X2	3,359378		
9	0,007822	X1	3,343743		
		X3- $\delta/2$	3,34765	7,599289	
		X3	3,347655	7,59929	0,004
		X3+ $\delta/2$	3,34766	7,599291	
		X2	3,351566		
10	0,003916	X1	3,343743		
		X3- $\delta/2$	3,345696	7,598965	
		X3	3,345701	7,598965	0,002
		X3+ $\delta/2$	3,345706	7,599291	
		X2	3,34766		
11		X1	3,343743		
		X3- $\delta/2$	3,344675	7,598937	
		X3	3,344725	7,598936	0,0009
		X3+ $\delta/2$	3,344775	7,598935	
		X2	3,345706		

Рішення: мінімальне значення функції при $x = 3.344775$ - $f(x)=7.59894$

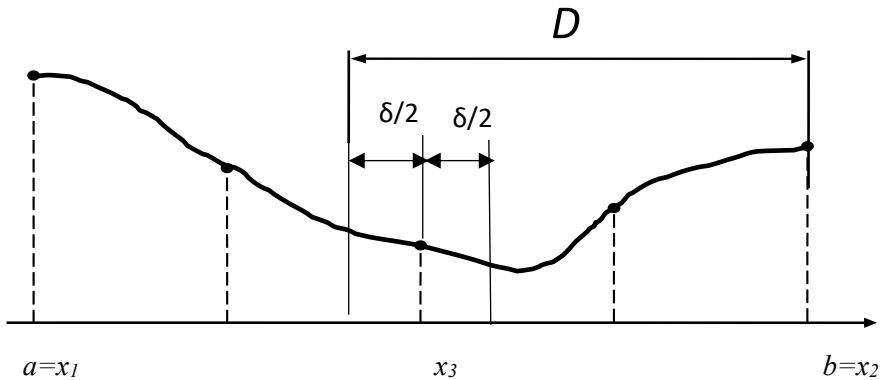


Рисунок 1.2 - Ескіз до методу діхотомії

Кількість ітерацій – 11

Кількість арифметичних операцій:

- ітерація 1 – 8 операцій
 - ітерації 2 ...10 – $10 \times 6 = 60$ операцій
- загалом: 68

1.5.3. Метод золотого перетину

Пояснення до методу див. Розділ 5.1.3 та Рис.5.5 [1]

Результати розрахунку зведено в Табл. 1.4.

Зеленим кольором виділені мінімальні значення функції та відповідний аргумент на кожній ітерації, а також попереднє значення аргументу, що ввійде в наступну ітерацію як одна з меж інтервалу невизначеності; жовтим – максимальні значення функції та відповідний аргумент.

Похибка розраховується як:

$$|x_i^* - x_{i-1}^*| \leq \varepsilon$$

Приймаючи до уваги також:

$$|f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)| \leq \varepsilon$$

Таблиця 1.4 - Розрахунок методом золотого перетину

Ітерація	D	Розрахункові точки		$f(x)$	Похибка
1	2	X1	2	66,302931	
		X3	2,763906	21,74558	↓
		X4	3,2360939	8,1405105	
		X2	4	28,015236	
2	1,236094	X1	2,763906		↑
		X3	3,236036	8,141084	
		X4	3,5278702	9,1770991	
		X2	4		
3	0,763964	X1	2,763906		↓
		X3	3,055704	11,32125	
		X4	3,2360718	8,1407297	
		X2	3,5278702		
4	0,472166	X1	3,055704		↓
		X3	3,23605	8,140949	
		X4	3,3475251	7,5992575	
		X2	3,5278702		0,111
5	0,291821	X1	3,23605		0,000014
		X3	3,347511	7,599254	
		X4	3,4164084	7,8378499	
		X2	3,5278702		

Рішення: мінімальне значення функції при $x = 3.347511$ - $f(x) = 7.599254$

Кількість ітерацій – 5

Кількість арифметичних операцій:

Ітерація 1 – 6

Ітерації 2...5 – $4 \times 4 = 16$

Загалом: 22

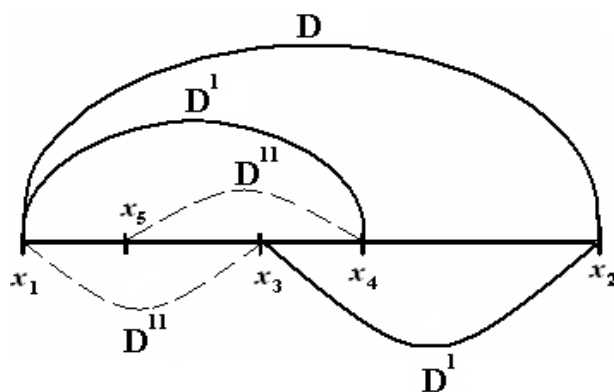


Рисунок 1.3 - Ескіз до методу золотого перетину

2. ПРАКТИЧНА РОБОТА №2. БЕЗУМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ МЕТОДОМ ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ (ГАУССА)

2.1 Мета роботи

- Засвоїти теоретичні відомості про рельєф функції багатьох змінних та її оптимізацію;
- Вивчити в чому полягає метод покоординатного спуску;
- Отримати практичні навички безумовної оптимізації функції багатьох змінних методом покоординатного спуску.

2.2 Завдання на підготовку до практичної роботи

Для підготовки до практичної роботи необхідно засвоїти: теоретичний матеріал присвячений оптимізації функції багатьох змінних; основним термінам та визначенням; рельєфу функції та його різновидам; послідовність оптимізації методом покоординатного спуску. Повторити методи оптимізації шляхом звуження інтервалу невизначеності;

Рекомендовані джерела: лекції з курсу; [1] – С.20 – 27, С.31 – 35

2.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи

1. Чому є необхідність застосування чисельних методів?
2. Що таке відрізок локалізації?
3. Яка трійка чисел називається вдалою?
4. Що таке ітерація?
5. Як визначається точність чисельного методу?
6. Які групи методів використовуються при одновимірній оптимізації.
7. Який інтервал називається інтервалом невизначеності?
8. Назвіть спосіб та алгоритм встановлення вихідного інтервалу невизначеності.
9. Як утворюються лінії рівня?

10. Які типи рельєфу функції існують?
11. Яким чином зображується рельєф функції на площині?
12. Що таке справжній яр?
13. Що таке справжній гребінь?
14. Що таке розв'язний яр або гребінь?
15. Чим характеризується невпорядкований тип рельєфу?
16. В чому полягає метод Гаусса?
17. Чи завжди можна віднайти мінімум за допомогою методу Гаусса?
18. Для яких типів рельєфу найбільш підходить метод Гаусса?
19. В якості чого використовують найчастіше метод Гаусса?

2.4 Завдання, зміст роботи та звіту

Для функції двох змінних, заданої відповідно варіанту Табл.2.1, визначити безумовний мінімум на заданому відрізку локалізації з точністю ϵ методом Гаусса, використовуючи при цьому на свій вибір: метод загального пошуку або метод діхотомії або метод золотого перетину

В ході роботи повинні бути виконані та відображені у звіті наступні дії, а також відомості:

1. Тема та мета роботи;
2. Вихідні данні;
3. Алгоритм пошуку з розрахунковими формулами;
4. Ітерації;
5. Рішення;
6. Ескіз до розрахунку;
7. Висновок;

Таблиця 2.1 - Вихідні дані до практичної роботи

Вар.	$f(x)$	$[a1; b1]$ $[a2; b2]$	ε
1	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2+x_2^2} - x_1 + 2x_2$	-1; 1 -1; 1	0,001
2	$f(x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + 1} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{3}$	-2; 0 0; -2	0,002
3	$f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + x_2$	-2; 2 -2; 2	0,002
4	$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2)$	-2; 2 -2; 2	0,001
5	$f(x) = \sqrt{2x_1^2 + x_2^2 + 1} + e^{x_1^2+x_2^2} - x_1 - x_2$	-2; 2 -2; 2	0,005
6	$f(x) = 2x_1 \cos(x_1 + x_2) + x_2^2 + 4\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	-2; 2 -3; 1	0,002
7	$f(x) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2}$	-3; 1 -2; 2	0,001
8	$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - e^{x_1^2+x_2^2} - 2x_1 + x_2$	-2; 2 -2; 2	0,005
9	$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2e^{\frac{1}{3}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2}$	-3; 1 -2; 2	0,002
10	$f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 x_2^2 + 3x_1 + 5x_2$	-3; 1 -3; 1	0,001

2.5 Приклад розрахунку

Функція: $f(x) = 3x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + 2e^{-\left(\frac{1}{3}x_1 + x_2\right)}$

Інтервал невизначеності: $x_1 [-2, 2], x_2 [-2, 2], \varepsilon = 0,001$

Обираємо метод загального пошуку $N = 20$

Алгоритм пошуку по кожній зі змінних:

➤ Довжина інтервалу невизначеності:

$$D_i = b_i - a_i$$

➤ Шаг розбиття в ітерації i :

$$\delta_i = \frac{D_i}{N}$$

➤ Визначення значення фактору x_i :

$$x_{ij} = a_i + (j - 1) \cdot \delta_i, \quad j = \overline{1, N}$$

➤ Розрахунок значень функції $f(x_{ij})$ та вибір мінімального:

$$x_i^* = x_{ij} \text{ для якого } f(x_i^*) = \min(f(x_{ij})), \quad j = \overline{1, N}$$

➤ Довжина інтервалу невизначеності після першої ітерації:

$$D_{i+1} = 2\delta_i$$

➤ Межі нового інтервалу відносно точки мінімуму в попередній ітерації $i - x_i^*$:

$$a_{i+1} = x_i^* - \delta_i, \quad b_{i+1} = x_i^* + \delta_i$$

➤ Перевірка точності та повторення циклу у разі невиконання умови:

$$|x_i^* - x_{i-1}^*| \leq \varepsilon, \quad i = 2, 3, \dots \text{ або } D_i \leq \varepsilon$$

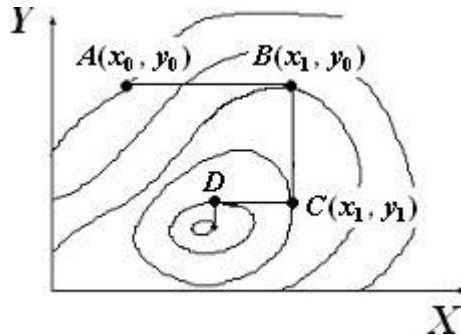


Рисунок 2.1 - Ескіз до пошуку оптимуму методом Гаусса

Розрахунки виконуються в програмі Microsoft Excel. Результати розрахунків за алгоритмом зведемо в Табл. 2.1

Примітки:

- ✓ Зверніть увагу, якщо рельєф функції відмінний від улоговинного мінімуму функції методом Гаусса може не бути знайденим;
- ✓ Для першої ітерації в якості x_1^* приймається вибране початкове значення;
- ✓ Діапазон невизначеності в Табл. 1 вказується для тієї змінної, значення якої не є фіксованим
- ✓ На кожній з ітерацій перевіряйте наявність вдалої трійки чисел та при необхідності корегуйте інтервал невизначеності, розширюючи його в бік найменшого значення функції

Рішення: $x_1 = 0,03322$; $x_2 = 1,19614$; $f(x_1; x_2) = 0,929057$

Таблиця 2.2 - Ітерації та результати розрахунків

Ітер.	X1				X2				F(x)	ε
	[a, b]	D	δ	x_1^*	[a, b]	D	δ	x_2^*		
1				1	-2;2	4	0,2	1	3,7770	4
	-2;2	4	0.2	0				1	0.9858	4
2				0	0.8; 1.2	0.4	0.02	1.2	0.9624	0.4
	-0.2; 0.2	0.4	0.02	0.04				1.2	0.9592	0.4
3				0.04	1.18 1.22	0.04	0.002	1.194	0.9516	0.04
	0.02 0.06	0.04	0.002	0.034				1.194	0.959060	0.04
4				0.034	1.192; 1.196	0.004	0.0002	1.196	0.959059	0.004
	0.032 0.036	0.004	0.0002	0.03322				1.196	0.959057	0.004
5				0.03322	1.1958 1.1965	0.0004	0.00002	1.19614	0.959057	0.0004
	0.03318 0.03322	0.0004	0.00002	0.03322				1.19614	0.959057	0.0004

3. ПРАКТИЧНА РОБОТА №3. УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

3.1 Мета роботи

- Засвоїти теоретичні відомості про умовну оптимізацію, види обмежень та способи їх врахування;
- Ознайомитися з типовими обмеженнями, що виникають при обробці різанням;
- Вивчити в чому полягає метод штрафних функцій зокрема методи зовнішньої та внутрішньої точки;
- Отримати практичні навички умовної оптимізації функції багатьох змінних методом штрафних функцій.

3.2 Завдання на підготовку до практичної роботи

Для підготовки до практичної роботи необхідно засвоїти: методи загальні відомості про умовну оптимізацію; обмеження у вигляді рівностей; обмеження у вигляді нерівностей; метод та множники Лагранжа; метод штрафних функцій та його різновиди; типові обмеження, що виникають при обробці різанням; поняття про нежорсткі обмеження. Рекомендується повторити методи оптимізації шляхом звуження інтервалу невизначеності.

Рекомендовані джерела: лекції з курсу; [1] – С.36 – 53

3.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи

1. Що таке умовна оптимізація?
2. Що таке стаціонарна точка?
3. Що таке безумовний оптимум?
4. Що таке умовний оптимум?
5. Які обмеження називаються активними?
6. Які обмеження називаються неактивними?
7. Що означає умова регулярності обмежуючих функцій в точці x^* ?

8. В яких ситуаціях не виконується умова регулярності обмежуючих функцій?
9. Яким чином враховуються обмеження у вигляді рівностей?
10. Як записується функція Лагранжа?
11. Назвіть умову глобального мінімуму функції Лагранжа?
12. Яка матриця є позитивно визначеною?
13. З яких дій є сенс почати вирішення задачі умовної оптимізації з обмеженнями у вигляді нерівностей?
14. Яким шляхом обмеження у вигляді нерівностей перетворюються у обмеження – рівності?
15. В чому полягає сутність теореми Куна-Таккера?
16. Які умови для функції Лагранжа повинні виконуватися в стаціонарній точці?
17. Які існують різновиди методу штрафних функцій?
18. В чому полягає метод зовнішньої точки?
19. Які обмеження можна інтерпретувати як нежорсткі?
20. Яку форму мають нежорсткі обмеження факторів?
21. Як записується квадратична штрафна функція?
22. Наведіть приклад штрафної функції для обмеження-рівності за методом внутрішньої точки?
23. В чому полягає метод внутрішньої точки?
24. Які функції називаються бар'єрними?
25. Наведіть приклад бар'єрної функції.
26. Які складнощі можуть виникнути при застосуванні бар'єрних функцій?
27. Який алгоритм пошуку мінімуму методом штрафних функцій?
28. За якими показниками визначається обмеження швидкості?
29. За якими показниками визначається обмеження швидкості різання?
30. Назвіть додаткові обмеження при обробці різанням

3.4 Завдання, зміст роботи та звіту

Для функції двох змінних та обмежень, заданих відповідно варіанту Табл.3.1, методом зовнішньої штрафної функції, використовуючи квадратичну форму штрафної функції, визначити умовний мінімум методом Гаусса, використовуючи при цьому на свій вибір: метод загального пошуку або метод діхотомії або метод золотого перетину. Точність $\varepsilon \leq 0,30$

В ході роботи повинні бути виконані та відображені у звіті наступні дії, а також відомості:

1. Тема та мета роботи;
2. Вихідні данні;
3. Визначення допоміжної функції що оптимізується та включає штрафні функції.
4. Алгоритм пошуку з розрахунковими формулами;
5. Визначення відрізка локалізації та інтервалу невизначеності;
6. Ітерації та рішення;
7. Графіки функції що оптимізується, допоміжної функції та обмежень від однієї зі змінних;
8. Висновок;

Таблиця 3.1 - Вихідні дані до практичної роботи

Вар.	Функція	Обмеження
1	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2$	$2x_1 + 5x_2 \leq 40$ $2x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1, x_2 \geq 0$
2	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2$	$2x_1 + 5x_2 \leq 60$ $3x_1 + x_2 \leq 30$ $x_1 + x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$
3	$f(x) = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2$	$5x_1 + 2x_2 \leq 60$ $x_1 + 4x_2 \leq 40$ $x_1 + x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$
4	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_2$	$x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
5	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$	$0 \leq x_1 \leq 1$ $0 \leq x_2 \leq 1$
6	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$	$x_1 + 2x_2 \leq 2$ $2x_1 - x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$
7	$f(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 4x_1 + x_2$	$4 \leq x_1 \leq 8$ $-5 \leq x_2 \leq 1$
8	$f(x) = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2$	$-1 \leq x_1 \leq 8$ $1 \leq x_2 \leq 4$
9	$f(x) = 2\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 1} + x_1 + x_2$	$5 \leq x_1 \leq 8$ $1 \leq x_2 \leq 10$
10	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 + 5$	$x_1 + x_2 \leq 3$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$

3.5 Приклад розрахунку

Дано: функція $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$

Та обмеження, які перетворимо у форму $g_i(x) \leq 0$:

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \leq 72 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1(x) = 9x_1 + 8x_2 - 72 \leq 0 \\ g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \\ g_3(x) = -x_1 \leq 0 \\ g_4(x) = -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Утворимо допоміжну функцію, з використанням квадратичної форми штрафної функції. Прийнемо початкове значення коефіцієнта $r = 100$. Таким чином, допоміжна функція буде мати вигляд:

$$Q(x) = f(x) + 100 \cdot \left\{ \frac{1}{4} [g_1(x) + |g_1(x)|]^2 + \frac{1}{4} [g_2(x) + |g_2(x)|]^2 + \frac{1}{4} [g_3(x) + |g_3(x)|]^2 + \frac{1}{4} [g_4(x) + |g_4(x)|]^2 \right\}$$

Приймаючи до уваги обмеження $x_1, x_2 \geq 0$ та використовуючи метод Свена, визначаємо інтервали невизначеності для x_1 $[0;6]$ та x_2 $[0;6]$ таким чином щоб була отримана вдала трійка чисел по кожній змінній.

Важливо!

Проводячи розрахунки на етапі пошуку інтервалу невизначеності треба розраховувати окремо значення функцій $f(x)$, $g_i(x)$ та $Q(x)$. Співставляючи отримані значення $f(x)$ та $Q(x)$ треба за потреби збільшувати значення коефіцієнту r до тих пір поки при $g_i(x) > 0$ їх мінімальні значення будуть при тих самих x .

На отриманих інтервалах невизначеності, використовуючи метод загального пошуку, мінімізуємо функцію $Q(x)$. Прийнемо $N=20$. Розрахунок виконується за наступним алгоритмом:

- Довжина інтервалу невизначеності:

$$D_i = b_i - a_i$$

- Шаг розбиття в ітерації i :

$$\delta_i = \frac{D_i}{N}$$

- Визначення значення фактору x_i :

$$x_{ij} = a_i + (j - 1) \cdot \delta_i, \quad j = \overline{1, N}$$

- Розрахунок значень функції $f(x_{ij})$ та вибір мінімального:

$$x_i^* = x_{ij} \text{ для якого } f(x_i^*) = \min(f(x_{ij})), \quad j = \overline{1, N}$$

- Довжина інтервалу невизначеності після першої ітерації:

$$D_{i+1} = 2\delta_i$$

- Межі нового інтервалу відносно точки мінімуму в попередній ітерації i - x_i^* :

$$a_{i+1} = x_i^* - \delta_i, \quad b_{i+1} = x_i^* + \delta_i$$

- Перевірка точності та повторення циклу у разі невиконання умови:

$$|x_i^* - x_{i-1}^*| \leq \varepsilon, \quad i = 2, 3, \dots \text{ або } D_i \leq \varepsilon$$

Результати розрахунків зведені в Табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Результати розрахунку

Ітер.	X1				X2				Q(x)	ε
	[a, b]	D	δ	x_1^*	[a, b]	D	δ	x_2^*		
1	0;6	6	0.3	2.4				0	-6.2400	
				2.4	0;6	6	0.3	3.6	-29,2800	23.04
2	2.1; 2.7	0.6	0.03	2.49				3.6	-29,2899	0.0099
				2.49	3.3; 3.9	0.6	0.03	3,75	-29.6874	0.3975
3	2.46; 2.52	0.06	0.003	2.499				3.75	-29.6875	0.0001
				2.499	3.72 3.78	0.06	0.003	3.75	-29.6875	0

Рішення: $x_1 = 2.499$, $x_2 = 3.75$, $f(x) = -29.6875$

Побудуємо графіки функцій для $x_1 = 2.499$ та x_2 в діапазоні $[0;6]$ – Рис.3.1. Як видно з графіків та розрахунків:

- при виконанні обмежень, графіки функцій $f(x)$ та $Q(x)$ співпадають; як тільки обмеження порушуються – значення допоміжної функції $Q(x)$ різко зростає;
- Умовний та безумовний мінімуми функції $f(x)$ не співпадають.
- Мінімум функції $Q(x)$ співпадає з найменшим значенням $f(x)$ для якого виконуються обмеження

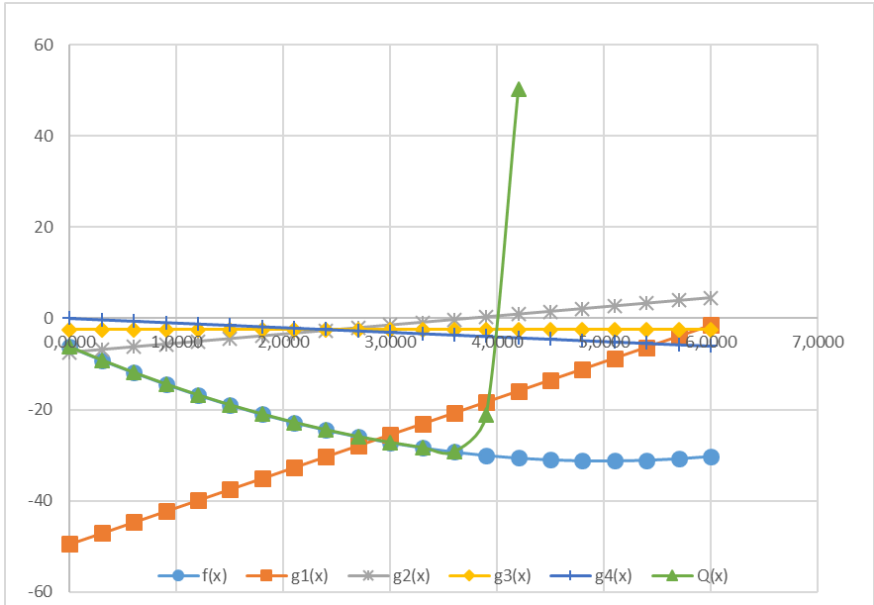


Рисунок 3.1 - Графіки мінімізуємих функцій та обмежень

4. ПРАКТИЧНА РОБОТА №4. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1 Мета роботи

- Засвоїти теоретичні відомості про лінійне програмування та поняття про його основну задачу;
- Ознайомитися з деякими типовими задачами лінійного програмування та способами їх вирішення;
- Отримати практичні навички вирішення задачі лінійного програмування.

4.2 Завдання на підготовку до практичної роботи

Для підготовки до практичної роботи необхідно засвоїти: поняття про лінійне програмування та основну задачу лінійного програмування; форми запису основної задачі лінійного програмування у вигляді системи рівнянь та нерівностей; зміст типових задач лінійного програмування.

Рекомендовані джерела: лекції з курсу; [1] – С.54 – 65

4.3 Контрольні запитання для самоперевірки та контролю підготовленості до роботи

1. Що таке задачі лінійного програмування?
2. Де знаходяться рішення задач лінійного програмування по відношенню до обмежень?
3. Яку форму має основна задача лінійного програмування?
4. Яке рішення називається допустимим?
5. Що таке план задачі лінійного програмування?
6. Яке рішення задачі лінійного програмування називається оптимальним?
7. Коли існує єдине рішення задачі лінійного програмування – воно ж оптимальне?

8. В якому випадку задача лінійного програмування не має рішення?
9. Яким чином кожна задача лінійного програмування може бути представлена як основна?
10. Що таке багатокутник рішень?
11. В чому полягає сутність транспортної задачі?
12. Що передбачає спрощений варіант транспортної задачі?

4.4 Завдання, зміст роботи та звіту

Зміст задачі лінійного програмування вибирається в залежності від варіанту в Табл. 4.1 або Табл. 4.2.

В ході роботи повинні бути виконані та відображені у звіті наступні дії, а також відомості:

1. Тема та мета роботи;
2. Вихідні данні;
3. Запис умов задачі у формі основної задачі лінійного програмування;
4. Запис цільової функції;
5. Графічна інтерпретація задачі лінійного програмування;
6. Рішення задачі;
7. Висновок;

4.4.1 Задача про використання сировини

Виготовлення продукції двох типів – P_1 та P_2 потребує сировини чотирьох видів – S_1, S_2, S_3, S_4 . Кількість сировини обмежене і складає відповідно – b_1, b_2, b_3, b_4 . Кількість одиниць сировини, що потребує виготовлення одиниці продукції відомо та задається у вигляді таблиці. Дохід від реалізації продукції складає відповідно C_1 та C_2 . Треба скласти такий план випуску продукції, щоб дохід від її реалізації був би максимальним. Умови задачі представлені в Табл. 4.1.

4.4.2 Задача про використання продуктивності обладнання

Підприємство за час T має виготовити N_1 одиниць продукції P_1 та N_2 одиниць продукції P_2 . Обидва види продукції можна виготовляти на обладнанні A та B , що мають різну продуктивність (кількість одиниць продукції, що виготовляється в одиницю часу) та вартість виготовлення за одиницю часу. Вихідні дані зведені в Табл. 4.2

Таблиця 4.2 - Вихідні данні задачі про використання продуктивності обладнання

Вар.	Обл..	Продуктивність в одиницю часу		Витрати на виготовл. за одиницю часу		Час на виготовлення програми		Програма випуску		T
	Прод.	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	
6	A	5	25	5	40	x_1	x_2	40	80	8
	B	14	14	15	30	x_3	x_4			
7	A	8	14	6	20	x_1	x_2	110	200	16
	B	10	12	10	24	x_3	x_4			
8	A	6	18	4	20	x_1	x_2	140	121	12
	B	10	12	16	30	x_3	x_4			
9	A	20	5	15	10	x_1	x_2	180	100	10
	B	30	15	35	40	x_3	x_4			
10	A	12	48	8	70	x_1	x_2	70	220	8
	B	20	22	26	52	x_3	x_4			

4.5 Приклад розрахунку

Задача про використання сировини

Вихідні данні наведені в Табл. 4.3

Таблиця 4.3 - Вихідні данні

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		P ₁	P ₂
S ₁	19	2	3
S ₂	13	2	1
S ₃	15	0	3
S ₄	18	3	0
Дохід		7	5

Умови Табл. 4.3 запишемо у вигляді систем рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ 13 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 15 - 3x_2 \geq 0 \\ 18 - 3x_1 \geq 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \\ (IV) \\ (V) \\ (VI) \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 = x_3 \\ 13 - 2x_1 - x_2 = x_4 \\ 15 - 3x_2 = x_5 \\ 18 - 3x_1 = x_6 \end{array} \right.$$

При цьому матриця системи, складена з коефіцієнтів при невідомих буде мати вигляд:

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зрозуміло, що система не може бути вирішена однозначно, бо кількість невідомих більша за кількість рівнянь: ранг матриці $r = 4$, кількість невідомих $n = 6$. Кількість ступенів свободи $k = 6 - 4 = 2$

Цільова функція має вигляд:

$$F = -7x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$

Для вирішення задачі скористаємося її геометричною інтерпретацією. Для цього введемо систему координат x_1Ox_2 . Відомо, що геометричне місце точок на площині, координати яких задовольняють системі лінійних нерівностей, утворюють випуклий багатокутник, який назовемо багатокутником рішень системи нерівностей. Сторони цього багатокутника розташовуються на прямих, рівняння яких отримуються, якщо в нерівностях системи знаки нерівності замінити точними рівностями. Сам же цей багатокутник є перетинання полуплощин, на які поділяє площину кожна зі вказаних прямих. В нашому випадку такими прямими є (Рис. 4.1):

$$\begin{cases} x_1 = 0 & (I) \\ x_2 = 0 & (II) \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 = 0 & (III) \\ 13 - 2x_1 - x_2 = 0 & (IV) \\ 15 - 3x_2 = 0 & (V) \\ 18 - 3x_1 = 0 & (VI) \end{cases}$$

Стрілки на рисунку вказують які полуплощини дають багатокутник рішень.

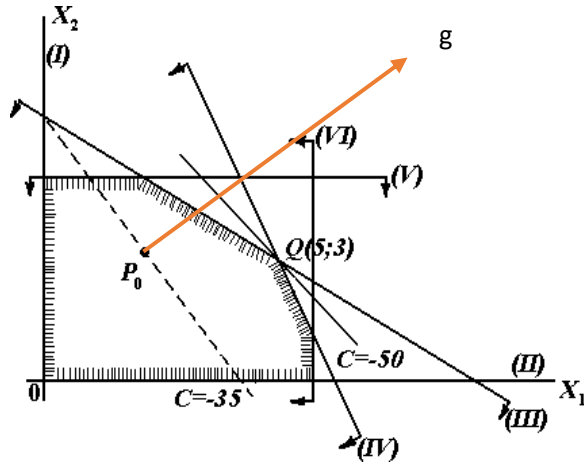


Рисунок 4.1 - Багатокутник рішень

На ряду з цим розглянемо згадану вище цільову функцію F та запишемо її у вигляді:

$$-7x_1 - 5x_2 = C$$

Змінюючи C отримаємо сукупність паралельних прямих. На Рис. 4.1 показана пряма для $C = -35$, а вектор g вказує напрям руху до зменшення значень C . Тому очевидно, що рішення буде лежати на стороні або вершині багатокутника рішень найбільш віддаленої в напрямку вектору g . Такою вершиною є Q , що утворена на перетині ліній (III) та (IV). Рішення системи відповідних рівнянь дає рішення:

$$\begin{cases} 19 - 2x_1 - 3x_2 = 0 & (III) \\ 13 - 2x_1 - x_2 = 0 & (IV) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Отже найбільш прибутковим рішенням є випуск 5 одиниць продукції P_1 та 3 одиниць P_2 . При цьому значення цільової функції - $F = -50$.

Задача про використання продуктивності обладнання

Вихідні данні наведені в Табл. 4.4

Таблиця 4.4 - Вихідні данні

Обладн.	Продуктивність в одиницю часу		Витрати на виготовл. за одиницю часу		Час на виготовлення програми		Програма випуску	
Прод.	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
A	6	24	4	47	x_1	x_2	30	96
B	13	13	13	26	x_3	x_4		

Приймаючи за замовчуванням що всі змінні не негативні, запишемо систему обмежень та цільову функцію:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 & (I') \\ x_3 + x_4 \leq 6 & (II') \\ 6x_1 + 13x_3 = 30 & (III') \\ 24x_2 + 13x_4 = 96 & (IV') \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + 13x_3 + 47x_2 + 26x_4$$

Матриця системи обмежень буде мати вигляд:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 13 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Виберемо в якості вільних змінних x_1 та x_2 та виразимо через них x_3 та x_4 з рівнянь (III') та (IV'):

$$x_3 = \frac{1}{13}(30 - 6x_1) = \frac{5}{13}(5 - x_1) \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 5$$

$$x_4 = \frac{1}{13}(96 - 24x_2) = \frac{24}{13}(4 - x_2) \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 4$$

Підставивши отримані вирази в рівняння (II') отримаємо систему нерівностей або рівняння ліній для побудови багатокутника рішень та цільову функцію:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 & (I) \\ x_2 \geq 0 & (II) \\ x_1 \leq 5 & (III) \\ x_2 \leq 4 & (IV) \\ x_1 + x_2 \leq 6 & (V) \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 & (VI) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & (I) \\ x_2 = 0 & (II) \\ x_1 = 5 & (III) \\ x_2 = 4 & (IV) \\ x_1 + x_2 = 6 & (V) \\ x_1 + 4x_2 = 8 & (VI) \end{cases}$$

$$F = 222 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

Таким чином, геометрична інтерпретація рішення буде мати вигляд (Рис. 4.2):

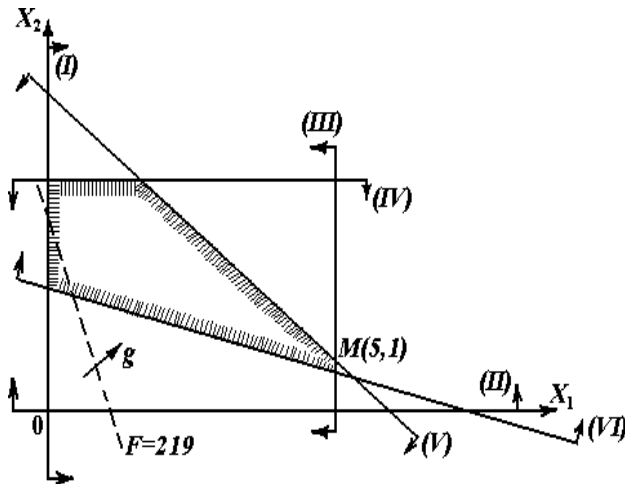


Рисунок 4.2 - Геометрична інтерпретація рішення

З рисунка видно, що рішенням буде точка найбільш віддалена в напрямку вектору g – це точка M координати якої визначаються сумісним рішенням рівнянь (III) та (V):

$$\begin{cases} x_1 = 5 & (III) \\ x_1 + x_2 = 6 & (V) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Отже:

- На обладнанні А виріб Р1 треба виготовляти $x_1 = 5$ год. При цьому буде виготовлено $5 \times 6 = 30$ од.;
виріб Р2 - $x_2 = 1$ год. та буде виготовлено $1 \times 24 = 24$ од.
- На обладнанні В виріб Р1 треба виготовляти:
 $x_3 = \frac{5}{13}(5 - 5) = 0$ год. та буде виготовлено 0 од.
Виріб Р2 $x_4 = \frac{24}{13}(4 - 1) = \frac{72}{13}$ год. та буде виготовлено
 $\frac{72}{13} \cdot 13 = 72$ од.

Максимальне значення цільової функції - $F = 211$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Конспект лекцій з дисципліни «Оптимізація технічних рішень в машинобудуванні та чисельні математичні методи» для здобувачів освіти за другим (магістерським) рівнем вищої освіти, спеціальностей: G11 Машинобудування (133 Галузеве машинобудування), G9 (131) Прикладна механіка, усіх освітніх програм та форм навчання / Укл.: М. В. Фролов. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 90 с.
2. Методи одновимірної оптимізації: практикум з дисципліни «Дослідження операцій» [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Наука про дані та математичне моделювання» / Т. С. Ладогубець, О. Д. Фіногенов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 453 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 47 с.