

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

Факультет інформаційної безпеки та електронних комунікацій
(повне найменування факультету)

Кафедра радіотехніки та телекомунікацій
(повне найменування кафедри)

Пояснювальна записка

до дипломного проєкту (роботи)
магістра
(ступінь вищої освіти)

на тему **ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ**

Виконав(ла): студент(ка) 2м курсу, групи БК-912м

Спеціальності _____

172 «Телекомунікації та радіотехніка»
(код і найменування спеціальності)

Освітня програма (спеціалізація) _____

«Інформаційні мережі зв'язку»

ЛІСТРАТЕНКО Денис Юрійович
(ПРИЗВИЩЕ та ініціали)

Керівник ЧОРНОБОРОДОВ М.П.
(ПРИЗВИЩЕ та ініціали)

Рецензент _____
(ПРИЗВИЩЕ та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"
(повне найменування закладу вищої освіти)

Факультет ФІБЕК

Кафедра Радіотехніки та телекомунікацій

Ступінь вищої освіти магістр

Спеціальність 172 "Телекомунікації та радіотехніка"
(код і найменування)

Освітня програма (спеціалізація) Інформаційні мережі зв'язку
(назва освітньої програми (спеціалізації))

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

РТТ

К.Т.Н., доц. САМОЙЛИК С. С.
" " грудня 20 23 року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНИЙ ПРОЕКТ (РОБОТУ) СТУДЕНТА(КИ)

ЛІСТРАТЕНКО Денис Юрійович

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема проекту (роботи) "Порівняння методів спектрального аналізу"

керівник проекту (роботи) ЧОРНОБОРОДОВ Михайло Петрович, доцент
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом закладу вищої освіти від " 14 " 11 2023 року № 443

2. Строк подання студентом проекту (роботи) 10.12.2023 р.

3. Вихідні дані до проекту (роботи): тип завади: білий шум й нестационарна шумова завада, тип алгоритма: МНК, НМНК, РНК;

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) здійснити порівняльний аналіз різних алгоритмів налаштування адаптивних фільтрів за методом найменших середніх квадратів за критеріями: залежності відношення вихідного сигнал/шум, швидкість процесу адаптації в залежності від порядку фільтра, залежності помилки алгоритму від коефіцієнта кореляції.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень): презентація Microsoft Office PowerPoint.

6. Консультанти розділів проекту (роботи)

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	прийняв виконане завдання
1-3	ЧОРНОБОРОДОВ М. П., доцент		
Нормоконтроль	МОРОЗ Г.В., ст. викладач		

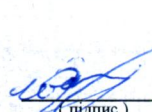
7. Дата видачі завдання " 3 " вересня 20 23 року.

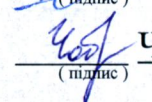
КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів дипломного проекту (роботи)	Строк виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
1	Огляд області дослідження і постановка задачі	05.09-15.09	виконано
2	МНК й РНК алгоритми адаптивної фільтрації	15.09-01.10	виконано
3	Аналіз адаптації шумопригнічувальної системи	01.10-30.11	виконано

Студент(ка)

Керівник дипломної роботи

 ЛІСТРАТЕНКО Д. Ю.
(підпис) (прізвище та ініціали)

 ЧОРНОБОРОДОВ М. П.
(підпис) (прізвище та ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до магістерської роботи: 62 с., 3 табл., 35 рис., 7 джерел.

АДАПТИВНИЙ ФІЛЬТР, ЦИФРОВИЙ ФІЛЬТР, ВАГОВІ КОЕФІЦІЄНТИ, АЛГОРИТМ НАЛАШТОВУВАННЯ, РЕКУРСІЯ, МНК, РМНК.

Об'єкт дослідження – адаптивні фільтри.

Мета роботи – порівняльний аналіз різних алгоритмів налаштування адаптивних фільтрів за методом найменших середніх квадратів.

Метод дослідження – теоретично-розрахунковий з використанням ЕОМ.

Виконано порівняльний аналіз різних алгоритмів налаштування адаптивних фільтрів за методом найменших середніх квадратів.

За виконання магістерської роботи застосовувалися сучасні методи проектування. Проектування здійснювалося на спеціальному програмному забезпеченні й обчислювальній техніці.

ЗМІСТ

	С.
Скорочення та умовні позначки	6
Вступ.....	7
1 Огляд області дослідження і постановка задачі.....	9
1.1 Загальні відомості про адаптивні фільтри.....	9
1.2 Нерекурсивні адаптивні фільтри	11
1.3 Рекурсивні адаптивні фільтри	16
1.4 Алгоритм роботи нерекурсивного адаптивного фільтра	19
1.5 Постановка задачі дипломної роботи	21
2 МНК й РНК алгоритми адаптивної фільтрації	23
2.1 Область застосування	23
2.2 Загальні принципи адаптивної обробки сигналів.....	24
2.3 Оптимальний фільтр Вінера	25
2.4 МНК-алгоритм.....	29
2.5 РНК-алгоритм.....	32
2.6 Підготовчі дії для моделювання МНК і РНК алгоритмів у середовищі MathCAD	35
2.7 Моделювання МНК алгоритму.....	38
2.8 Моделювання РНК алгоритму	42
2.9 Порівняння методів МНК й РНК.....	46
3 Аналіз адаптації шумопригнічувальної системи	47
3.1 Опис фізичної моделі шумопригнічувальної системи	47
3.2 Опис використаної програмної моделі шумозаглушення	49
3.3 Критерії порівняння алгоритмів адаптації фільтра	51
3.4 Оцінка ефективності алгоритмів адаптації	53
Висновки	61
Перелік джерел посилань	62

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

LMS	–	Least Mean Square
RLS	–	Recursive Least Squares
АКФ	–	автокореляційна функція
АЧХ	–	амплітудно-частотна характеристика
ВК	–	вагові коефіцієнти
МНК	–	метод найменших квадратів
РМНК	–	рекурсивний метод найменших квадратів
ЦОС	–	цифрова обробка сигналів

ВСТУП

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) сьогодні широко використовується в радіолокаційних і радіонавігаційних системах, системах радіо-, дрового й оптичного зв'язку; в обчислювальній і побутовій техніці. Це обумовлено величезними теоретичними досягненнями за останні шість десятиліть у цифровій обробці сигналів, а також технологічними досягненнями електронної техніки, що дозволили створювати одночасно компактні і високопродуктивні цифрові пристрої для здійснення алгоритмів ЦОС у реальному масштабі часу. Настільки тривалий розвиток теорії і практики ЦОС призвело до появи в цій області знань ряду самостійних науково-технічних напрямків. Адаптивна обробка сигналів – це один з таких напрямків [1].

Адаптивна обробка сигналів зароджувалася в середині минулого століття. Однак корені використаних у ній математичних методів ідуть у більш далеке минуле. Потім ці методи були використані Вінером, Колмогоровим, Крейном, Левінсоном і рядом інших вчених для формування основних принципів адаптивної обробки сигналів. Використанню ж адаптивної обробки сигналів на практиці людство зобов'язане Бернарду Уїдроу (Bernard Widrow), що наприкінці 50-х років минулого століття розробив і втілював перший адаптивний фільтр на базі Least Mean Square (LMS) алгоритму, також відомого як алгоритм за методом найменшого квадрата (МНК).

Використовувати адаптивну обробку сигналів, під якою звичайно розуміється адаптивна фільтрація, потрібно тоді, коли з поставленою задачею не можуть впоратися фільтри з фіксованими параметрами. Як правило, це – випадки, коли умови фільтрації змінюються. Тому вимоги до параметрів фільтра не можуть бути сформульовані заздалегідь.

Адаптивний фільтр – це фільтр із ваговими коефіцієнтами (ВК), що

перелаштовуються. В залежності від розв'язуваної задачі він може бути одноканальним чи багатоканальним, мати дійсні чи комплексні ВК. Алгоритми їхнього обчислення можуть бути простими, як, наприклад, LMS-алгоритм, чи складними, як, наприклад, Recursive Least Squares (RLS) алгоритм, також відомий як рекурсивний метод найменших квадратів (РМНК).

На сьогодні наявна величезна кількість радіоелектронних виробів, показники роботи яких немислимі без використання адаптивних фільтрів. Прикладами таких виробів є адаптивні антенні ґратки, адаптивні компенсатори сигналів електричної й акустичної луни, адаптивні еквайзери (вирівнювачі) електричних характеристик каналів зв'язку, адаптивні компенсатори шумів і ряд інших пристроїв. Адаптивні фільтри, що входять до складу цих пристроїв, у залежності від використаного алгоритму обчислення ВК, демонструють різну функціональну ефективність.

1 ОГЛЯД ОБЛАСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1.1 Загальні відомості про адаптивні фільтри

Проблема завадозахищеності мовних каналів актуальна для сучасних технічних систем, таких як системи зв'язку і керування. Під мовним каналом розуміють сукупність приймального й передавального пристроїв, а також лінії зв'язку, що працюють з мовними сигналами. Передавання мови, звичайно, ускладнюється потраплянням до каналу різних за походженням завад. Джерело інформаційного повідомлення може знаходитися в цеху з працюючим устаткуванням, у транспорті, поблизу шумливих природних об'єктів – у всіх цих випадках на вхід передавального приладу надходить не тільки корисний сигнал, але й шумова складова. Оскільки така завада виникає в крапці передавання і не пов'язана з якістю лінії зв'язку, підсистему пригнічення доцільно розташовувати всередині передавального приладу. Характеристики завади заздалегідь невідомі, тому в підсистемах пригнічення звичайно використовується адаптивна цифрова фільтрація.

Адаптивний цифровий фільтр має змінні параметри, що перелаштовуються під дією вхідних сигналів. Область застосування адаптивних фільтрів досить велика і містить у собі адаптивне моделювання і керування, шумозаглушення, адаптивні антенні ґратки тощо.

Адаптивні фільтри найкраще використовувати в тих випадках, коли умови поширення сигналу чи системні параметри повільно змінюються, і фільтр необхідно відрегулювати, щоб компенсувати цю зміну.

Складовою частиною адаптивного фільтра, що відповідає за зміну його параметрів, є застосований алгоритм адаптації. Відомо безліч алгоритмів, що розрізняються швидкістю збіжності й обчислювальною складністю.

У традиційних цифрових фільтрах з скінченною (CIX чи FIR) і нескінченною (NIX чи IIR) імпульсними характеристиками передбачається,

що параметри процесу для визначення характеристик фільтра - відомі. І, хоча вони і можуть змінюватися згодом, але передбачається, що характер зміни – відомий. У багатьох практичних задачах наявна велика невизначеність у деяких параметрах через невідповідність даних попередніх відліків процесу, що спостерігається. Можна сказати, що деякі параметри зміняться згодом, але точний характер зміни – не передбачуваний. У таких випадках украй бажано, щоб фільтр був таким, що самонавчається, тобто, щоб він міг адаптуватися до певної ситуації.

У загальному випадку, адаптивний фільтр є нелінійним пристроєм, оскільки його параметри змінюються в процесі його роботи. Однак, для поточного набору параметрів (тобто, їхнього фіксованого значення) адаптивний фільтр є лінійним пристроєм, оскільки між його вхідними і вихідними сигналами звичайно існує лінійна залежність. Вона визначається поточним набором вагових коефіцієнтів фільтра, подібно лінійним фільтрам з фіксованими параметрами.

Таким чином, адаптивний фільтр – це фільтр зі змінюваними в процесі роботи параметрами, набір яких багато в чому залежить від критерію роботи адаптивного фільтра. Цим критерієм часто є досягнення мінімуму деякої цільової функції, як правило, квадратичної функції помилки між так званим зразковим і вихідним сигналами адаптивного фільтра. Досягнення мінімуму цільової функції означає, що вихідний сигнал адаптивного фільтра "близький" до зразкового (desired) сигналу, тобто повторює за формою цей сигнал.

Вихідний сигнал адаптивного фільтра наближується до зразкового сигналу за рахунок зміни вагових коефіцієнтів, що розраховуються на основі обробки зразкового і вхідного сигналу. У сталому режимі, значення вагових коефіцієнтів відповідають мінімуму цільової функції чи її околиці. Оскільки стан адаптивного фільтра змінюється в процесі налаштовування вагових коефіцієнтів, то вважається, що він адаптується (пристосовується) до поточних умов роботи. Тому і такий фільтр, і алгоритм обчислення його

вагових коефіцієнтів називають адаптивними.

Коефіцієнти адаптивного фільтра налаштовуються для компенсації змін вхідного сигналу, вихідного сигналу чи параметрів системи. Замість того, щоб бути незмінною, адаптивна система може вивчати характеристики сигналу і відстежувати повільні зміни. Адаптивний фільтр може бути дуже корисний, коли є невизначеність по відношенню до характеристик сигналу чи зміні цих характеристик.

Найбільш часто використовуваними в обробці звукових сигналів є метод найменших середніх квадратів: LMS, RLS і їхнього різновиди. Критерій найменших середніх квадратів – це алгоритм пошуку, який можна використовувати для надання стратегії коректування коефіцієнтів фільтра.

1.2 Нерекурсивні адаптивні фільтри

На рисунку 1.1 наведено загальну структурну схему автокомпенсатора, у якій вихідний сигнал $y[n]$ адаптивного фільтра порівнюється зі зразковим сигналом $d[n]$ для отримання сигналу помилки $e[n]$ (у змісті мінімального її середньоквадратичного значення), що здійснює перелаштовування вагових коефіцієнтів адаптивного фільтра.

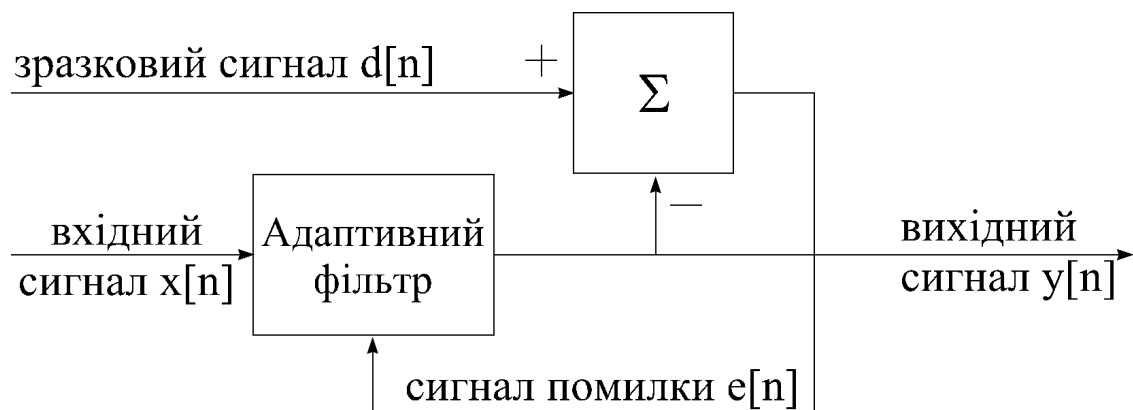


Рисунок 1.1 – Структурна схема автокомпенсатора

Значення коефіцієнтів $w[k]$ адаптивного фільтра оптимізуються для кожного чергового n -відліку вхідного сигналу (чи моменту часу n) на основі алгоритму найменших квадратів за допомоги сигналу помилки $e[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w[k] \cdot x[n-k]. \quad (1.1)$$

Сигнал помилки $e[n]$ є показником ефективності фільтра:

$$e[n] = d[n] - y[n]. \quad (1.2)$$

Коефіцієнти $w[k]$ коректуються таким чином, щоб мінімізувати функцію середньоквадратичної помилки $e^2[n]$. Оскільки для кожного моменту часу n розраховується k коефіцієнтів, то використовують градієнт функції середнього квадрата помилки. Замість розрахунку градієнта можна використовувати оцінку помилки для розрахунку значень вагових коефіцієнтів $w_{n+1}[k]$ для наступного $(n+1)$ моменту часу через їхні значення $w_n[k]$ на поточний момент часу n :

$$w_{n+1}[k] = w_n[k] + 2 \cdot \beta \cdot e[n] \cdot x[n-k], \quad (1.3)$$

де $k=0, 1, \dots, N-1$;

β – адаптивний розмір кроку налаштування вагових коефіцієнтів чи швидкість збіжності (точність) процесу адаптації.

Вираз (1.3) забезпечує простий, але ефективний спосіб обчислення вагових коефіцієнтів без необхідності розрахунку градієнта (диференціювання з усередненням).

Відновлення значень кожного вагового коефіцієнта $w(k)$ згідно (1.3) здійснюється для кожного моменту часу n , якщо сигнал помилки $e(n)$ не дорівнює нулю. У противному випадку, ваги не оновлюють і наступний

$(n+1)$ -відлік вхідного сигналу фільтрується зі старим значенням вагових коефіцієнтів.

Процес адаптації фільтра є стабільним за його налаштуванні на основі фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою і може розбігатися у випадку нескінченної імпульсної характеристики.

Для різних застосувань адаптивної фільтрації вхідної суміші сигналу і завад $s[n]$, використовуються наступні структури:

- шумозаглушення (рис. 1.2);
- ідентифікація об'єкта (рис. 1.3);
- пророкування (рис. 1.4).

На рисунку 1.2 наведено адаптивну структуру, призначену для шумозаглушення. Корисний сигнал $x[n]$ спотворюється некорельованим адитивним шумом $z[n]$. Вхідний сигнал адаптивного фільтра є шумом $z'[n]$, що корелюється з шумом $z[n]$ і не корелюється з корисним сигналом $x[n]$. Завадові шумові сигнали не корельовані з корисним сигналом, але корельовані між собою, оскільки їх отримано від одного джерела. Шум $z'[n]$ може виходити з того ж джерела, що і шум $z[n]$, але змінюватися навколишнім середовищем. Вихідний сигнал адаптивного фільтра мусить налаштуватися на шум $z[n]$. Якщо це відбувається, то вихідний сигнал шумопригнічувального фільтра наближується до корисного сигналу $x[n]$. Саме в цьому і складається відмінність шумопригнічувального фільтра (рис. 1.2) від узагальненої структурної схеми адаптивного фільтра (рис. 1.1): на рисунку 1.2 вихідний сигнал – це сигнал помилки $e[n]$ рисунку 1.1, а не вихід адаптивного фільтра $y[n]$, зображеного на рисунку 1.1.

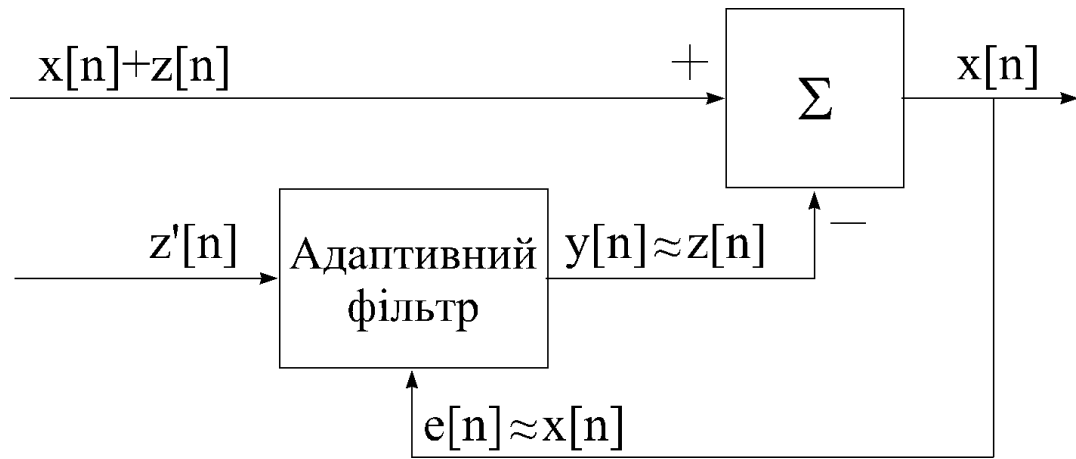


Рисунок 1.2 – Структурна схема шумопригнічувального фільтра

Тому, за роботи в режимі шумозаглушення, адаптивний фільтр моделює акустичне середовище від джерела шуму $z'[n]$ до джерела корисного сигналу $x[n]$. Саме це середовище і перетворює шум $z'[n]$ на $z[n]$.

На рисунку 1.3 наведено структуру адаптивного фільтра, що може використовуватися для ідентифікації чи моделювання об'єкта чи системи. Той самий вхідний сигнал надходить паралельно до адаптивного фільтра і на досліджуваний об'єкт (систему), параметри якої – невідомі. Сигнал помилки $e[n]$ є різницею між відгуком невідомого об'єкта $d[n]$ і відгуком адаптивного фільтра $y[n]$. Сигнал помилки $e[n]$ подається назад до адаптивного фільтра і використовується для відновлення значень його коефіцієнтів доти, поки загальний вихідний сигнал $y[n]$ не стане рівним $d[n]$. Щойно це відбувається, процес адаптації закінчується, і сигнал помилки $e[n]$ стає нульовим. У цій схемі адаптивний фільтр моделює невідомий об'єкт.

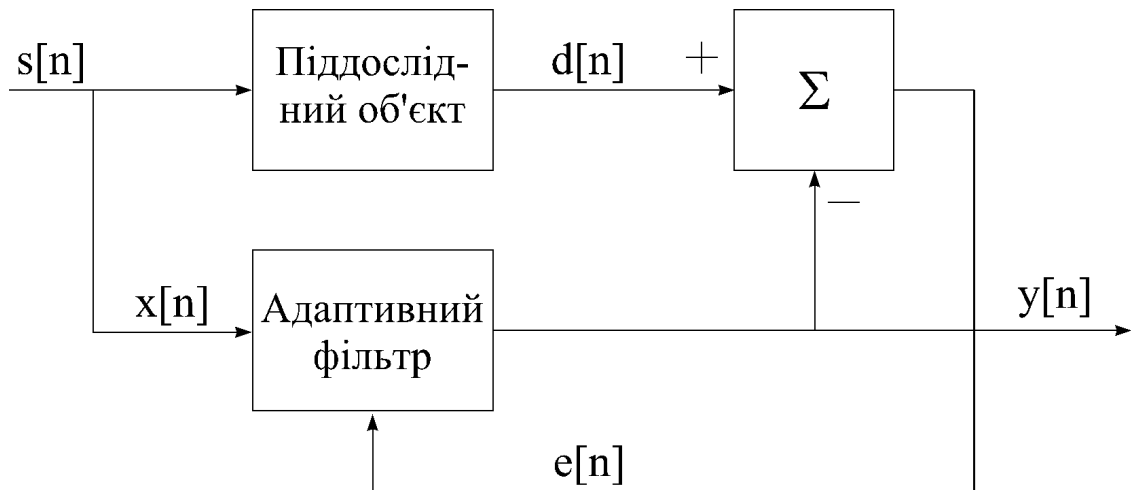


Рисунок 1.3 – Структурна схема моделювання об'єкта

На рисунку 1.4 наведено структурну схему адаптивного провісника, що може екстраполювати вхідні дані. Тобто, зробити оцінку значення наступного (який надійде в момент часу $n+1$) відліку на підставі попередніх миттєвих значень (відліків) вхідного сигналу.

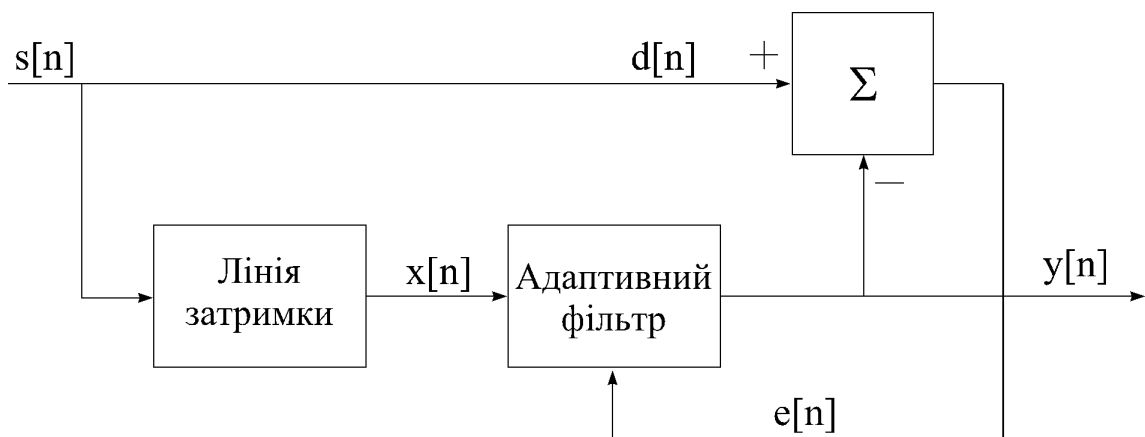


Рисунок 1.4 – Структурна схема адаптивного провісника

Алгоритм налаштування за методом найменших квадратів дуже корисний в адаптивних еквайзерах, телефонних луна-пригнічувачах, схемах керування тощо.

Рекурсивний алгоритм найменших квадратів (РМНК) може

забезпечити більш швидку збіжність, ніж базовий МНК, але за рахунок більшої кількості обчислень. Виграш РМНК виходить за рахунок того, що на початковому етапі (у момент часу $n=0$) фільтрація починається з оптимального розв'язку, а потім кожен відлік вхідного сигналу використовується для відновлення імпульсної характеристики фільтра для збереження наявної оптимальності. Правильний розмір кроку і напрямок визначаються для кожної часової вибірки окремо.

Адаптивні алгоритми для відновлення властивостей сигналів особливо корисні, коли відповідний опорний сигнал недоступний. Фільтр мусить бути адаптований таким чином, щоб відновлення зразкових параметрів зразкового сигналу було виконано до його надходження на вхід адаптивного фільтра. Наприклад, замість зразкової форми сигналу як шаблон, як в алгоритмах МНК, так і РМНК, передбачування використовується для адаптації фільтра. Якщо зразковий сигнал доступний, можна використовувати традиційний підхід, наприклад, алгоритм МНК. У протилежному випадку, використовується апріорне знання про сигнал.

1.3 Рекурсивні адаптивні фільтри

За розгляду статистичної задачі оптимізації, для простоти здійснення, зручно розглядати вхідний сигнал випадковим процесом. Це дозволяє мінімізувати середній квадрат помилки відтворення зразкового сигналу. Однак можливий і інший підхід, що не використовує статистичні методи.

У цьому випадку, оптимізаційна задача має сенс пошуку таких коефіцієнтів фільтра $w[n]$, щоб норма помилки відтворення зразкового сигналу була мінімальною:

$$J(w[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} e^2[n] \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

Для розв'язання задачі у виразах (1.1) й (1.2) необхідно перейти до матричного запису уздовж координати n , отримавши формули для векторів-стовпців вихідного сигналу $y[n]$ і для помилки відтворення вхідного сигналу $e[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \cdot w[k] = X^T \cdot W, \quad (1.5)$$

де S – вектор-стовпець сигналу на вході фільтра,

W – вектор вагових коефіцієнтів фільтра,

$$e[n] = d[n] - \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \cdot w[k] = D - X^T \cdot W. \quad (1.6)$$

Тоді:

$$J(W) = E^T \cdot E \rightarrow \min. \quad (1.7)$$

Тоді шукане оптимальне розв'язку:

$$W = (X \cdot X^T)^{-1} \cdot X \cdot D. \quad (1.8)$$

Скоротити обчислювальні витрати можна, якщо помітити, що на кожному кроці до матриці X додається лише один новий стовпець, а до вектора D – один новий елемент. Це дає можливість організувати обчислення рекурсивно. Відповідний алгоритм називається рекурсивним методом найменших квадратів (РМНК, Recursive Least Square, RLS).

За використання РМНК-алгоритму здійснюється рекурсивне відновлення оцінки зворотної кореляційної матриці $R = (S \cdot S^T)^{-1}$. А розрахунок коефіцієнтів оптимального фільтра здійснюється в наступній послідовності:

1. За надходження чергового відліку вхідного сигналу $x[n+1]$ здійснюється його фільтрація з використанням поточних коефіцієнтів фільтра $W[n]$ і обчислення величини помилки відтворення зразкового сигналу:

$$y[n] = X^T[n] \cdot W[n-1], \quad (1.9)$$

$$e[n] = d[n] - y[n]. \quad (1.10)$$

2. Розраховується вектор-стовпець коефіцієнтів підсилення (слід зазначити, що знаменник дробу в наступних двох формулах є скаляром, а не матрицею):

$$k[n] = \frac{R(n-1) \cdot x(n)}{1 + X^T(n) \cdot R(n-1) \cdot X(n)}. \quad (1.11)$$

3. Здійснюється відновлення оцінки зворотної кореляційної матриці сигналу:

$$R[n] = R[n-1] - k[n] \cdot X^T[n] \cdot R[n-1]. \quad (1.12)$$

4. Здійснюється відновлення коефіцієнтів фільтра:

$$w[n] = w[n-1] + k[n] \cdot e[n]. \quad (1.13)$$

Початкове значення вектора W звичайно приймається нульовим, а за вихідну оцінку матриці R береться діагональна матриця виду $c \cdot I / \sigma_x^2$, де $c \gg 1$ (у [2] рекомендується $c=100$).

У формулах (1.7), (1.9) й (1.10) значенням помилки на всіх часових

тактах надається однакова вага. У результаті, якщо статистичні властивості вхідного сигналу згодом змінюються, це призводить до погіршення якості фільтрації. Щоб фільтр мав можливість відстежувати нестационарний вхідний сигнал, можна застосувати в (1.7) експонентне забування, за якого вага минулих значень сигналу помилки експоненційно зменшується:

$$J(w) = \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^{K-1-k} \cdot e^2[k]. \quad (1.14)$$

При використанні експонентного забування, формули (1.11) і (1.12) приймають наступний вид:

$$k[n] = \frac{R(n-1) \cdot x(n)}{\lambda + X^T(n) \cdot R(n-1) \cdot X(n)}, \quad (1.15)$$

$$R[n] = (R[n-1] - k[n] \cdot X^T[n] \cdot R[n-1]) / \lambda. \quad (1.16)$$

Головною перевагою алгоритму RLS є швидка збіжність. Однак досягається це за рахунок значно більш високої (у порівнянні з алгоритмом LMS) обчислювальної складності.

1.4 Алгоритм роботи нерекурсивного адаптивного фільтра

Алгоритм роботи адаптивного фільтра в загальному виді (рис. 1.1), можна навести у виді наступного набору операцій:

- отримати нову вибірку для зразкового $d[n]$ і еталонного $x[n]$ сигналів адаптивного фільтра;
- розрахувати вихідний сигнал $y[n]$ адаптивного фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою відповідно до виразу (1.1);
- розрахувати сигнал помилки відповідно до виразу (1.2);

– розрахувати значення кожного вагового коефіцієнта відповідно до виразу (1.3);

– повторити весь адаптивний процес для наступного моменту часу (n+1).

Текст програми мовою програмування C:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define beta 0.01 //convergence rate
#define N 21 //order of filter
#define NS 40 //number of samples
#define Fs 8000 //sampling frequency
#define pi 3.1415926
#define DESIRED 2*cos(2*pi*T*1000/Fs) //desired signal
#define NOISE sin(2*pi*T*1000/Fs) //noise signal

main()
{
    long II, T;
    double D, YY, E;
    double W[N+1] = {0.0};
    double XX[N+1] = {0.0};
    FILE *desiired, *YY_out, *error;

    //file for desiired samples
    desiired=fopen("DESIIRED", "w++");
    //file for output samples
    YY_out=fopen("YY_OUT", "w++");
    //file for error samples
```

```

error=fopen("ERROR", "w++");
for(T=0;T<NS;T++) //start adaptive algorithm
{
    XX[0]=NOIIE; //new noise sample
    D=DESIRED; //desired signal
    YY=0; //filter' output set to zero
    //calculate filter output
    for(II=0;II<= N;II++) YY+=(W[II] * XX[II]);
    E=D - YY //calculate error signal
    for(II=N;II>= 0;II--)
    {
        //update filter coefficients
        W[II]=W[II]+(beta*E*XX[II]);
        if(II!=0) XX[II]=XX[II-1]; //update data sample
    }
    fprintf(desired, "\n%10g %10f", (float) T/Fs, D);
    fprintf(YY_out, "\n%10g %10f", (float) T/Fs, YY);
    fprintf(error, "\n%10g %10f", (float) T/Fs, E);
}
fclose (desired);
fclose (YY_out);
fclose (error);
}

```

1.5 Постановка задачі дипломної роботи

Метою даної роботи є проведення порівняльного аналізу трьох алгоритмів адаптивної фільтрації методом найменших квадратів (МНК, НМНК і РМНК) для адаптивного шумопригнічувача (рис. 1.2) за наступними критеріями:

- а) величина коефіцієнту пригнічення завади;
- б) швидкість збіжності до сталого режиму;
- в) обчислювальна складності алгоритму;
- г) характер завади.

2 МНК Й РНК АЛГОРИТМИ АДАПТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

2.1 Область застосування

У даному розділі наведено теоретичні положення, що лежать в основі широко поширених алгоритмів адаптивної фільтрації – методу найменших квадратів (МНК) й рекурсивного методу найменших квадратів (РНК) й проведено їхній порівняльний аналіз. Виконано математичне моделювання роботи алгоритмів для випадку стаціонарних сигналів у середовищі MathCAD.

У традиційних методах обробки даних інформація витягається з вхідних сигналів лінійними системами із сталими параметрами алгоритмів перетворення даних.

Адаптивні пристрої обробки даних відрізняються наявністю визначеного зв'язку параметрів передатної функції з параметрами вхідних, вихідних, очікуваних, прогнозованих тощо додаткових сигналів з параметрами чи їхніх статистичних співвідношень [1]. У найпростішому випадку, адаптивний пристрій містить програмований фільтр обробки даних і блок (алгоритм) адаптації, що на підставі певної програми аналізу вхідних, вихідних та інших додаткових даних здійснює сигнал керування параметрами програмованого фільтра [3].

Імпульсна характеристика адаптивних систем також може мати як кінцевий, так і нескінченний характер. Як правило, адаптивні пристрої виконуються вузкоцільового функціонального призначення під визначені типи сигналів. Внутрішня структура адаптивних систем і алгоритм адаптації практично цілком регламентуються функціональним призначенням і визначеним мінімальним обсягом вихідної апріорної інформації про характер вхідних даних і їх статистичні й інформаційні параметри [2].

Наявна велика кількість адаптивних алгоритмів, що відрізняються

обчислювальною складністю, особливостями поводження, використовуваними вихідними даними і структурами самих адаптивних систем.

2.2 Загальні принципи адаптивної обробки сигналів

Загальну структуру адаптивного фільтра наведено на рисунку 2.1. Вхідний дискретний сигнал $x(k)$ обробляється дискретним фільтром, внаслідок чого виходить вихідний сигнал $y(k)$. Цей вихідний сигнал порівнюється із сигналом-зразком $d(k)$, різниця між ними утворює сигнал помилки $e(k)$. Задача адаптивного фільтра – мінімізувати помилку відтворення зразкового сигналу. З цією метою блок адаптації після обробки кожного відліку аналізує сигнал помилки і додаткові дані, що надходять з фільтра, використовуючи результати цього аналізу для підлаштування параметрів (коефіцієнтів) фільтра.

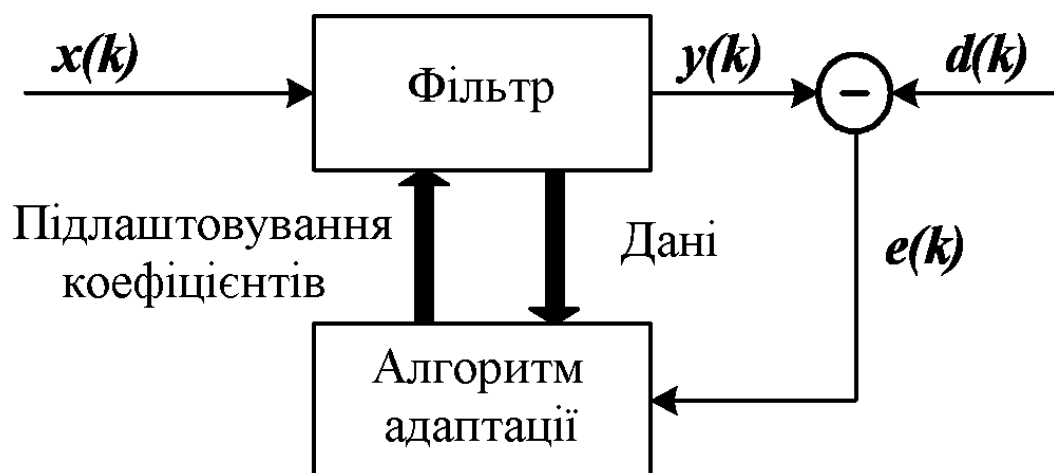


Рисунок 2.1 – Структурна схема адаптивного фільтра

Можливий і інший варіант адаптації, за якого зразковий сигнал не використовується.

Такий режим роботи називається сліпою адаптацією. Зрозуміло, у

цьому випадку потрібно деяка інформація про структуру корисного вхідного сигналу. Сліпа адаптація є більш складною обчислювальною задачею, ніж адаптація з використанням зразкового сигналу.

Може здатися, що алгоритми з використанням зразкового сигналу позбавлені практичного змісту, оскільки вихідний сигнал мусить бути заздалегідь відомий. Однак є цілий ряд практичних задач, за розв'язання яких зразковий сигнал виявляється доступним.

Слід зазначити, що в ряді випадків за цього корисним сигналом є не вихідний сигнал фільтра, а сигнал помилки, тобто різниця між зразковим сигналом і вихідним сигналом адаптивного фільтра [4].

В якості фільтра у структурі, показаній на рисунку 2.1, найчастіше використовується нерекурсивний цифровий фільтр. Одним з головних переваг цього варіанта є те, що нерекурсивний фільтр є стійким за будь-яких значень коефіцієнтів.

Однак варто пам'ятати, що алгоритм адаптації в будь-якому випадку вносить до системи зворотний зв'язок, внаслідок чого адаптивна система в цілому може стати нестійкою.

Наявні адаптивні алгоритми і для рекурсивних фільтрів, однак, за їхньої розробки виникають серйозні проблеми, насамперед, пов'язані зі стійкістю. Тому такі фільтри не набули широкого поширення.

Розглянемо два адаптивних алгоритми з використанням зразкового сигналу, часто застосовуваних на практиці в різних системах обробки інформації.

2.3 Оптимальний фільтр Вінера

Перш ніж розглядати, власне, алгоритми адаптації, необхідно визначити ті оптимальні параметри фільтра, до яких ці алгоритми мусять прагнути. Підхід до задачі оптимальної фільтрації може бути як статистичним, так і детермінованим. Обмежимося розглядом статистичного

варіанта.

Нехай вхідний дискретний випадковий сигнал $x(k)$ обробляється нерекурсивним дискретним фільтром порядку N , коефіцієнти якого може бути подано вектор-стовпцем:

$$w = [w_0, w_1, \dots, w_N]^T.$$

Тоді вихідний сигнал фільтра можна записати як:

$$y(k) = u^T(k) \cdot w, \quad (2.1)$$

де $u(k)$ – вектор-стовпець вмісту лінії затримки фільтра на k -му кроці:

$$u(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N)]^T.$$

Крім того, мається зразковий (також випадковий) сигнал $d(k)$. Помилка відтворення зразкового сигналу дорівнює:

$$e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - u^T(k) \cdot w. \quad (2.2)$$

Необхідно знайти такі коефіцієнти фільтра w , що забезпечують максимальну близькість вихідного сигналу фільтра до зразкового, тобто мінімізують помилку $e(k)$.

Оскільки $e(k)$ також є випадковим процесом, то в якості міри її величини розумно прийняти середній квадрат.

Таким чином, оптимізований функціонал виглядає так:

$$J(w) = \overline{e^2(k)} \rightarrow \min.$$

Квадрат помилки дорівнює:

$$e^2(k)=[d(k)-u^T(k) \cdot w]^2=d^2(k)-2 \cdot d(k) \cdot u^T(k) \cdot w+w^T \cdot u(k) \cdot u^T(k) \cdot w.$$

Статистично усереднюючи цей вираз, отримуємо наступне [3]:

$$J(w)=\overline{e^2(k)}=\overline{d^2(k)}-2 \cdot \overline{d(k) \cdot u^T(k) \cdot w}+w^T \cdot \overline{u(k) \cdot u^T(k) \cdot w}. \quad (2.3)$$

Усереднені величини, що входять до отриманої формули, мають наступний сенс:

$$\overline{d^2(k)}=\sigma_d^2 \text{ – середній квадрат зразкового сигналу;}$$

$\overline{d(k) \cdot u^T(k)}=p^T$ – транспонований вектор-стовпець p взаємних кореляцій між k -м відліком сигналу-зразка й вмістом лінії затримки фільтра; якщо розглянуті випадкові процеси $x(t)$ й $d(k)$ є спільно стаціонарними, то вектор взаємних кореляцій не залежить від номера кроку k ;

$\overline{u(k) \cdot u^T(k)}=R$ – кореляційна матриця сигналу, що має розмір $(N+1) \times (N+1)$. Для стаціонарного випадкового процесу кореляційна матриця має вигляд матриці Теплиця, тобто на її діагоналях знаходяться однакові величини:

$$R = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) & \dots & R_x(N) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(N) & R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

де $R_x(m)=\overline{x(k) \cdot x(k-m)}$ – кореляційна функція (КФ) випадкового процесу $\{x(k)\}$.

З урахуванням уведених позначень, (2.3) набуває наступного вигляду:

$$J(w) = \sigma_d^2 - 2 \cdot p^T \cdot w + w^T \cdot R \cdot w. \quad (2.4)$$

Даний вираз має квадратичну форму відносно w і тому, за невиродженої матриці R , має єдиний мінімум, для відшукування якого необхідно дорівняти нулеві вектор градієнта:

$$\text{grad } J(w) = -2 \cdot p + 2 \cdot R \cdot w = 0.$$

Звідси отримуємо шуканий розв'язок для оптимальних коефіцієнтів фільтра:

$$w = R^{-1} \cdot p. \quad (2.5)$$

Такий фільтр називається фільтром Вінера.

Підстановка (2.5) до (2.4) дає мінімально досягну дисперсію сигналу помилки:

$$\overline{e^2(k)}_{\min} = \sigma_d^2 - p^T \cdot R^{-1} \cdot p. \quad (2.6)$$

Нескладно також показати, що $\overline{e(k) \cdot y(k)} = 0$ й $\overline{e(k) \cdot x(k)} = 0$, тобто, що сигнал помилки для фільтра Вінера некорельований із вхідним і вихідним сигналами фільтра.

Відновлення переданого сигналу неминуче вимагає внесення деякої часової затримки, тому зразковий сигнал є затриманою копію переданого:

$$d(k) = x_0(k - \Delta k).$$

У лінії затримки фільтра на k -му кроці знаходяться відліки

спотвореного сигналу з номерами $k, k-1, k-2, \dots, k-N$, де N - порядок фільтра.

Кожний з цих відліків є лінійною комбінацією відліків переданого сигналу:

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot h(k-n). \quad (2.7)$$

Оскільки вихідний сигнал вважається білим шумом, то за обчислення m -го елемента вектора p результат усереднення буде відмінний від нуля тільки для одного доданку (2.7):

$$x(k) = \overline{x(k-m) \cdot d(k)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \cdot h(k-m-n) \cdot x_0(k-\Delta k)} = h(\Delta k - m).$$

Таким чином, вектор p містить перевернену імпульсну характеристику каналу, за необхідності обрізану чи доповнену нулями з одного чи двох боків.

2.4 МНК-алгоритм

Один з найпоширеніших адаптивних алгоритмів засновано на пошуку мінімуму цільової функції (2.3) методом найшвидшого спуску. За використання даного способу оптимізації, вектор коефіцієнтів фільтра $w(k)$ мусить рекурсивно оновлюватися в такий спосіб:

$$w(k+1) = w(k) - \mu \cdot \text{grad } J(w(k)) / 2 = w(k) + \mu \cdot p - \mu \cdot R \cdot w(k), \quad (2.8)$$

де μ – додатній коефіцієнт, що називається розміром кроку.

Алгоритм сходиться, якщо:

$$0 < \mu < 2/\lambda_{\max},$$

де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число кореляційної матриці R .

Швидкість збіжності за цього залежить від розкиду власних чисел кореляційної матриці R – чим менше відношення $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, тим швидше збігається ітераційний процес.

Однак для розрахунку градієнта необхідно знати значення матриці R і вектора p . На практиці можуть бути доступні лише оцінки цих значень, отримані за вхідними даними.

Найпростішими такими оцінками є миттєві значення кореляційної матриці і вектора взаємних кореляцій, отримані без якого-небудь усереднення:

$$R_m(k) = u(k) \cdot u^T(k),$$

$$p_m(k) = d(k) \cdot u(k).$$

За використання даних оцінок, формула (2.8) набуває наступного вигляду:

$$w(k+1) = w(k) + \mu \cdot d(k) \cdot u(k) - \mu \cdot u(k) \cdot u^T(k) \cdot w(k) = w(k) + \mu \cdot u(k) \cdot [d(k) - u(k)] \cdot w(k). \quad (2.9)$$

Вираз, що стоїть у дужках, згідно (3.2), є різницею між зразковим сигналом і вихідним сигналом фільтра на k -му кроці, тобто помилку фільтрації $e(k)$. З урахуванням цього, вираз для рекурсивного відновлення коефіцієнтів фільтра виявляється дуже простим:

$$w(k+1) = w(k) + \mu \cdot e(k) u(k). \quad (2.10)$$

Алгоритм адаптивної фільтрації, заснований на формулі (2.10), отримав назву методу найменших квадратів (МНК). Можна отримати ту ж формулу і трохи іншим способом – використовуючи замість градієнта статистично усередненого квадрата помилки $\overline{e^2(k)}$ градієнт його миттєвого значення $e^2(k)$.

Аналіз збіжності алгоритму МНК показує, що верхня межа для розміру кроку μ у даному випадку є меншою, ніж за використання справжніх значень градієнта. Ця межа приблизно дорівнює

$$\mu_{\max} \approx \frac{2}{\sum_k \lambda_k} = \frac{2}{\text{trace}(\mathbf{R})} = \frac{2}{(N+1) \cdot \sigma_x^2}, \quad (2.11)$$

де λ_k – власні числа кореляційної матриці $\mathbf{R}$;

σ_x^2 – середній квадрат вхідного сигналу фільтра.

Основною перевагою алгоритму МНК є межева обчислювальна простота: для підлаштування коефіцієнтів фільтра, на кожному кроці потрібно виконати $N+1$ пару операцій множення з додаванням. Платою за простоту є повільна збіжність і підвищена (порівняно до мінімально досяжного значення (2.6)) дисперсія помилки в сталому режимі: коефіцієнти фільтра завжди флюктуюють навколо оптимальних значень (2.5), що і збільшує рівень вихідного шуму.

Відомо велике число модифікацій алгоритму МНК, спрямованих на пришвидшення збіжності або на зменшення числа арифметичних операцій. Пришвидження збіжності може бути досягнуте за рахунок поліпшення використовуваної оцінки градієнта, а також за рахунок перетворення вхідного сигналу з метою зробити його відліки некорельованими.

Зменшення обчислювальної складності може бути досягнуто, зокрема, за рахунок використання в (2.10) не сигналу помилки і вмісту лінії затримки

фільтра, а лише їхніх знаків. Це дозволяє цілком позбутися операцій множення за відновлення коефіцієнтів фільтра.

У цілому, слід зазначити, що вимоги пришвидшення збіжності і скорочення обчислювальних витрат є суперечливими.

2.5 РНК-алгоритм

Вважатимемо за задачу оптимізації відшукування таких коефіцієнтів фільтра w , щоб норма помилки відтворення зразкового сигналу була мінімальною:

$$J(w) = \sum_{k=0}^{K-1} e^2(k) \rightarrow \min. \quad (2.12)$$

Для розв'язання задачі, у виразах (2.1) і (3.2) необхідно перейти до матричного запису уздовж координати k [1]. Отримаємо формули для векторів-стовпців вихідного сигналу y й помилки відтворення вхідного сигналу e :

$$\begin{aligned} y &= U^T \cdot w, \\ e &= d - U^T \cdot w, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де d – вектор-стовпець відліків зразкового сигналу;

U – матриця, стовпці якої формують лінії затримки фільтра на різних тактах.

Вираз (2.13) у матричному вигляді матиме вигляд:

$$J(w) = e^T \cdot e \rightarrow \min. \quad (2.14)$$

Оптимальний розв'язок має вигляд [1]:

$$w=(U \cdot U^T)^{-1} \cdot U \cdot d. \quad (2.15)$$

У формулі (2.13) просліджується зв'язок з формулою (2.5), що описує оптимальний у статистичному сенсі фільтр Вінера.

Таким чином, у процесі приймання сигналу, можна на кожному черговому кроці перераховувати коефіцієнти фільтра безпосередньо за формулою (2.15), однак це пов'язано з невиправдано великими обчислювальними витратами: розмір матриці U невинно збільшується і, крім того, необхідно щоразу наново обчислювати обернену матрицю $(UU^T)^{-1}$.

Скоротити обчислювальні витрати можна, якщо помітити, що на кожному кроці до матриці U додається лише один новий стовпець, а до вектора d – один новий елемент. Це дає можливість організувати обчислення рекурсивно. Відповідний алгоритм називається рекурсивним методом найменших квадратів (РНК).

За використання алгоритму РНК здійснюється рекурсивне відновлення оцінки зворотної кореляційної матриці $P=(U \cdot U^T)^{-1}$, виведення формул ґрунтується на наступній матричній тотожності:

$$(A+B \cdot C \cdot D)^{-1}=A^{-1}-A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1}+D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1}, \quad (2.16)$$

де A й C – квадратні невинроджені матриці (необов'язково однакових розмірів);

B й D – матриці сумісних розмірів.

Застосування формули (2.16) для рекурсивного відновлення зворотної кореляційної матриці P у сполученні з вихідною формулою (2.15) для коефіцієнтів оптимального фільтра дає наступну послідовність кроків адаптивного алгоритму РНК.

1. За надходження нових вхідних даних $u(k)$ здійснюється фільтрація сигналу з використанням поточних коефіцієнтів фільтра $w(k-1)$ й обчислення

величини помилки відтворення зразкового сигналу:

$$y(k)=u^T(k) \cdot w(k-1),$$

$$e(k)=d(k)-y(k).$$

2. Розраховується вектор-стовпець коефіцієнтів підсилення (слід зазначити, що знаменник дробу в наступних двох формулах є скаляром, а не матрицею):

$$K(k) = \frac{P(k-1) \cdot u(k)}{1 + u^T(k) \cdot P(k-1) \cdot u(k)}. \quad (2.17)$$

3. Здійснюється відновлення оцінки зворотної кореляційної матриці сигналу:

$$P(k) = P(k-1) - K(k) \cdot u^T(k) \cdot P(k-1). \quad (2.18)$$

4. Нарешті, здійснюється відновлення коефіцієнтів фільтра:

$$w(k)=w(k-1)+K(k) \cdot e(k).$$

Початкове значення вектора w звичайно приймається нульовим, а в якості вихідної оцінки матриці P використовується діагональна матриця вигляду $C \cdot I / \sigma_x^2$, де $C \gg 1$.

У формулах (2.12) й (2.14) значенням помилки на всіх часових тактах надається однакова вага. У результаті, якщо статистичні властивості вхідного сигналу згодом змінюються, це призводить до погіршення якості фільтрації. Щоб надати фільтрові можливість відстежувати нестационарний вхідний сигнал, в (2.12) можна застосувати експонентне забування, за якого вага

минулих значень сигналу помилки експоненційно зменшується:

$$J(w) = \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^{K-1-k} \cdot e^2(k), 0 < \lambda \leq 1. \quad (2.19)$$

За використання експонентного забування, формули (2.17) й (2.18) набувають наступного вигляду:

$$K(k) = \frac{P(k-1) \cdot u(k)}{\lambda + u^T(k) \cdot P(k-1) \cdot u(k)}.$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \cdot (P(k-1) - K(k) \cdot u^T(k) \cdot P(k-1)).$$

Головною перевагою алгоритму РНК є швидка збіжність. Однак досягається це за рахунок значно більш високої (порівняно до алгоритму МНК) обчислювальної складності. За оптимальної організації обчислень для відновлення коефіцієнтів фільтра на кожному такті потрібно $(2,5 \cdot N^2 + 4 \cdot N)$ пар операцій множення з додаванням.

2.6 Підготовчі дії для моделювання МНК і РНК алгоритмів у середовищі MathCAD

Розглянемо застосування МНК і РНК алгоритмів для випадку стаціонарних сигналів з метою видалення небажаного компонента в сигналі.

Вхідними даними для моделювання є:

- число відліків даних $N=1000$;
- коефіцієнт відновлення МНК $\mu=0,05$;
- коефіцієнт РНК $\lambda=0,99$;
- порядок моделі $m=8$;

- коефіцієнт оновлення енергії $\alpha = -0,005$;
- показник "випадковості" вхідного сигналу $\text{nsrq} = 0,8$.

За цього, збільшення "випадковості" поліпшує ідентифікацію системи [5, 7].

Відношення у бажаному сигналі між компонентами входу й інших компонентів $\text{snr}_i = 1.5$.

Нехай тестова система складається з СІХ-фільтра, що задається наступними коефіцієнтами:

$$c = (0,1 \ 0,24 \ 0,32 \ 0,22 \ 0,15),$$

$$\text{nc} = \text{lenghot}(c).$$

Синусоїдальна компонента вхідного сигналу (який не піддається спостереженню) має вигляд:

$$\text{sq}_i = 0,3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 0,22 \cdot i),$$

за $i = 0, 1, \dots, N+m-1$ і є випадковим:

$$\text{nois} = \text{rnorm}(N+m, 0, \text{nsrq} \cdot \text{stdev}(\text{sq})),$$

$$\frac{\text{stdev}(\text{nois})}{\text{stdev}(\text{sq})} = 0,785$$

$$q_i = \text{sq}_i + \text{nois}_i.$$

Вхідний сигнал (який піддається спостереженню):

$$\text{nv} = \text{rnorm}(N, 0, 0.01)^T,$$

за $i = 0, 1, \dots, N-1$,

$$nv_i=0,$$

$$x_i=q_i+nv_i.$$

Якщо ми використовуємо регресійну модель, тобто $nv=0$, то сигнал, що піддається спостереженню, дорівнюватиме сигналові, що не піддається спостереженню ($x=q$) [6].

Вихідна компонента внаслідок вхідного сигналу:

$$q \cdot y_{nc-1+i} = \sum_j c_j \cdot q_{nc-1+i-j},$$

де $j = 0, \dots, nc-1$.

Адитивна компонента на виході:

$$nnu = \text{rnorm}(N, 0, 0.5),$$

$$nup_i = \sin(2 \cdot \pi \cdot 0.1 \cdot i) + nnu_i$$

$$nu = \frac{\text{stdev}(qy)}{\text{snru} \cdot \text{stdev}(nup)} \cdot nup.$$

Нормалізуємо компоненту так, щоб отримати бажане відношення snru :

$$\frac{\text{stdev}(qy)}{\text{stdev}(nu)} = 1.5.$$

Бажаний сигнал:

$$d_i = nu_i + qy_i.$$

У задачі видалення, qy є небажаною компонентою внаслідок джерела q й хотілося б видалити її, щоб отримати сигнал nu .

У задачі ідентифікації системи nu є адитивним шумом на виході

системи, і нам хотілося б оцінити вектор коефіцієнтів s .

Виберемо інтервали для відображення сигналу: $n_{ij}=100$, $i_j=0$, $i_e=i_j+n_{ij}-1$, $i_j = i_{j1}..i_{j2}$.

Вхідні й вихідні сигнали наведено на рисунках 2.2 та 2.3.

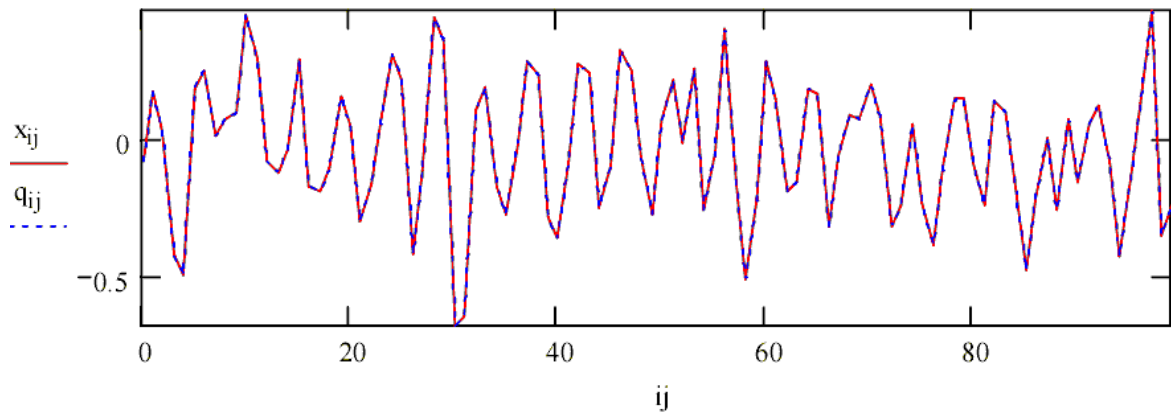


Рисунок 2.2 – Вхідний помітний сигнал x й непомітний q

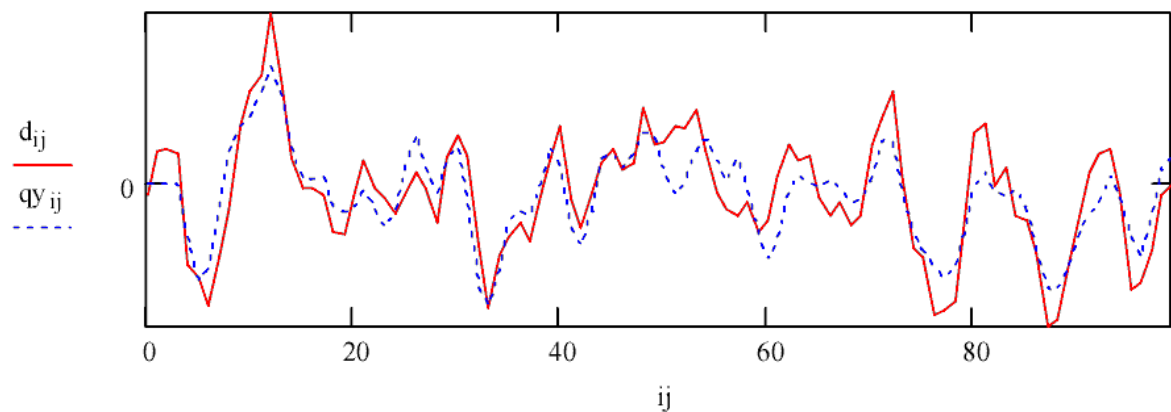


Рисунок 2.3 – Бажаний сигнал d і компонента виходу qy ($\sigma^2=\text{var}(x)=0,073$)

2.7 Моделювання МНК алгоритму

Моделювання МНК-алгоритму (рис. 2.4-2.11) здійснюємо поетапно.

1. Ініціалізуємо нульовими значеннями перші стовпці w .
2. Оновлюємо оцінку енергії.

3. Обчислюємо помилку пророкування.

4. Оновлюємо параметри фільтра.

Текст програми здійснення цих етапів наведено на рисунку 2.4:

$$\left(\begin{array}{c} y \\ W \end{array} \right) := \left| \begin{array}{l} W_{m-1, m-1} \leftarrow 0 \\ \text{for } t \in m-1..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad v_j \leftarrow x_{t-j} \\ \quad \sigma^2 \leftarrow \sigma^2 \cdot (1 - \alpha) + \alpha \cdot (v_0)^2 \\ \quad y_t \leftarrow \left(W^{(t)T} \cdot v \right)_{0,0} \\ \quad e \leftarrow d_t - y_t \\ \quad W^{(t+1)} \leftarrow W^{(t)} + \left[\left(\frac{2 \cdot \mu}{m \cdot \sigma^2} \cdot e \right) \cdot v \right] \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} y \\ W \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Рисунок 2.4 – Текст програми

Отримуємо:

$$W^{<\text{cols}(W)-1>T} (0.12 \ 0.249 \ 0.317 \ 0.227 \ 0.141 \ -0.021 \ -0.013 \ 4.907 \ 10)$$

$$c_{m-1} = 0$$

$$c^T = (0.1 \ 0.24 \ 0.32 \ 0.22 \ 0.15 \ 0 \ 0 \ 0)$$

5. Виконання процедури видалення оціненої компоненти внаслідок джерела x з бажаного сигналу d : $er_i = d_i - y_i$, $\text{var}(d) = 0.013$, $\text{var}(er) = 5.025 \cdot 10^{-3}$.

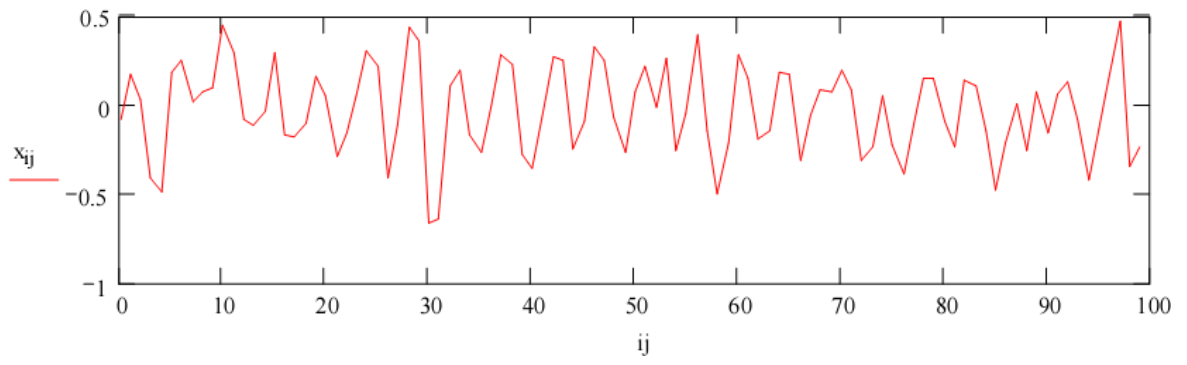
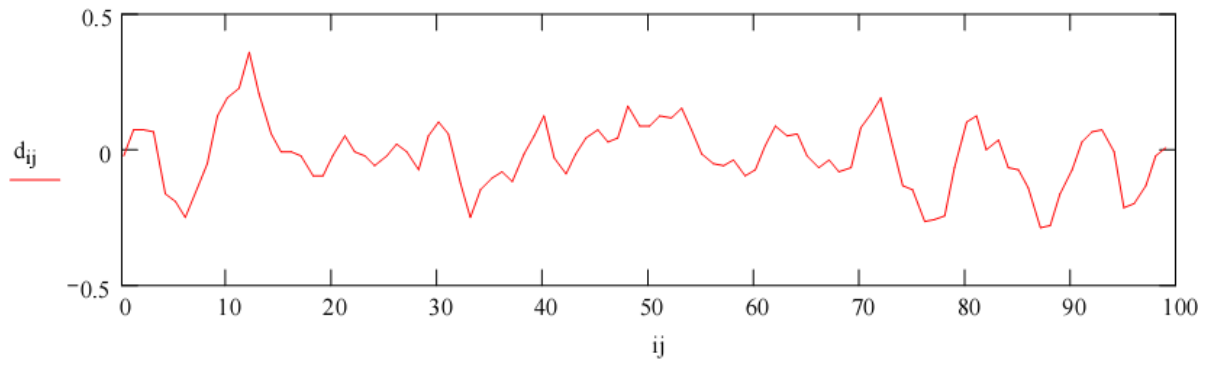
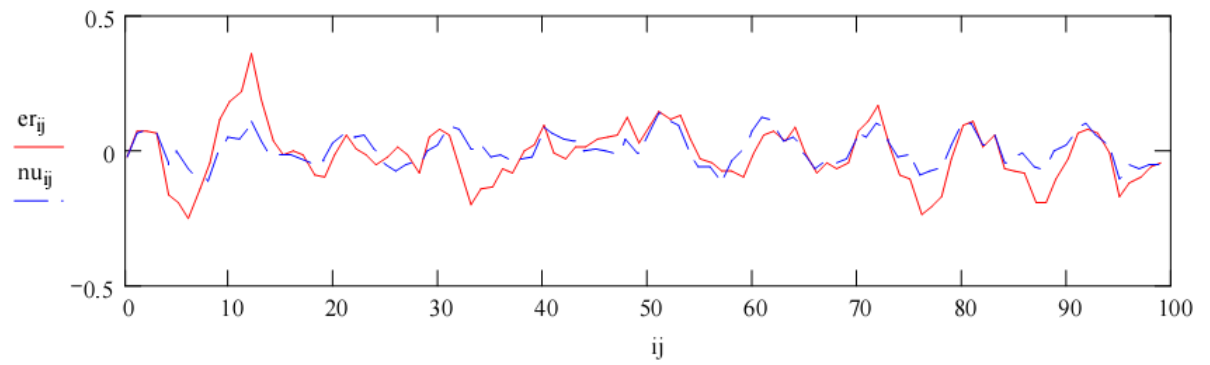
Рисунок 2.5 – Вхідний сигнал x Рисунок 2.6 – Бажаний сигнал d 

Рисунок 2.7 – Сигнали шумової складової й помилки

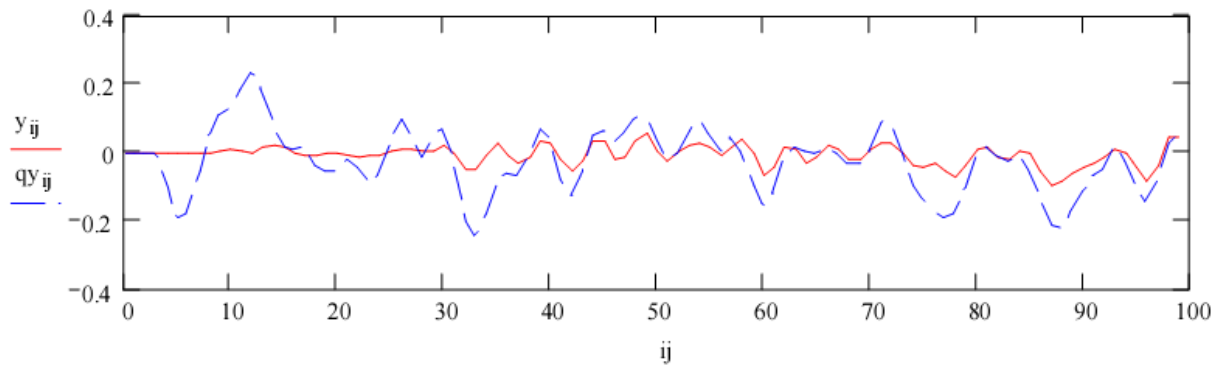


Рисунок 2.8 – Небажана компонента

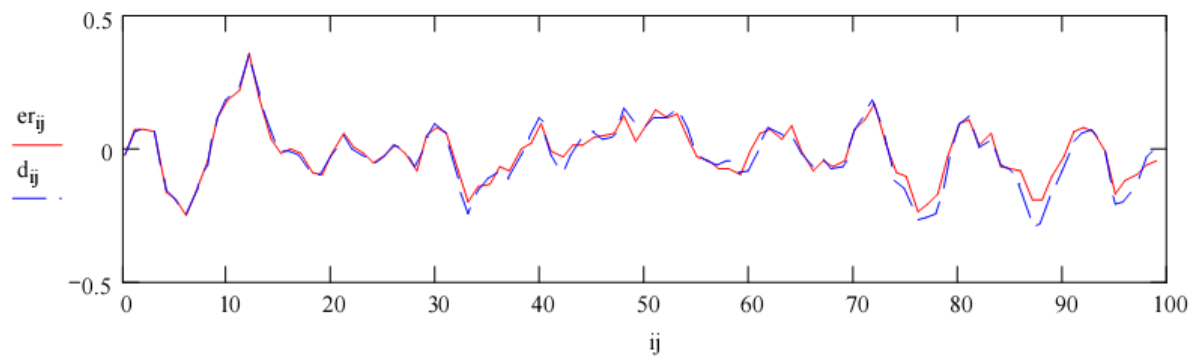


Рисунок 2.9 – Сигнали бажаний й помилки

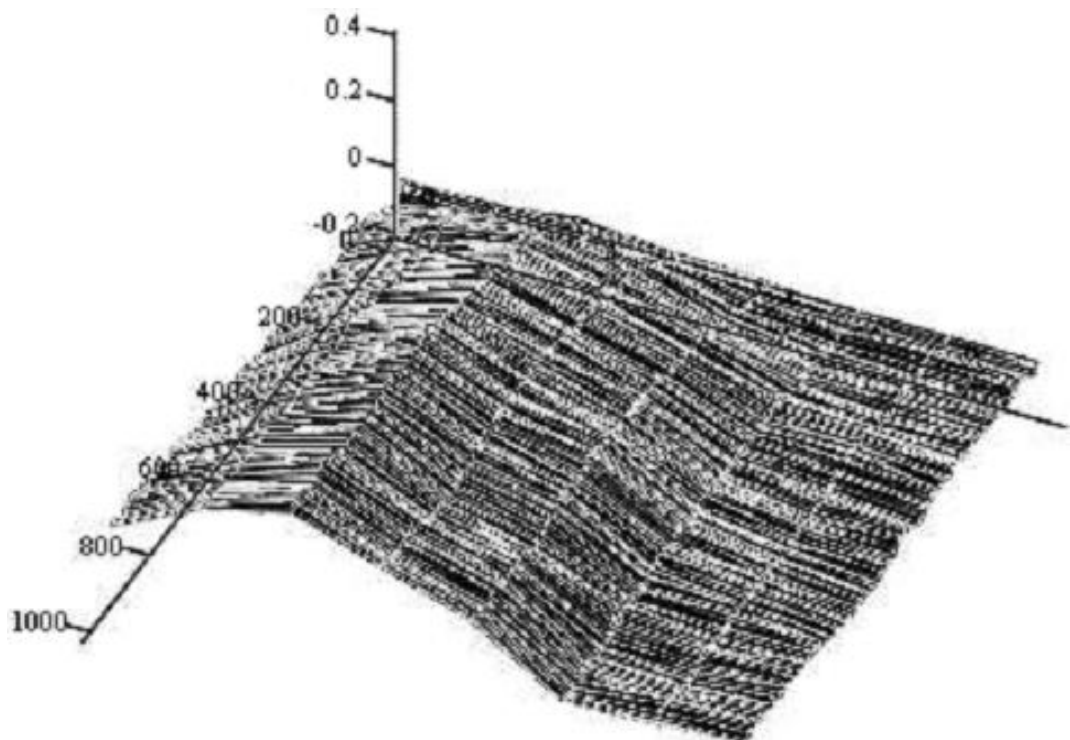


Рисунок 2.10 – Матриця W у просторі

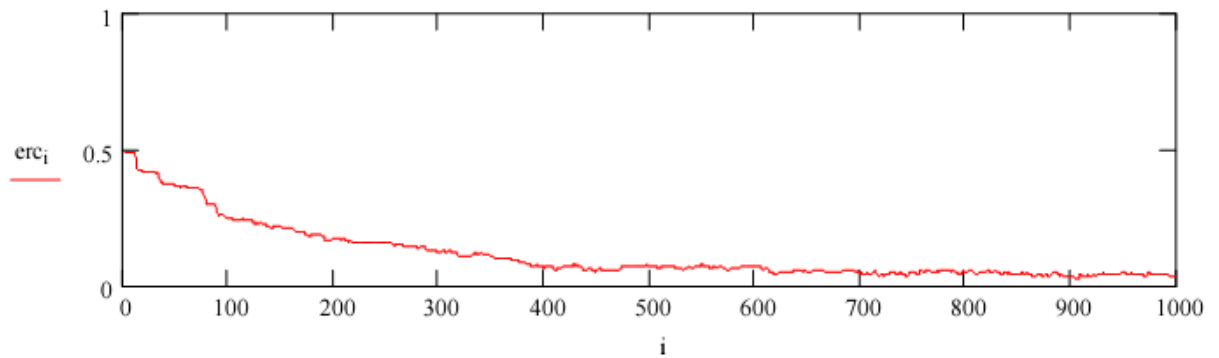


Рисунок 2.11 – $erc_i = |W^{<i>-c|}$, $erc_{last(erc)} = 0.035$.

2.8 Моделювання РНК алгоритму

Моделювання РНК-алгоритму (рис. 2.12-2.19) здійснюємо поетапно.

1. Ініціалізуємо нульовими значеннями перші стовпці w .
2. Обчислюємо апріорну помилку пророкування.
3. Обчислюємо вектор приросту.
4. Оновлюємо параметри фільтра.
5. Оновлюємо інвертоване значення автокореляційної матриці.

Текст програми здійснення цих етапів наведено на рисунку 2.12.

$$\left(\begin{array}{c} y \\ W \end{array} \right) := \left| \begin{array}{l} W_{m-1, m-1} \leftarrow 0 \\ \delta \leftarrow 0.001 \\ C \leftarrow \delta^{-1} \cdot \text{identity}(m) \\ \text{for } t \in m-1..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad v_j \leftarrow x_{t-j} \\ y_t \leftarrow \left(W^{(t)}{}^T \cdot v \right)_{0,0} \\ e \leftarrow d_t - y_t \\ \mu \leftarrow \left(v^T \cdot C \cdot v \right)_{0,0} \\ g \leftarrow \frac{C \cdot v}{\lambda + \mu} \\ W^{(t+1)} \leftarrow W^{(t)} + g \cdot e \\ C \leftarrow \frac{C - g \cdot v^T \cdot C}{\lambda} \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} y \\ W \end{array} \right) \end{array} \right|$$

Рисунок 2.12 – Текст програми

Отримуємо:

$$W^{<\text{cols}(W)-1>T} (0.126 \ 0.264 \ 0.309 \ 0.235 \ 0.135 \ -0.024 \ -6.561 \ 10 \ 0.011)$$

$$c_{m-1}=0$$

$$c^T=(0.1 \ 0.24 \ 0.32 \ 0.22 \ 0.15 \ 0 \ 0 \ 0)$$

6. Виконання процедури видалення оціненого компонента внаслідок джерела x з бажаного сигналу d : $er_i = d_i - y_i$, $\text{var}(d)=0.013$, $\text{var}(er)=4.658 \cdot 10^{-3}$.

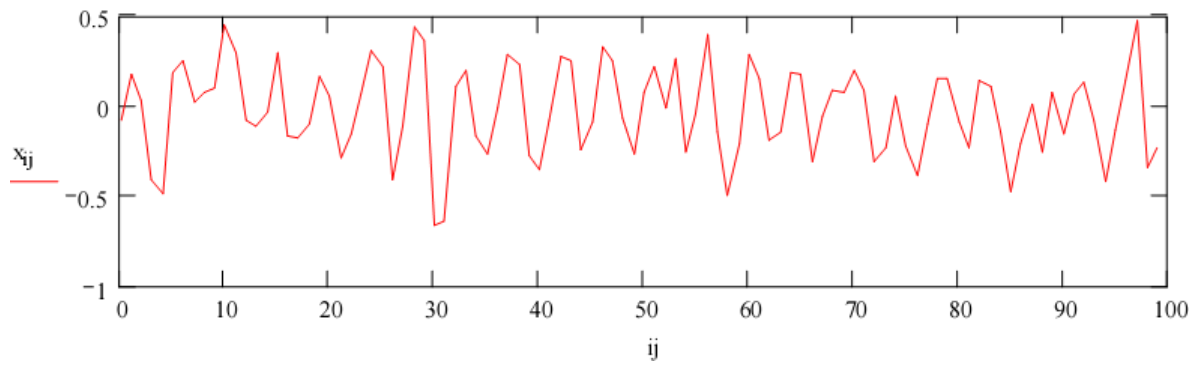
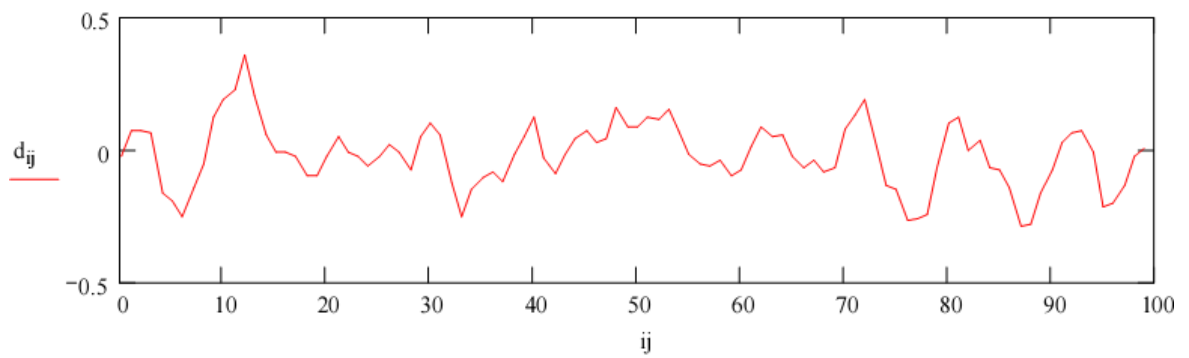
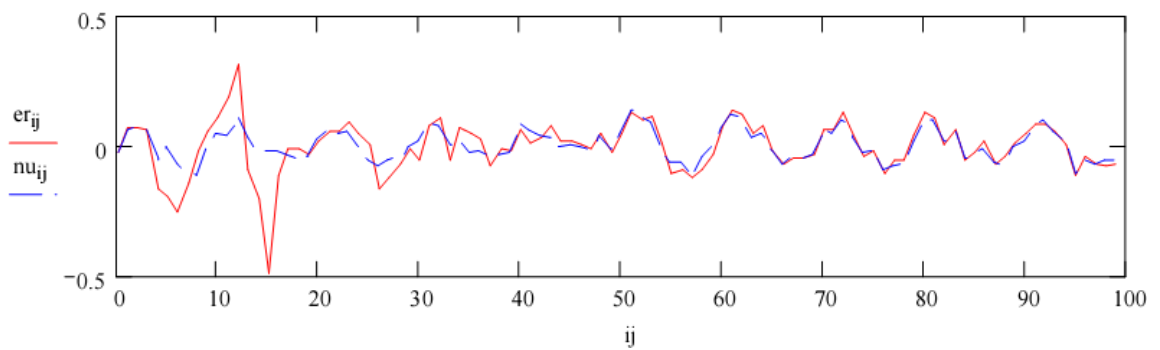
Рисунок 2.13 – Вхідний сигнал x Рисунок 2.14 – Бажаний сигнал d 

Рисунок 2.15 – Сигнали шумової складової й помилки

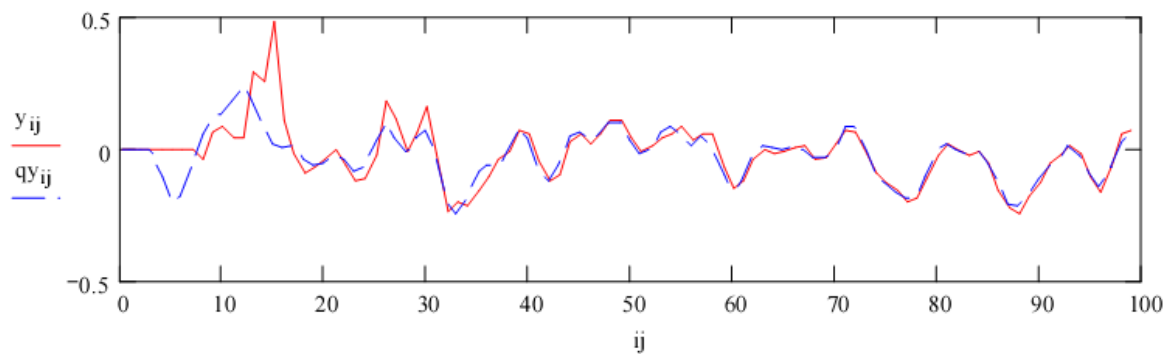


Рисунок 2.16 – Небажана компонента

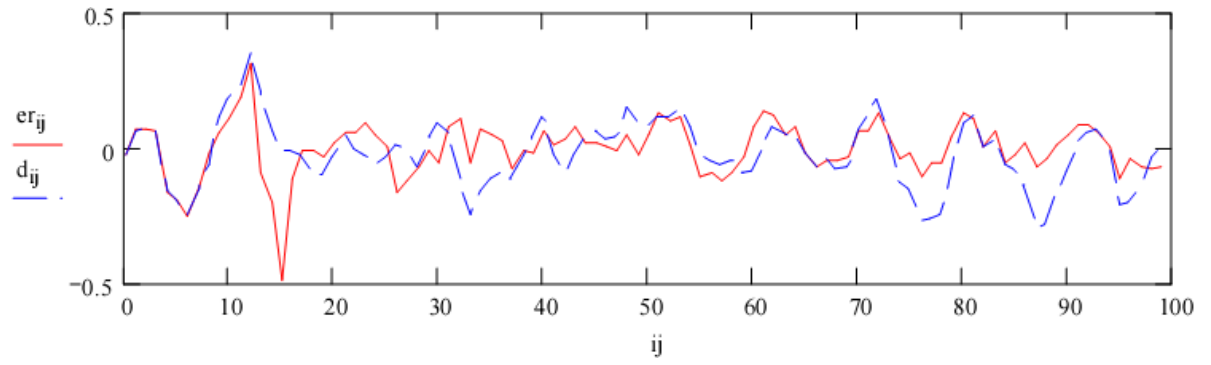


Рисунок 2.17 – Сигнали бажаний й помилки

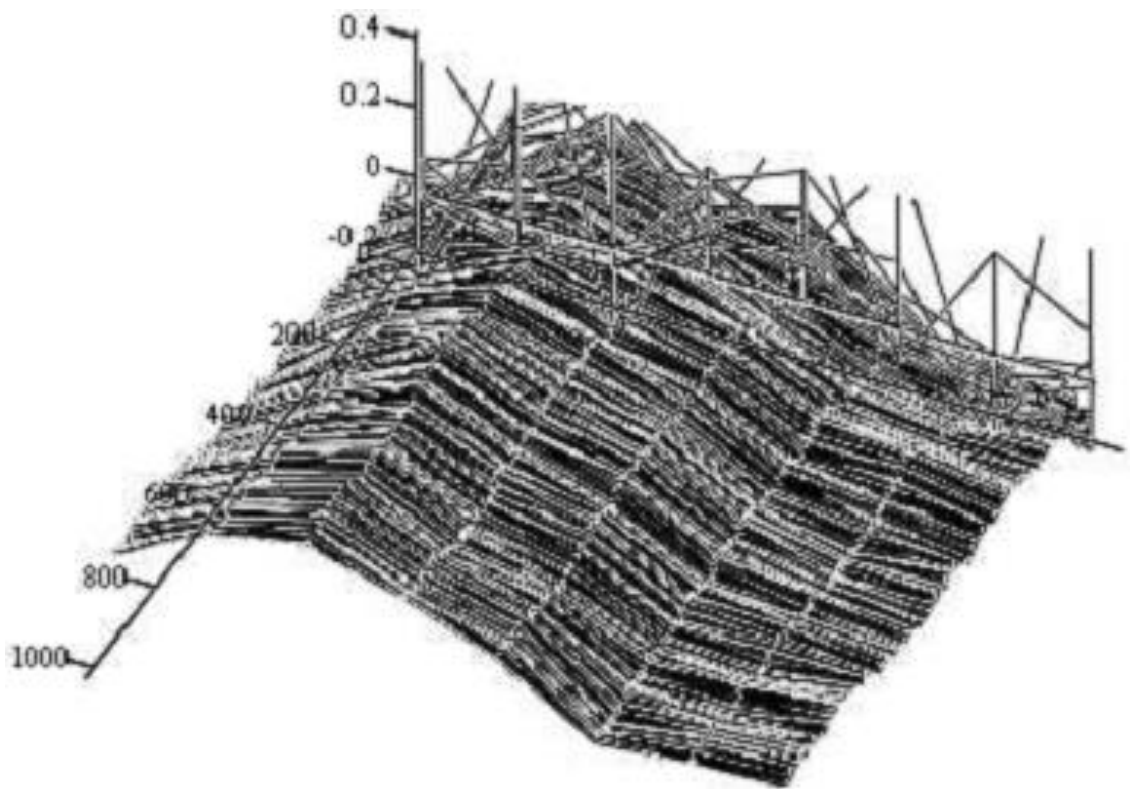


Рисунок 2.18 – Матриця W у просторі

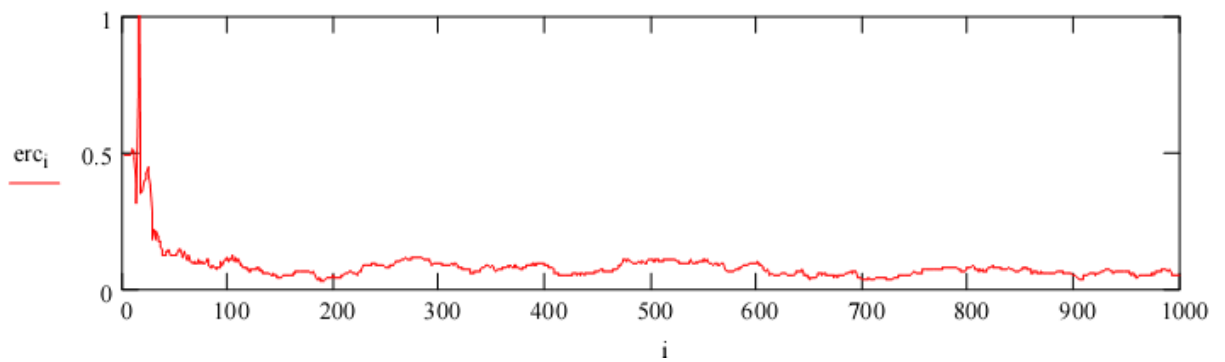


Рисунок 2.19 – $e_{rc_i} = |W^{<i>} - c|$, $e_{rc_{last}(erc)} = 0.05$

2.9 Порівняння методів МНК й РНК

На рисунках 2.4-2.19 продемонстровано можливість використання МНК й РНК алгоритмів для випадку стаціонарних сигналів з метою видалення небажаного компонента в сигналі. Значення коефіцієнтів СІХ-фільтра, обчислені з використанням МНК і РНК алгоритмів, як і треба було очікувати, – збіглися. Видно, що алгоритм РНК має більш швидку збіжність, порівняно до МНК, що досягається за рахунок його значно більш високої (порівняно до алгоритму МНК) обчислювальної складності.

3 АНАЛІЗ АДАПТАЦІЇ ШУМОПРИГНІЧУВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

3.1 Опис фізичної моделі шумопригнічувальної системи

Об'єктом моделювання є двохмікрофонна (рис. 3.1) система шумозаглушення (рис. 3.2). Перший мікрофон, що формує сигнально-шумову суміш ($d[n]=x[n]+z[n]=\text{сигнал}+\text{шум}$), розташовується поруч із тим, хто говорить. Другий мікрофон, що формує шум' ($z'[n]$) розташовується поруч із джерелом шуму, яке не можна фізично усунути: наприклад, поруч з вентилятором, двигунами автомобіля (літака чи вертольота) тощо.

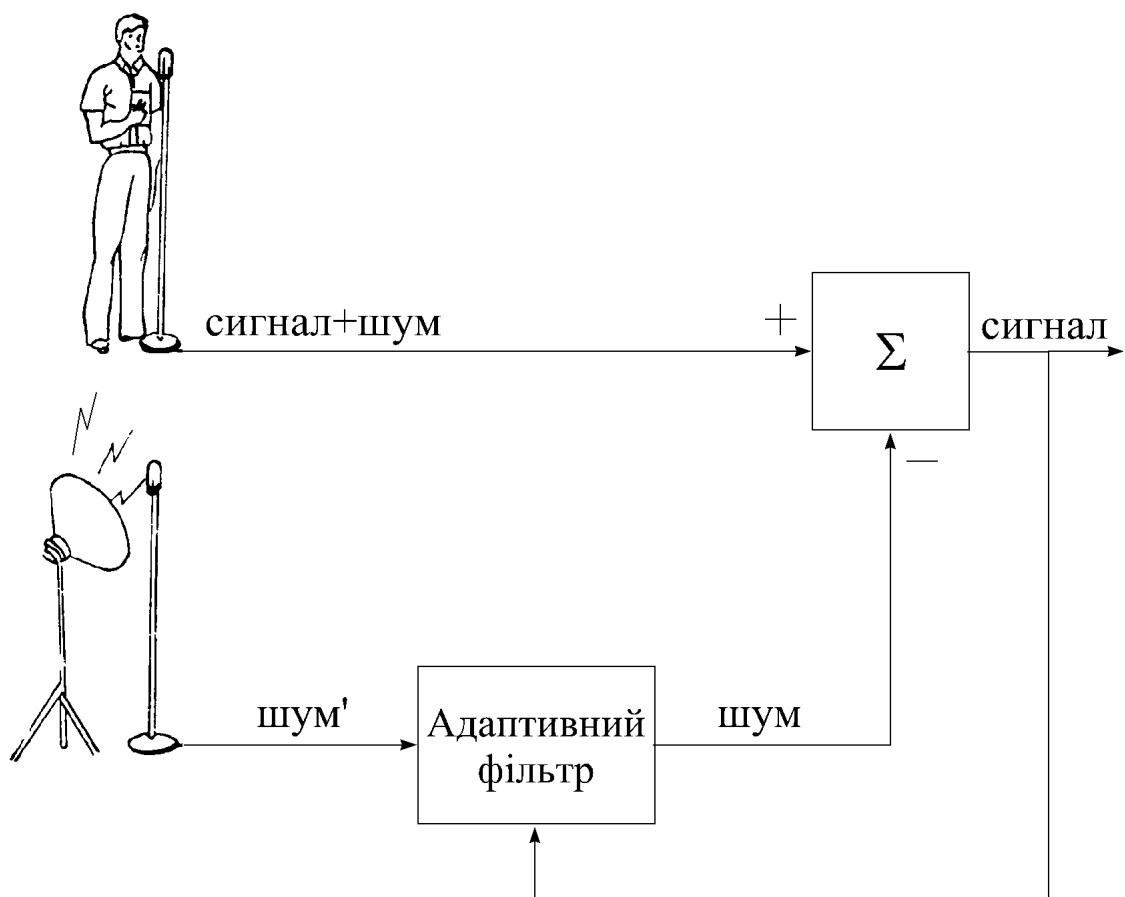


Рисунок 3.1 – Шумопригнічувальна система

Якщо адаптивний фільтр розглядати як трансверсальний, то його вихідний сигнал визначається виразом:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N w_k[n-1] \cdot x[n-k+1] = W_N^T(n-1) \cdot X_N(k), \quad (3.1)$$

де $X_N(k) = \{x[n], x[n-1], \dots, x[k-n+1], \dots, x[k-N+1]\}$ – вектор відліків вхідного сигналу;

$W_N(n-1) = \{w_1[n-1], w_2[n-1], \dots, w_k[n-1], \dots, w_N[n-1]\}$ – вектор вагових коефіцієнтів.

Оптимальне оцінювання засноване на мінімізації цільової функції середньоквадратичної помилки:

$$\xi = e^2[n]. \quad (3.2)$$

Значення вектора вагових коефіцієнтів, що відповідає мінімуму ξ , знаходять відповідно до рівняння Винера-Хопфа:

$$W_N = R_N^{-1} \cdot r_N, \quad (3.3)$$

де R_N – автокореляційна матриця вхідного сигналу, кожен елемент якої є добутком двох його відліків:

$$R_N = X_N \cdot X_N^T = \begin{bmatrix} x^2[k] & x[k] \cdot x[k-1] & \dots & x[k] \cdot x[k-N+1] \\ x[k-1] \cdot x[k] & x^2[k-1] & \dots & x[k-1] \cdot x[k-N+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x[k-N+1] \cdot x[k] & x[k-N+1] \cdot x[k-1] & \dots & x^2[k-N+1] \end{bmatrix};$$

r – кореляційний вектор зразкового і вхідного сигналів, кожен елемент якого є добутком поточного відліку сигналу $d[n]$ і одного з елементів X_N :

$$r = \{d[k] \cdot x[k], d[k] \cdot x[k-1], \dots, d[k] \cdot x[k-N+1]\} \dots$$

Оскільки на практиці точні значення параметрів R_N і r визначити неможливо, то використовують їхні оцінки і спрощені цільові функції.

За вінерівського оцінювання необхідно прийняти мовний і завадовий сигнали стаціонарними. Це дозволяє виконувати оцінки автокореляційної матриці R_N вхідного сигналу, а також кореляційний вектор r зразкового і вхідного сигналів, усередненими за часом. Це забезпечує накопичення значення помилок, отриманих на всіх попередніх n ітераціях алгоритму.

Введення коефіцієнта забування λ у цільову функцію мінімізації (3.2):

$$\xi = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \cdot e^2[i], \quad (3.4)$$

дозволяє регулювати внесок попередніх помилок на оцінку для поточної ітерації. Такий підхід закладений в основу алгоритму рекурсивного методу найменших квадратів.

3.2 Опис використаної програмної моделі шумозаглушення

Для моделювання адаптивного шумопригнічувача, використовувалася розроблена програмна модель у середовищі "Simulink". Структуру моделі наведено на рисунку 3.2.

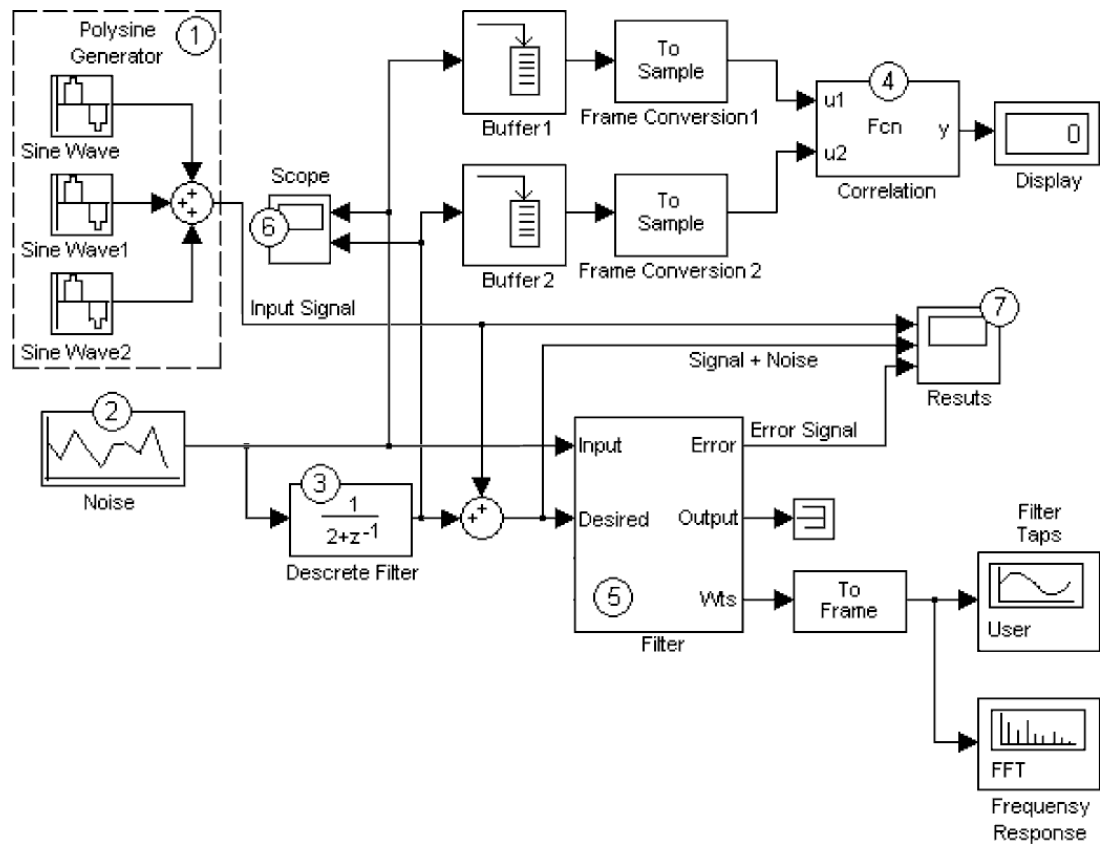


Рисунок 3.2 – Програмна модель шумозаглушення

Модель складається з наступних значеннєвих блоків.

1. Блок генерації полігармонійного сигналу:

$$S(t) = \sum_{i=1}^k A_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t + \phi_i), \quad (3.5)$$

де k – кількість використаних за моделювання гармонійних сигналів частоти ω і початкової фази ϕ .

2. Джерело шуму.

3. Дискретний фільтр другого порядку, що використовується для моделювання акустичних перетворень шуму за його поширення в напрямку першого мікрофона з метою формування відмінності параметрів шуму від шуму в сигналі – дивись рисунок 1.2.

4. Блок обчислення коефіцієнта кореляції за формулою:

$$\rho = \frac{\text{cov}(s_1, s_2)}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}}. \quad (3.6)$$

5. Адаптивний фільтр, що налаштовується за необхідним алгоритмом.
6. Осцилограф.
7. Засіб побудови необхідних залежностей (у залежності від обраних критеріїв порівняння результатів адаптації фільтра).

3.3 Критерії порівняння алгоритмів адаптації фільтра

Критерії, за яких можна порівняти алгоритми, мають враховувати як якість пригнічення завади, так і складність здійснення алгоритму в реальній системі.

Критерієм якості роботи адаптивного алгоритму може служити коефіцієнт пригнічення завади. Його визначають як різницю відношень сигнал/шум (ОСШ) на виході фільтра в сталому режимі до відношення на його вході:

$$\rho = \text{ОСШ}_{\text{ввых}} - \text{ОСШ}_{\text{вх}}, \text{ дБ}, \quad (3.7)$$

Швидкість збіжності алгоритму адаптації до найкращого вектора вагових коефіцієнтів, обумовлену числом ітерацій $K_{\text{уст}}$ обчислення ваг до настання сталого режиму. Цей критерій показує як швидко адаптивний алгоритм пристосовується до заданих умов.

Щоб оцінка обчислювальної складності не залежала від програмного чи апаратного здійснень алгоритму адаптації, оцінимо її в такий спосіб. Проведемо підрахунок тільки векторних операцій додавання і множення, кількість яких пропорційно розмірності матриць і векторів. Одиночні операції додавання і множення між парами чисел не враховуються. Більш

складні операції підраховуються окремо. Операції рахують для однієї ітерації алгоритму.

Оскільки всі алгоритми адаптації відрізняються, по суті, тільки способами обчислення функції помилки і розрахунку вагових коефіцієнтів, то обчислювальну складність алгоритмів оцінимо в такий спосіб:

- множення вектора на стовпець вимагає N операцій додавання і N операцій множення;
- множення вектора на число вимагає N операцій множення;
- додаток числа до вектора вимагає N операцій додавання.

Обчислювальну складність алгоритмів наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Обчислювальна складність алгоритмів

Алгоритм	Обчислювальна процедура	Обчислювальна складність
МНК	$e[n] = d[n] - W_N^T(n-1) \cdot X_N(n),$ $W_N[n] = W_N[n-1] + 2 \cdot \mu \cdot X_N(n) \cdot e[n]$	$2 \cdot N$ додавань $2 \cdot N$ множень
НМНК	$e[n] = d[n] - W_N^T(n-1) \cdot X_N(n),$ $W_N[n] = W_N[n-1] + \frac{2 \cdot \mu}{X_N^T(n) \cdot X_N(n)} \cdot X_N(n) \cdot e[n]$	$3 \cdot N$ додавань $3 \cdot N$ множень 1 розподіл
РМНК	$G_N[n] = \frac{R_N^{-1}(n-1) \cdot X_N(n)}{\lambda + X_N(n) \cdot R_N^{-1}(n-1) \cdot X_N(n)},$ $R_N^{-1}(n) = \lambda^{-1} \cdot (R_N^{-1}(n-1) - G_N(n) \cdot X_N^T(n) \cdot R_N^{-1}(n-1))$ $e[n] = d[n] - W_N^T(n-1) \cdot X_N(n),$ $W_N[n] = W_N[n-1] + G_N(n) \cdot e[n],$	$2 \cdot N^2 + 3 \cdot N$ додавань $3 \cdot N^2 + 3 \cdot N$ множень 1 розподіл

де $G_N[n]$ – вектор коефіцієнтів фільтра Калмана, що є, власне кажучи, набором змінних кроків збіжності для кожного вагового коефіцієнта.

3.4 Оцінка ефективності алгоритмів адаптації

Для оцінки ефективності алгоритмів адаптації з метою пригнічення шумів у мовному каналі, був використаний програмний пакет MATLAB від MathWorks. На мовний сигнал накладалася завада і цей вхідний вплив пропускався через адаптивні фільтри, що налаштовуються за різними алгоритмами.

В якості завади було використано моделі чотирьох сигналів:

- білий шум;
- рожевий шум¹;
- синусоїдальний сигнал;
- нестационарний сигнал.

Число вагових коефіцієнтів фільтра $N=16$.

Параметри збіжності наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Обчислювальна складність алгоритмів

Алгоритм	Назва параметра	Нормована обчислювальна складність
МНК	крок збіжності μ	0,01
НМНК	крок збіжності μ	0,1
РМНК	коефіцієнта забування λ	1

¹ Рожевий (чи флікер-шум) має спектральну щільність потужності, зворотньопропорційну частоті. Тобто, визначається формулою $1/f$, внаслідок чого рівномірно спадає за логарифмічною шкалою частот. Рожеві шуми – це тип звуку, у якому всі октави мають однакову силу чи цілком узгоджені частоти. Наприклад, шум дощу, що падає на тротуар, чи вітру, що шелестить листами дерев. Назва цих шумів пов'язана з тим, що світло з аналогічною спектральною щільністю мало б рожевий відтінок.

На рисунку 3.3 наведено залежності відношення сигнал/шум на виході адаптивного фільтра від номера ітерації n для різних алгоритмів за білого шуму на вході фільтра. Як видно, всі алгоритми сходяться майже з однаковою швидкістю, але МНК і НМНК - приблизно до тому самому значення, а РМНК – до більшого. Це ілюструє більшу ефективність фільтра з рекурсивним алгоритмом налаштування за пригнічення стаціонарних завад.

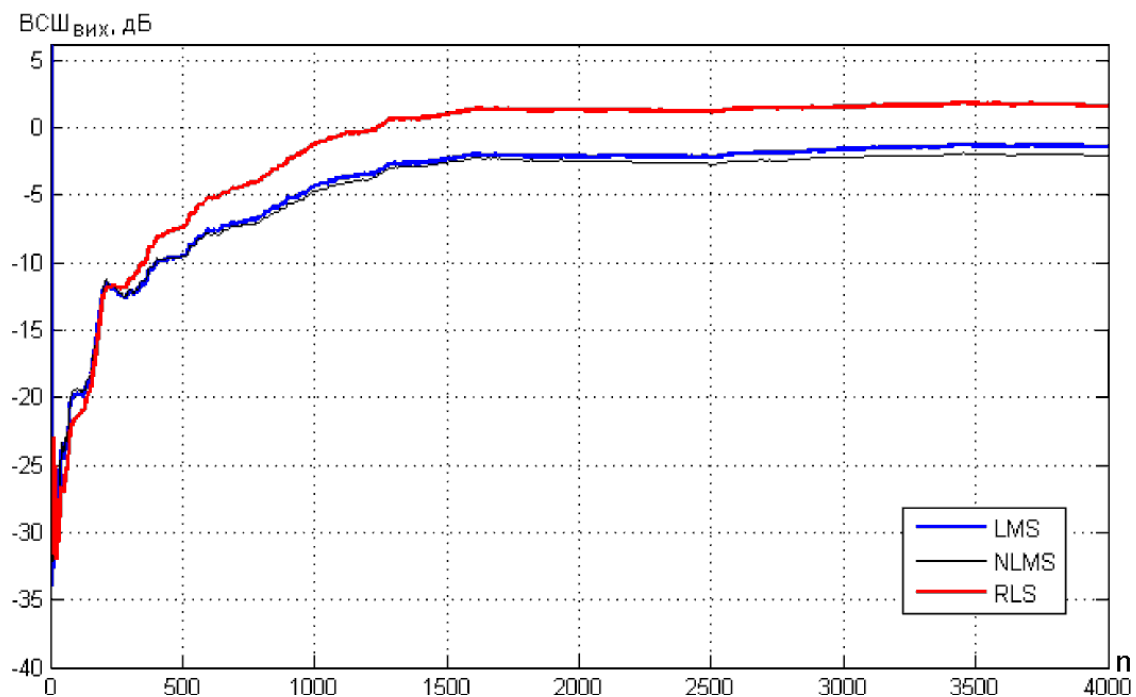


Рисунок 3.3 – Відношення сигнал/шум на виході адаптивного фільтра для різних алгоритмів адаптації за білого шуму на його вході

У таблиці 3.3 наведено результати швидкості збіжності і коефіцієнт пригнічення завади в сталому режимі.

Таблиця 3.3 – Швидкість збіжності і коефіцієнт пригнічення завади в сталому режимі

Алгоритм	МНК		НМНК		РМНК	
Завада	$K_{уст}$	ρ , дБ	$K_{уст}$	ρ , дБ	$K_{уст}$	ρ , дБ
Білий шум	5701	6,12	6463	6,23	8897	8,81
Рожевий шум	5670	1,23	3679	1,44	7423	1,62
Синусоїдальний сигнал	7673	21,91	3327	19,76	більш 20000	37,51
Нестационарний сигнал	більш 20000	23,94	8183	15,78	–	–

МНК забезпечує велику швидкість збіжності на білому шумі, НМНК – на інших. Найбільший коефіцієнт пригнічення – в алгоритму РМНК за перших трьох типів шумів на вході. Цей же алгоритм демонструє найповільнішу збіжність.

Якість пригнічення в LMS- і NLMS-алгоритмів приблизно однакова. Також з таблиці 3.3 видно, що найбільший коефіцієнт пригнічення відповідає синусоїдальній заваді, а найбільша швидкість збіжності – рожевому шуму.

На рисунку 3.4 наведено залежності відношення сигнал/шум на виході адаптивного фільтра від номера ітерації n для різних алгоритмів за нестационарної завади на його вході: РМНК-алгоритм розбігається і не досягає сталого режиму, а МНК-алгоритм збігається, але істотно повільніше, ніж НМНК.

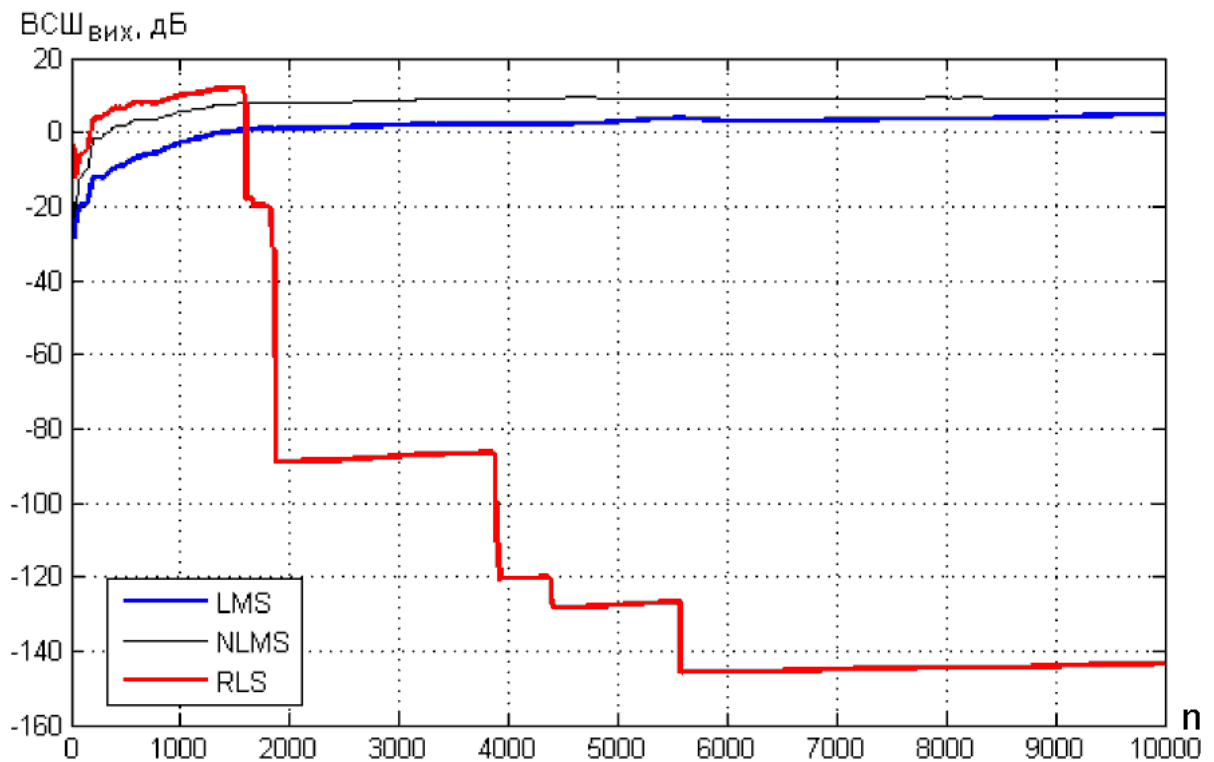


Рисунок 3.4 – Відношення сигнал/шум на виході адаптивного фільтра для різних алгоритмів адаптації за нестационарної завади на його вході

Для оцінки впливу порядку фільтра на швидкість процесу адаптації на рисунку 3.5 наведено залежності вихідного відношення сигнал/шум для рекурсивного алгоритму налаштування за критерієм мінімуму середніх квадратів від кількості вагових коефіцієнтів за впливу білого шуму. Можна побачити, що із зростанням порядку фільтра ступінь пригнічення завади - поліпшується. Однак, починаючи з $N=32$, швидкість збіжності спадає. Отже, підвищення порядку фільтра не завжди буде виправданим. У результаті моделювання отримано, що цей висновок справедливий і для нерекурсивних алгоритмів.

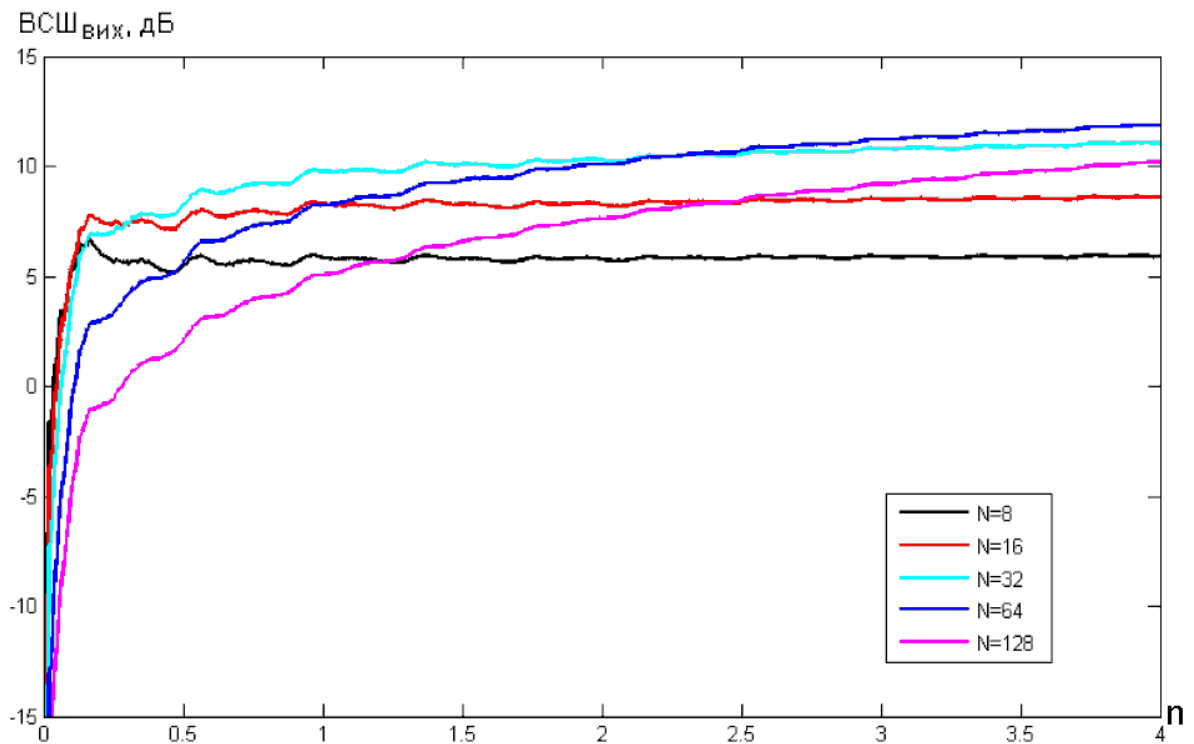


Рисунок 3.5 – Швидкість процесу адаптації в залежності від порядку фільтра N для РМНК-алгоритма

У реальних умовах (рис. 3.1) дуже складно виключити домішки корисного сигналу $x[n]$ у зразку завади $z'[n]$ (рис. 3.2), тому корисна складова може бути частково пригнічена адаптивним фільтром. Для оцінки залежності рівня просочування корисного сигналу на компенсаційний вхід від відношення сигнал/шум на виході шумопригнічувальної системи, було проведено моделювання. На рисунку 3.6 наведено залежності вихідного відношення сигнал/шум від різних значень відношення сигнал/шум на компенсаційному вході ВСШ_{зв} для НМНК-алгоритма. Тут під сигналом розуміється звуковий сигнал, а під шумом – зразок завади. Під час відсутності просочування корисного сигналу на компенсаційний вхід шумопригнічувача, результат фільтрації – найкращий. З появою і посиленням ефекту просочування (із зростанням ВСШ_{зв}) якість шумозаглушення – падає. За цього, як видно з рисунку 3.6, просочування корисного сигналу на компенсаційний вхід фільтра не впливає на швидкість

збіжності алгоритму. У результаті моделювання отримано, що цей висновок справедливий і для нерекурсивних алгоритмів.

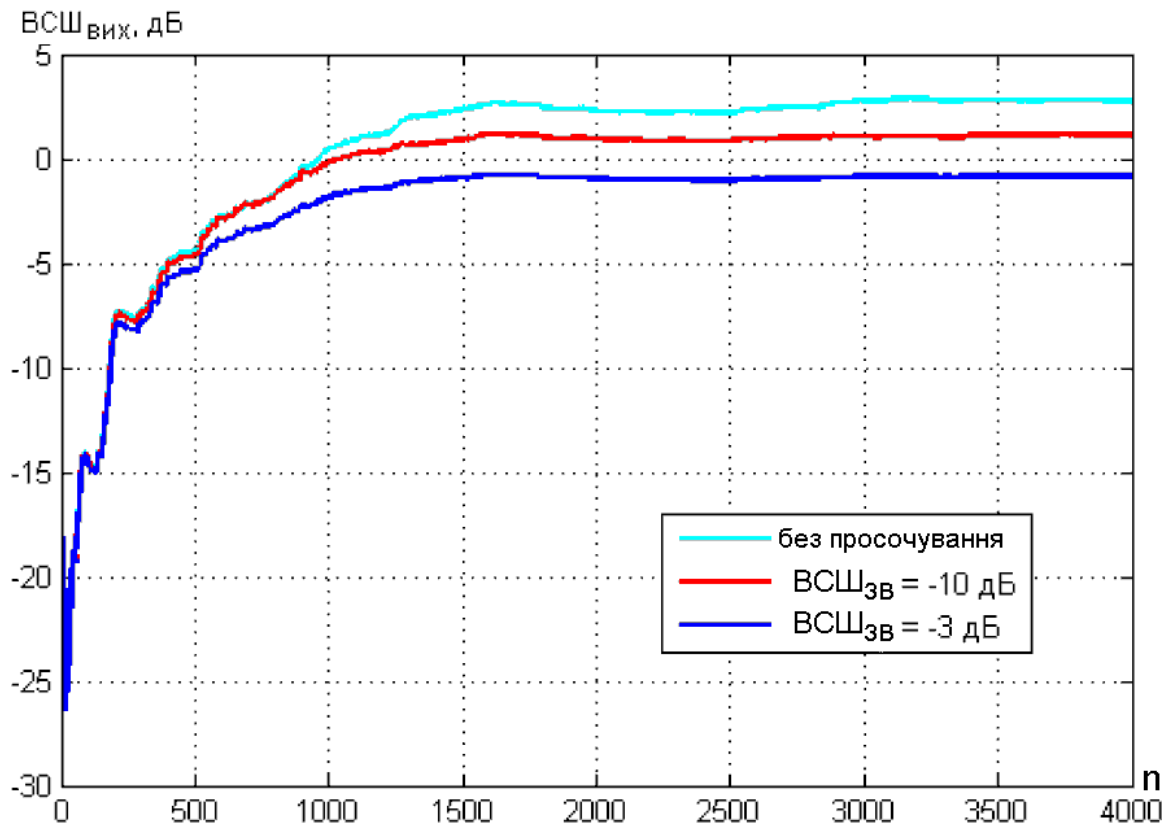


Рисунок 3.6 – Вплив рівня просочування корисного сигналу на компенсаційному вході на вихідне відношення сигнал/шум для НМНК-алгоритму

Залежність коефіцієнта кореляції від величини помилки алгоритму адаптації оцінювалася для трьох значень розміру адаптивного фільтра: 32, 64 й 128 вагових коефіцієнтів. Під помилкою алгоритму розуміється сума квадратів відхилень відфільтрованого сигналу від заданого за моделювання корисного сигналу. Корисний сигнал формувався у вигляді суми трьох синусоїд з частотами 400, 600 і 800 Гц, на яку далі накладався білий шум з амплітудою в 5 разів більшою, ніж амплітуда максимальної складової корисного сигналу. Акустичні перетворення моделювалися шляхом пропускання сформованої сигнально-шумової суміші низькочастотним

фільтром.

Результати моделювання наведено на рисунках 3.7 та 3.8. Як можна бачити з рисунку 3.7, якщо шумова складова сигналу й оцінка шуму сильно корельовані (коефіцієнт кореляції ρ більш 0,75), то РМНК-адаптація за будь-якого розміру фільтра має найменшу помилку (суму квадратів відхилень відфільтрованого від вихідного сигналу). У випадку слабкої кореляції ($\rho < 0,7$), результат налаштування РМНК-алгоритму носить випадковий характер.

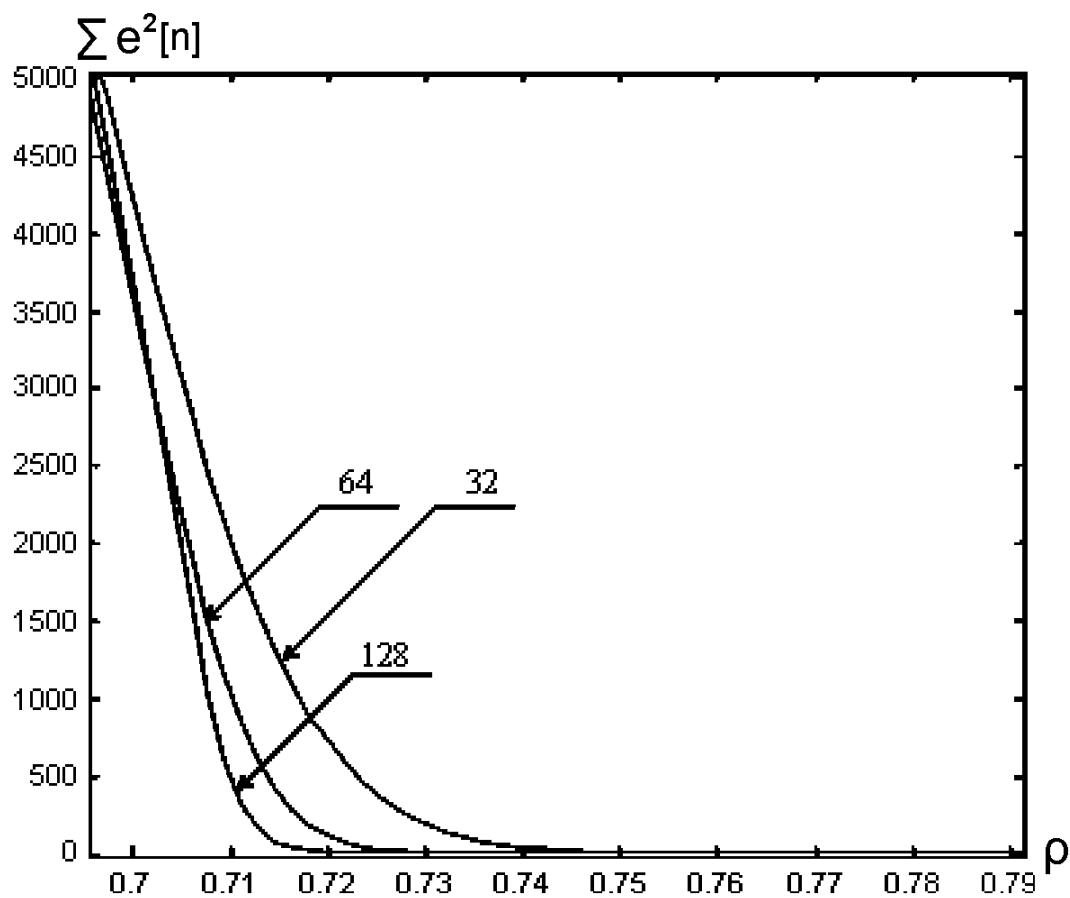


Рисунок 3.7 – Залежність помилки РМНК-алгоритма від коефіцієнта кореляції

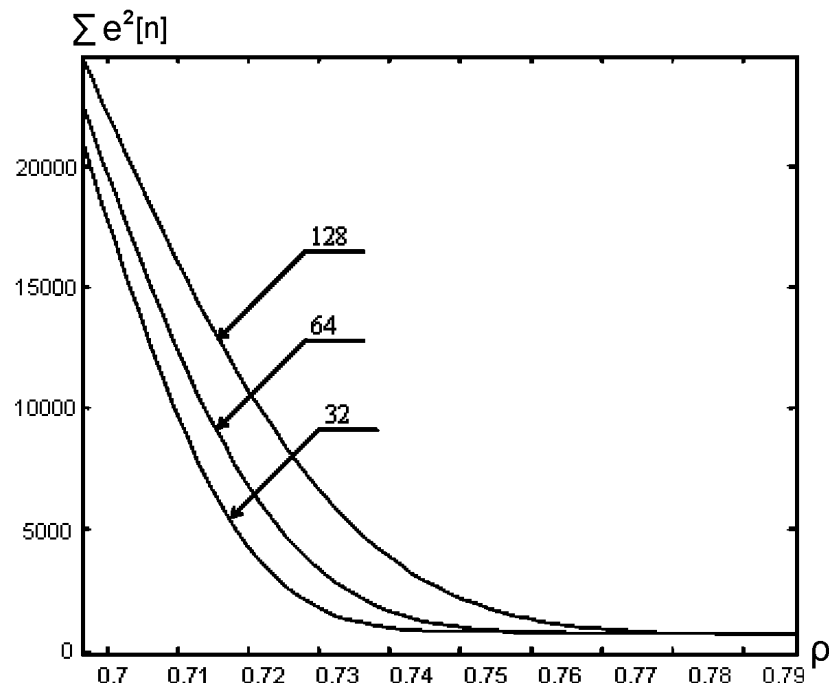


Рисунок 3.8 – Залежність помилки МНК-алгоритму від коефіцієнта кореляції

Для МНК-алгоритму спостерігаються аналогічні закономірності (рис. 3.8). Однак, помилка налаштування нерекурсивного алгоритму порівняно до рекурсивного – істотно велика. Отже, нерекурсивні алгоритми налаштування фільтра найменш придатні для шумозаглушення.

За цього, різниця в залежності точності налаштування фільтра від його порядку (кількості вагових коефіцієнтів) – не така виражена. Так, для рекурсивного алгоритму адаптації фільтра, з рисунку 3.7 видно, що несуттєве збільшенні точності налаштування (наприклад, з $\rho=0,71$ до $\rho=0,74$) досягається шляхом збільшення розміру фільтра з 32 до 128 (тобто, у 4 рази). А оскільки обчислювальна складність алгоритму фільтрації виражається залежністю N^2 , то досягнення позитивного ефекту супроводжується зниженням продуктивності в 16 разів.

Для нерекурсивного МНК-алгоритму збільшення порядку фільтра призводить тільки до збільшення помилки фільтрації (рис. 3.8).

На підставі проведених досліджень, можна зробити висновок про недоцільність застосування МНК-алгоритмів для шумозаглушення.

ВИСНОВКИ

1. Проведено порівняльний аналіз трьох алгоритмів адаптивної фільтрації методом найменшої квадратів (МНК, НМНК і РМНК) для адаптивного шумопригнічувача.
2. Алгоритми адаптації фільтра, засновані на методі найменших квадратів, здатні очистити гармонійний сигнал від шумів, але не здатні боротися з нестаціонарною завадою.
3. Алгоритм РНК має більш швидку збіжність, порівняно до МНК, що досягається за рахунок значно більш високої (порівняно до алгоритму МНК) обчислювальної складності.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

-
- 1 Уидроу Б. Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С.Д. Стирнз. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.
 - 2 Коуэн Ф.Н. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Ф.Н. Коуэн, П.М. Грант. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
 - 3 Rulph Chassaing. DSP applications using C and the TMS320C6x DSK. – New York: J. Wiley, 2002. – 335 p.
 - 4 Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы / В.И. Джиган. – М.: Техносфера, 2013. – 528 с.
 5. Haykin S. Adaptive Filter Theory, 3rd Edition, Prentice-Hall, 1996. – 630 p.
 6. Michael L. Honig and David G. Messerschmitt, Adaptive Filters – Structures, Algorithms, and Applications, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA – 1984.
 7. Glentis G.O. Efficient Least Squares Adaptive Algorithms for FIR Transversal Filtering / G.O. Glentis, K. Berberidis, S. Theodoridis. // IEEE Signal Processing Magazine. – 1999.